

アルキメデス 定理集

これはアルキメデスの著作の定義・定理などを列記したものです。原則として、証明はついていません。

引用または参照した文献は次のとおりです。

基本的には [1] によります (ラテン語訳からの重訳ですから、ギリシア語原文とはニュアンスが違ふことがあります) が、「球と円柱について 第1巻」は [4] を、「方法」は [5] を引用しました。添えられている図は原則として引用・参照本のもを載せてありますが、一部改変・省略したものもあります。

- [1] J. L. Heiberg (ed.) *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii* (3 vols.), Teubner, 1880–1881
- [2] J. L. Heiberg (Iterum Edidit), E. S. Stamatis (Corrigenda Adiecit) *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii* (4 vols.), Teubner, 1972–1975
- [3] T. L. Heath (ed.) *The Works of Archimedes*, Dover, 2002
- [4] 伊東 俊太郎 (責任編集)・佐藤 徹 (訳・訳註)「アルキメデス」, 朝日出版社, 1981 (昭和 56)
- [5] 佐藤 徹 (訳・解説)「アルキメデス方法」, 東海大学出版会 (東海大学古典叢書), 1990 (平成 2)
- [6] 田村 松平 (責任編集)「ギリシアの科学」(アルキメデス関係は三田 博雄・訳), 中央公論社 (世界の名著 9), 1972 (昭和 47)
- [7] 上垣 渉「アルキメデスを読む」, 日本評論社, 1999 (平成 11)
- [8] 中村 幸四郎・寺阪 英孝・伊東 俊太郎・池田 美恵 (訳・解説)「ユークリッド原論」, 共立出版, 1971 (昭和 46)
- [9] 斎藤 憲・他 (訳・解説)「エウクレイデス全集」(全 5 巻, 第 1 巻～第 3 巻が『原論』), 東京大学出版会, 2008– (平成 20–)
- [10] J. Torelli (recensio), *Archimedis quae supesunt omnia cum Eutocii ascalonitae commentariis*, Oxonia (Oxford), 1792
- [11] F. Peyrard (ed.), *Oeuvres d'Archimède, traduites littéralement, avec un commentaire*, François Buisson, 1807
- [12] 奥村 博・渡邊 雅之「アルベロス 3つの半円がつくる幾何宇宙」, 岩波書店 (岩波科学ライブラリー 174), 2010 (平成 22)

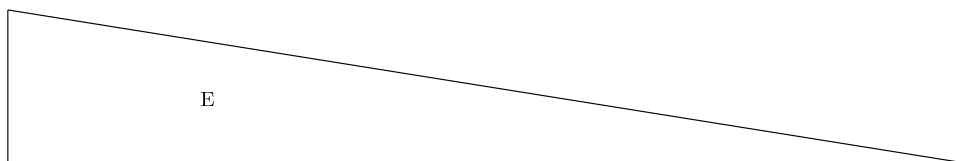
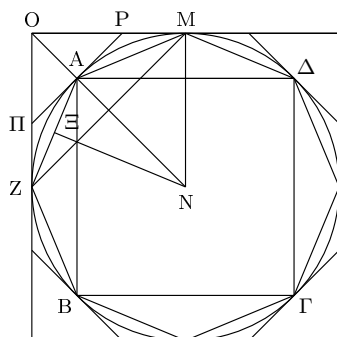
目 次

1	円の計測	3
2	放物線の求積	5
3	平板の平衡について 第1巻	17
4	平板の平衡について 第2巻	24
5	球と円柱について 第1巻	29
6	球と円柱について 第2巻	50
7	螺線について	55
8	円錐状体と球状体について	75
9	浮体について 第1巻	103
10	浮体について 第2巻	108
11	方法	117
12	補助定理集	131

円の計測
Κύκλου Μέτρησης
Dimensio Circuli

命題 1 任意の円は、もし半径が直角に隣接している辺の一方に、さらに、[円の] 周囲が底辺に等しければ、[そのような] 直角三角形に等しい。

円 $AB\Gamma\Delta$ が命題のような三角形 E に対していとせよ。私は、それ [円] はこれ [三角形] に等しい、と言う。



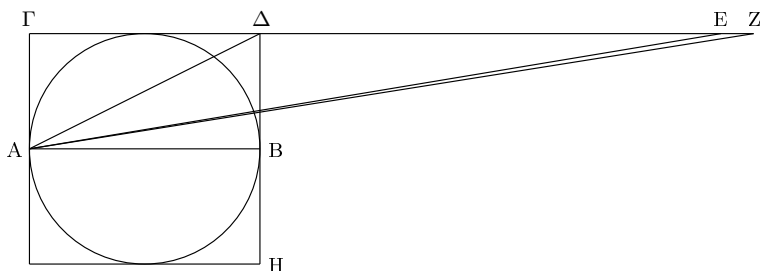
なぜならば、もし可能ならば、円の方がより大きいとして、正方形 $AB\Gamma\Delta$ が内接されるとし、そして、[円の] 周囲が [次々に] 2つの等しい部分に分割されるとし、直線 BZ , ZA , AM , $M\Delta$, などが引かれるとし、そして、いま、[それらの直線と円弧で囲まれた] 諸切片 [の和] が、円が三角形を超える空間より小さくなるとせよ。それゆえ、[円に内接された] 直線図形も三角形より大きい。中心が N であると仮定されるとし、[ZA に] 垂直な [直線] NE [が引かれるとせよ]。それゆえ、 NE は三角形の [一方の] 辺より小さい。しかしまた、直線図形の周囲は、円の周囲より小さいから、もう一方の辺よりも小さい。それゆえ、直線図形は三角形 E より小さい。これは不可能である。

さらに、もし可能ならば、円が三角形 E より小さいとせよ。そして、正方形が外接されるとし、そして、[円の] 周囲が [次々に] 2つの等しい部分に切断されるとし、切断した点を通して [円に] 接している直線が引かれるとせよ。それゆえ、角 OAP は直角である [ユークリッド第3巻命題 18]。それゆえ、 $OP > MP$ である。なぜならば、 $MP = PA$ だから。それゆえ、 $PO\Pi > \frac{1}{2}OZAM$ である。それゆえ、三角形 E が円 $AB\Gamma\Delta$ を超える空間より小さい、切片 ΠZA に相似な諸切片が残される。それゆえ、[円に] 外接された直線図形も三角形 E より小さい。これは不可能である。なぜならば、 NA は三角形の高さに等しく、[外接図形の] 周囲は三角形の底辺より大きいから、[外接図形の方が] 大きいから。

それゆえ、円は三角形 E に等しい。

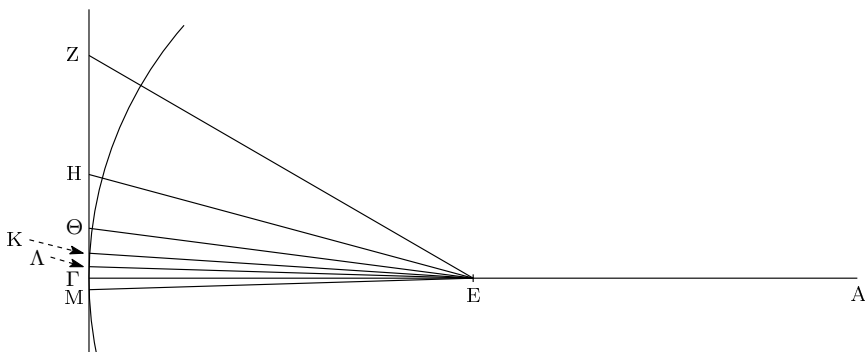
命題 2 円は直径の平方に対して 11 : 14 の比を持つ。

円があるとして、その直径を AB とし、[その円に] 正方形 $AB\Gamma\Delta$ が外接されるとし、そして、 $\Delta E = 2\Gamma\Delta$, $EZ = \frac{1}{7}\Gamma\Delta$ とせよ。

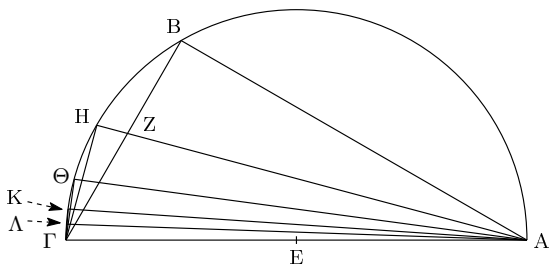


命題 3 任意の球 [円] の周囲はその直径の 3 倍より大きく、そしてそのうえ、直径の 7 分の 1 よりは小さく、さらに、 $\frac{10}{71}$ よりは大きい空間だけ超過する。

円があるとして、その直径が AG 、中心が E であるとし、そして、直線 GAZ が円に接し、角 ZEG が直角の 3 分の 1 であるとせよ。それゆえ、 $EZ : ZG = 306 : 153$ であるが、 $EG : GZ > 265 : 153$ である。



円があるとして、その直径を AG とし、角 BAG が直角の 3 分の 1 であるとせよ。それゆえ、 $AB : BG < 1351 : 780$ である。



$3 \frac{10}{71} [= 3.1408450704 \dots] < \pi [= 3.1415926535 \dots] < 3 \frac{1}{7} [= 3.1428571428 \dots]$ ということ。

なお、 $\sqrt{3} [= 1.7320508075 \dots] > \frac{265}{153} [= 1.7320261437 \dots]$

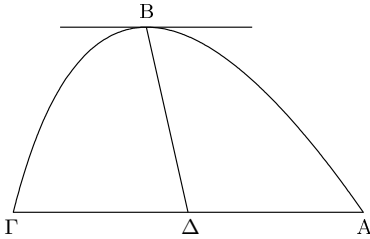
$\sqrt{3} < \frac{1351}{780} [= 1.7320512820 \dots]$

放物線の求積

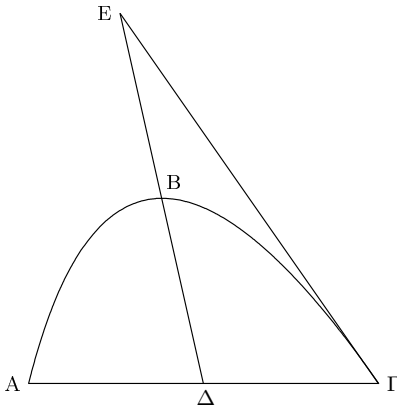
Τετραγωνισμὸς Παραβολῆς

Quadratura Parabolae

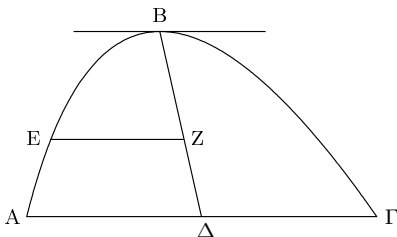
命題 1 もし直角円錐切断 [放物線] が与えられ, それが $AB\Gamma$ であり, そして, 直線 $B\Delta$ が直径に平行であるかまたは直径そのものであり, さらに, [直線] $A\Gamma$ が点 B で [直角] 円錐切断に接している直線に平行であるならば, $A\Delta = \Delta\Gamma$ であろう。そして [逆に], もし $A\Delta = \Delta\Gamma$ であるならば, 直線 $A\Gamma$ は B において [直角] 円錐切断に接している直線に平行であろう。



命題 2 もし $AB\Gamma$ が直角円錐切断 [放物線] であり, 直線 $B\Delta$ が直径に平行であるかまたは直径そのものであり, 直線 $A\Delta\Gamma$ が B において [直角] 円錐切断に接している直線に平行であり, 直線 $E\Gamma$ が点 Γ において [直角円錐] 切断に接するならば, $B\Delta = BE$ であろう。

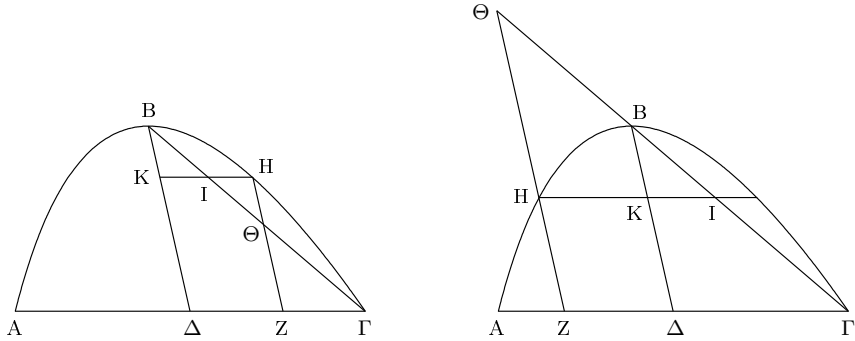


命題 3 もし $AB\Gamma$ が直角円錐切断 [放物線] であり, 直線 $B\Delta$ が直径に平行であるかまたは直径そのものであり, そして, B において [直角] 円錐切断に接している直線に平行な直線 $A\Delta$, EZ が引かれるならば, $B\Delta : BZ = A\Delta^2 : EZ^2$ であろう。

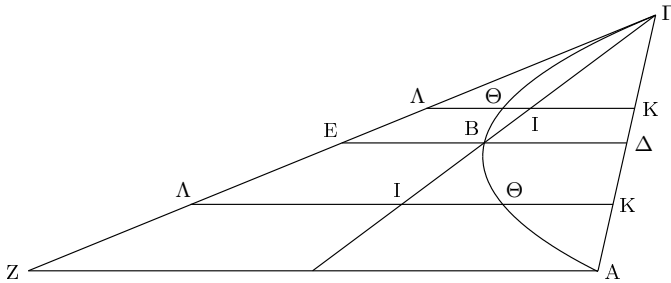


命題 4 $AB\Gamma$ が直線と直角円錐切断 [放物線] とで囲まれた切片であるとし, 直線 $A\Gamma$ の中点から直径に平行であるかまたは直径そのものである直線が引かれ, 直線 $B\Gamma$ が引かれ, そして, 延

長されるとせよ。それゆえ、もし直線 $B\Delta$ に平行な別の直線 $Z\Theta$ が、 B, Γ を通って引かれた直線を切断するように、引かれるならば、 $Z\Theta : \Theta H = \Delta A : \Delta Z$ であろう。

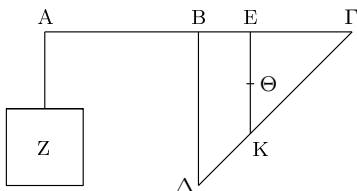


命題 5 $AB\Gamma$ が直線と直角円錐切断 [放物線] とで囲まれた切片であるとし、点 A から直径に平行な直線 ZA が、そして、 Γ から点 Γ において [直角] 円錐切断に接している直線 ΓZ が引かれるとせよ。いま、もし三角形 $ZA\Gamma$ において直線 AZ に平行な別の直線が引かれるならば、引かれた直線は直角円錐切断によって、そして、 $A\Gamma$ は引かれた直線によって、同じ比に切断されるであろう。そして、直線 $A\Gamma$ の A の方におかれた部分 [の割合] は引かれた直線の A の方におかれた部分 [の割合] に一致するであろう。

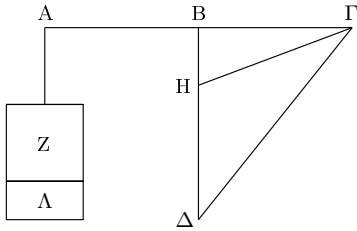


上の図で、点 B は放物線の頂点、点 Δ は底辺 $A\Gamma$ の中点、直線 ΓZ は点 Γ における放物線の接線、 $AZ \parallel \Delta B$ である。このとき、 $KA \parallel AZ$ である直線 KA を引くと、 $K\Theta : \Theta\Lambda = AK : K\Gamma$ となるということ。

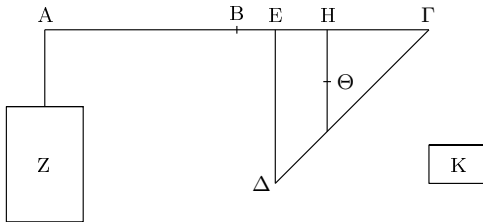
命題 6 いま、目の前に、水平線に対して垂直である平面が考えられるとし、[それと] 同じ側に、そこにおいて点 Δ は下方にあり、[平面の] 反対 [の側] は上方にある、直線 AB があって考えられるとせよ。そして、 $B\Delta\Gamma$ は、 B におかれた角を直角とし、天秤の [横木の] 半分 [の長さ] に等しい辺 $B\Gamma$ を持っている、直角三角形であるとせよ。さらに、[この] 三角形が点 B, Γ から吊るされ、天秤の [横木の] 反対の側には別の空間 Z が点 A から吊るされるとし、そして、 A から吊るされた空間 Z は、いま置かれているままで、三角形 $B\Delta\Gamma$ と平衡を保っているとせよ。それゆえ、私は、空間 Z は三角形 $B\Delta\Gamma$ の 3 分の 1 である、と言う。



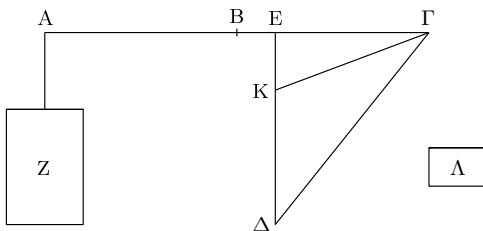
命題7 再び、直線 AG が、その中点が B であり、 B から吊るされるとする、天秤 [の横木] であるとせよ。さらに、 $\Gamma\Delta H$ が、底辺として直線 ΔH を、高さとして天秤の [横木の] 半分に等しい直線を持っている、鈍角三角形であるとせよ。そして、三角形 $\Delta\Gamma H$ が点 B 、 Γ から吊るされ、さらに、 A から吊るされた空間 Z が、いま置かれているままで、三角形 $\Gamma\Delta H$ と平衡を保っているとせよ。すると私たちは、[上と] 同じように、空間 Z は三角形 $\Gamma\Delta H$ の 3 分の 1 であることを証明するであろう。



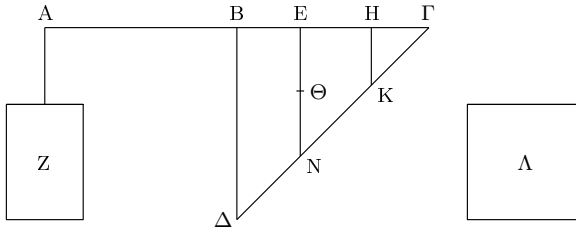
命題8 天秤 [の横木] が AG であるとし、その中点が点 B で、点 B から吊るされるとし、さらに、 $\Gamma\Delta E$ が、 E におかれた角が直角で、[その] 天秤において点 Γ 、 E から吊るされる、直角三角形であるとし、そして、空間 Z が A から吊るされるとし、それは、いま置かれているままで、 $\Gamma\Delta E$ と平衡を保っているとせよ。そして、 $AB : BE = \Gamma\Delta E : K$ であるとせよ。それゆえ私は、空間 Z は三角形 $\Gamma\Delta E$ より小さく、空間 K より大きい、と言う。



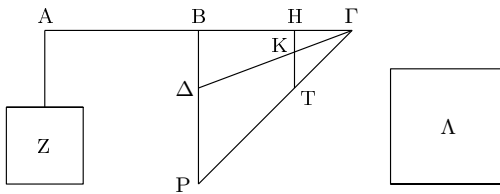
命題9 再び、 AG を天秤 [の横木]、点 B をその中点とし、鈍角三角形 $\Gamma\Delta K$ が底辺として ΔK 、高さとして $E\Gamma$ を持っており、[それは] 天秤 [の横木] において Γ 、 E から吊るされるとせよ。さらに、空間 Z が A から吊るされ、それは、いま置かれているままで、三角形 $\Delta\Gamma K$ と平衡を保っているとせよ。そして、 $\Gamma\Delta K : \Lambda = AB : BE$ であるとせよ。それゆえ私は、空間 Z は空間 Λ より大きく、三角形 $\Delta\Gamma K$ より小さい、と言う。



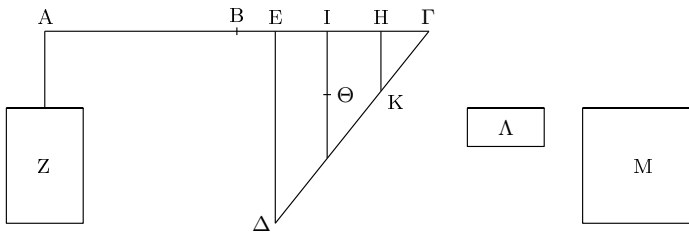
命題10 再び、 AG を天秤 [の横木]、点 B をその中点とし、 $B\Delta HK$ を、点 B 、 H におかれた角が直角であり、辺 $K\Delta$ が Γ の方に傾いている、台形とせよ。そして、 $B\Delta KH : \Lambda = BA : BH$ であるとし、台形 $B\Delta HK$ が点 B 、 H から天秤に吊るされ、そしてまた、空間 Z が A から吊るされ、それは、いま置かれているままで、台形 $B\Delta KH$ と平衡を保っているとせよ。私は、空間 Z は空間 Λ より小さい、と言う。



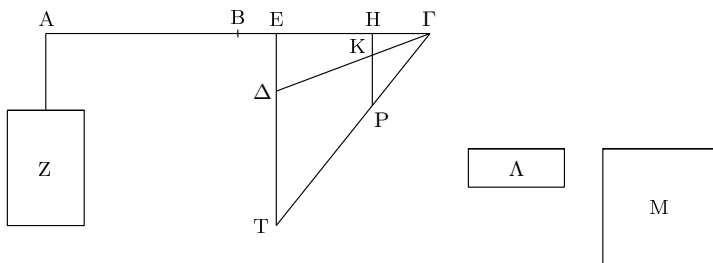
命題 11 再び, AG を天秤 [の横木], 点 B をその中点とし, $K\Delta TP$ を, 辺 $K\Delta$, TP が点 Γ の方に傾いていて, さらに, 辺 ΔP , KT が $B\Gamma$ に対して垂直で, ΔP が B に落ちている, 台形であるとせよ。そのうえ, $AB : BH = \Delta KTP : \Lambda$ であるとし, 台形 ΔKTP は天秤に B, H から, そして, Z は A から, 吊るされ, そして, 空間 Z は, いま置かれているままで, 台形 ΔKTP と平衡を保っているとせよ。それゆえ, 前の命題におけるのと同様に, $Z < \Lambda$ であることが証明されるであろう。



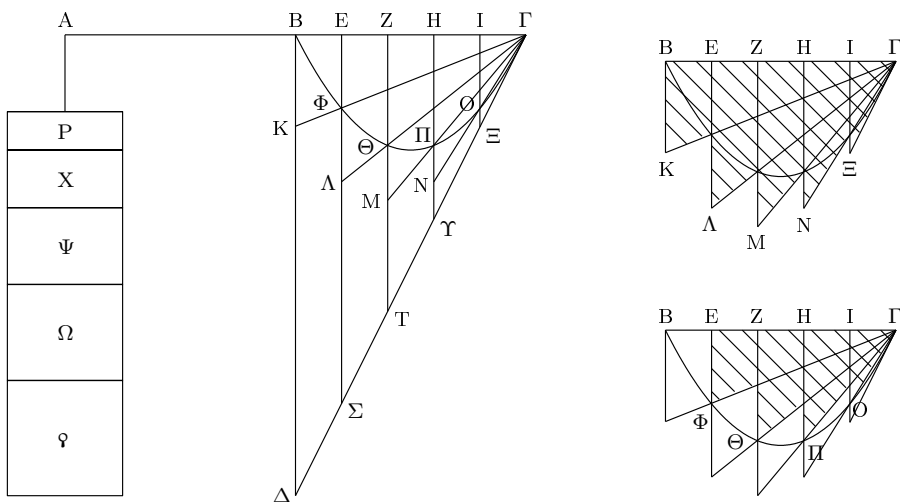
命題 12 再び, AG を天秤 [の横木], 点 B をその中点とし, ΔEKH を, 点 E, H におかれた角が直角で, 直線 $K\Delta$, EH が点 Γ の方に傾いている, 台形であるとせよ。そして, $AB : BH = \Delta KEH : M$ で, $AB : BE = \Delta KEH : \Lambda$ であるとし, 台形 ΔKEH が天秤に点 E, H から吊るされ, さらに, 空間 Z が A から吊るされるとし, そして, それは, いま置かれているままで, 台形と平衡を保っているとせよ。それゆえ私は, $M > Z > \Lambda$ である, という。



命題 13 再び, AG を天秤 [の横木], その中央に位置する点を B とし, $K\Delta TP$ を, 辺 $K\Delta$, TP が Γ の方に傾いていて, さらに, 辺 ΔT , KP が $B\Gamma$ に対して垂直であるような, 台形であるとせよ。さらに, それは天秤に点 E, H から吊るされ, そして, 空間 Z が A から吊るされるとし, それは, いま置かれているままで, 台形 ΔKTP と平衡を保っているとせよ。それゆえ, 上と同様に, $M > Z > \Lambda$ であることが証明されるであろう。



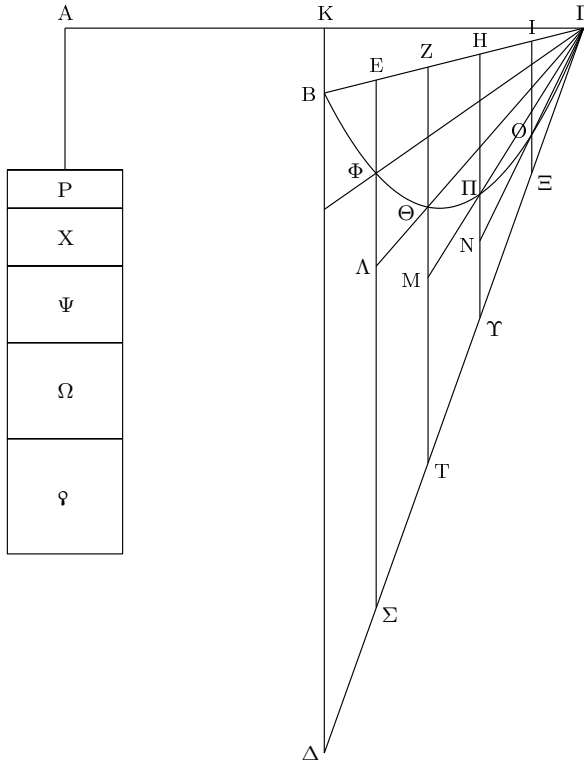
命題 14 $B\Theta\Gamma$ を直線と直角円錐切斷〔放物線〕とで囲まれた切片とせよ。それゆえはじめに、 $B\Gamma$ が直径に対して垂直であるとし、点 B から直径に平行な直線 $B\Delta$ が、 Γ から点 Γ において〔直角〕円錐切斷に接している直線 $\Gamma\Delta$ が、引かれるとせよ。それゆえ、 $B\Gamma\Delta$ は直角三角形であろう。さらに、 $B\Gamma$ が任意個数の等しい部分 $BE, EZ, ZH, HI, I\Gamma$ に分割されるとし、分割された点から直径に平行な〔直線〕 $E\Sigma, ZT, HY, I\Xi$ が引かれるとし、そして、そこにおいてその〔直角〕円錐切斷を切斷する、点から Γ の方に直線が引かれ、そして、延長されるとせよ。それゆえ私は、三角形 $B\Delta\Gamma$ は数多くの台形 $KE, \Lambda Z, MH, NI$ と三角形 $\Xi I\Gamma$ との〔和の〕3 倍よりは小さく、さらに、数多くの台形 $Z\Phi, H\Theta, III$ と三角形 $IO\Gamma$ との〔和の〕3 倍よりは大きい、と言う。



なぜならば、直線 $AB\Gamma$ が引かれて、等しい直線 $AB, B\Gamma$ に分けられるとし、そして、 $A\Gamma$ が天秤〔の横木〕であり、その中点が点 B で、 B において吊るされるとせよ。さらにまた、 $B\Delta\Gamma$ が天秤に点 B, Γ から吊るされ、そして、天秤の反対の側には点 A から空間 $P, X, \Psi, \Omega, \varphi$ が吊るされるとせよ。そして、空間 P はそのままて台形 ΔE と、さらに、 X は台形 $Z\Sigma$ と、さらに、 Ψ は台形 TH と、さらに、 Ω は台形 ΥI と、そして、 φ は三角形 $\Xi I\Gamma$ と、平衡を保つとせよ。それゆえまた、全体は全体と平衡を保つであろう。それゆえ、三角形 $B\Delta\Gamma$ は大きい空間 $P + X + \Psi + \Omega + \varphi$ の3 倍〔と等しい〕であろう〔命題 6〕。そして、 $B\Gamma\Theta$ は直線と直角円錐切斷〔放物線〕とで囲まれた切片であり、 B から直径に平行な直線 $B\Delta$ が、さらに、点 Γ から Γ において円錐切斷に接している直線 $\Gamma\Delta$ が引かれ、そして、直径に平行な別の任意の直線 ΣE が引かれるから、 $B\Gamma : BE = \Sigma E : E\Phi$ であろう〔命題 5〕。それゆえまた、 $BA : BE = \Delta E : KE$ である。そして、同様に、 $AB : BZ = \Sigma Z : \Lambda Z$ 、および、 $AB : BH = TH : MH$ 、および、 $AB : BI = \Upsilon I : NI$ が証明されるであろう。いま、 ΔE は点 B, E におかれた角が直角で、辺が Γ の方に傾いている台形であり、天秤に A から吊るされたある空間 Z は、いま置かれているままで、それと平衡を保っており、 $BA : BE = \Delta E : KE$ であるから、 $KE > P$ であろう。なぜならば、これは証明されているから〔命題 10〕。さらに再び、 $Z\Sigma$ もまた Z, E におかれた

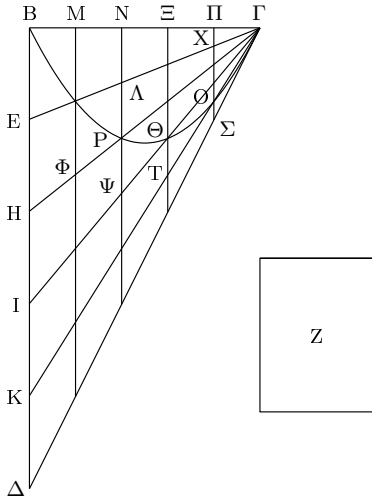
角が直角で、辺 ΣT が Γ の方に傾いている台形であり、そして、その台形と A から吊るされた空間 X は、いま置かれているままで、平衡を保っていて、 $BA : BE = Z\Sigma : Z\Phi$ であり、 $AB : BZ = Z\Sigma : \Lambda Z$ である。それゆえ、 $\Lambda Z > X > Z\Phi$ であろう。なぜならば、同様に、これは証明されているから [命題 12]。それゆえ、同じ理由によって、 $MH > \Psi > \Theta H$ 、 $NOIH > \Omega > \Pi I$ であろう。そしてまた、同様に、 $\Xi I > \varphi > \Gamma O$ である [命題 8]。いま、 $KE > P$ 、 $\Lambda Z > X$ 、 $MH > \Psi$ 、 $NI > \Omega$ 、 $\Xi I > \varphi$ であるから、それらの空間全体は空間 $P + X + \Psi + \Omega + \varphi$ より大きいことは明らかである。しかし、 $P + X + \Psi + \Omega + \varphi = \frac{1}{3} B\Gamma\Delta$ である [命題 6]。それゆえ、 $B\Gamma\Delta < 3(KE + \Lambda Z + MH + NI + \Xi I)$ ということになる。再び、 $Z\Phi < X$ 、 $\Theta H < \Psi$ 、 $\Pi I < \Omega$ 、 $IO\Gamma < \varphi$ であるから、それらの空間全体は空間 $\varphi + \Omega + \Psi + X$ より小さいことは明らかである。それゆえまた、三角形 $B\Delta\Gamma$ は数多くの台形 ΦZ 、 ΘH 、 ΠI と三角形 $I\Gamma O$ と [の和] の 3 倍よりは大きく、さらに、上で言及された数多くの空間の 3 倍よりは小さいことは明らかである。

命題 15 再び、 $B\Theta\Gamma$ を直線と直角円錐切断 [放物線] とで囲まれた切片とし、 $B\Gamma$ は直径に対して垂直ではないとせよ。それゆえ、点 B から直径に平行に、切片があるのと同じ側に、引かれた直線を、あるいは、 Γ から引かれた直線を、直線 $B\Gamma$ と鈍角 [をなすように] にしなければならない。それゆえ、鈍角になっている直線は B の方のそれであるとせよ。そして、点 B から直径に平行な $B\Delta$ が、 Γ から Γ において [直角] 円錐切断に接している直線 $\Gamma\Delta$ が引かれるとせよ。そして、直線 $B\Gamma$ が任意個数の等しい部分 BE 、 EZ 、 ZH 、 HI 、 $I\Gamma$ に分割されるとし、点 E 、 Z 、 H 、 I から直径に平行な [直線] $E\Sigma$ 、 ZT 、 $H\Upsilon$ 、 $I\Xi$ が引かれるとし、そして、そこにおいてその [直角] 円錐切断を切断する、点から Γ の方に直線が引かれ、そして、延長されるとせよ。それゆえ私は、同様に、 $3(B\Phi + \Lambda Z + MH + NI + \Gamma I\Xi) > B\Delta\Gamma > 3(Z\Phi + H\Theta + \Pi I + \Gamma OI)$ である、と言う。



命題 16 再び、 $B\Theta\Gamma$ を直線と直角円錐切断 [放物線] とで囲まれた切片とし、 B を通って直径に平行な $B\Delta$ が、点 Γ から Γ において [直角] 円錐切断に接している直線 $\Gamma\Delta$ が、引かれるとせ

よ。そして、空間 Z が三角形 BΔΓ の 3 分の 1 であるとせよ。それゆえ私は、切片 BΘΓ は空間 Z に等しい、と言う。

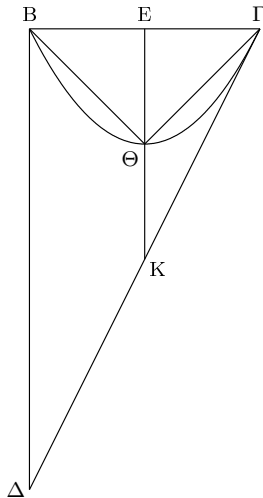


なぜならば、もし等しくないならば、より大きいかまたはより小さいかである。それゆえ、はじめに、もし可能ならば、より大きいとせよ。それゆえ、切片 BΓΘ が空間 Z を超える超過分は、それに自分自身が [何回か] 加えられると三角形 BΓΔ より大きいであろう。そして、ある空間が超過分より小さいように仮定することができ、それが三角形 BΔΓ の部分であるとせよ。それゆえ、三角形 BΓE がその超過分より小さく、そして、三角形 BΔΓ の部分であるとせよ。さらに、同様に、直線 BE は直線 BΔ の部分であろう。それゆえ、直線 BΔ が直線 BE に等しい部分に分割されるとし、分割点が H, I, K であるとせよ。そして、点 H, I, K から点 Γ の方に直線が引かれるとせよ。それゆえ、直線 ΓΔ は点 Γ において [直角] 円錐切断に接するから、それら [の引かれた直線] は [直角] 円錐切断を切断する。そして、そこにおいてそれらの直線が [直角円錐] 切断を切断する、点を通して、直径に平行な直線 MΦ, NP, ΞΘ, ΠO が引かれるとせよ。それゆえまた、それらは直線 BΔ に平行であろう。いま、[上で仮定されたことから、] BΓE < BΘΓ - Z であるから、Z + BΓE < BΘΓ であることは明らかである。さらに、三角形 BΓE は、それらを通して [直角] 円錐切断が引かれている、台形 ME, ΦΛ, ΘP, ΘO と三角形 ΓOΣ と [の和] に等しい。なぜならば、台形 ME は共通であり、そして、MΛ = ΦΛ, ΛΞ = ΘP, XΞ = OΘ, そして、ΓXΠ = ΓOΣ であるから。それゆえ、Z < MΛ + ΞP + ΠΘ + ΠOΓ であろう。そして、BΔΓ = 3Z である。それゆえ、BΔΓ < 3(MΛ + PΞ + ΘΠ + ΠOΓ) であろう。しかし、これは不可能である。なぜならば、それ [三角形 BΔΓ] は数多く [の台形の和] の 3 倍より大きいことが証明されているから [命題 14-15]。それゆえ、切片 BΘΓ は空間 Z より大きくはない。

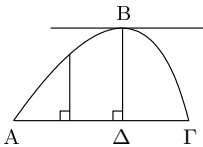
それゆえ私は、それは小さくさえない、と言う。なぜならば、もし可能ならば、より小さいとせよ。それゆえ再び、空間 Z が切片 BΘΓ を超える超過分は、それに自分自身が [何回か] 加えられると三角形 BΔΓ を超えるであろう。そして、[ある] 空間が超過分より小さいように仮定することができ、それが三角形 BΔΓ の部分であるとせよ。それゆえ、三角形 BΓE が超過分より小さく、そして、三角形 BΔΓ の部分であるとし、そして、その他は上と同様に定められるとせよ。それゆえ、三角形 BΓE は、空間 Z が切片 BΘΓ を超える、超過分より小さいから、三角形 BEΓ と切片 BΘΓ が一緒にとられたものは空間 Z より小さい。しかし、Z < EM + ΦN + ΨΞ + ΠT + ΓΠΣ でもある。なぜならば、先の命題において証明されているように、BΔΓ = 3Z だが、BΔΓ < 3(EM + ΦN + ΨΞ + ΠT + ΓΠΣ) であるから。それゆえ、BΓE + BΘΓ < EM + ΦN + ΨΞ + ΠT + ΓΠΣ である。それゆえ、切片に共通であるものが取り去られると、三角形 BΓE は残りの空間より小さいであろう。しかし、これは不可能である。なぜならば、三角形 BEΓ は、残りの空間より大きい、EM + ΦΛ + ΘP + ΘO + ΓOΣ に等しいことが証明されているから。それゆえ、切片 BΘΓ は空間 Z より小さくはない。

そして、それは大きくさえないことが証明されている。それゆえ、切片は空間 Z に等しい。

命題 17 このことが証明されると、直線と直角円錐切斷 [放物線] とで囲まれた任意の切片は、その切片と同じ底面および等しい高さを持っている三角形よりその 3 分の 1 だけ大きい、ことは明らかである。

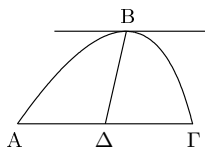


定義 直線と任意の曲線とで囲まれた切片におけるその直線を [切片の] 底辺と、さらに、曲線から底辺に対して垂直に引かれた直線のうちで最大の直線を高さとし、さらに、そこから最大の垂線が引かれる [曲線上の] 点を頂点とし、私は呼ぶ。

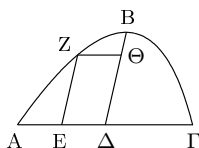


左図で、 $AB\Gamma$ は直線と任意の曲線とで囲まれた切片。このとき、直線 $A\Gamma$ が底辺、底辺からの最大の垂線 $B\Delta$ が高さ、最大の垂線を下すことができる点 B が頂点である。

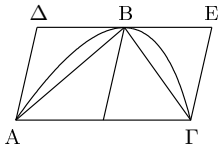
命題 18 もし直線と直角円錐切斷 [放物線] とで囲まれた切片において、底辺の midpoint から直径に平行な直線が引かれるならば、そこにおいて直径に平行な直線が切片を切斷する点が切片の頂点であろう。



命題 19 直線と直角円錐切斷 [放物線] とで囲まれた切片において、底辺の midpoint から直径に平行に引かれた直線は、長さにおいて、底辺の半分の midpoint から同じように [直径に平行に] 引かれた直線よりその 3 分の 1 だけ大きい。

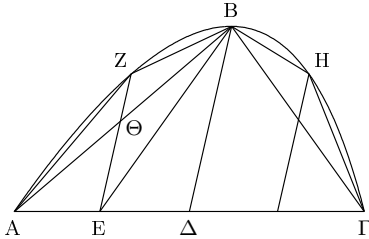


命題 20 もし直線と直角円錐切断〔放物線〕とで囲まれた切片に、その切片と同じ底辺と同じ高さを持っている、三角形が内接されるならば、内接された三角形は切片の半分よりは大きいであろう。

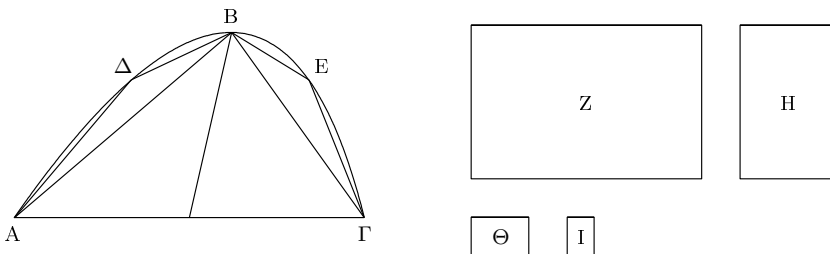


系 このことが証明されると、残りの切片が任意に与えられた空間より小さくなるように、〔元の〕切片に多角形が内接されるようにすることができることは明らかである。

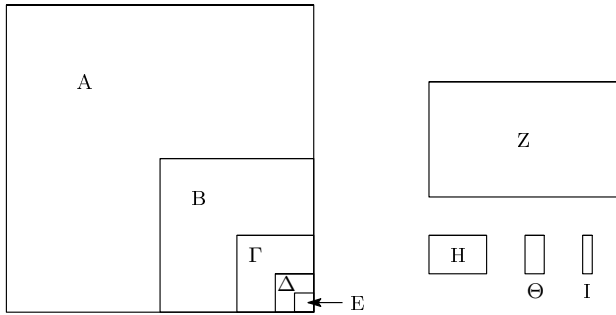
命題 21 もし直線と直角円錐切断〔放物線〕とで囲まれた切片に、その切片と同じ底辺と同じ高さを持っている、三角形が内接され、そしてまた、残りの切片に、その切片と同じ底辺と同じ高さを持っている、第 2 の三角形が内接されるならば、切片全体〔元の切片〕に内接された三角形は残りの切片に内接されたいずれかの三角形の 8 倍であろう。



命題 22 もし直線と直角円錐切断〔放物線〕とで囲まれた切片が与えられ、そして、次々と 4 倍の比にある、任意個数の空間が定められ、そして、最大の空間が、切片と同じ底辺と同じ高さを持っている、三角形に等しいならば、すべての空間が一緒になったものは切片より小さいであろう。



命題 23 もし、次々と 4 倍の比にある、いくつかの量が定められるならば、すべての量と、さらに、最小のものの 3 分の 1 が一緒にとられたものは最大のものよりその 3 分の 1 だけ大きいであろう。



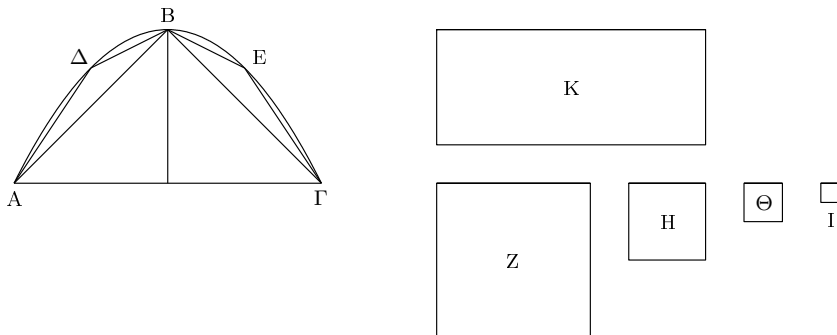
初項が a 、公比が 4 の等比数列 $a, 4a, 4^2a, \dots, 4^{n-1}a$ について、

$$\sum_{k=0}^{n-1} 4^k a + \frac{1}{3} a = \frac{4}{3} (4^{n-1} a) = \frac{4^n}{3} a$$

ということ。

命題 24 直線と直角円錐切断 [放物線] とで囲まれた任意の切片はその切片と同じ底辺、および、等しい高さを持っている三角形よりその 3 分の 1 だけ大きい。

なぜならば、 $A\Delta BE\Gamma$ が直線と直角円錐切断 [放物線] とで囲まれた切片であるとし、 $AB\Gamma$ がその切片と同じ底面および等しい高さをもっている三角形であるとし、そして、 $K = \frac{4}{3} AB\Gamma$ であるとせよ。 $K = A\Delta BE\Gamma$ であることが証明されなければならない。



なぜならば、もし等しくないならば、より大きいかまたはより小さいかである。

はじめに、もし可能ならば、切片 $A\Delta BE\Gamma$ が空間 K より大きいとせよ。それゆえ、三角形 $A\Delta B$, $BE\Gamma$ を、述べられたように、内接させた [とせよ]。そして、さらに、残りの切片にその切片と同じ底辺および同じ高さをもっている第 2 の三角形を内接させ、そして、つねに、続いて生じた切片にその切片と同じ底辺および同じ高さをもっている三角形を内接させた [とせよ]。それゆえ、いつかは、残りの切片が、切片 $A\Delta BE\Gamma$ が空間 K を超える、超過分より小さくなるであろう。それゆえ、内接された多角形は空間 K より大きいであろう。しかし、これは不可能である。なぜならば、次々とおかれた空間 [内接三角形] は 4 倍の比にあって、はじめの三角形 $AB\Gamma$ は三角形 $A\Delta B$, $BE\Gamma$ の 4 倍の大きさであり [命題 21]、これらは続いて切片に内接された三角形の 4 倍の大きさであり、つねに同じ仕方であるから、同時に [とられた] すべての空間は最大のものよりその 3 分の 1 だけ大きいものより小さい [命題 23]。しかし、空間 K は最大の空間よりその 3 分の 1 だけ大きい。それゆえ、切片 $A\Delta BE\Gamma$ は空間 K より大きくはない。

さらに、もし可能ならば、小さいとせよ。それゆえ、 $AB\Gamma = Z$, $H = \frac{1}{4} Z$, $\Theta = \frac{1}{4} H$ とおかれるとし、続いて、最後の空間が、空間 K が切片を超える、超過分より小さくなるまで、空間がおかれるとし、[この超過分より] 小さいのが I であるとせよ。それゆえ、 $Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3} I = \frac{4}{3} Z$ である

[命題 23]。しかし、 $K = \frac{4}{3}Z$ でもある。それゆえ、 $K = Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3}I$ である。いま、空間 K が空間 Z, H, Θ, I [の和] を超える空間 [超過分] は I より小さく、切片 [を超える超過分] は I より大きいから、空間 Z, H, Θ, I [の和] は切片より大きいことは明らかである。しかし、これは不可能である。なぜならば、もし任意個数の空間が次々と 4 倍の比で与えられ、最大のものが切片に内接された三角形に等しいとするならば、同時に [とられた] すべての空間は切片より小さいであろうことが証明されているから [命題 22]。それゆえ、切片 $A\Delta BE\Gamma$ は空間 K より小さくはない。それが大きくはないことは、確かに、証明されている。それゆえ、それ [切片] は空間 K に等しい。しかし、空間 K は三角形 $AB\Gamma$ よりその 3 分の 1 だけ大きい。それゆえまた、切片 $A\Delta BE\Gamma$ は三角形 $AB\Gamma$ よりその 3 分の 1 だけ大きい。

平板の平衡について、あるいは、平板の重心について 第1巻

Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων

De Planorum Aequilibriis sive De Centris Gravitatis Planorum

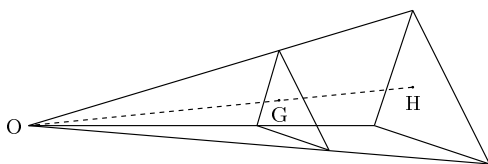
要請1 等しい長さに吊るされた等しい重りは釣り合いを保つこと。しかし、不等な長さに吊るされた等しい重りは釣り合いを保たず、大きい長さに吊るされた重りの方に傾くこと。

要請2 もし、何らかの長さに吊るされて釣り合いを保っている重りにおいて、その一方に何らかのものが加えられるならば、釣り合いを保たず、何らかのものが加えられた重りの方に傾くこと。

要請3 同じように、もし一方から何らかのものが取り去られるならば、それは釣り合いを保たず、取り去られていない重りの方に傾くこと。

要請4 等しくしかも相似な平面図形が一致しているとき、それらの重心もまた一致する。

要請5 さらに、不等だが相似である図形の重心は相似な位置にあるであろう。ところで、それらから等しい角で[相似の中心に]直線が引かれるとき、[それらの直線が]互に対応している辺と等しい角をつくるような点を相似な図形において相似な位置にあるという。



要請6 もし何らかの長さに吊るされた量が平衡を保つならば、それらに等しい量もまたそれらに等しい長さにおいて平衡を保つであろう。

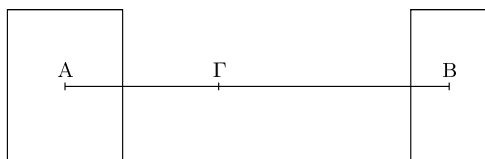
要請7 その周囲が同じ方向にくぼんでいる任意の図形においては、重心は図形の内部になければならない。

命題1 等しい長さに吊るされて平衡を保つ重りは等しい。

命題2 等しい長さに吊るされた不等な重りは平衡を保たないで、より大きい[重りの]方へ傾くであろう。

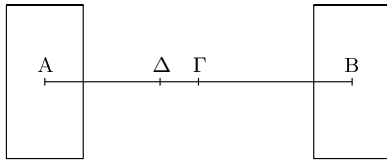
命題3 不等な重りは不等な長さで平衡を保つであろうし、そして、大きい方[の重り]は小さい長さの方に吊るされるであろう。

A, B が不等な重りであり、A がより大きいとし、長さ AG , GB に吊るされて平衡を保つとせよ。 $AG < GB$ が証明されなければならない。



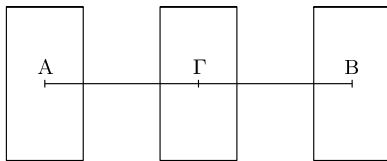
命題4 もし2つの等しい量が同じ重心を持たないならば、両方の量から結合された量の重心はそれらの量の重心を結んでいる直線の中点であろう。

量Aの重心をA、量Bの[重心]をBとし、直線ABが引かれ、点Γにおいて2つの等しい部分に分けられるとせよ。私は、点Γが両方の量から結合された量の重心である、と言う。



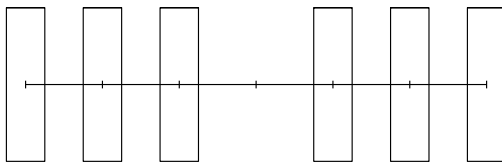
命題5 もし3つの量の重心が同じ直線の上であり、そして、それらの量が同じ重さであり、そして、それらの重心の間におかれた直線が等しいならば、すべての量から結合された量の重心はそれらの量のうちの中央のもの重心と同じ点であろう。

3つの量がA, B, Γであると、それらの重心A, B, Γが同じ直線の上におかれた点であり、そして、量A, B, Γが等しく、直線AΓ, ΓBが等しいとせよ。私は、すべての量から結合された量の重心は点Γであろう、と言う。



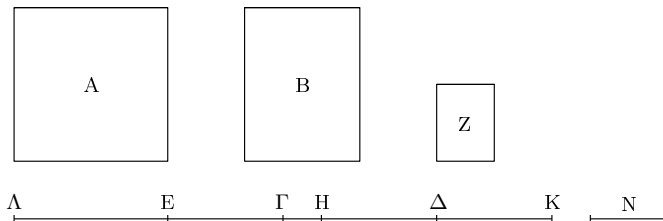
系1 任意個数の奇数個の量の重心が同じ直線の上におかれ、そして、もし中央のものから等しい距離だけ離れている量が等しい重さを持ち、それらの重心の間におかれた直線が等しいならば、すべての量から結合された量の重心はそれらの中央のもの重心と同じ点であろう。

系2 もし偶数個の量があり、それらの重心が同じ直線の上におかれ、中央の、そしてそれらから等しい距離だけ離れている、量が等しい重さを持ち、重心の間におかれた直線が等しいならば、すべての量から結合された量の重心は、より下に「中央に」割り当てられた、「2つの」量の重心を結んでいる直線の midpoint であろう。



命題6 その重さに反比例する距離に吊るされた通約可能な量は平衡を保つ。

通約可能な量がA, Bであると、それらの重心がA, Bであるとせよ。EΔを任意の長さとし、 $A : B = \Delta\Gamma : \Gamma E$ であるとせよ。点ΓがA, Bの両方から結合された量の重心であることが証明されなければならない。



量の通約可能性については、ユークリッド『原論』第10巻において次のように定められている。第10巻定義1「同じ尺度によって割り切られる量は通約できる量といわれ、いかなる共通な尺度をももちえない量は通約できない量といわれる。」

第 10 卷定義 2 「二つの線分はそれらの上の正方形が同じ面積によって割り切られるときには、平方において通約でき、それらの上の正方形が共通な尺度としていかなる面積をももちえないときには [平方において] 通約できない。」

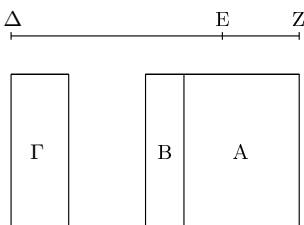
また、『原論』第 5 巻には次のような定義が見られる。

第 5 巻定義 1 「小さい量は、大きい量を割り切るときに、大きい量の約量である。」

第 5 巻定義 2 「大きい量は、小さい量によって割り切られるときに、小さい量の倍量である。」

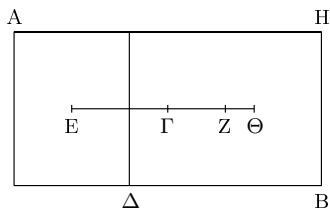
命題 7 たとえ量が通約可能でなくても、同様に、その重さに反比例する距離に吊るされると平衡を保つであろう。

通約可能でない量を AB , Γ とし、さらに、任意の長さを ΔE , EZ とし、 $AB : \Gamma = \Delta E : EZ$ であるとせよ。私は、 AB , Γ の両方から結合された量の重心は点 E である、と言う。



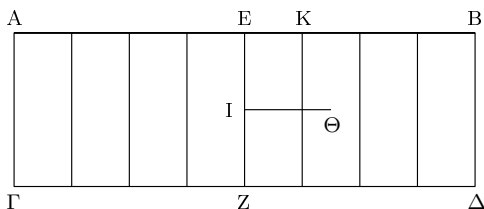
命題 8 もし何らかの量から、[その量とは] 重心が同じではないような、量が [全体から] 取り去られるならば、残りの量の重心は次のようである。[すなわち、] 全体の、および、取り去られた量の重心を結んでいる直線を全体の量の重心があるのと同じ側に延長し、重心の間におかれた直線に対して取り去られた量の重さが残された [量の] 重さに対するのと同じ比を持つように、それらの重心を結んでいる延長された直線から直線が取り去られるとき、取り去られた [直線の] 端点 [が残りの量の重心] である。

その量 AB の重心を Γ とせよ。そして、 AB から、その重心が E である、 $A\Delta$ が取り去られるとせよ。さらに、直線 $E\Gamma$ が引かれ、 $\Gamma Z : \Gamma E = A\Delta : \Delta H$ となるように、(Γ の方に) 延長された [直線から] ΓZ が切り取られるとせよ。量 ΔH の重心が点 Z であることが証明されなければならない。



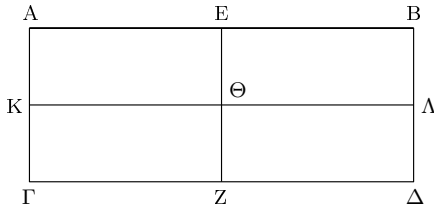
命題 9 任意の平行四辺形の重心は、その平行四辺形の向かい合った辺の midpoint 同士を結ぶ直線の上に位置している。

平行四辺形を $AB\Gamma\Delta$ とし、辺 AB , $\Gamma\Delta$ の midpoint に対して EZ が引かれたとせよ。それゆえ、私は、平行四辺形 $AB\Gamma\Delta$ の重心は直線 EZ の上にあるであろう、と言う。



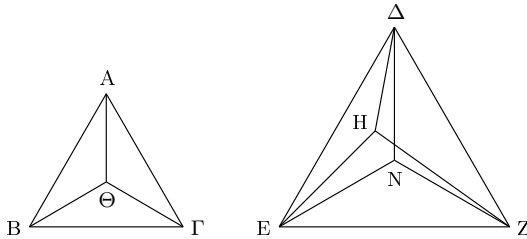
命題 10 任意の平行四辺形の重心は、そこで対角線が互いに交わる点である。

平行四辺形を $AB\Gamma\Delta$ とし、その中で、直線 EZ が直線 AB , $\Gamma\Delta$ を 2 つの等しい部分に分割し、さらに、 KA が直線 $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ を同じように分割しているとせよ。それゆえ、平行四辺形 $AB\Gamma\Delta$ の重心は直線 EZ の上に位置している。



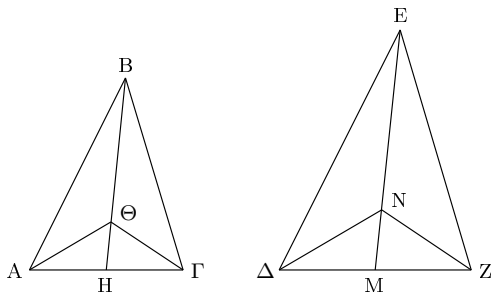
命題 11 もし与えられた 2 つの三角形が互いに相似であり、それらの中に相似な位置にある点があり、一方の点がある三角形の重心であるとすると、他方の点もまたその中にある三角形の重心である。ところで、それらから等しい角で [相似の中心に] 直線が引かれるとき、[それらの直線が] 互いに対応している辺と等しい角をつくるような点を相似な図形において相似な位置にあるという。

2 つの三角形を $AB\Gamma$, ΔEZ として、 $A\Gamma : \Delta Z = AB : \Delta E = B\Gamma : EZ$ であるとし、そして、それらの三角形において相似な位置にある点を Θ , N とし、点 Θ が三角形 $AB\Gamma$ の重心であるとせよ。私は、点 N もまた三角形 ΔEZ の重心である、と言う。



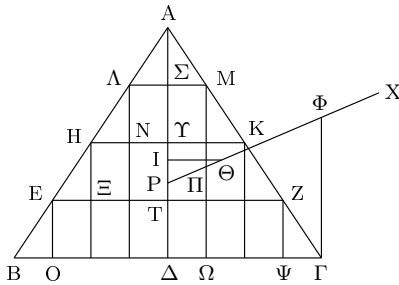
命題 12 もし与えられた 2 つの三角形が相似であり、さらに、一方の三角形の重心がいずれかの角から [その角に向かい合う] 底辺の中点まで引かれた直線の上にあるならば、他方の三角形の重心もまた同様に引かれた直線の上にあるであろう。

2 つの三角形を $AB\Gamma$, ΔEZ として、 $A\Gamma : \Delta Z = AB : \Delta E = B\Gamma : ZE$ であるとし、直線 $A\Gamma$ を点 H において 2 つの等しい部分に分割する直線 BH が引かれ、そして、三角形 $AB\Gamma$ の重心、たとえば Θ , が直線 BH の上にあるとせよ。私は、三角形 ΔEZ の重心もまた同様に引かれた直線の上にある、と言う。

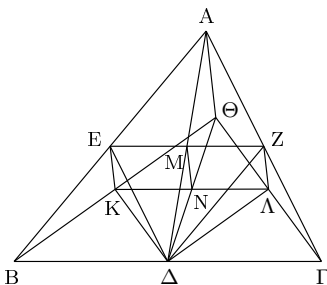


命題 13 任意の三角形の重心はいずれかの角から [その角に向かい合う] 底辺 [対辺] の中点まで引かれる直線の上に位置している。

三角形 $AB\Gamma$ 、および、その中に底辺 $B\Gamma$ の中点まで引かれた直線 $A\Delta$ があるとせよ。三角形 $AB\Gamma$ の重心は直線 $A\Delta$ の上に位置していることが証明されなければならない。



なぜならば、そうでないとして、もし可能ならば、本当 [の重心] は点 Θ であるとし、そこを通過して直線 $B\Gamma$ に平行な [直線] ΘI が引かれるとせよ。それゆえ、直線 $\Delta\Gamma$ がつねに次々と 2 つの等しい部分に分割されると、[そうされることによって] 残されるはずのものが、いつかは、直線 ΘI より小さくなるであろうし、そして、直線 $B\Delta$ 、 $\Delta\Gamma$ の両方が [それに] 等しい諸部分に分割されるとし、それらの切断点を通過して直線 $A\Delta$ に平行な直線が引かれるとし、直線 EZ 、 HK 、 ΛM が引かれるとせよ。それゆえ、それらは直線 $B\Gamma$ に平行であろう。それゆえ、平行四辺形 MN の重心は直線 $\Upsilon\Sigma$ の上に位置しているであろうし、さらに、平行四辺形 $K\Xi$ の [重心] は $T\Upsilon$ の上に、平行四辺形 ZO の [重心] は $T\Delta$ の上に [位置しているであろう] [命題 9]。それゆえ、それらのすべてによって合成された量の重心は直線 $\Sigma\Delta$ の上に位置しているであろう [命題 4]。それゆえ、それが P であるとし、 $P\Theta$ が引かれて、延長されるとし、直線 $A\Delta$ に平行な [直線] $\Gamma\Phi$ が引かれるとせよ。それゆえ、三角形 $A\Delta\Gamma$ は、直線 AM 、 MK 、 KZ 、 $Z\Gamma$ の上につくられた、三角形 $A\Delta\Gamma$ に相似なすべての三角形 [の和] に対して、 $\Gamma A : AM$ の比を持つ。というのは、直線 AM 、 MK 、 $Z\Gamma$ 、 KZ は等しいから。そしてまた、三角形 $A\Delta B$ は、直線 AA 、 ΛH 、 HE 、 EB の上につくられた、相似なすべての三角形 [の和] に対して、 $BA : AA$ と同じ比を持ち、それゆえ、三角形 $AB\Gamma$ はそれらのすべての三角形 [の和] に対して、 $\Gamma A : AM$ の比を持つ。しかし、 $\Gamma A : AM > \Phi P : P\Theta$ である。なぜならば、三角形は相似であるから、 $\Gamma A : AM = [\Gamma\Delta : \Delta\Omega =] \Phi P : P\Theta$ だから。それゆえまた、三角形 $AB\Gamma$ は、私たちが述べた、それら [の和] に対して、 $\Phi P : P\Theta$ より大きい比を持つ。それゆえまた、[その比が] 分離されると、平行四辺形 MN 、 $K\Xi$ 、 ZO [の和] は残りの三角形に対して $\Phi\Theta : \Theta P$ [の和] より大きい比を持つ。それゆえ、平行四辺形 [の和] と三角形 [の和] の比に比 $X\Theta : \Theta P$ が等しくなるはずである。いま、 $AB\Gamma$ はその重心が Θ である量であり、そして、平行四辺形 MN 、 $K\Xi$ 、 ZO によって合成されたものがそれから取り去られた量であり、[その] 取り去られた量の重心は点 P であるから、それゆえ、残された三角形によって合成された残りの量の重心は延長された直線 $P\Theta$ [すなわち、 PX] の上に位置しており、それから切断された直線 [$X\Theta$] が ΘP に対して、取り去られた量が残り [の量] に対する比を持つ [命題 8]。それゆえ、点 X は残された三角形によって合成された量の重心である。しかし、これは不可能である。なぜならば、すべての三角形は X を通過して直線 $A\Delta$ に平行に引かれた平面の上にある直線の同じ側、すなわち一方の側、にあるから。それゆえ、命題は成り立つ。

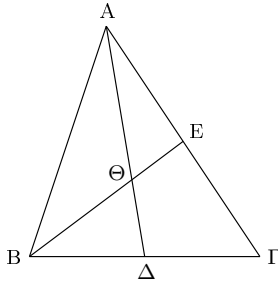


同じことを別の方法で

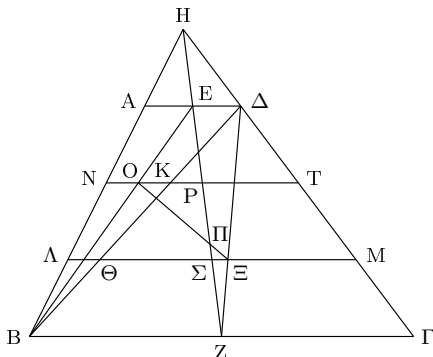
三角形 $AB\Gamma$ があるとし、[直線] $A\Delta$ が [対辺] $B\Gamma$ の中点まで引かれるとせよ。私は、三角形 $AB\Gamma$ の重心は直線 $A\Delta$ の上に位置している、と言う。

なぜならば、そうでないとして、もし可能ならば、それが Θ であるとし、直線 $A\Theta$, ΘB , $\Theta\Gamma$ が、そして、直線 $E\Delta$, $Z\Gamma$ が直線 BA , $A\Gamma$ の中点まで引かれるとし、直線 $A\Theta$ に平行な [直線] $E\Delta$, $Z\Gamma$ が引かれ、 $K\Lambda$, $\Lambda\Delta$, ΔK , $\Delta\Theta$, MN が引かれるとせよ。いま、 BA と $Z\Delta$ は平行なので、三角形 $AB\Gamma$ と三角形 $\Delta Z\Gamma$ は相似であり、三角形 $AB\Gamma$ の重心は点 Θ であるから、三角形 $\Delta Z\Gamma$ の重心も点 Λ である [命題 11]。なぜならば、互いに対応している辺と角が等しいため、点 Θ , Λ は両方の三角形において相似の位置にあるからであるが、これは確かに明らかであるから。それゆえまた、同じ理由で、三角形 $EB\Delta$ の重心は K である。それゆえ、三角形 $EB\Delta$, $Z\Delta\Gamma$ の両方によって合成された量の重心は、 $EB\Delta = Z\Delta\Gamma$ であるから、直線 $K\Lambda$ の中央に位置する。そして、 $BE : EA = BK : \Theta K$ であり、 $\Gamma Z : ZA = \Gamma\Lambda : \Lambda\Theta$ であるから、直線 $K\Lambda$ の中点は N である。もしそうならば、 $B\Gamma$, $K\Lambda$ は平行であろう。そして、 $\Lambda\Theta$ が引かれる。それゆえ、 $B\Delta : \Delta\Gamma = KN : N\Lambda$ であろう。それゆえ、両方の三角形によって合成された量の重心は N である。しかしまた、平行四辺形 $AE\Delta Z$ の重心は M である [命題 10]。それゆえ、それらのすべて [三角形 $EB\Delta$, $Z\Delta\Gamma$, および平行四辺形 $AE\Delta Z$] によって合成された量の重心は直線 MN の上に位置する。しかしまた、三角形 $AB\Gamma$ の重心は点 Θ である。それゆえ、延長された直線 MN は点 Θ を通るようになるであろう。しかし、 $[MN, A\Theta$ は平行だから、] これは不可能である。それゆえ、三角形 $AB\Gamma$ の重心が直線 $A\Delta$ の上に位置していないということは起こりえない。それゆえ、それ [重心] はそこ [直線 $A\Delta$] の上にある。

命題 14 任意の三角形の重心は、そこで [それぞれの] 角から [その角に向かい合う] 辺の中点まで引かれた直線が交わる点である。



命題 15 互いに平行な 2 つの辺を持っている任意の台形の重心は、それら平行線の中点を結ぶ直線において、[2 つの] 平行線の小さい方の中点とその分点と [の間に] 持っている部分が残りの部分に対して、大きい方の 2 倍と小さい方 [との和] に等しい直線が平行線の小さい方の 2 倍と大きい方 [との和に等しい直線] に対して持つと同じ比を持つように、分割する [点である]。



上の図で、 $AB\Gamma\Delta$ は、 $A\Delta // B\Gamma$ である、台形で、点 E , Z はそれぞれ線分 $A\Delta$, $B\Gamma$ の中点である。また、点 N , Λ は線分 AB の、点 T , M は線分 $\Delta\Gamma$ の、それぞれ 3 等分点である。(ただ

し、アルキメデスの言い方では、「…… 引かれた直線 $B\Delta$ が点 K , Θ において 3 つの等しい部分に分割されるとし、それら [の点] を通って直線 $B\Gamma$ に平行な [直線] NKT , $\Lambda\Theta M$ が引かれるとし、 ΔZ , BE , $O\Xi$ が引かれるとせよ。……」)

このとき、線分 EZ 上の点で、 $E\Pi : \Pi Z = (2B\Gamma + A\Delta) : (2A\Delta + B\Gamma)$ となるような点 Π が台形 $AB\Gamma\Delta$ の重心になる、ということ。

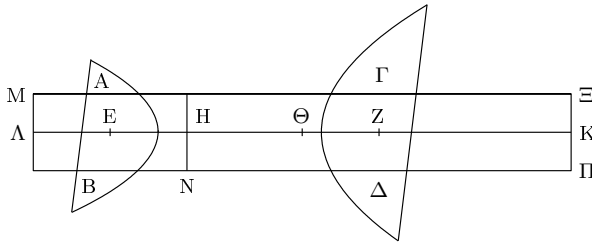
平板の平衡について 第2巻

Ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐπιπέδων

De Planorum Aequilibriis sive De Centris Gravitatis Planorum

命題1 もし直線と直角円錐切断〔放物線〕とで囲まれた2つの空間があり、〔それらを〕与えられた直線によって連結することができ、〔それらが〕同じ重心を持たないならば、両方から合成された量の重心は、それらの重心を結んでいる直線の上で、その直線を空間と反対側の部分が持つ比に分割する位置にあるであろう。

[命題に] 述べたような、2つの空間が $AB, \Gamma\Delta$ であるとして、それらの重心を E, Z とし、そして、 $AB : \Gamma\Delta = Z\Theta : \Theta E$ であるとせよ。両方の空間 $AB, \Gamma\Delta$ から合成された量の重心が点 Θ であることが証明されなければならない。

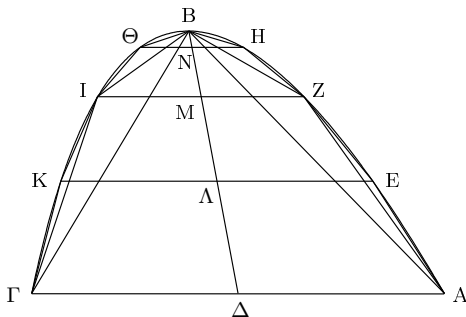


命題2 もし直線と直角円錐切断〔放物線〕とで囲まれた切片に、その切片と同じ底辺および等しい高さを持つ三角形が内接され、そして再び、残りの切片にその切片と同じ底辺、等しい高さを持つ三角形が内接され、そして、つねに次々と残りの切片に同じように三角形が内接され、そうしてつくられた図形が継続的に切片に内接されるとせよ。さらに、〔次のことを〕準備せよ。〔すなわち、〕そのような内接された図形において、切片の頂点に隣接する角を結んでいる直線はそれら以外〔の与えられた切片〕の底辺に平行になり、そして、その切片の直径によって等しい部分に分割され、そして、その直径を、1から切片の頂点と見なされる数まで、次々と引き続く奇数の比に分割するであろう。

ここまでは準備で、その内容は、下の図で、 $\Theta H \parallel IZ \parallel KE \parallel \Gamma A$, $\Theta N = NH$, $IM = MZ$, $K\Lambda = \Lambda E$, $\Gamma\Delta = \Delta A$, $BN : NM : M\Lambda : \Lambda\Delta = 1 : 3 : 5 : 7$ ということ。

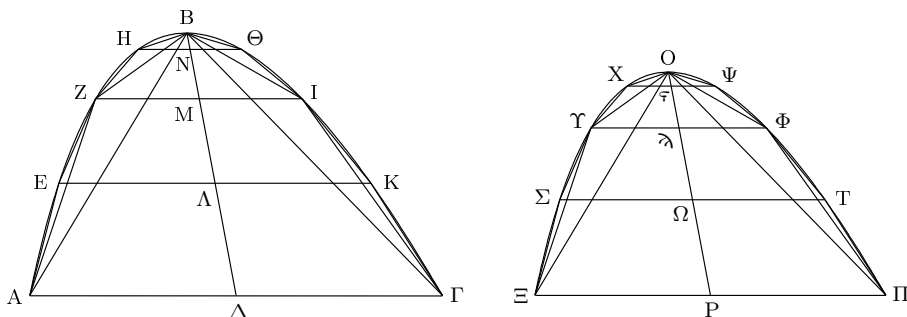
直線と直角円錐切断〔放物線〕とで囲まれた切片に直線図形が継続的に内接されると、内接された図形の重心は切片の直径の上にあるであろう。

$AB\Gamma$ を、〔上で〕述べたような、切片とし、そこに直線図形 $AEZHB\Theta IK\Gamma$ が継続的に内接されるとせよ。直線図形の重心は直線 $B\Delta$ の上に位置することが証明されなければならない。



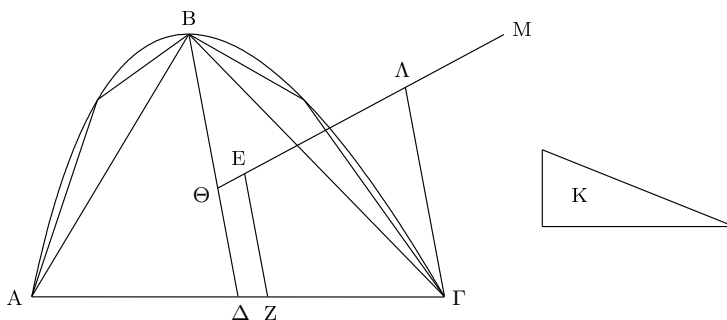
命題3 直線と直角円錐切断〔放物線〕とで囲まれた等しい〔すなわち、相似な〕2つの切片が与えられたとき、そのそれぞれに直線図形が連続的に内接され、内接された図形の辺が互いに等しい数を持つならば、それらの図形の重心は同じ仕方で〔すなわち、同じ比に〕切片の直径を切断する。

2つの切片を $AB\Gamma$, $\Xi O\Pi$ とし、それらに直線図形が連続的に内接され、そして、それぞれの全体が互いに等しい辺の数を持つとせよ。そして、切片の直径を $B\Delta$, OP とし、直線 $E\text{K}$, $Z\text{I}$, $H\Theta$ および ΣT , $\Upsilon\Phi$, $X\Psi$ が引かれるとせよ。



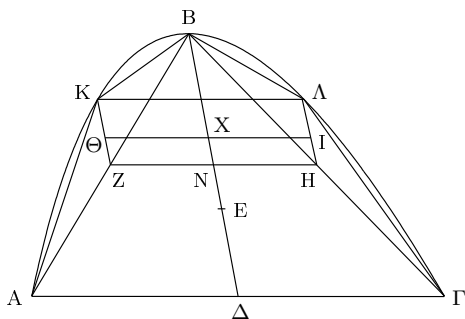
命題4 直線と直角円錐切断〔放物線〕とで囲まれた任意の切片の重心は切片の直径の上に位置している。

$AB\Gamma$ を、〔上で〕述べたような、切片とし、その直径を $B\Delta$ とせよ。その切片の重心は直線 $B\Delta$ の上に位置していることが証明されなければならない。



命題5 もし直線と直角円錐切断〔放物線〕とで囲まれた切片に直線図形が連続的に内接されるならば、切片全体の重心は内接された図形の重心より切片の頂点に近い。

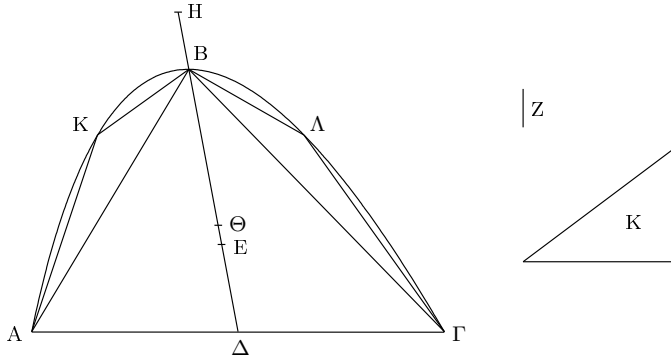
$AB\Gamma$ を、〔上で〕述べたような、切片とし、その直径を ΔB とせよ。



命題6 直線と直角円錐切断〔放物線〕とで囲まれた与えられた切片に、切片と内接された図形

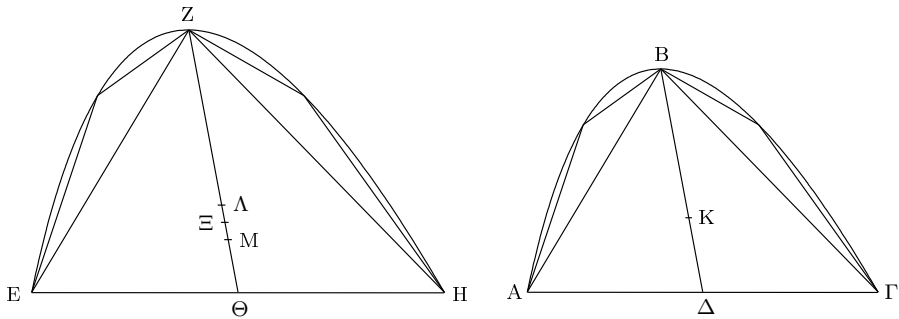
の [それぞれの] 重心の間の直線 [距離] が任意に与えられた直線より小さくなるように、直線図形を連続的に内接させることができる。

[上で] 述べたような、与えられた切片を $AB\Gamma$ とし、その重心を Θ とし、それに三角形 $AB\Gamma$ が連続的に内接されるとせよ。そして、与えられた直線を Z とし、 $\triangle AB\Gamma : K = B\Theta : Z$ であるとせよ。いま、切片 $AB\Gamma$ に直線図形 $AKB\Lambda\Gamma$ が、残りの空間が空間 K より小さいように、内接されるとせよ。そして、内接された図形の重心を E とせよ。私は、直線 ΘE は直線 Z より小さい、と言う。



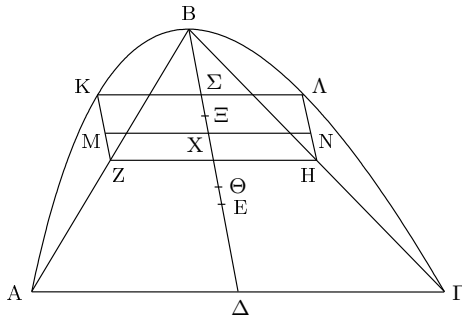
命題 7 直線と直角円錐切断 [放物線] とで囲まれた相似な 2 つの切片の重心は直径を同じ比に分割する。

[上で] 述べたような、2 つの切片を $AB\Gamma$, EZH として、それらの直径を $B\Delta$, $Z\Theta$ とし、切片 $AB\Gamma$ の重心を K , さらに、切片 EZH の [重心] を Λ とせよ。点 K , Λ は直径を同じ比に分割することが証明されなければならない。

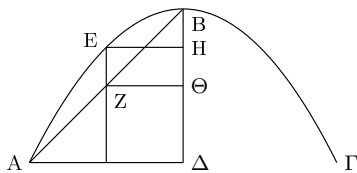


命題 8 直線と直角円錐切断 [放物線] とで囲まれた任意の切片の重心は切片の直径を、切片の頂点が位置している方の部分が底辺が位置している方の部分よりその半分だけ大きいように、分割する。

$AB\Gamma$ が、[命題に] 述べたような、切片であるとして、その直径が $B\Delta$, 重心が点 Θ であるとせよ。 $B\Theta = \frac{3}{2} \Theta\Delta$ であることが証明されなければならない。



切片 $AB\Gamma$ に三角形 $AB\Gamma$ が適切に内接されるとし、その重心が E であるとせよ。そして、直線 BA , $B\Gamma$ が点 Z, H において 2 つの等しい部分に分割されるとし、直線 $B\Delta$ に平行な直線 KZ, HA が引かれるとせよ。それゆえ、それらは切片 $AKB, B\Lambda\Gamma$ の直径である。それゆえ、切片 AKB の重心が M で、切片 $B\Lambda\Gamma$ の [重心] が点 N であると、直線 ZH, MN, KA が引かれるとせよ。それゆえ、両方の切片によって合成された量の重心は X である。そして、 $KM : MZ = B\Theta : \Theta\Delta$ であるから、それらが合わせられる [加比の理] と $KZ : ZM = B\Delta : \Theta\Delta$ であり [ユークリッド第 5 巻命題 18], それらが逆にされる [交換の理] と $B\Delta : KZ = \Theta\Delta : MZ$ である [ユークリッド第 5 巻命題 16] が、しかし、 $B\Delta = 4KZ$ であるから、 $\Delta\Theta = 4MZ$ であろう。それゆえまた、残されるものは $B\Theta = 4KM = 4\Sigma X$ である。それゆえまた、 $[\Sigma X$ が取り去られると] 残されるものは $B\Sigma + X\Theta = 3\Sigma X$ である。 $B\Sigma = 3\Sigma\Xi$ とせよ。それゆえまた、 $X\Theta = 3\Xi X$ であろう。そして、 $B\Delta = 4B\Sigma$, $B\Sigma = 3\Sigma\Xi$ であるから、それゆえ、 $\Xi B = \frac{1}{3}B\Delta$ であろう。しかしまた、三角形 $AB\Gamma$ の重心は E であるから、 $E\Delta = \frac{1}{3}\Delta B$ である。それゆえまた、残されるものは $\Xi E = \frac{1}{3}B\Delta$ である。そして、切片全体の重心は点 Θ であり、切片 $AKB, B\Lambda\Gamma$ の両方によって合成された量の重心は X で、三角形 $AB\Gamma$ の [重心] は E であるから、三角形 $AB\Gamma$ は残りの切片 [の和] に対して $X\Theta : \Theta E$ のようであろう [第 1 巻命題 8]。しかし、三角形 $AB\Gamma$ は両切片の [和の] 3 倍大きい。それゆえまた、 $X\Theta = 3X\Xi$ である。それゆえ、 $\Xi E = 5E\Theta$, すなわち $\Delta E = 5E\Theta$ である。なぜなら、 $\Delta E = \Xi E$ だから。それゆえ、 $\Delta\Theta = 6\Theta E$ であり、そして、 $B\Delta = 3\Delta E$ である。それゆえ、 $B\Theta = \frac{3}{2}\Theta\Delta$ である。これが証明すべきことであった。



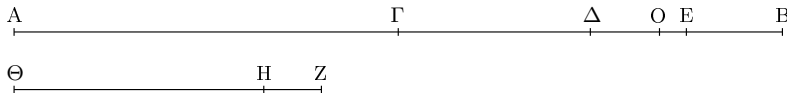
上の証明中の「 $B\Delta = 4KZ$ 」について、エウトキウスによれば……

$AB\Gamma$ をその直径が $B\Delta$ である放物線とせよ。そして、縦線 [ordinatus] $A\Delta$ が引かれ、 AB が引かれて、 AB が Z において等しい部分に切断され、 Z を通って直線 $B\Delta$ に平行な EZ が引かれるとせよ。それゆえ、 AB は切片の直径である。そして、点 E, Z から平行な縦線 $EH, Z\Theta$ が引かれるとせよ。それゆえ、 $AZ = BZ$ であるから、 $AB = 2ZB$, $\Delta B = 2B\Theta$, $A\Delta = 2Z\Theta = 2EH$ であろう。それゆえ、 $A\Delta^2 = 4EH^2$ であり、そしてそれゆえ、 $\Delta B = 4BH$ [アポロニオス第 1 巻命題 20] である。それゆえ、 $B\Delta = 2B\Theta$ であるから、 $B\Theta = 2BH$ であろう。そして、 $\Theta H = HB$ であり、 $EHZ\Theta$ が平行四辺形であることから、 $HB = EZ$ である。それゆえ、 $B\Delta = 4ZE$ である。

命題 9 もし 4 つの直線が連続的に比例する比にあり、そして、最小のものが最大のものと最小のものとの差に対して、別にとられた直線が比例している最大のものと 3 番目の [大きさの] 直線との差の $\frac{3}{5}$ に対して持つ比と同じ比を持ち、そして、比例している最大のものの 2 倍と第 2 のものの 4 倍と仮定された第 3 のものの 6 倍と第 4 のものの 3 倍と [の和] に等しい直線が仮定された最大のものの 5 倍と仮定された第 2 のものの 10 倍と仮定された第 3 のものの 10 倍と仮定された第 4 のものの 5 倍と [の和] に対して、別にとられた直線が比例している最大のものと第 3 のもの

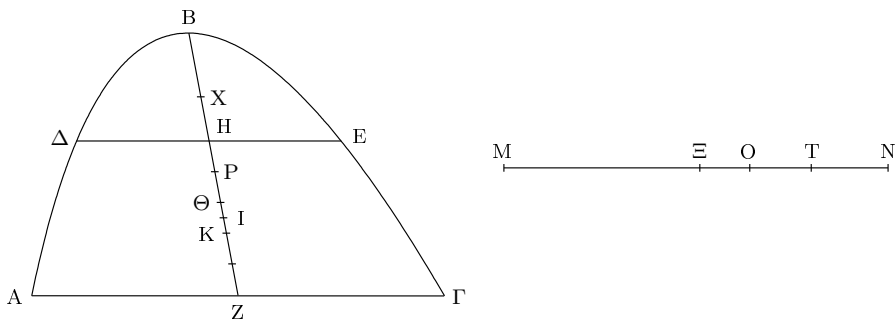
との差に対して持つ比と同じ比を持つならば、両方が一緒にとられた直線は最大のものの $\frac{2}{5}$ であろう。

比例している4つの直線を $AB, B\Gamma, B\Delta, BE$ として、 $BE : EA = ZH : \frac{3}{5} A\Delta$ であり、 $(2AB + 4B\Gamma + 6B\Delta + 3BE) : (5AB + 10\Gamma B + 10B\Delta + 5BE) = H\Theta : A\Delta$ であるとせよ。 $Z\Theta = \frac{2}{5} AB$ であることが証明されなければならない。



命題10 直角円錐切断 [放物線] から取り去られた任意の [平行な底辺を持つ] 断片の重心はその断片の直径である直線の上で次のような位置にある。[すなわち、] 5つの等しい部分に分割された直線 [断片の直径] における5つの [うちの] 真ん中の部分において、そ [れが2つに分割されたうち] の小さい方の底辺に近い方の部分が残りの部分に対して、底辺として断片の大きい方の底辺の平方を、さらに、高さとして小さい方の底辺の2倍と大きい方の底辺とが一緒になったもの [和] に等しい [直線] を持つ立体の大きさが、断片の小さい方の底辺の平方を底辺に、さらに、大きい方の底辺の2倍と小さい方 [の底辺] とが一緒になったもの [和] に等しい直線を高さを持つ立体の大きさに対するのと、同じ比を持つように位置している。

直角円錐切断 [放物線] における平行な2つの直線を $A\Gamma, \Delta E$ とし、切片 $AB\Gamma$ の直径を BZ とせよ。それゆえ、直線 $A\Gamma, \Delta E$ が点 B において切片に接する平行な直線であるから、断片 $A\Delta E\Gamma$ の直径もまた ZH であることになる。そして、直線 HZ が5つの等しい部分に分割され、5つの [うちの] 真ん中の部分が ΘK であるとせよ。そして、 $\Theta I : IK = AZ^2 \times (2\Delta H + AZ) : \Delta H^2 \times (2AZ + \Delta H)$ であるとせよ。断片 $A\Delta E\Gamma$ の重心は点 I であることが証明されなければならない。



比 $\Theta I : IK$ は命題の文言通りならば、 $\Theta I : IK = A\Gamma^2 \times (2\Delta E + A\Gamma) : \Delta E^2 \times (2A\Gamma + \Delta E)$ となるが、 $A\Gamma = 2AZ, \Delta E = 2\Delta H$ であるし、考えているのは比であるから、上のような表現にしたのであろう。

球と円柱について 第1巻

Περὶ Σφαιράρας καὶ Κυλίνδρου

De Sphaera et Cylyndro

定義1 平面上に次のようなある有限曲線 (καμπύλη γραμμῆ) が存在する。すなわち、その両端を結ぶ線分 (εὐθεΐα) に関して、その曲線全体が同一の側にあるか、または、反対側にはその部分が全くないような有限曲線が存在する。

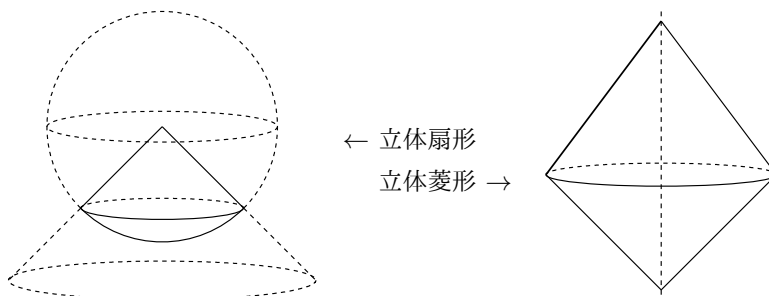
定義2 つぎのような線を同じ向きに凹である (ἐπὶ τὰ αὐτὰ κοίλη) と私は呼ぶ。すなわち、その上の任意の二点が取られたとき、それらの点を結ぶ線分がすべてその曲線の同一側にくるか、または、ある部分は同一の側に来、ほかの部分はその曲線上にあるが、決して曲線の反対側にはこないような場合である。

定義3 同様にまた、次のような有限な曲面が存在する。すなわち、その曲面 (ἐπιφάνεια) そのものは平面上にないが、その限界を一平面上に持ち、その限界である平面の同一の側に面全体があるか、または反対の側にはその部分が全くないような有限曲面が存在する。

定義4 つぎのような面を、同じ向きに凹であると私は呼ぶ。すなわち、その上の二点が取られたとき、それらの点を結ぶ線分がすべてその曲面の同一の側にくるか、または、ある部分は同一の側に来、ほかの部分はその曲面上にあるが、決して曲面の反対側にはこないような場合である。

定義5 頂点を球の中心に持つような円錐が球を切るときに、円錐の表面と球の表面によって、円錐の内部に囲まれる図形を、私は立体扇形 (τομεὺς στερεός) と呼ぶ。

定義6 同じ底面をもつ二つの円錐が、それらの頂点を底面の別々の側に持ち、それらの軸が一直線上になるような位置にあるとき、両方の円錐から成る立体図形を、私は立体菱形 (ῥόμβος στερεός) と呼ぶ。



仮定1 同じ両端を持つ線のうち、直線が最小である。

仮定2 一平面上にあり同じ両端を持つ直線以外の線のうち、次のようなものは不等である。すなわち、両端が同じ向きに凹であり、一方の曲線全部が、それと同じ両端を持つ他方の曲線と両端を結ぶ線分に囲まれるか、または、ある部分が囲まれ、ある部分は共通である場合である。そして囲まれるほうがより小さい。

仮定3 同様に、同じ限界を一平面上に持つ面のうち、平面が最小である。

仮定4 同じ限界を一平面上に持つ平面以外の面のうち、次のようなものは不等である。すなわち、両面が同じ向きに凹であり、一方の曲面全部が、同じ限界を持つ他方の曲面と限界である平面

によって囲まれるか、または、ある部分が囲まれ、ある部分は共通である場合である。そして囲まれるほうがより小さい。

仮定 5 なお不等な線や不等な面や不等な立体のうち、より大きい方がより小さいほうにまさる超過量は、それ自身が何度か加えられると、互いに比較される量のうちから任意に定められた量を越えることができる。

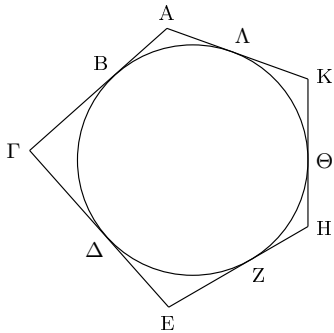
この「仮定 5」はいわゆる「アルキメデスの公理」あるいは「エウドクソス・アルキメデスの公理」と呼ばれているもの。

ユークリッド『原論』では次のような表現になっている。

第 5 巻定義 4 「何倍かされて互いに他より大きくなり得る二量は、相互に比をもつといわれる。」
 第 10 巻命題 1 「二つの不等な量が定められ、もし大きいほうの量からその半分より大きい量が引かれ、残りからまたその半分より大きい量が引かれ、これがたえずくりかえされるならば、最初に定められた小さいほうの量よりも小さいなんらかの量が残されるにいたるであろう。」

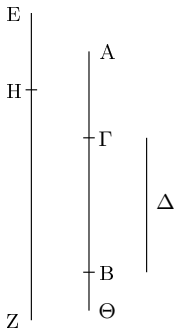
命題 1 もし多角形が円の周りに外接されると、外接多角形の周囲は円の周囲より大きい。

図のように多角形が円の周りに外接されたとせよ。その多角形の周囲が円の周囲より大きいと主張する。



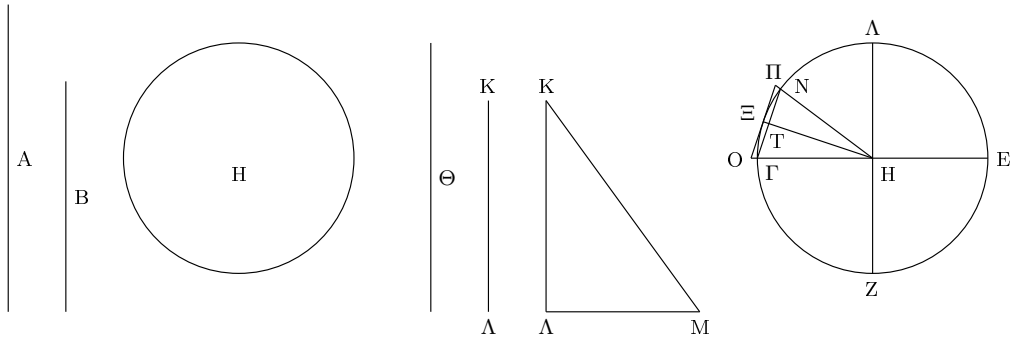
命題 2 2つの不等な量が与えられているとき、より大きな線分がより小さな線分に対して、より大きな量がより小さな量に対するよりも小さな比を持つように、2つの不等な線分を見出すことができる。

AB, Δ を 2 つの不等な量とし、AB を大きいとせよ。述べられた条件を満たす 2 つの不等な線分を見出すことができると主張する。



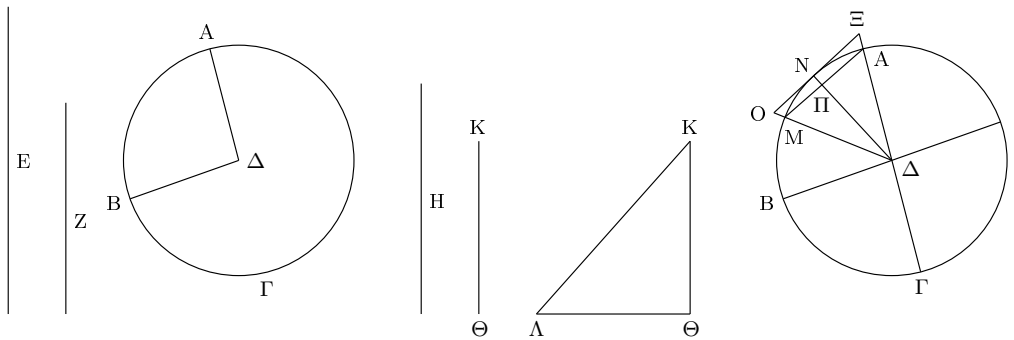
命題 3 2つの不等な量と円が与えられているとき、外接多角形の辺が内接多角形の辺に対して、より大きな量がより小さな量に対するよりも小さな比を持つように、円に多角形を内接させ、別の多角形を外接させることができる。

与えられた 2 つの量 A, B と, 図のような与えられた円があるとせよ。条件を満たすことができると主張する。



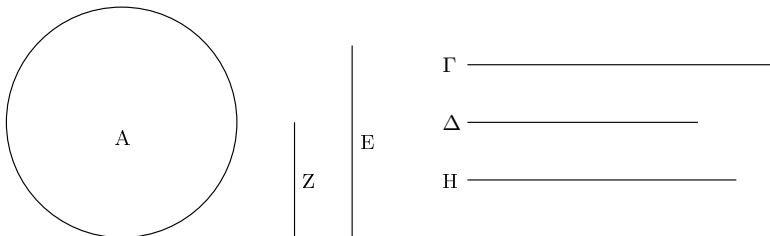
命題 4 再び, 2 つの不等な量と扇形が与えられているとき, 外接多角形の辺が内接多角形の辺に対して, より大きな量がより小さな量に対するよりも小さな比を持つように, 扇形に多角形を外接させ, 別の多角形を内接させることができる。

再び 2 つの不等な量 E, Z があるとし, E がより大きいとせよ。そして中心として Δ を持つある円 ABΓ があるとし, Δ の所で扇形 AΔB が作られたとせよ。そこで, 条件を満たすように, BΔ, ΔA を除いて, 等しい辺を持つ多角形を扇形 AΔB に外接させ, (別の多角形を) 内接させることが要求されている。

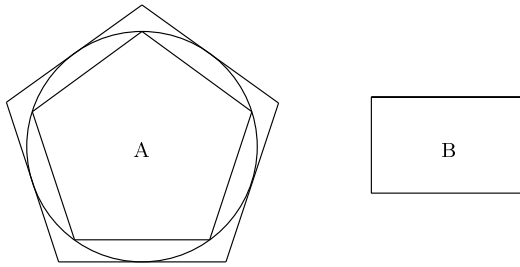


命題 5 円と 2 つの不等な量が与えられているとき, 外接多角形が内接多角形に対して, より大きな量がより小さな量に対するよりも小さな比を持つように, 円に多角形を外接させ, 別の多角形を内接させること。

円 A と 2 つの不等な量 E, Z がとられたとし, E がより大きいとせよ。そこで命令されたことが生じるように円に多角形を内接し, 別の多角形を外接することが要求されている。



命題 6 2 つの不等な量と扇形が与えられているとき, 外接多角形が内接多角形に対して, より大きな量がより小さな量に対するよりも小さい比を持つように, 扇形に多角形を外接させ, 別の多角形を内接させることが可能であることも同様に証明する。

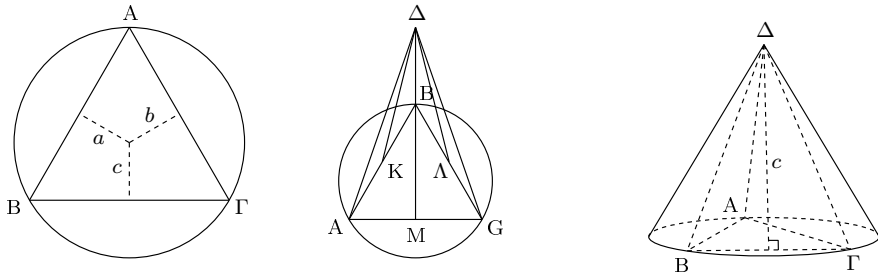


ここに引用した訳文は朝日出版社版 [4] によるものであるが、中央公論社版 [6] では「... 扇形の回りに一つの多角形を外接させ、それに相似なほかの多角形を内接させて、... 」と、両多角形の相似性が明示されている。

なお、いずれの文献においても、添付されている図では (上図のように) 相似な 5 角形が描かれている。

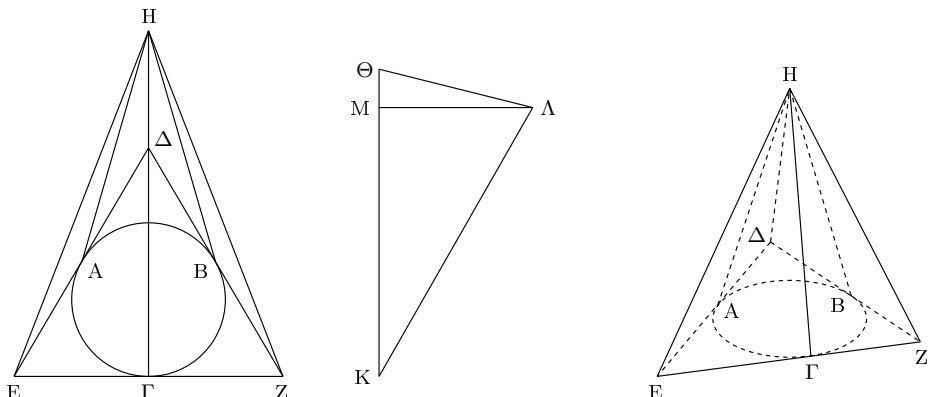
命題 7 もし等脚円錐に、等辺多角形を底面を持つ角錐が内接されると、底面を除いた角錐の表面は、その底面の周囲に等しい底辺と、その頂点から底面の一边に引かれた垂線を高さを持つ三角形に等しい。

底面が円 $AB\Gamma$ である等脚円錐があるとし、その中に、底面として等辺三角形 $AB\Gamma$ を持つ角錐が内接されたとせよ。その表面は、底面を除いて、上で述べられたような三角形に等しいと主張する。



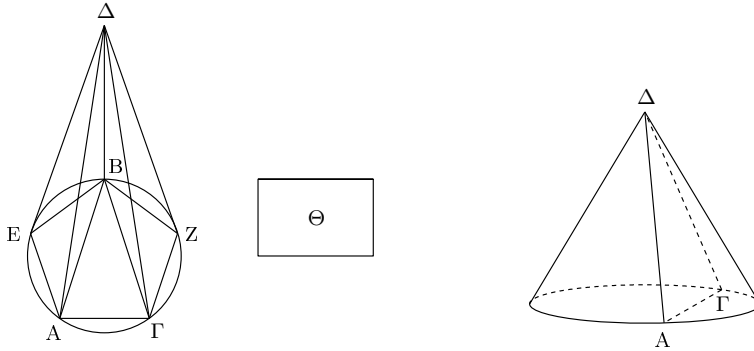
命題 8 もし等脚円錐の周りに角錐が外接されると、底面を除いた角錐の表面は、その底面の周囲に等しい底辺と、円錐の母線を高さを持つ三角形に等しい。

底面が円 $AB\Gamma$ である円錐があるとし、角錐の底面、すなわち、多角形 ΔEZ が円 $AB\Gamma$ の周りに外接されるように、角錐が外接されたとせよ。底面を除いた角錐の表面が、今述べられた三角形に等しいと主張する。



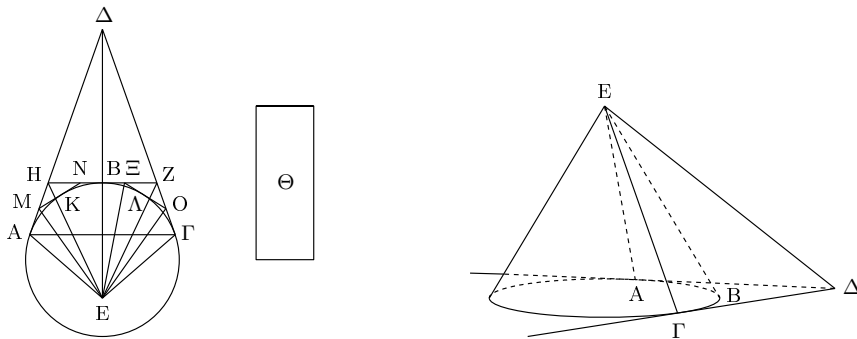
命題 9 もしある等脚円錐の底面である円に直線が交わり、その両交点から円錐の頂点に直線が引かれると、円に交わる直線と頂点へ結ばれた直線によって囲まれた三角形は、頂点へ結ばれた二直線の間の円錐の表面より小さいであろう。

円 $AB\Gamma$ が等脚円錐の底面であり、 Δ が頂点であるとせよ。そして底面にある直線 $A\Gamma$ が引かれたとせよ。そして頂点から A, Γ へ、 $A\Delta, \Delta\Gamma$ が結ばれたとせよ。三角形 $A\Delta\Gamma$ は、 $A\Delta, \Delta\Gamma$ の間の円錐の表面より小さいと主張する。



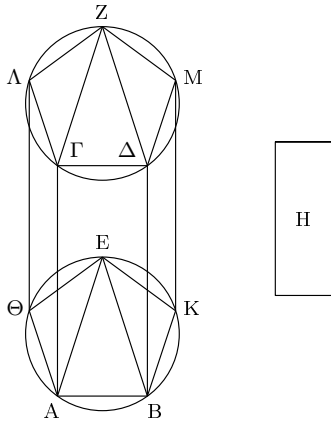
命題 10 もし円錐の底面である円に、円と同じ平面上で 2 接線が引かれ、それらが互いに交わるとき、接点と交点から円錐の頂点へと直線が引かれると、接線と円錐の頂点へと結ばれた直線によって囲まれた両三角形の和は、それらによって切り取られた円錐面より大きい。

円 $AB\Gamma$ が底面で、点 E が頂点である円錐があるとし、同じ平面内で接線 $A\Delta, \Gamma\Delta$ が引かれたとし、円錐の頂点である点 E から、 A, Δ, Γ へと $EA, E\Delta, E\Gamma$ が結ばれたとせよ。三角形 $A\Delta E, \Delta\Gamma E$ の和は、線分 $AE, \Gamma E$ と弧 $AB\Gamma$ の間の円錐面より大きいと主張する。



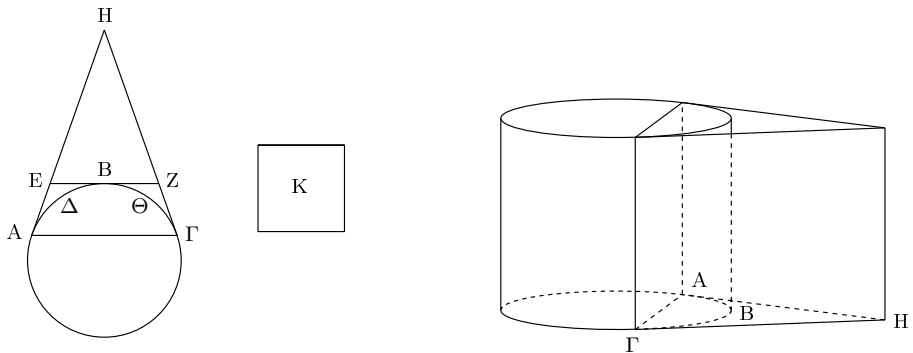
命題 11 もし直円柱の側面上に 2 直線があるなら、それらの直線の間の円柱の面は、円柱面上の 2 直線とそれらの限界を結ぶ線分によって囲まれた平行四辺形より大きい。

底面が円 AB で、対する上面が円 $\Gamma\Delta$ である直円柱があるとし、 $A\Gamma, B\Delta$ が結ばれたとせよ。線分 $A\Gamma, B\Delta$ によって切り取られる円柱面が、平行四辺形 $A\Gamma B\Delta$ より大きいと主張する。



命題 12 もしある直円柱の側面上に 2 直線があり、それらの直線の限界から、円柱の底面である円に、円と同じ平面上に 2 つのある接線が引かれ、それらが交わる時、それらの接線と円柱の母線によって囲まれる 2 つの平行四辺形の和は、円柱面上の 2 直線の間の円柱の面より大きいであろう。

円 $AB\Gamma$ をある直円柱の底面とし、 A, Γ を限界とする 2 直線が円柱面上にあり、 A, Γ から円への 2 接線が円と同じ面上で引かれ、それらが H で交わるとせよ。そして円柱の上面でも、円柱面上の 2 直線の限界から、円への 2 接線が引かれると考えよ。それらの接線と円柱の母線によって囲まれる (2 つの) 平行四辺形の和は、円柱の弧 $AB\Gamma$ に沿った面より大きいということが証明されるべきである。

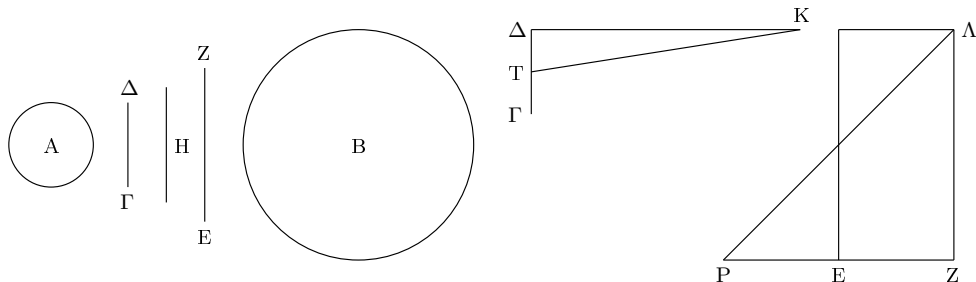


系 1 もし等脚円錐の中に角錐が内接されると、底面を除いた角錐の表面は、円錐の表面より小さい。また、もし等脚円錐の周りに角錐が外接されると、底面を除いた角錐の表面は、底面を除いた円錐の表面より大きい。

系 2 もし直円柱の中へ角柱が内接されると、平行四辺形から成る角柱の表面は、底面を除いた円柱の表面より小さい。また、もし直円柱の周りに角柱が外接されると、平行四辺形から成る角柱の表面は、底面を除いた円柱の表面より大きい。

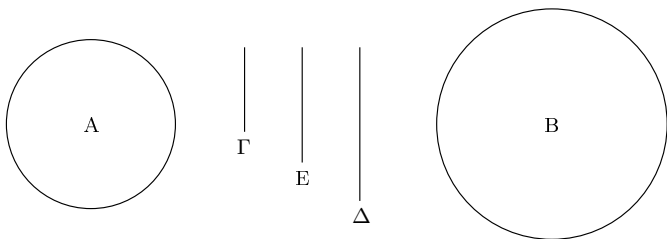
命題 13 任意の直円柱の底面を除いた表面は、その半径が、円柱の母線と円柱の底面の直径との比例中項であるような円に等しい。

円 A をある直円柱の底面とし、 $\Gamma\Delta$ が円 A の直径に、 EZ が円柱の母線に等しいとせよ。そして H が $\Delta\Gamma, EZ$ の比例中項であり、半径が H に等しい円 B が作られたとせよ。円 B が、底面を除いた円柱の表面に等しいということが証明されるべきである。



命題 14 任意の等脚円錐の底面を除いた表面は、その半径が、円錐の母線と、円錐の底面である円の半径との比例中項になるような円に等しい。

底面が半径 Γ の円 A であるような等脚円錐があるとし、 Δ が円錐の母線に等しいとせよ。そして E が、 Γ 、 Δ の比例中項であり、円 B が E に等しい半径を持つとせよ。円 B が、底面を除いた円錐の表面に等しいと主張する。

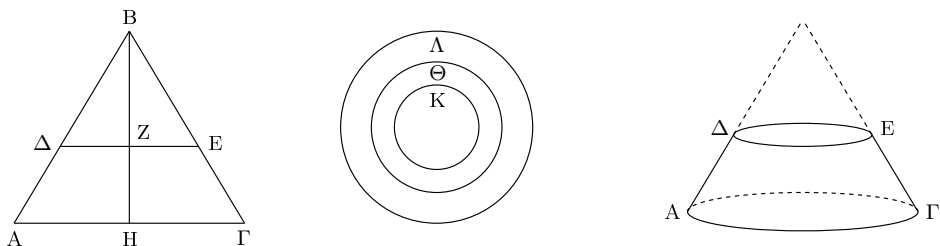


命題 15 任意の等脚円錐の表面は、その底面に対して、円錐の母線が、円錐の底面の半径に対するのと同じ比を持つ。

底面が円 A である等脚円錐があるとし、B が円 A の半径に等しく、 Γ が円錐の母線に等しいとせよ。円錐の表面が円 A に対して、 Γ が B に対するのと同じ比を持つことが証明されるべきである。

命題 16 もし等脚円錐が底面に平行な平面によって切られると、2つの平行な平面のあいだにある円錐の表面は、その半径が、平行な2平面のあいだの円錐の母線と、平行な2平面内の円の半径の和に等しい線分との比例中項であるような円に等しい。

軸を通る三角形が $AB\Gamma$ であるような円錐があるとし、底面に平行な平面によって切られ、断面 ΔE を作るとせよ。そして BH が円錐の軸であり、その半径が $A\Delta$ と、 ΔZ 、 HA の和との比例中項であるようなある円が取られ、その円を Θ とせよ。円 Θ が ΔE 、 $A\Gamma$ の間の円錐の表面に等しいと主張する。



レンマ 1 等しい高さを持つ円錐は底面に比例する。また、等しい底面を持つ円錐はその高さに比例する。

レンマ 2 もし円柱が底面に平行な平面によって切られると、円柱はその軸に比例する。

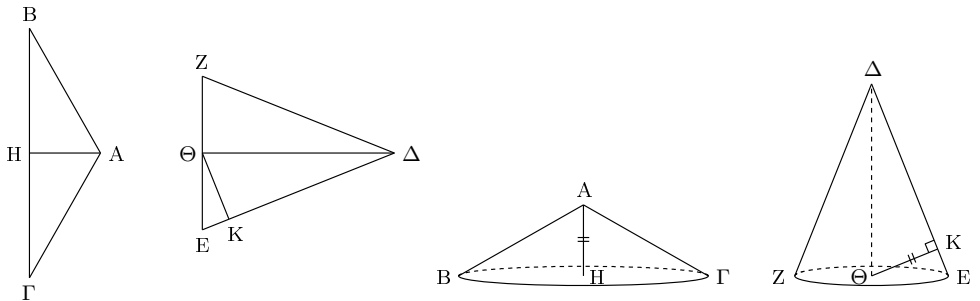
レンマ 3 円柱と同じ底面を持つ円錐は、円柱に比例する。

レンマ 4 等しい円錐の底面はその高さに反比例する。また、底面がその高さに反比例するような円錐は等しい。

レンマ 5 その底面の直径が軸に比例するような円錐は、互いに底面の直径の立方に比例する。

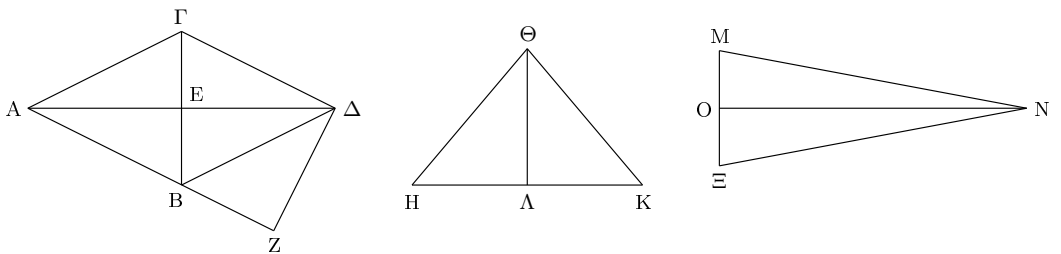
命題 17 もし 2 つの等脚円錐があり、一方の円錐の表面が他方の円錐の底面に等しく、前者の底面の中心からその円錐の母線へ引いた垂線が、後者の高さに等しいならば、この 2 つの円錐は等しいであろう。

2 つの等脚円錐 $AB\Gamma$, ΔEZ があるとし、 $AB\Gamma$ の底面は ΔEZ の表面に等しいとせよ。そして高さ AH は、底面の中心 Θ から円錐の母線、すなわち ΔE へ引かれた垂線 $K\Theta$ に等しいとせよ。両円錐が等しいと主張する。



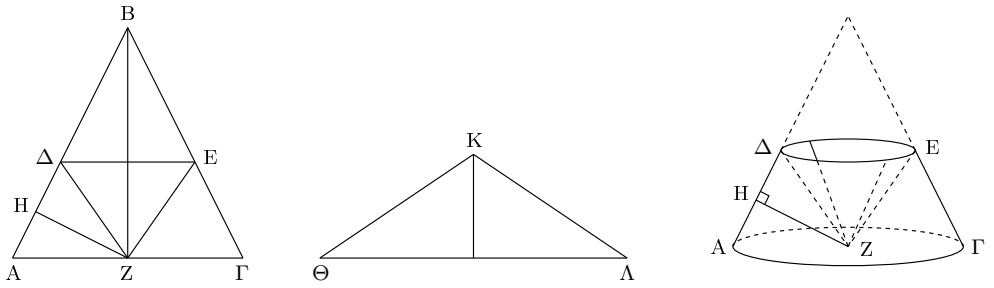
命題 18 2 つの等脚円錐からなる任意の立体菱形は、その立体菱形をなす一方の円錐の表面に等しい底面と、他方の円錐の頂点から前者の円錐の母線へ引かれた垂線に等しい高さを持つような円錐に等しい。

その底面が直径 $B\Gamma$ の周りの円で、高さの和が $A\Delta$ の 2 つの等脚円錐からなる立体菱形 $AB\Gamma\Delta$ があるとせよ。そして円錐 $AB\Gamma$ の表面に等しい底面と、点 Δ から AB またはその延長線へ引かれた垂線 ΔZ に等しい高さを持つもう 1 つのある円錐 $H\Theta K$ が作られたとせよ。そして円錐 ΘHK の高さが $\Theta\Lambda$ とせよ。そこで $\Theta\Lambda$ は ΔZ に等しい。この円錐が立体菱形に等しいと主張する。



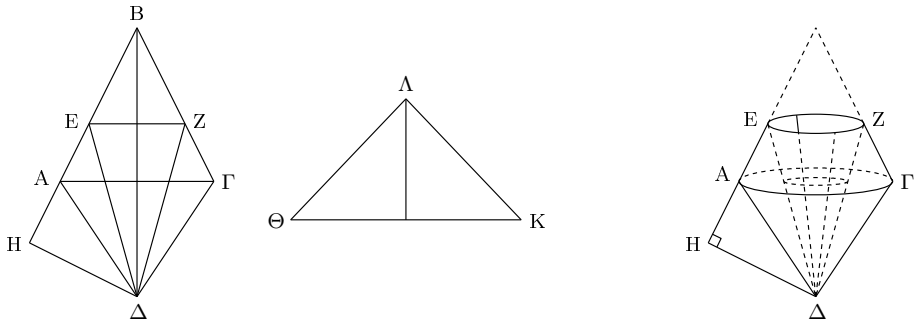
命題 19 もし等脚円錐が底面に平行な平面によって切られ、切り口の円上に底面の中心を頂点として持つ円錐が描かれ、こうしてできた立体菱形が円錐全体から取り去られるならば、周りに残された立体は、平行な 2 平面の間の円錐の表面に等しい底面と、底面の中心から円錐の母線へ引かれた垂線に等しい高さを持つような円錐に等しいであろう。

等脚円錐 $AB\Gamma$ があるとし、底面に平行な平面によって切られたとせよ。そして断面 ΔE を作り、底面の中心が Z であるとせよ。そして直径 ΔE の周りの円上に、 Z を頂点に持つ円錐が描かれたとせよ。すると 2 つの等脚円錐から成る立体菱形 $B\Delta ZE$ ができるであろう。そこで、その底面が ΔE , $A\Gamma$ の間の表面に等しく、高さが点 Z から AB へ引かれた垂線 ZH に等しいようなある円錐 $K\Theta\Lambda$ が作られたとせよ。もし円錐 $AB\Gamma$ から立体菱形 $B\Delta ZE$ が取り去られたとすると、円錐 $\Theta K\Lambda$ は周りに残された部分に等しくなるであろうと主張する。



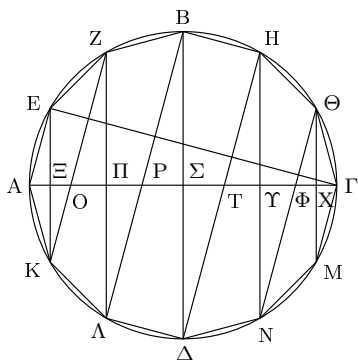
命題 20 もし 2 つの等脚円錐から成る立体菱形の一方の円錐が、その底面に平行な平面によって切られ、切り口の円上に他方の円錐と同じ頂点を持つ円錐が描かれ、こうしてできた立体菱形が、立体菱形全体から取り去られるならば、周りに残された立体は、平行な 2 平面の間の円錐の表面に等しい底面と、後者の円錐の頂点から前者の円錐の母線へ引かれた垂線に等しい高さを持つような円錐に等しいであろう。

2 つの等脚円錐から成る立体菱形 $AB\Gamma\Delta$ があり、一方の円錐が底面に平行な平面によって切られたとし、断面として EZ を作るとせよ。そして直径 EZ の周りの円上に、点 Δ を頂点として持つ円錐が描かれたとせよ。すると立体菱形 $EB\Delta Z$ ができるであろう。それが立体菱形全体から取り去られたとし、 $A\Gamma$, EZ の間の円錐面に等しい底面を持ち、点 Δ から BA , またはその延長線に引かれた垂線に等しい高さを持つある円錐 $\Theta K\Lambda$ が作られたとせよ。円錐 $\Theta K\Lambda$ が、上で述べた周りに残された立体に等しいと主張する。



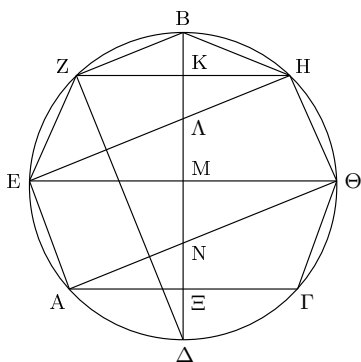
命題 21 もし円に、偶数個の辺を持つ等辺多角形が内接され、多角形の 2 辺によって張られる任意の 1 つの弦に平行になるように、多角形の頂点を結ぶ直線が引かれるならば、それらすべての結合線の和は、円の直径に対して、多角形の辺の数の半分より 1 つだけ少ない数の辺によって張られる弦が、多角形の 1 辺に対するような比を持つ。

円 $AB\Gamma\Delta$ があり、その中に多角形 $AEZB\Theta\Gamma M N \Delta \Lambda K$ が内接されたとせよ。そして EK , $Z\Lambda$, $B\Delta$, HN , ΘM が結ばれたとせよ。すると、それらは多角形の 2 辺によって張られる弦に平行であることは明らかである。これらすべての和が、円の直径に対して、 ΓE が EA に対するのと同じ比を持つと主張する。



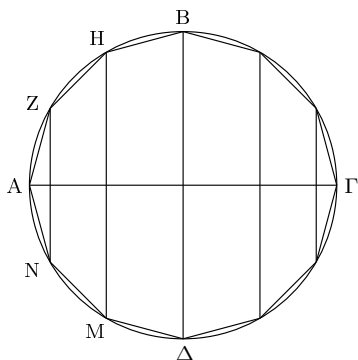
命題 22 もし円の切片に、底辺を除くほかの辺が等しく、かつ偶数個の辺を持つ多角形が内接され、切片の底辺に平行に、多角形の頂点を結ぶ直線が引かれるならば、それらすべての引かれた線と底辺の半分との和は、その切片の高さに対して、円の直径の一端から多角形の辺の一端へ結ばれた線分が、多角形の 1 辺に対するのと同じ比を持つ。

円 $AB\Gamma\Delta$ の中に、ある直線 $A\Gamma$ が引かれたとし、切片 $AB\Gamma$ の中に、底辺を除くほかの辺が偶数個でかつ等しいような多角形が $A\Gamma$ 上に内接されたとせよ。そして切片の底辺に平行な ZH , $E\Theta$ が結ばれたとせよ。 ZH , $E\Theta$, $A\Xi$ の和が $B\Xi$ に対するように、 ΔZ が ZB に対すると主張する。



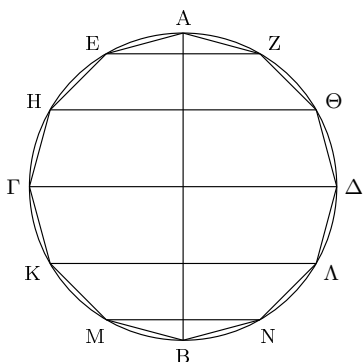
命題 23 もし球の大円に、辺の数が 4 で割り切れるような等辺多角形が内接され、円の直径が固定され、(それを軸として) 多角形を含む円が回転して、その動きははじめた同じところに再びもどるならば、球に内接された図形の表面は球の表面より小さいであろう。

球の大円 $AB\Gamma\Delta$ があり、その中に、等辺多角形が内接され、そしてその多角形の辺が 4 で割り切れるとせよ。そして $A\Gamma$, ΔB を直径とせよ。もし直径 $A\Gamma$ が固定されて、(それを軸にして) 多角形を含む円 $AB\Gamma\Delta$ が回転すると、その円周は球の表面上を動き、点 A , Γ を除く多角形の頂点は、球の表面上に円 $AB\Gamma\Delta$ に垂直に描かれた円の周囲に沿って動くであろうことは明らかである。そして、それらの円の直径は、 $B\Delta$ に平行に多角形の頂点を結ぶ線分になるであろう。また、多角形の辺はある円錐に沿って動くであろう。すなわち、 AZ , AN は、底面が直径 ZN の円で、頂点が点 A の円錐面上を、 ZH , MN は、底面が直径 MH の円で、頂点が ZH , MN の延長と $A\Gamma$ (の延長) との交点であるようなある円錐面上を、 BH , ΔM は、底面が円 $AB\Gamma\Delta$ に垂直な直径 $B\Delta$ の円で、頂点が BH , ΔM の延長と ΓA (の延長) との交点であるような円錐面上を動くであろう。同様に、もう一方の半円内の辺も、上と同様な円錐面上を動くであろう。その時、上述のような円錐面に囲まれた球の内接図形の表面は、球の表面より小さいであろう。



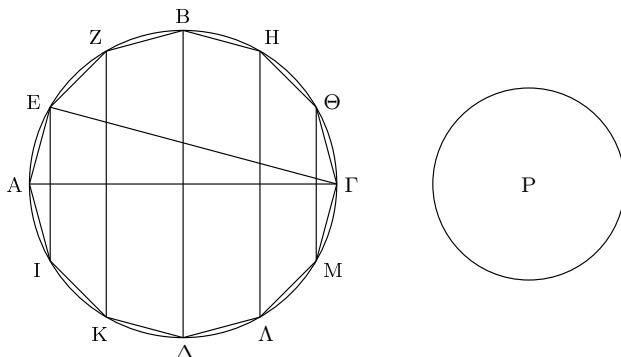
命題 24 球の中に内接された図形の表面は、その半径の平方が、内接図形の辺と、多角形の 2 辺によって張られる弦に平行に多角形の頂点を結ぶすべての線分の和によって囲まれる長方形に等しいような円に等しい。

球の中に大円 $AB\Gamma\Delta$ があり、そこに辺の数が 4 で割り切れる等辺多角形が内接されたとせよ。そして、その内接多角形から (前と同じように) 球への内接立体が作られるとせよ。そして 2 辺によって張られる弦に平行な $EZ, H\Theta, \Gamma\Delta, K\Lambda, MN$ が結ばれたとせよ。そして、その半径の平方が、 AE と、 $EZ, H\Theta, \Gamma\Delta, K\Lambda, MN$ の和に等しい線分に囲まれた長方形に等しいようなある円 Π が作られたとせよ。この円が、球へ内接された図形の表面に等しいと主張する。



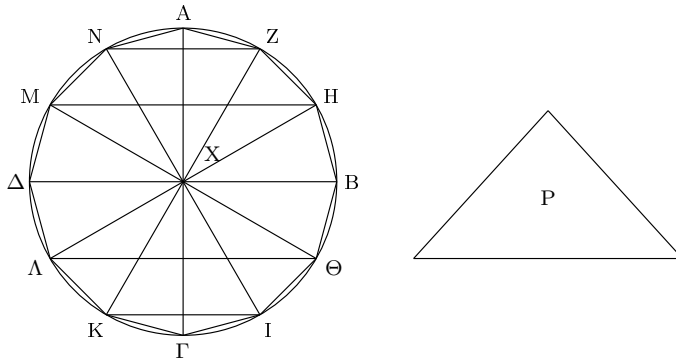
命題 25 球に内接され、円錐面によって囲まれた立体の表面は、球の大円の 4 倍より小さい。

球の中に大円 $AB\Gamma\Delta$ があるとし、そこに辺の数が 4 で割り切られるような等辺多角形が内接されたとせよ。そしてその内接多角形から (前と同じようにして) 円錐面によって囲まれた表面が作られるとせよ。内接立体の表面が球の大円の 4 倍より小さいと主張する。

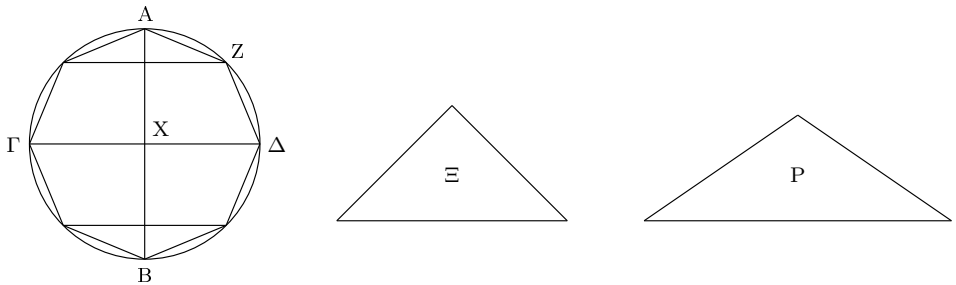


命題 26 球に内接され、円錐面に囲まれた立体は、底面として球に内接された図形の表面に等しい円を持ち、高さとして球の中心から多角形の 1 辺に引かれた垂線に等しい線分を持つような円錐に等しい。

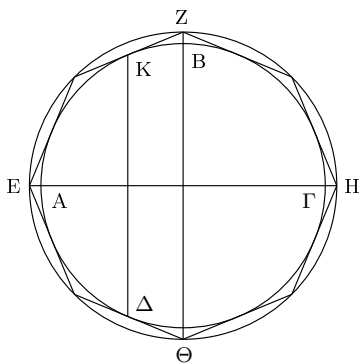
球と、その中の大円 $AB\Gamma\Delta$ があるとし、その他については前と同じであるとせよ。そして、底面として球の中に内接された図形の表面を持ち、高さとして球の中心から多角形の 1 辺に引かれた垂線に等しい線分を持つ直円錐 P があるとせよ。円錐 P が、球に内接された図形に等しいことが証明されるべきである。



命題 27 球に内接され、円錐面に囲まれた立体は、球の大円に等しい底面を持ち、球の半径に等しい高さを持つ円錐の 4 倍より小さい。



命題 28 もし球の大円に、その辺の数が 4 で割り切れるような等辺多角形が外接され、円の直径が固定され、(それを軸として) 円を含む多角形が回転して、その動きははじめた同じところに再びもどるとき、球の外接図形の表面は、球の表面より大きいであろう。

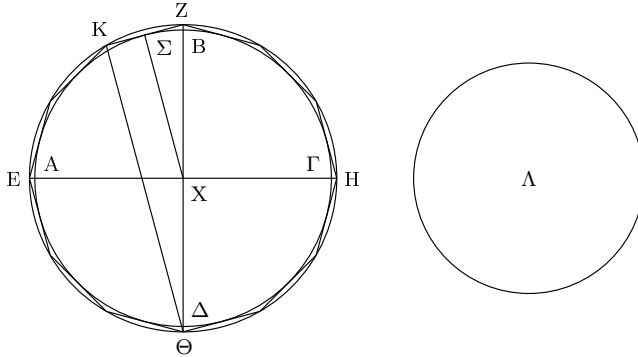


命題 29 その半径の平方が、多角形の 1 辺と、多角形の 2 辺を張る弦の 1 つに平行に頂点を

結ぶすべての線分によって囲まれた長方形に等しいような円は、球の周りの外接図形の表面に等しい。

命題 24 における図でいうならば、 $(\text{半径})^2 = AZ(EZ + H\Theta + \Gamma\Delta + K\Lambda + MN)$ ということ。

命題 30 球の周りに外接された図形の表面は、球の大円の 4 倍より大きい。



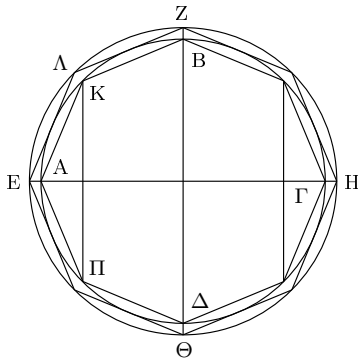
命題 31 底面として外接図形の表面に等しい円を持ち、球の半径に等しい高さを持つ円錐は、より小さい球の周りに外接された図形に等しい。

命題 30 における図でいうならば、小さい方の球 $AB\Gamma\Delta$ に外接している正 12 角形 $AB\Gamma\Delta$ を回転させてできる立体の表面に等しい円が底面で、球の半径 $X\Sigma$ が高さであるような円錐が、外接立体に等しいということ。

系 より小さい球の周りの外接図形は、底面として球の大円を持ち、高さとして球の半径を持つ円錐の 4 倍より大きい。

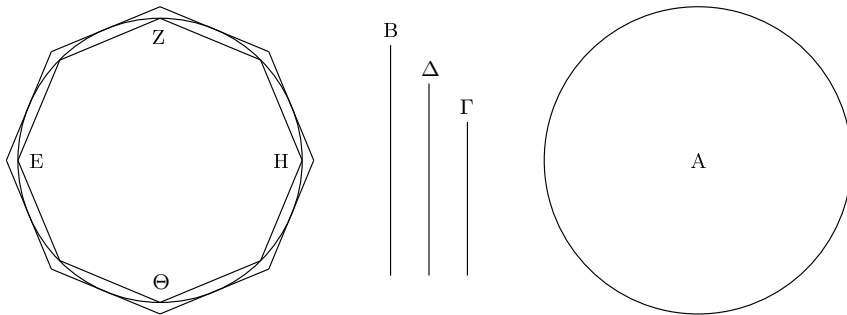
命題 32 もし球に前と同じように、相似多角形からつくられた図形が内接され、別の図形が外接されると、外接図形の表面は内接図形の表面に対して、大円の周りの外接多角形の 1 辺が、同じ円への内接多角形の 1 辺に対する比の平方比を持つ。そして外接立体は内接立体に対して、その比の立方比を持つ。

球の中に円 $AB\Gamma\Delta$ があるとし、その中に等辺多角形が内接され、その辺の数は 4 で割り切れるとし、内接多角形に相似な多角形が円のまわりに外接されるとせよ。そして外接多角形の各辺は、内接多角形の辺で切り取られた円周の midpoint で円と接するとせよ。そして外接多角形を囲む円の、互いに垂直な直径 EH , $Z\Theta$ があると、それらは直径 $A\Gamma$, $B\Delta$ と同じ位置に置かれていとせよ。そして、 $ZB\Delta\Theta$ に平行な、多角形の相対する頂点を結ぶ線分が考えられたとせよ。そこで、直径 EH が固定されたまま、円の周囲の周りの多角形が回転させられると、球の中に内接図形と外接図形ができるであろう。そのとき、外接図形の表面は内接図形の表面に対して、 $E\Lambda$ が $A\Lambda$ に対する比の平方比を持ち、外接図形が内接図形に対して、その同じ比の立方比を持つことが証明すべきことである。



命題 33 任意の球の表面は、その大円の 4 倍である。

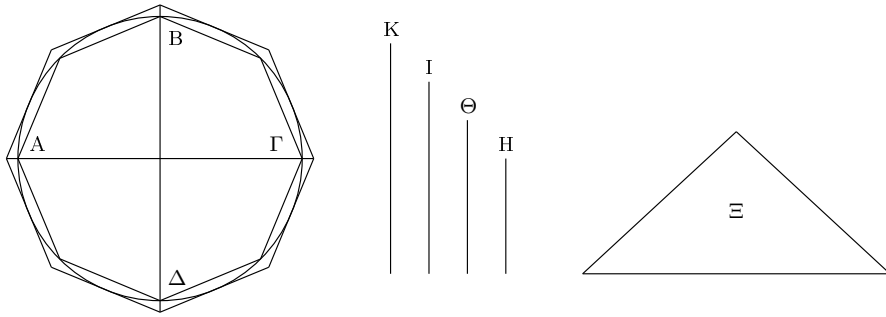
なぜなら、ある球があり、円 A が、その大円の 4 倍であるとせよ。円 A が球の表面に等しいと主張する。



なぜなら、もしそうでないなら、より大きいか、より小さいかである。そこでまず、球の表面が円 A より大きいとせよ。すると、球の表面と円 A という 2 つの異なる量がある。そこで、より大きい線分がより小さい線分に対して、球の表面が円 A に対するより小さい比を持つように、2 つの異なる線分を取ることが可能である。線分 B, Γ が取られたとせよ。そして線分 Δ が、B, Γ の比例中項とせよ。さらに球が、円 EZH Θ に沿った中心を通る平面によって切られたと考えよ。そしてまた、外接多角形が内接多角形に相似であり、外接多角形の辺が内接多角形の辺に対して、線分 B が Δ に対するよりも小さい比を持つように、円に多角形が内接され、外接されるとせよ。すると、球の周りに外接された図形の表面は、内接図形の表面に対して、球の表面が円 A に対するよりも小さな比を持つ。これは不合理である。なぜなら、外接図形の表面は球の表面より大きく、内接図形の表面は円 A より小さいから。したがって、球の表面は円 A より大きくない。

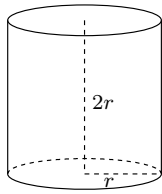
そこで次に、小さくないと主張する。もし可能なら、より小さいとせよ。前と同様に、線分 B が Γ に対して、円 A が球の表面に対するより小さな比を持つように線分 B, Γ が見いだされたとせよ。そして線分 Δ が、B, Γ の比例中項とせよ。そして再び、外接多角形の辺が内接多角形の辺に対して、B の Δ に対する比より小さな比を持つように、内接され、外接されるとせよ。すると、外接図形の表面は、内接図形の表面に対して、円 A が球の表面に対するよりも小さい比を持つ。これは不合理である。なぜなら、外接図形の表面は、円 A より大きいし、内接図形の表面は、球の表面より小さいから。したがって、球の表面は円 A より小さくない。そして大きくもないと証明された。それゆえ、球の表面は、円 A、すなわち、大円の 4 倍に等しい。

命題 34 任意の球は、球の大円に等しい底面を持ち、球の半径に等しい高さを持つ円錐の 4 倍である。



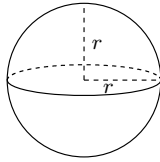
ある円があり、その中に大円 $AB\Gamma\Delta$ があるとせよ。そのとき、もし球が上で述べられた円錐の 4 倍でないなら、可能なら、4 倍より大きいとせよ。そして円 $AB\Gamma\Delta$ の 4 倍の底面を持ち、球の半径に等しい高さを持つ円錐 Ξ があるとせよ。すると球は円錐 Ξ より大きい。そこで、球と円錐 Ξ という 2 つの異なる量があるであろう。すると、大きい線分が小さい線分に対して、球が円錐 Ξ に対するよりも小さい比を持つように、2 つの異なる線分が取れる。そこで、線分 K, H がそうだとし、そして K が I を、 I が Θ を、 Θ が H を等しいだけ互いに凌駕するように、線分 I, Θ が取られたとせよ。また、円 $AB\Gamma\Delta$ に多角形が内接されたと考えよ。そして、その辺の数は 4 で割り切れるとせよ。そして前と同じように、内接多角形に相似な別の多角形が外接されたと考えよ。そして、外接多角形の辺が内接多角形の辺に対して、線分 K が I に対するよりも小さな比を持つとせよ。そして直径 AG, BD は互いに垂直とせよ。そこで、もし直径 AG が固定され、多角形を含む平面が回転されると、球への内接立体と外接立体とができるであろう。そして、外接立体は内接立体に対して、外接多角形の辺が、円 $AB\Gamma\Delta$ の内接多角形の辺に対する比の立方比を持つであろう。ところで、外接多角形の辺は内接多角形の辺に対して、線分 K が線分 I に対するよりも小さな比を持つ。したがって、外接立体は内接立体に対して、 K の I に対する比の立方比より小さな比を持つ。また、線分 K は H に対して、 K が I に対する比の立方比より大きな比を持つ。したがって、外接立体は内接立体に対して、線分 K が H に対する比よりさらに小さな比を持つ。ところで、線分 K は H に対して、球が円錐 Ξ に対するよりも小さな比を持つ。それゆえ、外接立体は内接立体に対して、球が円錐 Ξ に対するよりもさらに小さい比を持つ。そして (第 2 項と第 3 項を) 入れかえてみよ。それは不可能である。なぜなら、外接立体は球より大きく、内接立体は円錐 Ξ より小さいから。それゆえ球は上で述べられた円錐の 4 倍より大きくない。もし可能なら、4 倍より小さいとせよ。そこで球は円錐 Ξ より小さい。そこで、線分 K が H より大きく、 K が H に対して、円錐 Ξ が球に対するよりも小さい比を持つように、線分 K, H が取られたとせよ。そして線分 Θ, I が前と同じように取られたとせよ。そして、外接多角形の辺が内接多角形の辺に対して、線分 K が I に対するよりも小さな比を持つように、多角形が円 $AB\Gamma\Delta$ に内接され、他の多角形が外接されたと考えよ。そして他のことは、前と同様に作図されるとせよ。そこで再び、外接立体は内接立体に対して、円 $AB\Gamma\Delta$ の周りに外接された多角形の辺が、内接多角形の辺に対する比の立方比を持つであろう。そして外接多角形の辺は、内接多角形の辺に対して、線分 K が I に対するよりも小さな比を持つ。したがって、外接立体は内接立体に対して、線分 K が I に対する比の立方比より小さい比を持つであろう。ところで、線分 K は H に対して、 K が I に対する比の立方比より大きな比を持つ。その結果、外接立体は内接立体に対して、線分 K が H に対するよりも小さな比を持つ。ところで、線分 K は H に対して、円錐 Ξ が球に対するよりも小さな比を持つ。それゆえ、外接立体は内接立体に対して、円錐 Ξ が球に対するよりもさらに小さい比を持つ。そして第 2 項と第 3 項を入れかえてみよ。それは不可能である。なぜなら、内接立体は球より小さく、外接立体は円錐 Ξ より大きいから。それゆえ、球は、円 $AB\Gamma\Delta$ に等しい底面を持ち、球の半径に等しい高さを持つ円錐の 4 倍より小さくない。そして、大きくもないことが証明された。それゆえ 4 倍である。

系 底面として球の大円を持ち、球の直径に等しい高さを持つ任意の円柱は、球の 1 倍半 ($3/2$ 倍) であり、その表面は、底面も含めて、球の表面の 1 倍半 ($3/2$ 倍) であることが明らかである。



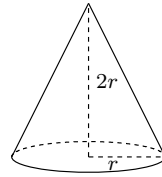
体積は, $2\pi r^3$

表面積は, $6\pi r^2$



$\frac{4}{3}\pi r^3$

$4\pi r^2$

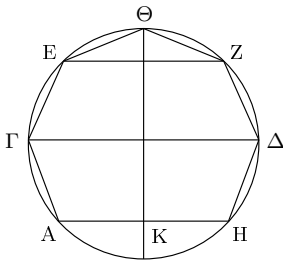


$\frac{2}{3}\pi r^3$

$(\sqrt{5} + 1)\pi r^2$

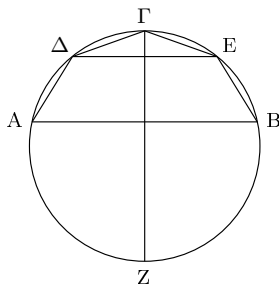
命題 35 球の切片に内接された図形の表面は、その半径の平方が、大円の切片に内接された多角形の 1 辺と、切片の底辺に平行な線分すべてと切片の底辺の半分の和に等しい線分によって囲まれた長方形に等しいような円に等しい。

球と、底面が AH の周りの円である球の切片があるとし、AHΘ が大円で、辺 AH を除いて、偶数個の辺の多角形 AGEΘZΔH があるとせよ。そして、その半径の平方が、辺 AG と、EZ、ΓΔ の全部と底辺の半分、すなわち、AK との和によって囲まれた長方形に等しい円 Λ が取られたとせよ。その円が、内接図形の表面に等しいことが証明されるべきである。



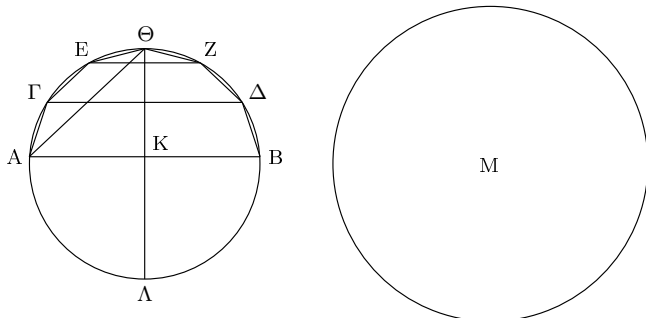
命題 36 もし球の大円の切片に、その底辺を除いて等辺な多角形が内接され、直径が固定され、(それを軸として) 多角形を含む円が回転して、その動きはじめた同じところに再びもどるならば、球に内接された図形の表面は球の切片の表面より小さいであろう。

中心を通らない平面によって球が切られたとし、切られた平面に垂直な円 AEZ があり、切片 ABΓ の中に、底辺 AB を除いて等辺な多角形が内接されたとせよ。そこで前と同様に、もし ΓZ が固定されたまま、その図形が回転すると、頂点 Δ、E、A、B は直径 ΔE、AB の円周に沿って動き、切片の各辺は円錐面に沿って回転する。すると、底辺として直径 AB を、頂点として点 Γ を持つ、円錐面に囲まれた立体図形ができるであろう。そこで前と同様に、それは、囲んでいる球の表面より小さな表面を持つであろう。



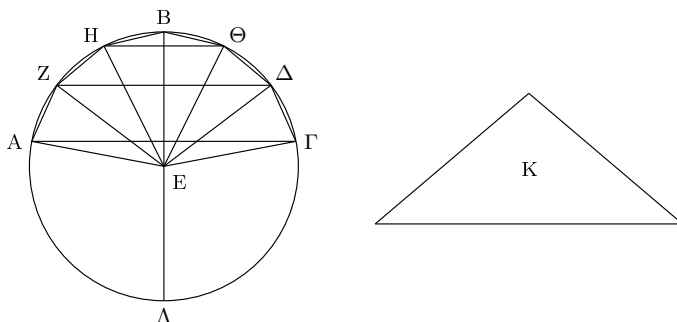
命題 37 球の切片に内接された図形の表面は、その半径が、切片の頂点から切片の底面である円の周囲に引かれた線分に等しいような円より小さい。

球があり、その中に大円 ABEZ があり、その球の中に、底面が直径 AB の円であるような切片があるとせよ。そして残りは前と同じとせよ。ΘA が球の直径で、ΔE、ΘA が結ばれたとき、その半径が AΘ に等しい円 M があるとせよ。円 M が、内接図形の表面より大きいことが証明されるべきである。



命題 38 円錐面によって囲まれた、半球より小さな球の切片の中の内接図形と、底面としてその図形と同じ底面を持ち、頂点として球の中心を持つ円錐との和は、底面としてその図形の表面に等しい円を持ち、高さとして球の中心から多角形の 1 辺へ引かれた垂線に等しい線分を持つ円錐に等しい。

球があり、その中に大円と、半円より小さい切片 ABΓ と、中心 E があるとせよ。そして切片 ABΓ の中に、前と同様に、AΓ を除いて偶数個の辺を持つ多角形が内接されたとせよ。そして、BA が固定され、球が回転し、円錐面によって囲まれたある図形を作るとせよ。そして直径 AΓ の周りの円上に、頂点として球の中心を持つ円錐が作られたとせよ。そして、底面として内接図形の表面に等しい円を持ち、高さとして中心 E から多角形の 1 辺へ引かれた垂線に等しい線分を持つ円錐 K が取られたとせよ。円錐 K が円錐面に囲まれた図形と円錐 AET の和に等しいことが証明されるべきである。

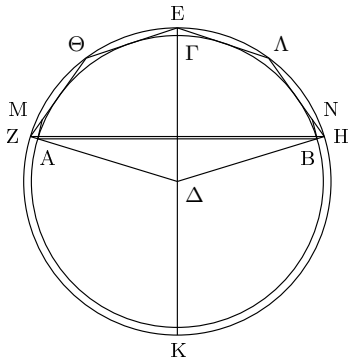


系 底面として、その半径が切片の頂点から切片の底面である円の周囲へ引かれた線分に等しい円を持ち、高さとして球の半径に等しい線分を持つ円錐は、内接図形と円錐の和よりも大きいことは明らかである。

命題 39 球の切片に外接された図形の表面は、球の切片の表面よりも大きい。

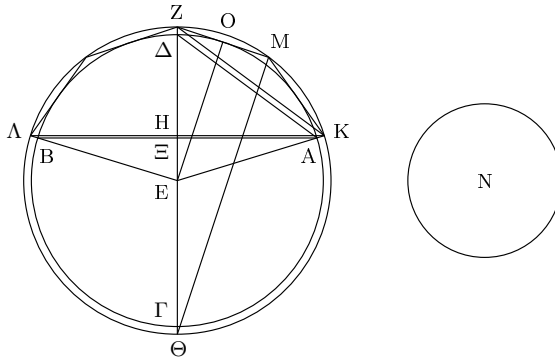
球があり、その中に大円 ABΓ があるとし、AB が切り離す、半円より小さい切片があるとせよ。そして点 Δ を中心とせよ。中心 Δ から A, B へ AΔ, ΔB が結ばれたとし、できた扇形の周りに多角形が外接され、その周りに円が外接されたとせよ。すると、それは円 ABΓ と同じ中心を持つであろう。そこで、もし EK が固定されて、多角形が回転して、その動きははじめた同じところに再びもどると、外接円は球の表面に沿って動くであろう。そして多角形の頂点は、その直径が、AB に平行に多角形の頂点を結ぶ線分であるような円を描くであろう。そして、多角形の各辺が小さい方の球に接する点は、その直径が AB に平行に接点を結ぶ線分であるような円を、より小さい球の中に描くであろう。そし

て各辺は、円錐の表面に沿って動くであろう。すると、その底面が、ZHの周りの円であるような、円錐の表面によって囲まれた外接立体ができるであろう。そこで、今述べた図形の表面は、その底面がABの周りの円である、より小さい(球の)切片の表面より大きい。



系 球の切片の周りの外接図形の表面は、その半径の平方が、多角形の1辺と、多角形の頂点を結ぶ線分の和と今述べた多角形の底辺の半分によって囲まれた長方形に等しいような円に等しいことも明らかである。

命題 40 球の切片に外接された図形の表面は、その半径が、切片の頂点から切片の底面である円の周へ引かれた線分に等しいような円より大きい。



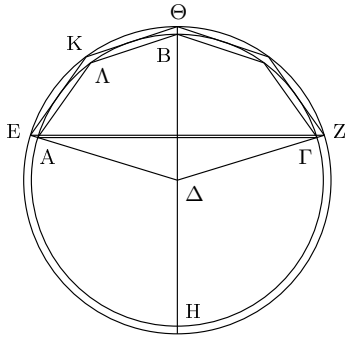
系 1 球の切片の周りに外接された図形と、その底面が直径KAの円で、頂点を中心である円錐の和は、その底面が外接図形の表面に等しく、高さが中心から辺へ引かれた垂線に等しい円錐に等しくなる。

系 2 外接図形と円錐との和は、その半径がより小さい球の切片の頂点から切片の底面である円の周囲へ引かれた線分に等しいような円を底面として持ち、半径に等しい線分を高さとして持つ円錐より大きいことも明らかである。

命題 41 球の切片への外接図形の表面は、相似な内接図形の表面に対して、外接多角形の1辺が内接多角形の1辺に対する比の平方比を持つ。そして外接図形と、切片と同じ底面で頂点が球の中心である円錐の和は、内接図形と、切片の同じ底面で頂点が球の中心である円錐の和に対して、上の比の立方比を持つ。

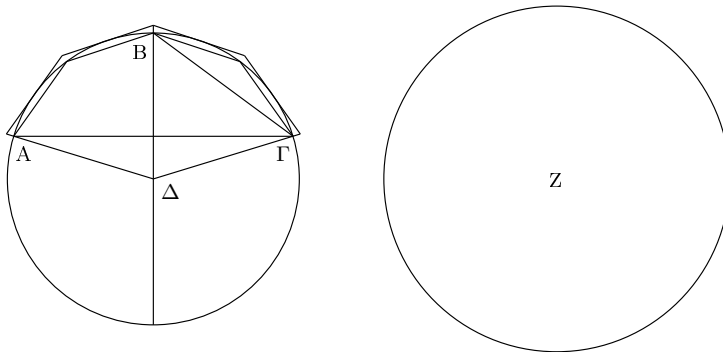
球とその中に大円と、半円より小さい切片ABΓがあるとし、中心をΔとせよ。そして扇形ABΓに偶数個の辺を持つ(等辺)多角形が内接されたとし、それに相似な多角形が外接されたとせよ。そし

て、それらの各辺が平行であり、外接図形の周りに円が外接されたとせよ。そして前と同様に、HB が固定されたまま、円が回転して、円錐面に囲まれた図形を作ったとせよ。外接図形の表面が内接図形の表面に対して、外接多角形の辺が内接多角形の辺に対する比の平方比を持ち、それらの図形とそれぞれの円錐との和は、同じ比の立方比を持つことが証明されるべきである。



命題 42 半球より小さい球の任意の切片の表面は、その半径が、切片の頂点から球の切片の底面である円の周囲に引かれた線分に等しいような円に等しい。

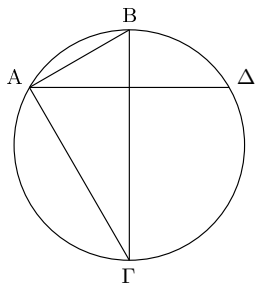
球と、その大円 ABΓ と、その中に、底面が、円 ABΓ に垂直な AΓ のまわりの円であるような、半球より小さい切片があるとせよ。そして、その半径が線分 AB に等しい円 Z を取るとせよ。そのとき、切片 ABΓ の表面が円 Z に等しいことを証明するべきである。



もしそうでないなら、切片の表面が円 Z より大きいとせよ。そして中心 Δ が取られたとせよ。そして Δ と A, Γ を結ぶ線分を延長せよ。すると、切片の表面と、円 Z という 2 つの異なる量があるから、外接多角形が内接多角形に対して、球の切片の表面が円 Z に対するよりも小さい比を持つように、等辺で偶数個の辺を持つ多角形が扇形 ABΓ に内接されたとせよ。そして、それに相似な別の多角形が外接されたとせよ。それから前と同様に、円が回転されると、円錐面によって囲まれた 2 つの立体ができるであろう。1 つは外接立体であり、もう 1 つは内接立体である。そして外接立体の表面は、内接立体の表面に対して、外接多角形が内接多角形に対するように対するであろう。なぜなら、それらの比の各々は、外接多角形の辺が内接多角形の辺に対して持つ比の平方比であるから。ところで、外接多角形は内接多角形に対して、上述の切片の表面が円 Z に対するよりも小さい比を持ち、また、外接多角形の表面は、その切片の表面より大きい。それゆえ、内接立体の表面は、円 Z より大きい。これは不可能である。なぜなら、上述の内接立体の表面は、円 Z より小さいことが証明されたから。

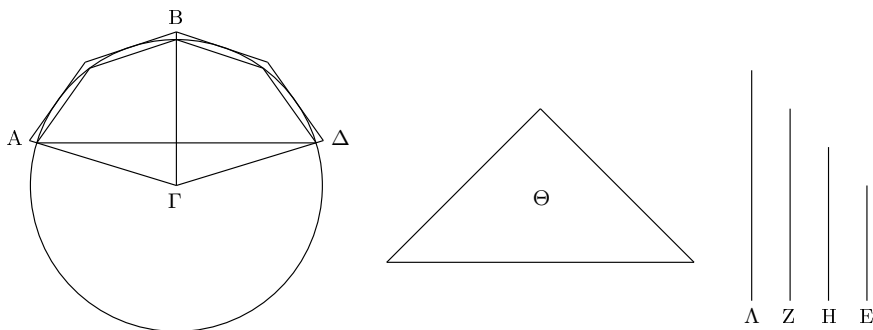
次に、円 Z が切片の表面より大きいとせよ。そこで、相似な多角形が外接され、内接されたとせよ。そして、外接多角形が内接多角形に対して、円 Z が切片の表面に対するよりも小さい比を持つとせよ。すると円 Z の表面は切片の表面より大きくない。そして、小さくもないことが証明された。したがって、等しい。

命題 43 たとえもし切片が半球より大きいとしても、同様にその表面は、その半径が、頂点から切片の底面である円の周囲に引かれた線分に等しいような円に等しい。



命題 44 任意の立体扇形は、立体扇形に沿った球の切片の表面に等しい底面を持ち、球の半径に等しい高さを持つような円錐に等しい。

球と、その中に大円 $AB\Delta$ があるとし、中心を Γ とせよ。そして底面として、弧 $AB\Delta$ に沿った表面に等しい円を持ち、 $B\Gamma$ に等しい高さを持つ円錐があるとせよ。立体扇形 $AB\Gamma\Delta$ が、上述の円錐に等しいことが証明されるべきである。



もしそうでないなら、立体扇形が円錐より大きいとせよ。そして上で述べたような円錐 Θ があるとせよ。すると、立体扇形と円錐 Θ という 2 つの異なる量があるので、2 線分 Λ , E が見出されて、 Λ が E より大きいとし、 Λ が E に対して、立体扇形が円錐に対するよりも小さい比を持つようにしたとせよ。そして、線分 Λ が Z を、 Z が H を、 H が E を、等しいだけ凌駕するように、2 つの線分 Z , H が取られたとせよ。そして、外接多角形の辺が内接多角形の辺に対して、線分 Λ が Z に対するよりも小さい比を持つように、円の平面扇形の周りに、等辺で偶数個の辺を持つ多角形が外接されたとし、それに相似な多角形が内接されたとせよ。そして前と同様に、円を回転して、円錐面によって囲まれた 2 つの立体が作られたとせよ。すると、頂点として点 Γ を持つ円錐と外接立体の和は、その円錐と内接立体の和に対して、外接多角形の辺が内接多角形の辺に対して持つ比の立方比を持つ。ところで、外接多角形の辺は内接多角形の辺に対して、線分 Λ が Z に対するよりも小さい比を持つ。それゆえ、上述の立体の比は、線分 Λ の Z に対する比の立方比より小さい比を持つであろう。ところで、線分 Λ は E に対して、線分 Λ の Z に対する比の立方比より大きな比を持つ。したがって、立体扇形に外接された立体図形は、内接立体に対して、線分 Λ が E に対するより小さな比を持つ。ところで、線分 Λ は E に対して、立体扇形が円錐 Θ に対するより小さい比を持つ。したがって、立体扇形は円錐 Θ に対して、立体扇形に外接された立体が内接立体に対するよりも大きな比を持つ。そして (第 2 項と第 3 項) をいれかえてみよ。ところで外接立体図形は、その切片より大きい。したがって、立体扇形の中の内接立体は、円錐 Θ より大きくなる。これは不可能である。なぜなら、それは、そのような円錐より小さいと前に証明されたから。それゆえ、立体扇形は円錐 Θ より大きくない。

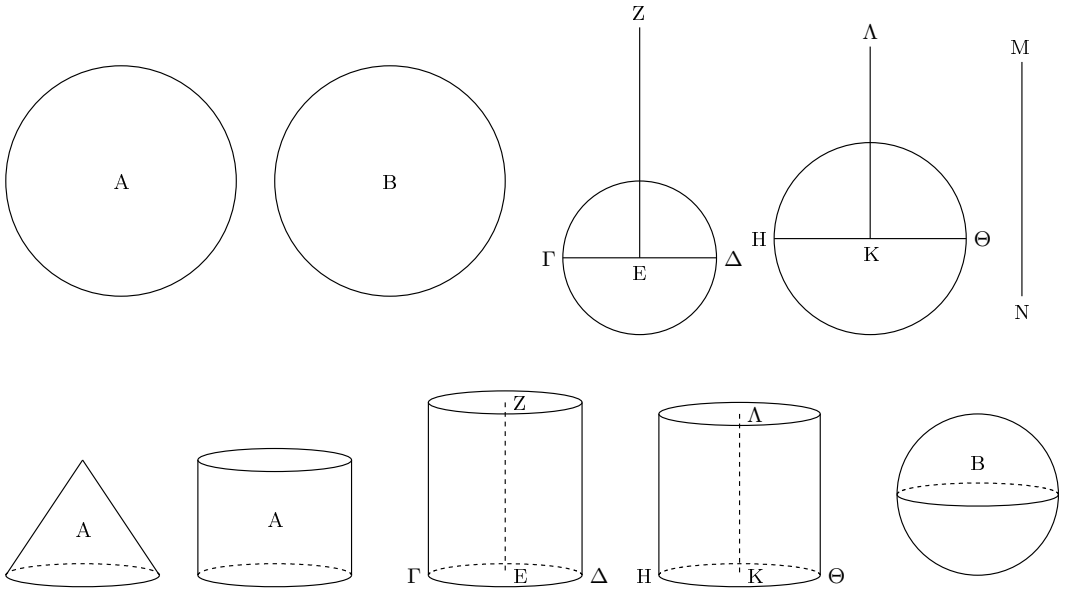
さて次に、円錐 Θ が立体扇形より大きいとせよ。再び同様に、線分 Λ が E より大きいとして、 Λ が E に対して、円錐 Θ が立体扇形に対するより小さい比を持つとせよ。そして同様に、その差が前と同

じように、線分 Z , H が取られたとせよ。そして、平面扇形の周りに外接された、偶数個の辺を持つ多角形の辺が内接多角形の辺に対して、線分 Λ が Z に対するより小さな比を持つとせよ。すると同様に、立体扇形の周りの外接立体が内接立体に対して、線分 Λ が E に対するよりも小さい比を持ち、そして円錐 Θ が立体扇形に対するより小さい比を持つことが証明されるであろう。ところで、立体扇形はそれへの内接立体より大きい。したがって、円錐 Θ は外接立体より大きい。これは不可能である。[それゆえ、円錐 Θ は立体扇形よりと大きくない。] それゆえ、立体扇形は円錐 Θ に等しい。

球と円柱について 第2巻
 Περὶ Σφαιράρας καὶ Κυλίνδρου
 De Sphaera et Cylindro

命題1 [問題] 第2 (の問題) は、円錐あるいは円柱が与えられたとき、その円錐あるいは円柱に等しい球を見出すこと、である。

与えられた円錐あるいは円柱が A であり、図形 A に等しい球が B であるとする。円錐あるいは円柱 A より半分だけ大きい円柱 $\Gamma\Delta$ が、そして球 B より半分だけ大きく、その底面は直径 $H\Theta$ のまわりに描かれた円であり、さらに軸 $K\Lambda$ は球 B の直径に等しい、円柱が描かれたとする。それゆえ、円柱 E は円柱 K に等しい。



円柱 E と円柱 K は等しいから、その底面積と高さは反比例する。したがって、 $K\Lambda = H\Theta$ であることから、 $\Gamma\Delta^2 : H\Theta^2 = K\Lambda : EZ = H\Theta : EZ$ となる。

ここで、 $H\Theta^2 = \Gamma\Delta \times MN$ となるような線分 MN を定めたとすると、 $\Gamma\Delta : H\Theta = H\Theta : MN \dots$ ① となる。さらに、 $H\Theta : EZ = \Gamma\Delta^2 : H\Theta^2 = \Gamma\Delta^2 : \Gamma\Delta \times MN = \Gamma\Delta : MN$ となる。これから、 $\Gamma\Delta : H\Theta = MN : EZ \dots$ ② がいえる。

それゆえ、①、②から、 $\Gamma\Delta : H\Theta = H\Theta : MN = MN : EZ$ となる。すなわち、 $H\Theta$ 、 MN は $\Gamma\Delta$ と EZ の間の2つの比例中項となる。

したがって、与えられた円錐あるいは円柱に対して、体積がその $3/2$ 倍の円柱をつくり、その円柱の底面の直径と高さの間の2つの比例中項を見出し、そのうちの底面の直径に近い方の値を直径とする球をつくれれば、その球が求める球になる、はず。

例えば、A を底面の半径が $r = 3$ 、高さが $h = 4$ の円柱とすると、円柱 E は底面の直径が $\Gamma\Delta = 2r = 2 \times 3 = 6$ 、高さが $EZ = (3/2)h = (3/2) \times 4 = 6$ となる。そして、それらの間の比例中項を求めると、 $H\Theta = MN = 6$ が得られる。よって、 $H\Theta = 6$ を直径、すなわち $R = 3$ を半径、とする球が求める球 B となる。実際、円柱 A の体積は $V_A = \pi \times 3^2 \times 4 = 36\pi$ で、円柱 E の体積は $V_E = \pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi = (3/2)V_A$ 、球 B の体積は $V_B = (4/3) \times \pi \times 3^3 = 36\pi$ である。

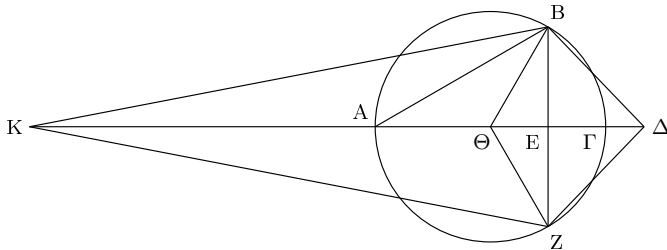
また、A が底面の半径が $r = 6$ 、高さが $h = 3$ である円錐の場合は、体積 $3/2$ 倍の円柱 E は底面の直径が $\Gamma\Delta = 2r = 12$ 、高さが $EZ = (1/2)h = (1/2) \times 3 = 3/2$ となる。これらの間の比例中項

は $H\Theta = 6$, $MN = 3$ であるから, 求める球 B の半径として $R = 6 \div 2 = 3$ とすればよい。実際, それぞれの立体の体積は $V_A = (1/3) \times \pi \times 6^2 \times 3 = 36\pi$, $V_e = \pi \times 6^2 \times (3/2) = 54\pi = (3/2)V_A$, $V_B = (4/3) \times \pi \times 3^3 = 36\pi$ である。

なお, 「第 1 の問題」は「序文」中に現れる問題で, 「球が与えられたとき, その球の表面に等しい平面領域を見出すこと」というもの。

命題 2 球の任意の切片は, その切片と同じ底面を持っており, さらに, その高さは, 切片の高さに対して, 球の半径と残りの切片の高さと [の和] が残りの切片の高さに対するのと同じ比を持つ線分であるような, 円錐に等しい。

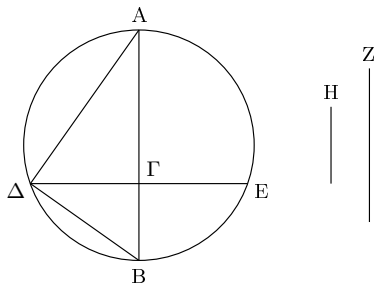
球と, その中に大円があるとし, その直径を $A\Gamma$ とせよ。そして, 球が線分 $A\Gamma$ に垂直に取られた線分 BZ を通る平面によって切られるとせよ。そして, [大円の] 中心を Θ とせよ。そして, $\Theta A + AE : AE = \Delta E : \Gamma E$ とせよ。そしてさらに, $\Theta\Gamma + \Gamma E : \Gamma E = KE : EA$ とせよ。そして, 直径 BZ のまわりに描かれた円 [の上] に, 頂点として点 K, Δ を持っている円錐がつけられるとせよ。私は, 円錐 $B\Delta Z$ が点 Γ がおかれた方の球の切片に, さらに円錐 BKZ が点 A がおかれた方の切片に等しい, と言う。



系 球のすべての切片は, その切片と同じ底面と等しい高さを持っている円錐に対して, 球の半径と残りの切片の高さと [の和] が残りの切片の高さに対するのと同じ比を持つことは明らかである。

命題 3 [問題] 第 3 の問題はこうである。球が与えられたとき, 切片の表面が互いに与えられた比を持つように, 平面によって [その球を] 切断すること。

$A\Delta BE$ を球の大円とし, その直径を AB とせよ。そして, 線分 AB に垂直な平面が取られ, 切断面の円 $A\Delta BE$ におけるその平面が線分 ΔE になり, 線分 $A\Delta, B\Delta$ が引かれるとせよ。

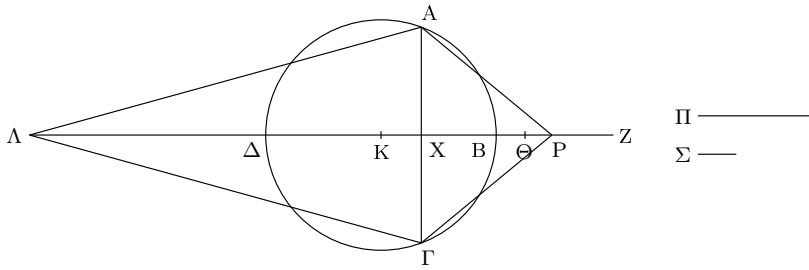


与えられた比を $Z : H$ とするとき, $A\Gamma : B\Gamma = Z : H$ となるような点 Γ を通り, 大円 $A\Delta BE$ に垂直な平面によって切断すればよい。

切片 $A\Delta E$ の表面は半径が $A\Delta$ の円に等しいことなどによる。

命題 4 [問題] 球が与えられたとき, 球の切片が互いに与えられた比を持つように, [平面によってその球を] 切断すること。

与えられた球を $AB\Gamma\Delta$ とせよ。それゆえ、それを、球の切片が互いに与えられた比を持つように、平面によって切断すべきである。



与えられた比を $\Pi : \Sigma$ (ただし、 $\Pi > \Sigma$) とする。直径 ΔB の延長上に $KB = BZ$ となる点 Z をとり、さらに、線分 BZ 上に $\Theta Z : \Theta B = \Pi : \Sigma$ となる点 Θ をとり、そして、線分 $B\Delta$ 上に $XZ : \Theta Z = B\Delta^2 : \Delta X^2$ となる点 X をとり、その点 X を通り、直径 $B\Delta$ に垂直な平面で与えられた球を切断すればよい、という。

例えば、半径が $r = 60$ の球を $\Pi : \Sigma = 3 : 1$ に分割したいとすると ……

まず、 $\Theta Z : \Theta B = 3 : 1$ とすると、 $BZ = 60$ より、 $\Theta Z = 45$ 、 $\Theta B = 15$ となる。

次に、 $BX = x$ と表すと、 $XZ : \Theta Z = B\Delta^2 : \Delta X^2$ は $(x + 60) : 45 = 120^2 : (120 - x)^2$ ということになる。この式を展開して整理すると、 $x^3 - 180x^2 + 216000 = 0$ となる。これから x を求めると $x = 39.1622186\dots$ 、すなわち $BX \cong 39$ が得られる。

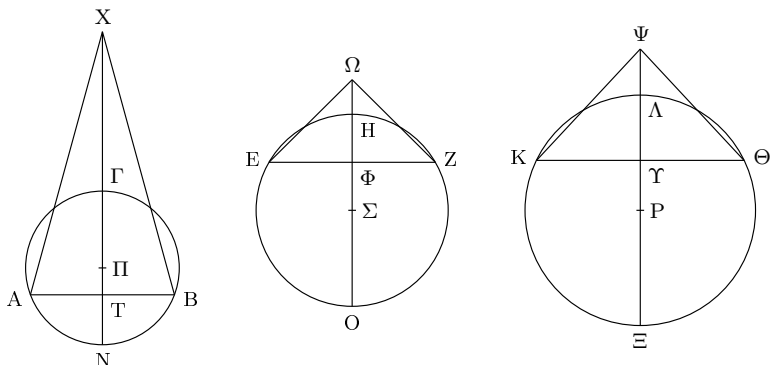
さて、切片に等しい円錐を求めるために、 $(K\Delta + \Delta X) : \Delta X = PX : XB$ とすると、 $\Delta X = B\Delta - BX = 120 - 39 = 81$ より、 $141 : 81 = PX : 39$ ということだから、 $PX = 611/9 = 67.888\dots \cong 68$ が得られる。また、 $(KB + BX) : BX = \Delta X : X\Delta$ とすると、 $99 : 39 = \Delta X : 81$ より、 $\Delta X = 2673/13 = 205.6153\dots \cong 206$ となる。

それゆえ、切片 $A\Delta\Gamma$: 切片 $AB\Gamma$ = 円錐 $AA\Gamma$: 円錐 $AP\Gamma$ = $\Delta X : PX \cong 206 : 68 = 3.0294\dots : 1$ ということになる。

ちなみに、 $BX = 39.2$ とすると、 $PX = 68.3089\dots$ 、 $\Delta X = 204.4734\dots$ となるから、 $PX = 68$ 、 $\Delta X = 204$ とれば $3 : 1$ である。

命題5 [問題] 与えられた [ある] 球の切片に相似であり、与えられた別の同じもの [別の球の切片] に等しい、球の切片を作図すること。

与えられた2つの球の切片を $AB\Gamma$ 、 EZH とせよ。そして、切片 $AB\Gamma$ の底面が直径 AB のまわりに描かれた円で、頂点が点 Γ であり、さらに、切片 EZH の底面が直径 EZ のまわりに描かれた円で、頂点が点 H であるとせよ。それゆえ、切片 $AB\Gamma$ に等しく、切片 EZH に相似な、切片がつくられるべきである。



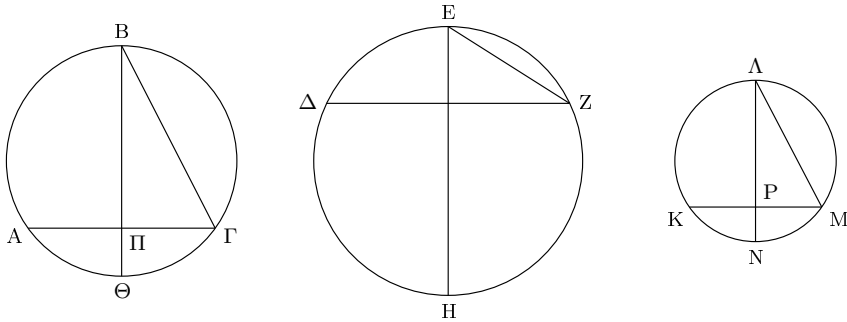
与えられた2つの切片 $AB\Gamma$, EZH について、それらの切片の球の大円をそれぞれ $A\Gamma BN$, $EHZO$, それらの直径を ΓN , HO , それらの中心を Π , Σ とする。まず, $\Pi N + NT : NT = XT : T\Gamma$, $\Sigma O + O\Phi : O\Phi = \Omega\Phi : \Phi H$ となる点 X , Ω を定める。

次に, $\Omega\Phi : EZ = XT : \Delta$ となる線分 Δ を定め, 線分 AB と Δ の間の2つの比例中項 ΘK , ς ($AB : \Theta K = \Theta K : \varsigma = \varsigma : \Delta$) を求める。

そして, 線分 ΘK 上に円の切片 EZH に相似な円の切片 $K\Theta\Lambda$ をつくり, その切片を基に完全な円 $K\Lambda\Theta\Xi$ をつくる。この円 $K\Lambda\Theta\Xi$ を回転してできる球の切片 $K\Theta\Lambda$ が求める切片となる, という。

命題6 [問題] 同じであろうと同じでなかろうと, 2つの球の切片が与えられたとき, 与えられた一方 [の切片] には相似であり, そして, その表面が他方の切片の表面に等しいような, 球の切片を見出すこと。

弧 $AB\Gamma$, ΔEZ の中に描かれた球の切片が与えられたとせよ。弧 $AB\Gamma$ の中に描かれた切片が見出されるであろう切片に相似であり, さらに, 弧 ΔEZ の中に描かれた切片が探し求められた切片の表面に等しい表面を持つべきである。



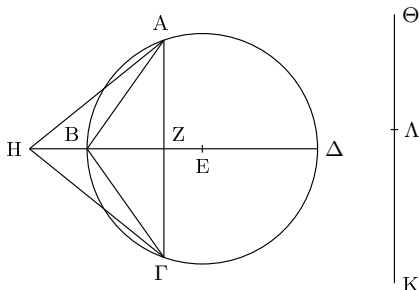
与えられた2つの球の切片について、それらの球の大円をそれぞれ $AB\Gamma\Theta$, ΔEZH とし, 直交する2線分 $A\Gamma$, $B\Theta$ の交点を Π とする。

まず, $B\Gamma : EZ = B\Theta : \Lambda N$ となる線分 ΛN を定め, その線分 ΛN を直径とする円を描く。そして, その円を回転させて球をつくる。

次に, 線分 ΛN 上に, $\Theta\Pi : \Pi B = NP : P\Lambda$ となる点 P をとり, その点 P を通り, 線分 ΛN に垂直な平面で先程つくった球を切断すれば, 切片 $K\Lambda M$ が得られる。この切片 $K\Lambda M$ が求める切片となる, という。

命題7 [問題] 与えられた球から, 切片がその切片と同じ底面と等しい高さを持っている円錐に対して与えられた比を持つように, 平面によって切片を切り出すこと。

与えられた球が, その大円が $AB\Gamma\Delta$ であり, さらに, その直径が $B\Delta$ であるとせよ。それゆえ, 球を $A\Gamma$ を通って引かれた平面によって, 球の切片 $AB\Gamma$ が円錐 $AB\Gamma$ に対して与えられた比を持つように, 切断すべきである。

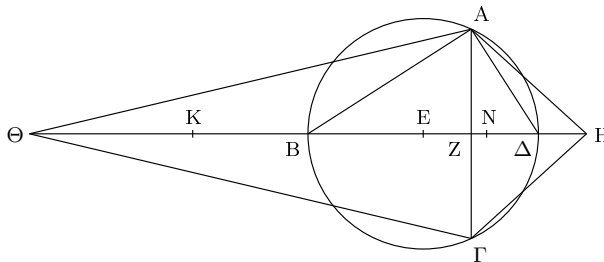


与えられた球の大円を $AB\Gamma\Delta$ とし、その直径を $B\Delta$ 、中心を E とする。そして、与えられた比を $\Theta K : K\Lambda$ とする。ただし、この比は $3 : 2$ より大きいものとする。このとき、 $(E\Delta + \Delta B) : \Delta B = 3 : 2$ だから、 $\Theta K : K\Lambda > (E\Delta + \Delta B) : \Delta B$ となる。

さて、 $\Theta\Lambda : \Lambda K = E\Delta : \Delta Z$ となるように点 Z を定め、その点 Z を通って、線分 $B\Delta$ に垂直な線分を $A\Gamma$ とする。そして、線分 $A\Gamma$ を含み、線分 $B\Delta$ に垂直な平面で与えられた球を切断してできる切片 $AB\Gamma$ が求める切片である、という。

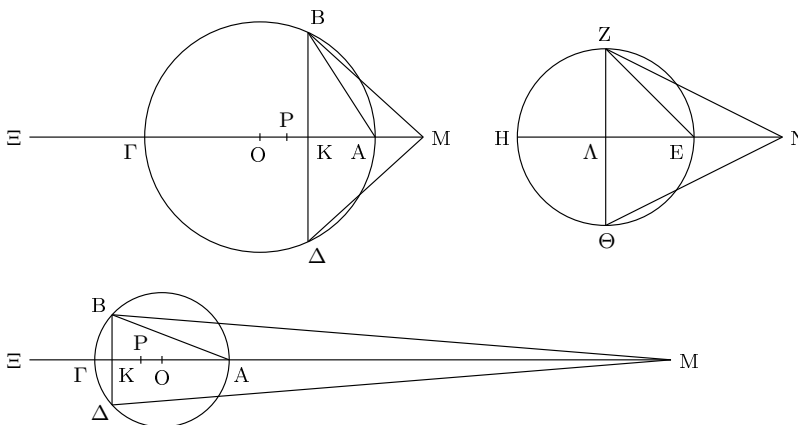
命題 8 もし球が中心を通らずに引かれた平面によって切断されるならば、大きい方の切片は小さい方 [の切片] に対して、大きい方の切片の表面が小さい方 [の切片] の表面に対して持っている比の 2 倍よりは小さく、さらに、1 倍半よりは大きい比を持つ。

球があるとし、その大円が $AB\Gamma\Delta$ 、直径が $B\Delta$ であり、そして、[その球が] 線分 $A\Gamma$ を通って円 $AB\Gamma\Delta$ に垂直な平面によって切断されるとし、球の大きい方の切片を $AB\Gamma$ とせよ。私は、切片 $AB\Gamma$ が $A\Delta\Gamma$ に対して、大きい方の切片の表面が小さい方 [の切片] の表面に対する比の 2 倍よりは小さく、さらに、1 倍半よりは大きい比を持つ、と言う。



命題 9 等しい表面によって囲まれる、球のすべての切片のうちで最大のものは半球である。

[ある] 球の大円を $AB\Gamma\Delta$ 、その直径を $A\Gamma$ とし、別の球の大円を $EZH\Theta$ 、その直径を $E\Theta$ とせよ。そして、一方の球は中心を通る、しかし、他方は中心を通らない、平面によって切断されるとせよ。切断している平面が直径 $A\Gamma$ 、 $E\Theta$ に垂直であり、線分 ΔB 、 $Z\Theta$ において切断するとせよ。



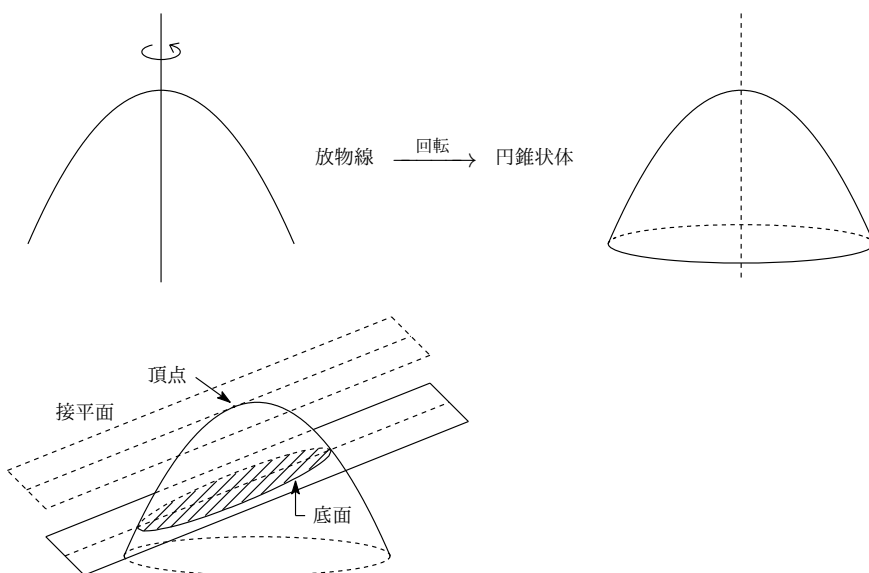
上の図で、 $\Gamma\Xi : \Gamma K = MA : AK$ 、 $AP^2 = AK \times \Gamma\Xi = (1/2)AB^2$ である。
また、 $EN = EA$ 、 $EZ = AB$ である。

螺線について

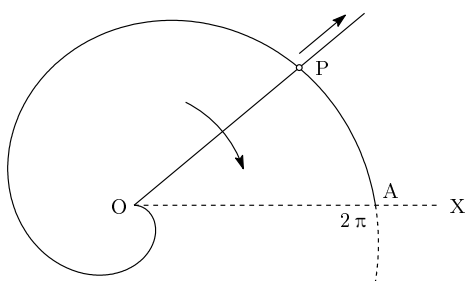
Περὶ Ἑλίκων

De Lineis Spiralibus

定義 (序文中) もし直角円錐切断 [放物線] がその直径を固定したままで、直径を軸として、回転されるならば、その直角円錐切断によって囲まれた図形は円錐状体と呼ばれるとせよ。そして、もし [ある] 平面が円錐状体に接し、接している [その] 平面に平行な別の平面が円錐状体の何らかの切片を切り離すならば、切り離している平面は切り離された切片の底面と、さらに、そこにおいて [元の] 平面が円錐状体に接する、点は頂点と呼ばれるとせよ。



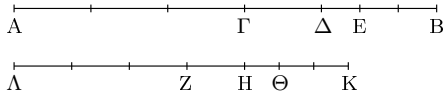
もし直線が、その一方の端点を固定したままで、平面上を一様に回転させられて再び、そこから回転が始められた、同じ位置に戻され、そして、同時に、[直線が] 回転させられる間に、何らかの点が固定された端点から始めてその直線自身の上を一様に前進させられるならば、その点はその平面上で螺線を描くであろう。



命題 1 もし任意の直線の上の何らかの点がそれ自身の上を一様に運ばれ、その上に 2 つの直線 [線分] がとられるならば、とられたそれらの直線 [線分] はその点が通り過ぎた時間と同じ比を持つであろう。

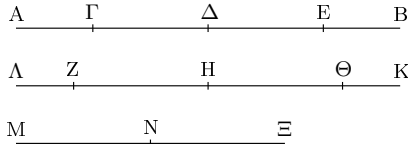
なぜならば、何らかの点が直線 AB の上を一様に運ばれるとし、その上に 2 つの直線 $\Gamma\Delta$, ΔE がと

られるとせよ。さらに、その点が直線 $\Gamma\Delta$ を通り過ぎた時間が ZH 、直線 ΔE [を] 通り過ぎた時間が $H\Theta$ であるとせよ。 $\Gamma\Delta : \Delta E = ZH : H\Theta$ であることが証明されなければならない。



命題 2 もし 2 つの点が、それら自身がそこにある、任意の直線の上を一様に運ばれ、そして、いずれの直線の上にも 2 つの直線がとられ、それらの直線の前者も後者も等しい時間にそれらの点によって通り過ぎられるとするならば、とられたそれらの直線は互いに同じ比を持つであろう。

直線 AB の上にある何らかの点がそれ自身の上を一様に運ばれ、そして、直線 KA の上にある何らかの点も同様であるとせよ。さらに、直線 AB の上に 2 つの直線 $\Gamma\Delta$ 、 ΔE が、直線 KA の上に直線 ZH 、 $H\Theta$ がとられ、直線 AB の上を運ばれる点が、直線 KA の上を運ばれるもう 1 つの点が直線 ZH を通り過ぎるのと、同じ時間に直線 $\Gamma\Delta$ を通り過ぎるとせよ。そしてまた、同様に、直線 ΔE を、もう 1 つの [点] 直線 $H\Theta$ を通り過ぎるのと、同じ時間に [第 1 の] 点が通り過ぎるとせよ。 $\Gamma\Delta : \Delta E = ZH : H\Theta$ であることが証明されなければならない。

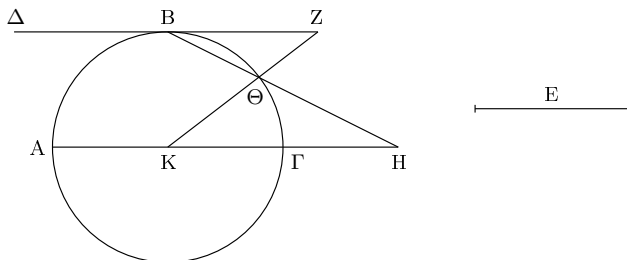


命題 3 任意個数の円が与えられると、それらの円の周囲 [の和] より大きくなるような直線をとることができる。

命題 4 2 つの不等な線、[すなわち] 直線と円の周囲、が与えられると、与えられた線の大きい方よりは小さく、小さい方よりは大きくなるような直線をとることができる。

命題 5 円およびその円に接している直線が与えられると、円の中心から接している直線に、接している直線と円の周囲の間におかれた直線が半径に対して、接している点と延長された直線の間におかれた円の周囲が与えられた任意の円の周囲に対するのと、同じ比を持つような直線を引くことができる。

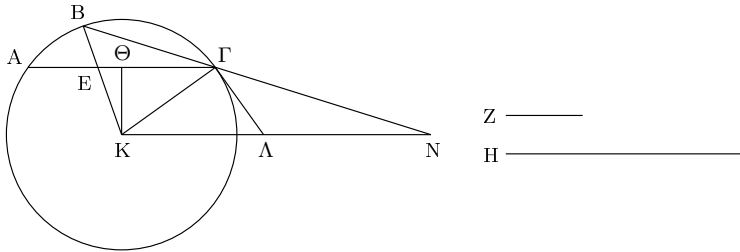
与えられた円を $AB\Gamma$ として、その中心を K とし、 ΔZ が B においてその円に接するとせよ。さらに、与えられた任意の円の周囲があるとせよ。それゆえ、任意の与えられた周囲より大きい直線をとることができ [るから]、 E が与えられた周囲より大きいとせよ。さらに、中心 K から直線 ΔZ に平行な直線 AH が引かれ、直線 E に等しい、点 B の方に傾いている、直線 $H\Theta$ が描かれるとし、点 K から Θ に引かれた直線が延長されるとせよ。それゆえ、 $\Theta Z : \Theta K = B\Theta : \Theta H$ であろう。



命題 6 円およびその円の中に直径より小さい直線が与えられると、円の中心からその [円の] 周囲の方に [引かれる]、円の中で与えられた直線を切断している、直線 [の中] で、[円の] 周囲

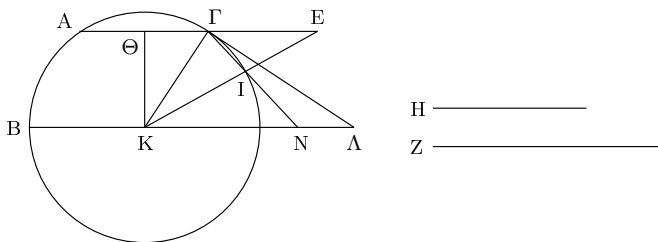
と円の中に与えられた直線とに挟まれた直線 [BE] が、その直線の端点から、円の中に与えられた直線の両方の端点まで引かれた、[円の] 周囲の方に引かれる直線 [BΓ] —— それは [円の] 周囲の中にある —— に対して、与えられた比 [Z : H] を持つようなものが —— もし与えられた比が円の中に与えられた直線の半分の部分が中心からそれに対して垂直に引かれた直線に対して持っているそれより小さければ —— 描かれるようにすることができる。

与えられた円が ABΓ であるとして、その中心が K、その中において与えられた直径より小さい直線が ΓA であるとし、Z : H が持っている比が ΓΘ : KΘ —— KΘ は [直線 ΓA に] 垂直に引かれた直線 —— が持っているそれより小さいとせよ。さらに、中心から直線 AΓ に平行な直線 KN が、そして、KΓ に垂直な直線 ΓΛ が引かれるとせよ。… [中略] … EB : BΓ = Z : H であろう。



命題 7 同様のものが与えられ、そして、円の中におかれた直線が延長されると、中心から延長された直線の方に [引かれる] 直線 [の中] で、[円の] 周囲と延長された直線との間にあるその直線 [の部分] [EI] が、円の中に含まれた直線の端点から延長された [直線の] 端点の方に引かれる直線 [IΓ] に対して、与えられた比 [Z : H] を持つようなものが —— もし与えられた比が円の中に与えられた直線の半分の部分が中心からそれに垂直に引かれた直線に対して持っているそれより大きければ —— 描かれるようにすることができる。

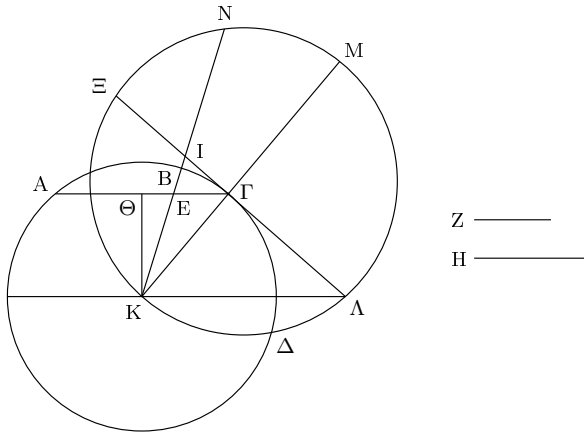
同様に与えられたとして、円の中におかれた直線が延長され、与えられた比 Z : H が ΓΘ : ΘK より大きいとせよ。… [中略] … EI : IΓ = Z : H であろう。



命題 8 円とその円の中にある直径より小さい直線、そして、円の中に与えられたその直線の端点においてその円に接している別の直線が与えられると、円の中心から与えられた直線の方に [引かれる] 直線 [の中] で、円の周囲と円の中に与えられた直線との間に切り取られるその [直線の] 部分が切り取られた接している直線の部分に対して、与えられた比を持つようなものが —— もし与えられた比が円の中に与えられた直線の半分の部分が中心からそれに引かれた垂直な直線に対して持っているそれより小さければ —— 描かれるようにすることができる。

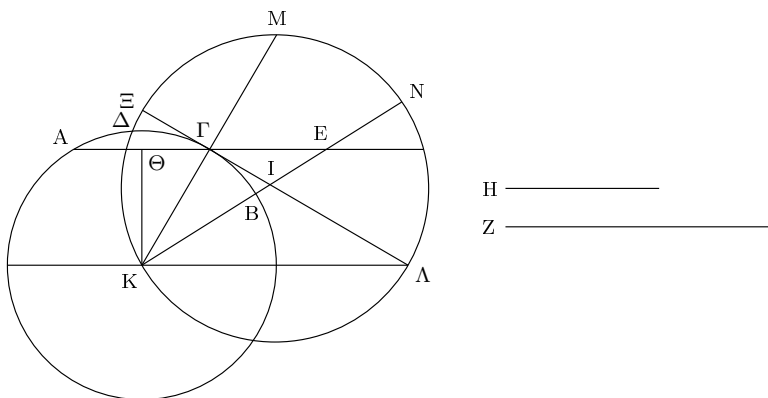
与えられた円が ABΓΔ であるとして、その中に与えられた、直径より小さい、直線が ΓA、点 Γ において円に接する直線が EΓ であり、ΓΘ : ΘK より小さい与えられた比が Z : H であるとせよ。それゆえまた、もし ΘΓ に平行な直線 KA が引かれるならば、Z : H < ΓK : ΓA であろう。それゆえ、

$K\Gamma : \Gamma\Xi = Z : H$ であるとせよ。それゆえ、 $\Xi\Gamma > \Gamma\Lambda$ であろう。点 K, Λ, Ξ を通る円の周囲が描かれるとせよ。… [中略] … $BE : I\Gamma$ は $Z : H$ と同じ比を持つ。



命題 9 同様のものが与えられ、そして、円の中におかれた直線が延長されると、円の中心から延長された直線の方に [引かれる] 直線 [の中] で、[円の] 周囲と延長された直線との間におかれた直線が、接している直線の、接点の方に切り取られる、部分に対して、与えられた比を持つようなものが —— もし与えられた比が円の中に与えられた直線の半分の部分が中心からそれに引かれた垂直な直線に対してているそれより大きければ —— 描かれるようにすることができる。

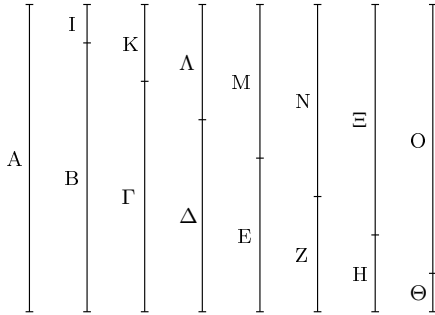
与えられた円が $AB\Gamma\Delta$ であるとして、その中に直径より小さい直線 ΓA が与えられ、直線 $\Xi\Gamma$ が点 Γ において円に接するとし、 $\Gamma\Theta : \Theta K$ より大きい与えられた比が $Z : H$ であるとせよ。それゆえまた、 $Z : H > K\Gamma : \Gamma\Lambda$ であろう。それゆえ、 $K\Gamma : \Gamma\Xi = Z : H$ であるとせよ。… [中略] … $BE : I\Gamma$ は $Z : H$ と同じ比を持つ。



命題 10 もし、次々と互いに等しい空間だけ超えていく、任意個数の直線が与えられ、そして、その超過分は最小のものに等しく、そしてさらに、それらに等しい数の別の直線が与えられ、さらに、大きさにおいてそのそれぞれが最大のものに等しければ、最大の直線に等しいもの [すべて] の平方 [の和] と、最大のもの平方と、最小の直線と超過分が互いに等しい空間であるすべての直線が同時に [とられたものと] 囲まれた長方形 [の 3 つのもの] が加えられたものは、超過分が互いに等しい空間である直線すべての平方 [の和] の 3 倍に等しいであろう。

次々と互いに等しい空間だけ超えていく任意個数の直線が $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$ であるとし、 Θ が超過分であるとせよ。そして、直線 B に直線 Θ に等しい直線 I が付け加えられ、さらに、 Γ に直

線 H に等しい直線 K が、さらに、 Δ に直線 Z に等しい直線 Λ が、さらに、E に直線 E に等しい直線 M が、さらに、Z に直線 Δ に等しい直線 N が、さらに、H に直線 Γ に等しい直線 Ξ が、さらに、 Θ に直線 B に等しい直線 O が付け加えられるとせよ、それゆえ、つくられる直線は互いに最大の直線に等しいであろう。それゆえ、直線 A の、および、付け加えられることによってつくられる、それらすべての直線の平方 [の和]、それに、直線 A の平方、および、直線 Θ とすべての直線 A, B, Γ , Δ , E, Z, H, Θ とが同時に [とられたもので] 囲まれた長方形 [の 3 つのものの和] が、直線 A, B, Γ , Δ , E, Z, H, Θ のすべての平方 [の和] の 3 倍に等しいことが証明されなければならない。



ϑ を最小のものとする、超過分も ϑ であるということだから、与えられた数列は初項 $a_1 = \vartheta$ 、公差 $d = \vartheta$ の等差数列ということになる。それゆえ、第 n 項は $a_n = n\vartheta$ となる。さて、この数列の初項から第 n 項までを考えると、最大項は末項の第 n 項である。そして、何らかのものを付け加えてつくられる新しい数列はすべての項が最大項に等しく、項数は同じく n である。

この命題の主張は、

$$n(a_n)^2 + (a_n)^2 + a_1(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = 3\{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \dots + (a_n)^2\}$$

すなわち、

$$n(n\vartheta)^2 + (n\vartheta)^2 + \vartheta(\vartheta + 2\vartheta + \dots + n\vartheta) = 3\{(\vartheta)^2 + (2\vartheta)^2 + \dots + (n\vartheta)^2\}$$

あるいは、

$$(n+1)n^2 + 1 \cdot (1+2+\dots+n) = 3(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

ということ。

系 このことから、[互いに] 等しい最大の直線の平方のすべて [の和] は、互いに等しい空間だけ超えていく直線の平方の [すべての和の] 3 倍よりはずっと小さく、しかし、最大のものの平方を除いた残りの [ものの平方の和の] 3 倍よりはずっと大きい、ことは明らかである。

そしてまた、もし、互いに超えていく空間に等しいそれらも、最大のものに等しいそれらも、類似の形がすべての直線の中に構成されるならば、直線において最大のものに等しい形 [のすべての和] は、直線において互いに超えていく空間に等しいものとして構成された形の [すべての和の] 3 倍よりはずっと小さく、しかし、最大のものとして構成されたものを除いた残りの [ものの和の] 3 倍よりはずっと大きい。

$$3\{(\vartheta)^2 + \dots + ((n-1)\vartheta)^2\} < n(n\vartheta)^2 < 3\{(\vartheta)^2 + \dots + ((n-1)\vartheta)^2 + (n\vartheta)^2\}$$

あるいは、

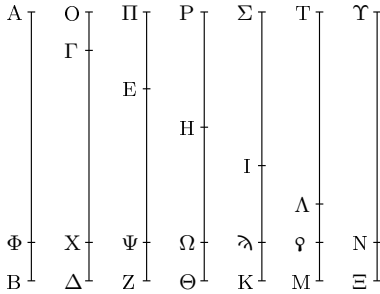
$$3\{1^2 + \dots + (n-1)^2\} < n^3 < 3\{1^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2\}$$

ということ。

命題 11 もし、次々と等しい空間が互いに超えていく、任意個数の直線が定められ、そして同様に、数においては互いに超えていく空間に等しい直線より 1 つだけ少なく、そして、大きさにお

いてはそのそれぞれが最大のものに等しい、別の直線が定められるならば、最大のものに等しい直線の平方のすべて [の和] は、互いに超えていく空間に等しい直線の平方 [の和]、および、最小のもの平方 [との和] に対しては、最大のものの平方が、最大のものと最小のものとの囲まれた長方形と、最大のものが最小のものを超える超過分の平方の 3 分の 1 との両方 [の和] に等しい空間に対するより小さい比を持ち、しかし、互いに超えていく空間に等しい直線の平方 [の和] と最大のものの平方 [との和] に対しては同じ比より大きい比を持つ。

直線 AB が直線 ΓΔ を、ΓΔ が直線 EZ を、EZ が直線 HΘ を、HΘ が直線 IK を、IK が直線 ΛM を、ΛM が直線 NΞ を超えるように、次々と互いに等しい空間だけ超えていく任意個数の直線がおかれるとせよ。そして、直線 ΓΔ に超過分 1 つに等しい直線 ΓO が、さらに、直線 EZ に超過分 2 つに等しい直線 EΠ が、さらに、直線 HΘ に超過分 3 つに等しい直線 HP が、残りも同様に、付け加えられるとせよ。それゆえ、つくられる直線は互いに等しく、それぞれが最大のものに等しい。それゆえ、付け加えられてつくられた直線のすべての平方 [の和] は、互いに超えている空間に等しいすべての直線の平方のすべて [の和] と直線 NΞ の平方 [との和] に対しては、 $AB^2 : AB \times NΞ + \frac{1}{3} NΥ^2$ より小さい比を、しかし、それらの直線の平方 [の和] と直線 AB の平方 [との和] に対しては同じ比より大きい比を、持つことが証明されなければならない。



いま「次々と等しい空間が互いに超えていく、任意個数の直線」を初項が a 、公差が d 、項数が n の等差数列 $\{a_k\}$ とすると、この命題の主張は

$$\begin{aligned} (n-1)(a_n)^2 &: \{(a_2)^2 + \dots + (a_{n-1})^2 + (a_1)^2\} \\ &> (a_n)^2 : a_n \times a_1 + \frac{1}{3} (a_n - a_1)^2 \\ &> (n-1)(a_n)^2 : \{(a_2)^2 + \dots + (a_{n-1})^2 + (a_n)^2\} \end{aligned}$$

ということ。

命題に添えられた図 [上図] で言うと、

$$\begin{aligned} (7-1)AB^2 &: (\Lambda M^2 + IK^2 + H\Theta^2 + EZ^2 + \Gamma\Delta^2 + N\Xi^2) \\ &> AB^2 : AB \times N\Xi + \frac{1}{3} N\Upsilon^2 \\ &> (7-1)AB^2 : (\Lambda M^2 + IK^2 + H\Theta^2 + EZ^2 + \Gamma\Delta^2 + AB^2) \end{aligned}$$

となろうか。

系 それゆえまた、もし、互いに超えていく空間に等しいそれらも、最大のものに等しいそれらも、すべての直線において類似の形が構成されるならば、直線において最大のものに等しいものとして構成されたものすべての形 [の和] は、直線において互いに超えていく空間に等しいものとして構成された形と最小のものとして構成された形 [との和] に対しては、最大の直線の平方が、最大のものと最小のものとの囲まれた長方形と最大のものが最小のものを超える超過分の平方の 3 分の 1 の両方に等しい形 [の和] に対するよりは小さい比を持ち、しかし、同じ直線において構成された形と最大のものとして構成された形 [との和] に対しては同じ比より大きい比を持つであろう。

定義1 もし [ある] 平面の上に直線が引かれ, [その直線が] その一方の端点を固定したままで一様に回転させられて, 再び, そこから回転が始められた, その位置に戻され, そして, その直線が回転させられている間, 何らかの点はその直線自身の上を固定している端点から始めて一様に前進させられるならば, その点はその平面の上に螺線を描くであろう。

定義2 それゆえ, それが回転させられている間固定している, その直線の端点は螺線の始点と呼ばれるとせよ。

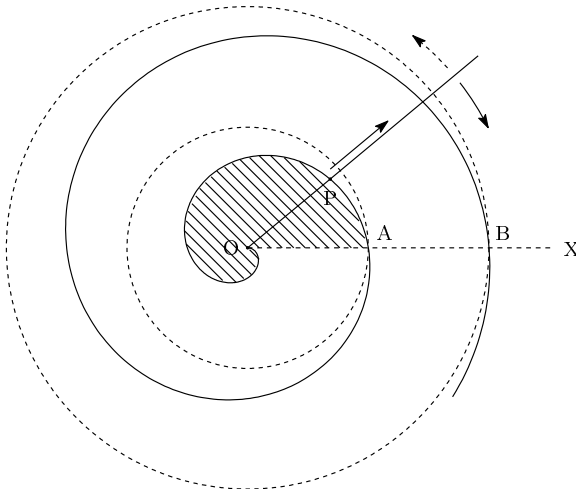
定義3 さらに, そこから回転が始められる直線の位置は回転の始線 [と呼ばれるとせよ]。

定義4 直線の上を前進させられる点が最初の回転において通り過ぎたであろう [その直線上の] 線は第1線と呼ばれるとし, 第2の回転において同じ点が通り過ぎたであろう [その直線上の線] は第2線と, そして, その他についても同様に回転によって名付けらるとせよ。

定義5 さらに, 最初の回転において描かれた螺線と第1線とで囲まれた空間は第1部分と呼ばれるとせよ。第2の回転によって描かれた螺線と第2線とで囲まれる [空間] は第2部分と呼ばれるとし, その他も同様に次々と同じ仕方で名付けられるとせよ。

定義6 そして, もし螺線の始点である点から直線が引かれるならば, その直線にとってそこにおいて回転が行われるのと同じ方向は前進方向と, 反対の方向は後続方向と呼ばれるとせよ。

定義7 そして, その中心が螺線の始点である点であり, 半径が第1線である直線である円は第1円と呼ばれるとし, さらに, その中心は同じであり, 半径が [第1円の半径の] 2倍である円は第2円と呼ばれるとし, その他も次々と同じ仕方で名付けられるとせよ。



左図において.....

点 O が螺線の始点で, [半] 直線 OX が回転の始線。定義1 に述べられているように動く点 P が描く渦巻線のような曲線が螺線。

点 P が最初の1回転をする間に直線 OP 上を動いた線分 [距離] OA が第1線, 2回目の1回転をする間に動いた線分 [距離] AB が第2線。

点 P の最初の1回転でできた螺線と第1線とで囲まれた, 図では斜線をつけた, 部分が第1部分。

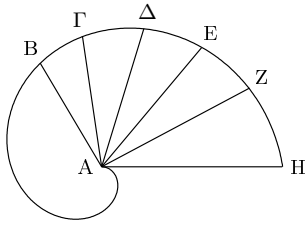
始点 O から引かれた直線に対して, 直線 OP が回転する方向, 図で

は実線の矢印, が前進方向, 反対の方向, 図では斜線の矢印, が後続方向。

始点 O を中心とし, 第1線 OA を半径とする ———— だから, 点 A を通る ———— 円が第1円, 半径を2倍の OB にした ———— 点 B を通る ———— 円が第2円。

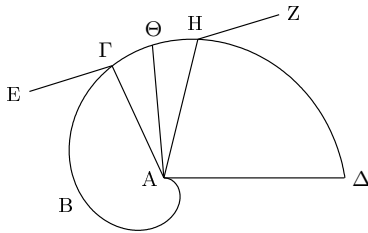
命題12 もし回転によって描かれた任意の螺線に対して, 螺線の始点から任意個数の直線が互いに等しい角をつくるように引かれるならば, [それらの直線は] 互いに等しい空間だけ超える。

螺線があるとして, その中に直線 AB, AΓ, AΔ, AE, AZ が互いに等しい角をつくるとせよ。直線 AB を直線 AΓ が, 直線 AΓ を直線 AΔ が, そして, その他も同じように, 等しい空間だけ超えることが証明されなければならない。



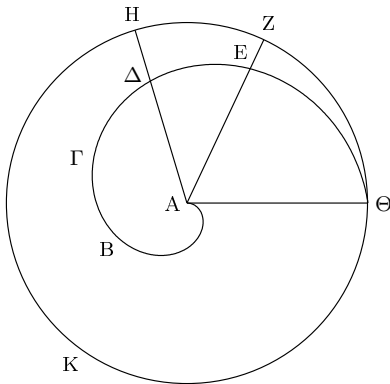
命題 13 もし直線が螺線に接するならば、ただ 1 つの点だけで接するであろう。

螺線があるとして、その中に点 A, B, Γ, Δ があるとせよ。さらに、螺線の始点が点 A, 回転の始線が直線 AΔ であるとし、そして、別の直線 EZ が螺線に接するとせよ。それゆえ私は、それはただ 1 つの点だけで接する、と言う。



命題 14 もし最初の回転によって描かれた螺線に、螺線の始点である点から 2 つの直線が引かれ、それらが第 1 円の周囲まで延長されるならば、螺線に引かれた直線は互いに、螺線の終端と延長された直線の、[円の] 周囲におかれた、端点との間の円の周囲と、もし [円の] 周囲が螺線の終端から前進方向の方にとられるならば、同じ比を持つであろう。

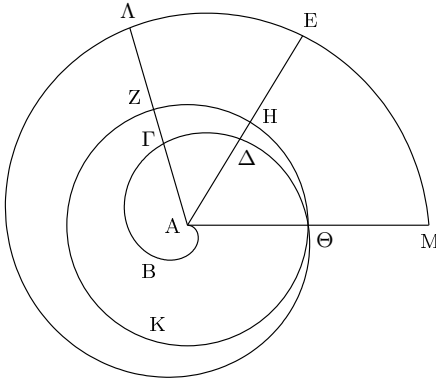
最初の回転によって描かれた螺線が ABΓΔEΘ であるとして、その螺線の始点が点 A で、回転の始線が直線 ΘA であるとし、そして、ΘKH が第 1 円であるとせよ。さらに、点 A から螺線に直線 AE, AΔ が引かれ、それらが円の周囲の方に Z, H まで延長されるとせよ。AE : AΔ = ΘKZ : ΘKH であることが証明されなければならない。



命題 15 しかし、もし第 2 の回転によって描かれた螺線に、螺線の始点から直線が引かれるならば、それらは互いに、[命題 14 で] それについて私たちが述べた、弧に [第 1] 円の周囲全体が加えられたものと同じ比を持つであろう。

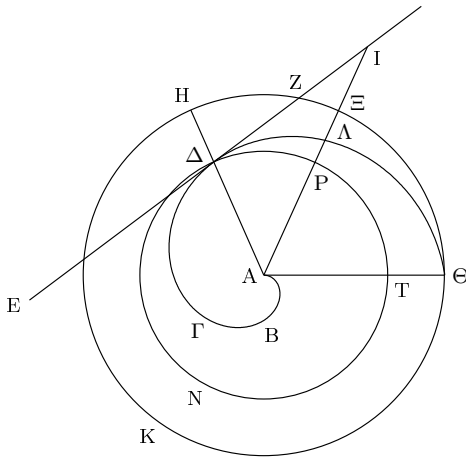
螺線があるとして、その中に、ABΓΔΘ が最初の、ΘAEM が第 2 の、回転によって描かれたものであるような、線 ABΓΔΘ があるとせよ。そして、螺線に直線 AE, AΛ が引かれるとせよ。直線 AΛ は

直線 AE に対して、[第 1] 円の周囲全体が加えられた弧 ΘKZ が [第 1] 円の周囲全体が加えられた弧 ΘKH に対するのと同じ比を持つことが証明されなければならない。



命題 16 もし最初の回転によって描かれた螺線に直線が接しており、接している点から螺線の始点である点に直線が引かれるならば、接している直線とそれに引かれた直線とが [引かれた直線の両側に] つくる角は不等であろうし、そして、前進部分にある角は鈍角であり、後続部分にある角は鋭角であろう。

その上に点 A, B, Γ, Δ, Θ がある, 最初の回転によって描かれた螺線があるとせよ。そして, 点 A を螺線の始点, さらに, 直線 AΘ を回転の始線, そして, ΘKH を第 1 円とせよ。さらに, 直線 EΔZ が螺線に点 Δ において接するとし, 点 Δ から A に直線 ΔA が引かれるとせよ。直線 ΔZ と直線 AA は鈍角をつくることを証明されなければならない。

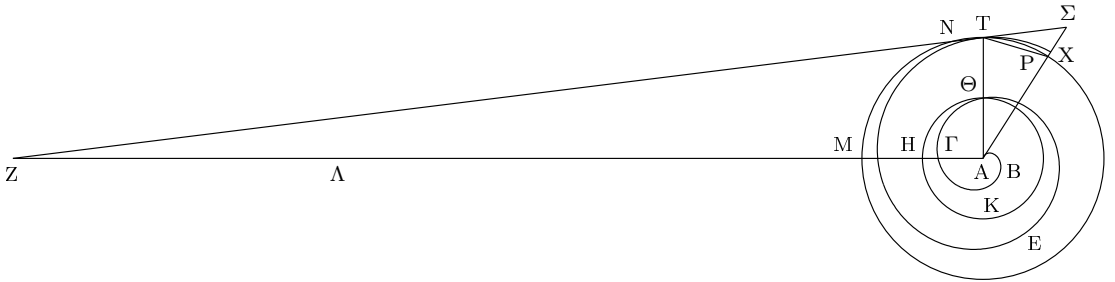


命題 17 いま, もし第 2 の回転によって描かれた螺線に直線が接するとしても, 同じことがいえるであろう。

なぜならば, 直線 EZ が第 2 の回転によって描かれた螺線に点 Δ において接するとし, その他は上 [命題 16] と同様に定められるとせよ。それゆえ, 上のように, 円 PNΔ の周囲の前進部分にある部分は螺線の中に落ち, 後続部分にある [部分] は外に落ちるのである。それゆえ, 直線 AΔ, ΔZ によって挟まれた角は直角ではなくて, 鈍角である。

命題 19 しかしもし第 2 の回転によって描かれた螺線に，[螺線の] 終端において直線が接しており，螺線の始点から回転の始線に垂直な直線が引かれるならば，それは接している直線の中に落ちるであろうし，接している [直線] と螺線の始点の間におかれた直線は第 2 円の周囲の 2 倍の大きさであろう。

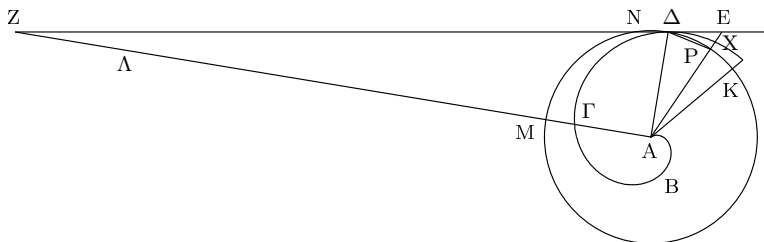
なぜならば，螺線 $AB\Gamma\Theta$ が最初の回転によって描かれたもの， ΘET が第 2 [の回転] によるもの，そして， ΘKH が第 1 円， TMN が第 2 円であるとせよ。そして，別の直線 TZ が点 Θ において螺線に接しており，直線 TA に垂直な直線 ZA が引かれるとせよ。それゆえ，証明されたように，それは直線 TZ の中に落ちるであろうし，直線 AT ， TZ に挟まれた角は直角であろう。直線 ZA は円 TMN の周囲の 2 倍の大きさであることが証明されなければならない。



系 同様に，もし任意の [回数] の回転によって描かれた螺線に，螺線の終端において直線が接しており，螺線の始点から回転の始線に垂直な直線が引かれ，それが接している [直線] の中に落ちるならば，それは，回転の数に従って名付けられた円の周囲の，[回転の数と] 同じ数が示すだけ多い倍数の大きさである。

命題 20 もし最初の回転によって描かれた螺線に，螺線の終端以外において直線が接しており，接している点から螺線の始点に直線が引かれ，そして，その中心が螺線の始点で，その半径が [その] 引かれた直線である，円が描かれ，そして，螺線の始点から，接している点から螺線の始点に引かれた直線に垂直な直線が引かれるならば，それは接している直線の中に落ちるであろうし，そして，交わっている点と螺線の始点との間におかれた直線は，接している点と切断 [点] との間におかれた円の周囲 —— そこにおいて，描かれた円が回転の始線を切断する，最初の回転においておかれた点から前進方向の方にとられた周囲 —— に等しいであろう。

螺線があるとして，その中に最初の回転によって描かれた $AB\Gamma\Delta$ があり，それに直線 $E\Delta Z$ が点 Δ において接しており，点 Δ から螺線の始点に [直線] $A\Delta$ が引かれ，その中心が A で，その半径が $A\Delta$ である円が描かれるとせよ。さらに，これが回転の始線を点 K において切断するとせよ。そして，直線 $A\Delta$ に垂直な直線 ZA が引かれるとせよ。それゆえ，それが直線 $Z\Delta$ の中に落ちることは明らかである [命題 16]。しかし，直線 ZA が弧 $KMN\Delta$ に等しいことは証明されなければならない。

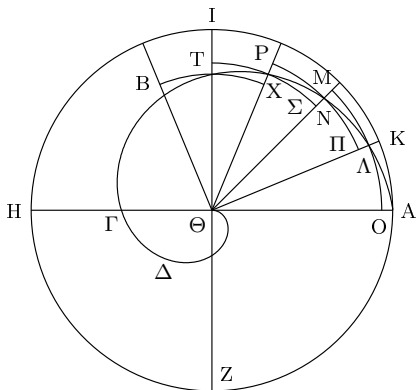


系 さらに同様に，私たちは，もし第 2 の回転によって描かれた螺線に，螺線の終端以外において直線が接しており，その他は同様に定められるならば，交わっている点と螺線の始点との間に挟

まれた、接している [直線] に出会う直線は、[Δ を半径として] 描かれた円の周囲と、さらには、[上と] 同じようにとられた弧において、私たちが [先に] 述べた、両点の間に挟まれた弧との全体に等しいことが証明されるであろう。そしてまた、もし任意の [回数] の回転によって描かれた螺線に、螺線の終端以外において直線が接しており、その他は同様に定められるならば、私たちが示した、両点の間に挟まれた直線は、描かれた円の周囲の、回転に従って名付けられた数より 1 だけ少ない数が示すだけ多い倍数の大きさと、さらには、私たちが [先に] 述べた、両点の間に同じようにとられた弧 [との和] に等しいことも [証明されるであろう]。

命題 21 最初の回転によって描かれた螺線と、回転の始線の上にある、それらの第 1 線とで囲まれた空間がとられると、この空間の周りに、相似な扇形によって構成された、平面図形が外接され、そして、別の [平面図形] が内接されて、外接された図形が内接された [図形] を任意に与えられた空間より小さい空間だけ超えるようにすることができる。

螺線があるとし、その中に最初の回転によって描かれた $AB\Gamma\Delta$ があるとせよ。そして、螺線の始点が点 Θ 、回転の始線が直線 ΘA であると、そして、第 1 円が $ZHIA$ で、その直径 AH 、 ZI は互いに垂直であるとせよ。それゆえ、直角や直角を囲む扇形が次々とならびに 2 つの等しい部分に分割されると、与えられた空間より小さい扇形の部分が残されるであろう [ユークリッド第 1 巻命題 1]。そして、[そして] 生じたものが与えられた空間より小さい扇形 $A\Theta K$ であるとせよ。それゆえ、直角が、直線 $A\Theta$ 、 ΘK が囲む角に等しい 4 つの角に分割されるとし、それらの角をつくっている直線が螺線の方にずっと延長されるとせよ。それゆえ、そこにおいて螺線 ΘK を切斷する点が Λ であると、その中心が Θ で、半径が $\Theta\Lambda$ である、円が描かれるとせよ。それゆえ、それはその周囲の、前進方向にある部分は螺線の内部に、後続部分 [にある部分] は [螺線の] 外部に落ちるであろう。それゆえ、その周囲は直線 ΘA と点 Θ において出会うまで描かれると、そして、螺線の方に引かれた直線 ΘK の後ろに OM があるとせよ。それゆえ、再び、そこにおいて直線 ΘM が螺線を切斷する点が N であると、中心が Θ 、半径が ΘN である円が、円の周囲が直線 ΘK と螺線の方に ΘM の後ろに引かれた直線に出会うように、描かれるとせよ。そして、そこにおいて等しい角をつくっている直線が螺線を切斷する、その他のすべての点についても同様に、それぞれの周囲が前進部分の直線にも後続部分 [の直線] にも出会うように、それらの中心が Θ である円が描かれるとせよ。それゆえ、空間の周りにとられた図形は、相似な扇形によって構成された、外接されたもの、および、内接された別のものであろう。さらに、私たちは、外接された図形は与えられた空間より小さい空間だけ内接された [図形] を超えることを証明するであろう。

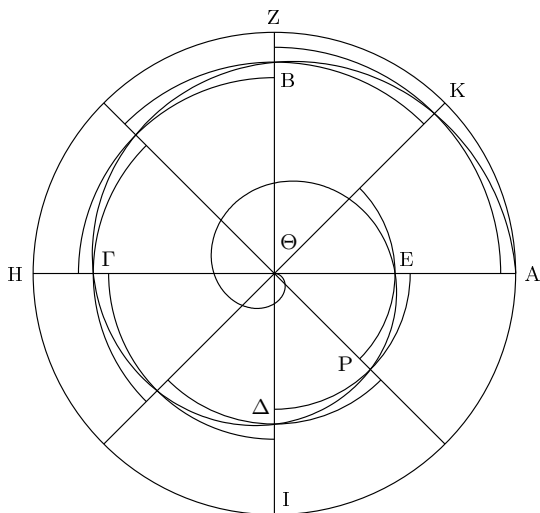


系 さらに、このことから、私たちが述べたような空間の周りに、外接された図形が任意に与えられた空間より小さい空間だけ超えるような [平面] 図形が描かれ、そしてさらに、同じ仕方で、空間が内接された図形を任意に与えられた空間より小さい空間だけ超えるように [平面図形が] 内

接される，ようにすることができることは明らかである。

命題 22 第 2 の回転によって描かれた螺線と，回転の始線の上にある，それらの第 2 線とで囲まれた空間がとられると，その空間の周りに，相似な扇形で構成された，平面図形が外接され，そして，別の [平面図形] が内接されて，外接された図形が内接された [平面図形] を任意に与えられた空間より小さい空間だけ超えるようにすることができる。

螺線があるとし，その中に第 2 の回転によって描かれた $AB\Gamma\Delta E$ があるとせよ。そして，点 Θ が螺線の始点，直線 $A\Theta$ が回転の始線，さらに，直線 EA が，回転の始線の上にある，それらの第 2 線であるとせよ。そして，円 AZH が第 2 円で，その直径 $A\Gamma H$ ， ZI は互いに垂直であるとせよ。

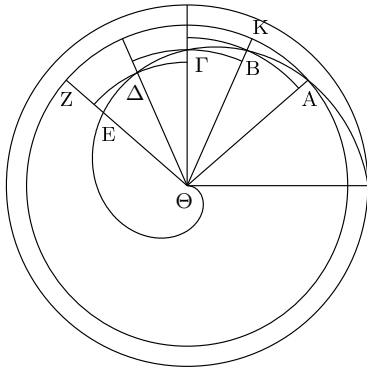


系 1 それゆえ，外接された図形が任意に与えられた空間より小さい空間だけとられた空間を超える，そしてさらに，とられた空間が内接された空間を任意に与えられた空間より小さい空間だけ超える，ようにできることは明らかである。

系 2 そして同様に，任意の [回数の] 回転によって描かれた螺線と，回転の始線の上にある，それらと同じ数によって名付けられた直線とで囲まれた空間がとられると，外接された図形が任意に与えられた空間より小さい空間だけとられた空間を超えるような平面図形が外接され，そしてさらに，とられた空間が内接された図形を任意に与えられた空間より小さい空間だけ超えるような [平面図形が] 内接される，ようにすることができることは明らかである。

命題 23 1 回の回転によって描かれた螺線より小さいが，その端点が螺線の始点ではない，螺線と，螺線の始点から引かれた直線とで囲まれた空間がとられると，その空間の周りに，相似な扇形で構成された，平面図形が外接され，そして，別の [平面図形] が内接されて，外接された図形が任意に与えられた空間より小さい空間だけ内接された [図形] を超えるようにすることができる。

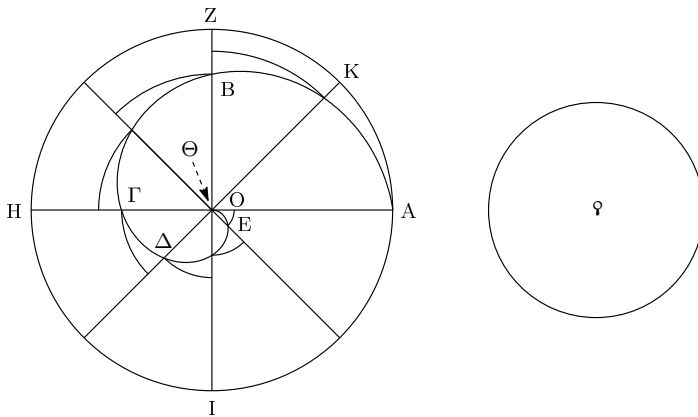
螺線 $AB\Gamma\Delta E$ があるとし，その端点が A ， E ，螺線の始点が Θ であるとし，直線 $A\Theta$ ， ΘE が引かれるとせよ。それゆえ，その中心を Θ ，半径を ΘA とし，点 Z において直線 ΘE に落ちる，円が描かれるとせよ。それゆえ， Θ におかれた角と扇形 ΘAZ が次々となつねに 2 つの等しい部分に分割されて，与えられた空間より小さいものが残されるとせよ。



系 このことから、私たちが述べたような空間の周りに、外接された図形がその空間を何であれ与えられた空間より小さい空間だけ超えるような平面図形が外接され、そしてさらに、その空間が内接された図形を何であれ与えられた空間より小さい空間だけ超えるような [平面図形が] 内接される、ようにすることができることは明らかである。

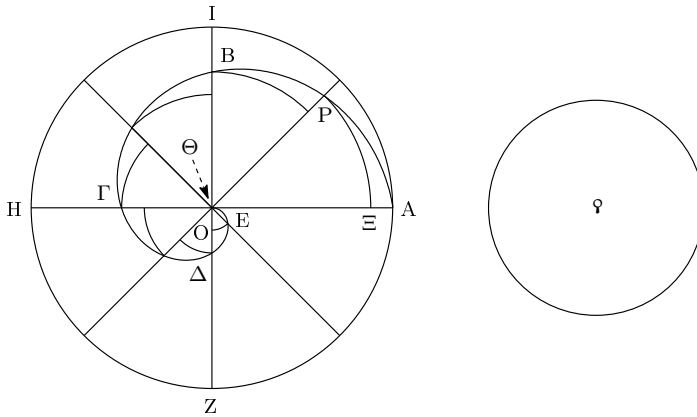
命題 24 最初の回転によって描かれた螺線と、回転の始線の上にある、その第 1 線とで囲まれた空間は第 1 円の 3 分の 1 である。

螺線があるとし、その中に最初の回転によって描かれた $AB\Gamma\Delta E\Theta$ があるとせよ。そして、点 Θ が螺線の始点、直線 ΘA が、回転の始線の上にある、その第 1 線であるとし、そして、 $AKZHI$ が第 1 円であり、その 3 分の 1 が、その中に文字 φ がある、円であるとせよ。その空間は円 φ に等しいことが証明されなければならない。

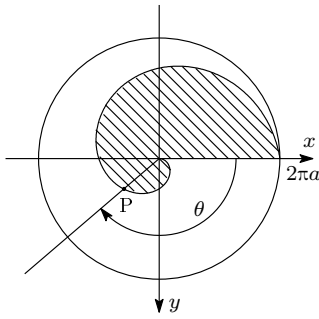


なぜならば、もしそうでないならば、より大きいか、または、より小さいかである。はじめに、もし可能ならば、より小さいとせよ。それゆえ、螺線 $AB\Gamma\Delta E\Theta$ と直線 $A\Theta$ とで囲まれた空間の周りに、相似な扇形によって構成された平面図形が外接されて、外接された図形がその空間を、円 φ がその空間を超える超過分より小さく超えるようにすることができる [命題 21]。それゆえ、[そのような平面図形が] 外接されるとし、それらによってその図形が構成された諸扇形の最大のものが ΘAK で、最小のものが ΘEO であるとせよ。それゆえ、外接された図形が円 φ より小さいことは明らかである。それゆえ、点 Θ に対して等しい角をつくっている諸直線が円の周囲に達するまでずっと延長されるとせよ。それゆえ、点 Θ から螺線まで引かれた諸直線があり、確かに、それらは互いに等しい空間だけ超えていて、それらの最大のものは ΘA で、最小のものは ΘE であり、最小のものは超過分に等しい。しかしまた、点 Θ から円の周囲まで引かれた別の諸直線があり、確かに、それらはそれら [先の諸直線] と数が等しく、さらに、それぞれの大きさは最大のものに等しく、そして、相似なそれぞれの扇形の中につくられ、そして、それらにおいては互いに等しい空間だけ超えており、そし

て、それらにおいては互いに最大のものに等しい。それゆえ、最大のものに等しい諸直線の中につくられた諸扇形〔の全体〕は、互いに等しい空間だけ超えている諸直線の中につくられた諸扇形〔の全体〕より3倍大きいものより小さい。なぜなら、これは証明されているから〔命題10系〕。しかし、互いに最大のものに等しい諸直線の中につくられた諸扇形〔の全体〕は円AZHIに等しく、さらに、互いに等しい空間だけ超えている諸直線の中につくられた諸扇形〔の全体〕は外接された図形に等しい。それゆえ、円AZHIは外接された図形より3倍大きいものより小さい。さらに、〔円AZHIは〕円 φ より3倍大きい。それゆえ、円 φ は外接された図形より小さい。しかし、それは小さくはなく、大きかった。〔これは不合理である。〕それゆえ、螺線 $AB\Gamma\Delta E\Theta$ と直線 $A\Theta$ とで囲まれた空間は空間 φ より小さくはない。



しかし、より大きくさえない。なぜならば、もし可能ならば、より大きいとせよ。それゆえ再び、螺線 $AB\Gamma\Delta E\Theta$ と直線 $A\Theta$ とで囲まれた空間に、〔上で〕私たちが述べた、図形が内接され、内接された図形がその空間を、その空間が円 φ を超える〔超過分〕より小さく超えるようにすることができる〔命題21系〕。それゆえ、〔そのような図形が〕内接されるとし、それらによって内接された図形が構成された諸扇形の最大のものが $\Theta P\Xi$ で、最小のものが $O\Theta E$ であるとせよ。それゆえ、内接された図形が円 φ より大きいことは明らかである。それゆえ、点 Θ に対して等しい角をつくっている諸直線が円の周囲に達するまでずっと延長されるとせよ。それゆえ再び、確かに、互いに等しい空間だけ超えている、点 Θ から螺線まで引かれた、諸直線があり〔命題12〕、それらの最大のものは ΘA で、最小のものは ΘE であり、そして、最小のものは超過分に等しい。加えて、同様に、点 Θ から円AZHIの周囲まで引かれた、それら〔先のもの〕と数が等しい、別の諸直線があり、さらに、それぞれの大きさは最大のものに等しく、それらは相似なそれぞれの扇形の中につくられ、そして、それらにおいては互いに最大のものに等しく、そして、それらにおいては互いに等しい空間だけ超えている。それゆえ、最大のものに等しい諸直線の中につくられた諸扇形〔の全体〕は、互いに等しい空間だけ超えている諸直線の中につくられた〔扇形のうち〕、最大のものの中につくられた扇形を除いた、諸扇形〔の全体〕より3倍大きいものより大きい。なぜなら、これは証明されている〔命題10系〕。しかし、最大のものに等しい諸直線の中につくられた諸扇形〔の全体〕は円AZHIに等しく、さらに、互いに等しい空間だけ超えている諸直線の中につくられた〔扇形のうち〕、最大のものの中につくられた扇形を除いた、諸扇形〔の全体〕は内接された図形に等しい。それゆえ、円AZHIは内接された図形より3倍大きいものより大きい。しかし、〔円AZHIは〕円 φ より3倍大きい。それゆえ、円 φ は内接された図形より大きい。しかし、それは大きくはなく、実際は小さい。それゆえ、確かに、円 φ は螺線 $AB\Gamma\Delta E\Theta$ と直線 $A\Theta$ とで囲まれた空間より大きくはない。それゆえ、等しい。



現代風の確認なら ……

アルキメデスの螺線は極形式で $r = a\theta$ と表せるから、螺線とその第1線とで囲まれた部分 (図の斜線部) の面積 S_s は

$$\begin{aligned}
 S_s &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\theta)^2 d\theta \\
 &= \frac{1}{2} a^2 \left[\frac{1}{3} \theta^3 \right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2
 \end{aligned}$$

となる。

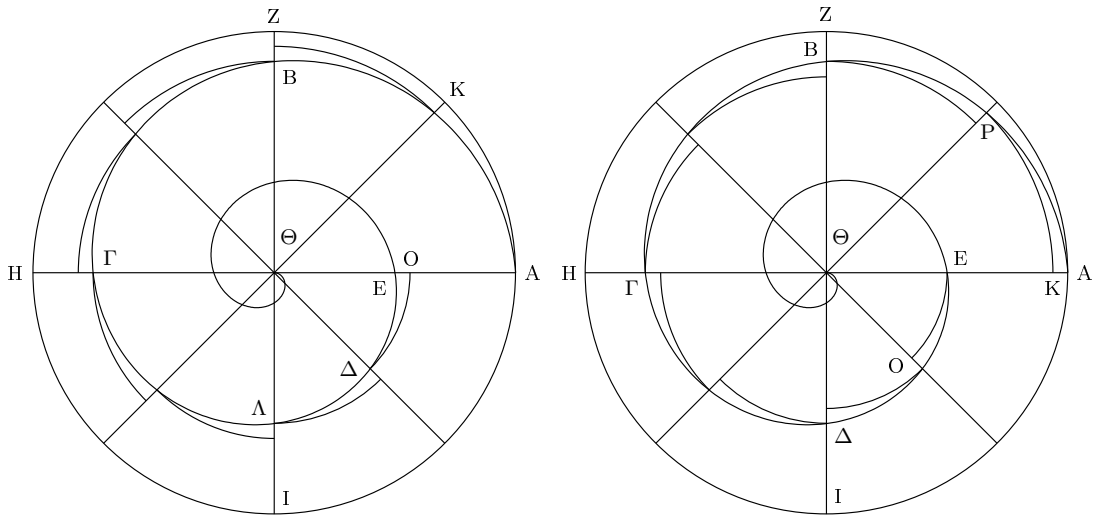
一方、第1円の半径は $2\pi a$ であるから、その面積 S_c は

$$S_c = \pi (2\pi a)^2 = 4\pi^3 a^2$$

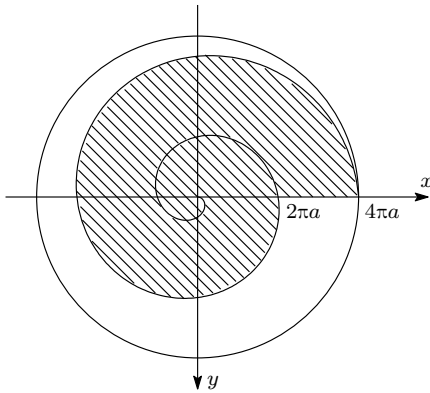
である。よって、 $S_s = \frac{1}{3} S_c$ ということになる。

命題 25 第2の回転によって描かれた螺線と、回転の始線の上にある、その第2線とで囲まれた空間は第2円に対して、7:12の比を持ち、それは、第2円の半径と第1円の半径とで囲まれた長方形、それと、第2円の半径が第1円の半径を超える超過分の平方の3分の1 [との和] が第2円の半径の平方に対して持つ比と同じである。

螺線があるとし、その中に第2の回転によって描かれた $AB\Gamma\Delta E$ があるとせよ。そして、点 Θ が螺線の始点、直線 ΘE が、回転の始線の上にある、その第1線、 AE が第2線であるとせよ。そして、円 $AZHI$ が第2円で、その直径 AH , IZ は互いに垂直であるとせよ。螺線 $AB\Gamma\Delta E$ と直線 AE とで囲まれた空間は円 $AZHI$ に対して 7:12の比を持つことが証明されなければならない。



系 任意の [回数] の回転によって描かれた螺線と、回転と同じ数によって名付けられた直線とで囲まれた空間は回転と同じ数によって名付けられた円に対して、[回転と] 同じ数によって名付けられた円の半径と回転の数より1つ少ない数によって名付けられた円の半径とによって囲まれた長方形と、私たちが述べた、それらの [円のうち] 大きい方の円の半径が小さい方の円の半径を超える超過分の平方の3分の1 との同時 [の和] が、私たちが述べた、それらの [円のうち] 大きい方の円の半径の平方に対するのと同じ比を持つ。



第2の回転によって描かれた螺線と螺線の始線とで囲まれた、図の斜線の、部分の面積 S_s は

$$\begin{aligned} S_s &= \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} (a\theta)^2 d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{2\pi}^{4\pi} (a\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} a^2 \left[\frac{1}{3} \theta^3 \right]_{2\pi}^{4\pi} \\ &= \frac{28}{3} \pi^3 a^2 \end{aligned}$$

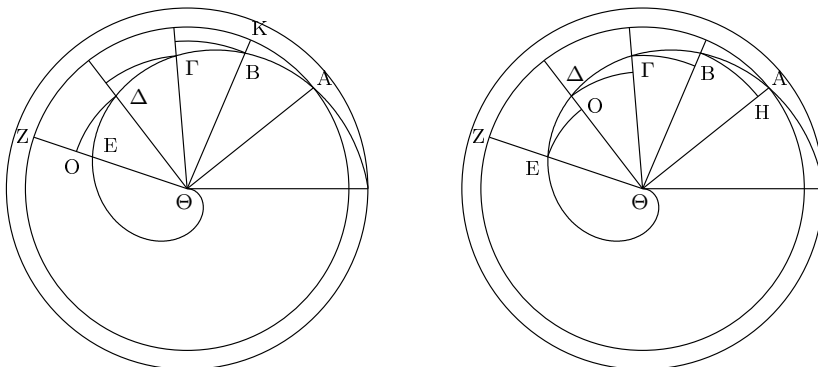
である。[より一般の場合は後述。]

一方、第2円の面積 S_c は $S_c = \pi(4\pi a)^2 = 16\pi^3 a^2$ である。

従って、 $S_s : S_c = \frac{28}{3} : 16 = 7 : 12$ となる。

命題 26 1 回の回転によって描かれた螺線より小さく、その端点が螺線の始点ではない、螺線と、その端点から螺線の始点に引かれた両直線とで囲まれた空間は、その半径が端点から螺線の始点に引かれた大きい方の直線で、その弧がそれらの直線の間、螺線の中にある同じ側の方に、おかれた弧である扇形に対して、端点から螺線の始点に引かれた両直線に囲まれた長方形と、私たちが述べた、直線の大きい方が小さい方を超える超過分の平方の $\frac{3}{2}$ と [の和] が、端点から螺線の始点に引かれた直線の大きい方の平方に対するのと同じ比を持つ。

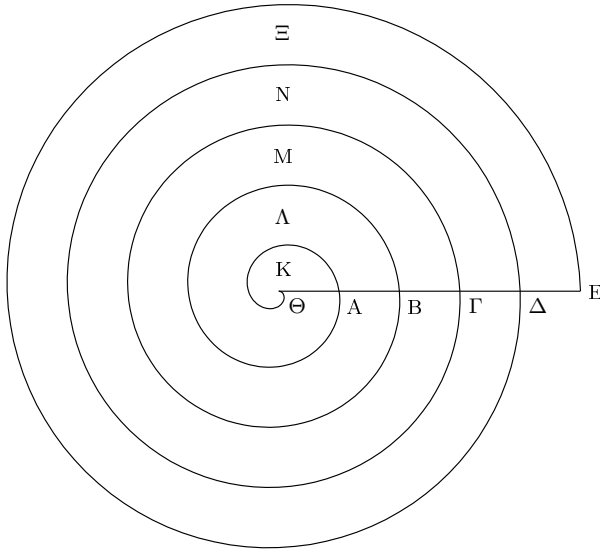
螺線があると、その中に 1 回の回転によって描かれた螺線より小さい $AB\Gamma\Delta E$ があると、その端点が A, E であるとせよ。さらに、螺線の始点が点 Θ であるとせよ。そして、その中心が Θ 、半径が ΘA である円が描かれ、直線 ΘE が点 Z においてその周囲に落ちるとせよ。螺線 $AB\Gamma\Delta E$ と直線 $A\Theta, \Theta E$ とで囲まれた空間は扇形 $A\Theta Z$ に対して、 $A\Theta \times \Theta E + \frac{1}{3} E Z^2 : \Theta A^2$ と同じ比を持つことが証明されなければならない。



命題 27 螺線と、回転の [始線] 上にある、直線とで囲まれた空間の、3 番目のものは 2 番目のものの 2 倍大きく、さらに、4 番目のものは [2 番目のものの] 3 倍大きく、さらに、5 番目のものは [2 番目のものの] 4 倍大きく、そして、つねに次々と続く空間は第 2 の空間の、規則正しく続く数が示すと、同じ倍数であろうし、さらに、最初の空間は第 2 の [空間の] $\frac{1}{6}$ である。

最初の、2 回目の、そして、その他の任意の回数回転によって描かれた、[命題に] 述べられた、螺線があるとせよ。さらに、螺線の始点が点 Θ であり、回転の始線が ΘE であるとせよ。さらに、最初

の空間が K, 第 2 [の空間] が Λ , 第 3 [の空間] が M, 第 4 [の空間] が N, 第 5 [の空間] が Ξ であるとせよ。空間 K はそれに続く空間 $[\Lambda]$ の 6 分の 1 であり, さらに, 空間 M は空間 Λ の 2 倍の大きさであり, さらに, 空間 N は空間 Λ の 3 倍の大きさであり, そして, つねに次々と続くその他の空間は空間 Λ の, 規則正しく続く数が示すと, 同じ倍数であることが証明されなければならない。



いま, 空間 K が空間 Λ の 6 分の 1 であることを次の方法によって証明する。空間 $K + \Lambda$ が第 2 円に対して 7 : 12 の比を持つこと [命題 25], さらに, 第 2 円が第 1 円に対して 12 : 3 の比を持つこと, さらに, 第 1 円が空間 K に対して 3 : 1 の比を持つこと [命題 24] が証明されているから, それゆえ, 空間 K は空間 Λ の 6 分の 1 であろう。

そのうえさらに, 空間 $K + \Lambda + M$ は第 3 円に対して, $\Gamma\Theta \times \Theta B + \frac{1}{3}\Gamma B^2 : \Gamma\Theta^2$ という比を持つこと [命題 25 系], さらに, 第 3 円は第 2 [円] に対して, $\Gamma\Theta^2 : \Theta B^2$ という比を持つこと [ユークリッド第 12 巻命題 2], さらに, 第 2 円は空間 $K + \Lambda$ に対して, $B\Theta^2 : B\Theta \times \Theta A + \frac{1}{3}AB^2$ という比を持つこと [命題 25] は証明されている。それゆえまた, $K + \Lambda + M : K + \Lambda = \Gamma\Theta \times \Theta B + \frac{1}{3}\Gamma B^2 : B\Theta \times \Theta A + \frac{1}{3}AB^2$, すなわち, $= 19 : 7$ であろう。それゆえまた, $K + \Lambda + M : \Lambda + K = 19 : 7$ である。ゆえに, $M : K + \Lambda = 12 : 7$ である [ユークリッド第 5 巻命題 17]。しかし, $K + \Lambda : \Lambda = 7 : 6$ である。ゆえに, $M : \Lambda = 12 : 6$ である [ユークリッド第 5 巻命題 22]。それゆえ, $M = 2\Lambda$ である。

さて, 後に続く空間が次々と規則正しく続く数の比を持つことが証明されるであろう。なぜならば, 空間 $K + \Lambda + M + N + \Xi$ はその半径が直線 ΘE である円に対して, $E\Theta \times \Theta \Delta + \frac{1}{3}E\Delta^2 : \Theta E^2$ という比を持つ [命題 25 系]。さらに, その半径が ΘE である円はその半径が $\Theta \Delta$ である円に対して, $\Theta E^2 : \Theta \Delta^2$ という比を持つ [ユークリッド第 12 巻命題 2]。さらに, その半径が $\Delta \Theta$ である円は空間 $K + \Lambda + M + N$ に対して, $\Theta \Delta^2 : \Theta \Delta \times \Theta \Gamma + \frac{1}{3}\Delta \Gamma^2$ という比を持つ [命題 25 系]。それゆえまた,

$$K + \Lambda + M + N + \Xi : K + \Lambda + M + N = \Theta E \times \Theta \Delta + \frac{1}{3}E\Delta^2 : \Theta \Delta \times \Theta \Gamma + \frac{1}{3}\Delta \Gamma^2$$

であろうし, 分離されると [ユークリッド第 5 巻命題 17],

$\Xi : K + \Lambda + M + N = E\Theta \times \Theta \Delta + \frac{1}{3}E\Delta^2 - (\Delta \Theta \times \Theta \Gamma + \frac{1}{3}\Delta \Gamma^2) : \Delta \Theta \times \Theta \Gamma + \frac{1}{3}\Delta \Gamma^2$ であろう。しかし, $E\Theta \times \Theta \Delta + \frac{1}{3}E\Delta^2 - (\Delta \Theta \times \Theta \Gamma + \frac{1}{3}\Delta \Gamma^2) = E\Theta \times \Theta \Delta - \Delta \Theta \times \Theta \Gamma$ (なぜなら $E\Delta = \Delta \Gamma$ だから) $= \Delta \Theta \times \Gamma E$ である。それゆえ, $\Xi : K + \Lambda + M + N = \Theta \Delta \times \Gamma E : \Delta \Theta \times \Theta \Gamma + \frac{1}{3}\Delta \Gamma^2$ であろう。そして, $N : K + \Lambda + M = \Theta \Gamma \times B\Delta : \Gamma \Theta \times \Theta B + \frac{1}{3}\Gamma B^2$ であることを, 私たちは同じ方法によって証明するであろう。それゆえ, $N : K + \Lambda + M + N = \Theta \Gamma \times B\Delta : \Theta \Gamma \times \Theta B + \frac{1}{3}\Gamma B^2 + \Theta \Gamma \times B\Delta$ である。しかし, $\Theta \Gamma \times B\Delta + \Theta \Gamma \times \Theta B + \frac{1}{3}\Gamma B^2 = \Delta \Theta \times \Theta \Gamma + \frac{1}{3}\Gamma \Delta^2$ (なぜなら $\Gamma \Delta = \Gamma B$ だから) である。いま, $\Xi : K + \Lambda + M + N = \Theta \Delta \times \Gamma E : \Delta \Theta \times \Theta \Gamma + \frac{1}{3}\Gamma \Delta^2$ であり, $K + \Lambda + M + N : N = \Delta \Theta \times \Theta \Gamma + \frac{1}{3}\Gamma \Delta^2 : \Theta \Gamma \times \Delta B$ である [ユークリッド第 5 巻命題 7 系] から, それゆえまた, $\Xi : N = \Theta \Delta \times \Gamma E : \Theta \Gamma \times \Delta B = \Theta \Delta : \Theta \Gamma$ ($\Gamma E = B\Delta$ であるから) であろう [ユークリッド第 5 巻命

題 22]。それゆえ、 $\exists : N = \Theta\Delta : \Theta\Gamma$ であることは明らかである。

そして、 $N : M = \Theta\Gamma : \Theta B$ 、 $M : \Lambda = B\Theta : A\Theta$ であることも、私たちは同じ仕方で証明するであろう。しかし、直線 $\Delta\Theta$ 、 $\Gamma\Theta$ 、 $B\Theta$ 、 $A\Theta$ は規則正しく続く数の比を持つ。

$k (\geq 2)$ を自然数とし、動径 [端点を中心として、その点の周りを自由に回転させることができる半直線のこと。] の第 $(k-1)$ 回目の回転によって描かれた螺線と、第 k 回目の回転によって描かれた螺線と、螺線の始線によって囲まれた部分の面積を S_k とする。例えば、 $k=2$ なら、命題中の「空間 Λ 」の面積を表し、 $k=3$ のときは、「空間 M 」の面積を表す。

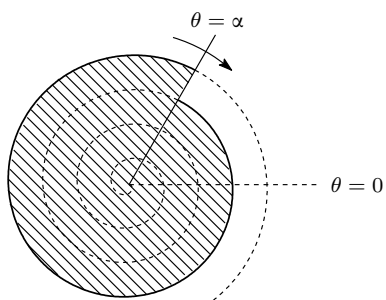
いま、螺線を表す方程式を $r = a\theta$ とすると、

$$S_k = \frac{1}{2} \int_{2\pi(k-1)}^{2\pi k} (a\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{2\pi(k-2)}^{2\pi(k-1)} (a\theta)^2 d\theta = 8\pi^3 a^2 (k-1)$$

となる。例えば、 $S_2 = 8\pi^3 a^2$ 、 $S_3 = 16\pi^3 a^2$ 、 \dots である。ここで、 S_2 を基準に考えれば、 $S_k : S_2 = 8\pi^3 a^2 (k-1) : 8\pi^3 a^2 = (k-1) : 1$ であるから、 S_3 は S_2 の 2 倍、 S_4 は S_2 の 3 倍、 \dots 、一般に S_k は S_2 の $(k-1)$ 倍、となる。

なお、第 1 円の半径は $2\pi a$ 、第 2 円の半径は $4\pi a$ 、第 3 円の半径は $6\pi a$ 、 \dots であるから、第 1 円の面積は $4\pi^3 a^2$ 、第 2 円の面積は $16\pi^3 a^2$ 、第 3 円の面積は $36\pi^3 a^2$ 、 \dots となる。

だから、例えば、 $K + \Lambda + M$ と第 3 円との比は、 $\frac{4}{3} + 8 + 16 : 36 = 19 : 27$ になる。そして、第 3 円 : 第 2 円 = $36 : 16 = 27 : 12$ 、第 2 円 : $K + \Lambda = 16 : \frac{4}{3} + 8 = 12 : 7$ であるから、 $K + \Lambda + M : K + \Lambda = 19 : 7$ である。



ところで、一般に、動径が $\theta = 0$ から $\theta = \alpha$ (ただし $\alpha > 2\pi$) まで回転したときに描かれる螺線 $r = a\theta$ 、および、動径 $\theta = \alpha$ によって囲まれる部分 (左図の斜線部) の面積 T は

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^\alpha (a\theta)^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\alpha-2\pi} (a\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\alpha-2\pi}^\alpha (a\theta)^2 d\theta \\ &= \frac{1}{3} a^2 (3\pi\alpha^2 - 6\pi^2\alpha + 4\pi^3) \end{aligned}$$

となる。(なぜなら、 $0 \leq \theta \leq \alpha$ の範囲を回転すべき、動径が $\alpha - 2\pi \leq \theta \leq \alpha$ の範囲を動くときに、既に通過したはずの $0 \leq \theta \leq \alpha - 2\pi$ の範囲も再び含めてしまうから。だから、 $0 < \alpha \leq 2\pi$ のときは、後半の引き去る部分は不要になり、 $T = \frac{1}{2} \int_0^\alpha (a\theta)^2 d\theta$ である。)

特に、 $\alpha = 2\pi k$ ($k \geq 2$) なら、面積 T_k は

$$T_k = \frac{1}{2} \int_{2\pi(k-1)}^{2\pi k} (a\theta)^2 d\theta = \frac{4}{3} \pi^3 a^2 (3k^2 - 3k + 1)$$

となる。

例えば、 $\alpha = 8\pi$ ($k=4$) のときは

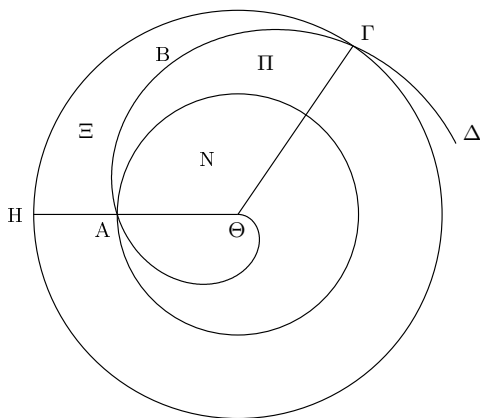
$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{1}{2} \int_{6\pi}^{8\pi} (a\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{512}{3} \pi^3 - \frac{216}{3} \pi^3 \right) \\ &= \frac{148}{3} \pi^3 a^2 \quad \left[= \left(\frac{4}{3} + 8 + 16 + 24 \right) \pi^3 a^2 \right] \end{aligned}$$

である。

命題 28 もし任意の [回数] の回転によって描かれた螺線の上に、その端点ではない、2 つの点がとられ、そして、とられた点から螺線の始点に [2 つ] の直線が引かれ、そして、中心が螺線の始点であり、半径がそれらの点から螺線の始点に引かれた直線である、[2 つ] の円が描かれるならば、それらの直線の間にある、それらの大きい方の弧と、それらの直線の間におかれた螺線と、延長された直線とで囲まれた空間は、小さい方の弧と、同じ螺線と、それら [弧と螺線] の両端点を結

んでいる直線とで囲まれた空間に対して、小さい方の円の半径と、大きい方の円の半径が小さい方の円の半径を超える、超過分の3分の2と〔の和〕が、小さい方の円の半径と同じ超過分の3分の1と〔の和〕に対するのと同じ比を持つであろう。

螺線があるとし、その中に1回の回転によって描かれた $AB\Gamma\Delta$ があるとし、その上に2つの点 A, Γ がとられ、点 Θ が螺線の始点であるとせよ。そして、点 A, Γ から点 Θ に直線が引かれるとせよ。そして、その中心が Θ で、半径が $\Theta A, \Theta \Gamma$ である〔2つの〕円が描かれるとせよ。
 $\Xi : \Pi = A\Theta + \frac{2}{3} HA : A\Theta + \frac{1}{3} HA$ であることが証明されなければならない。

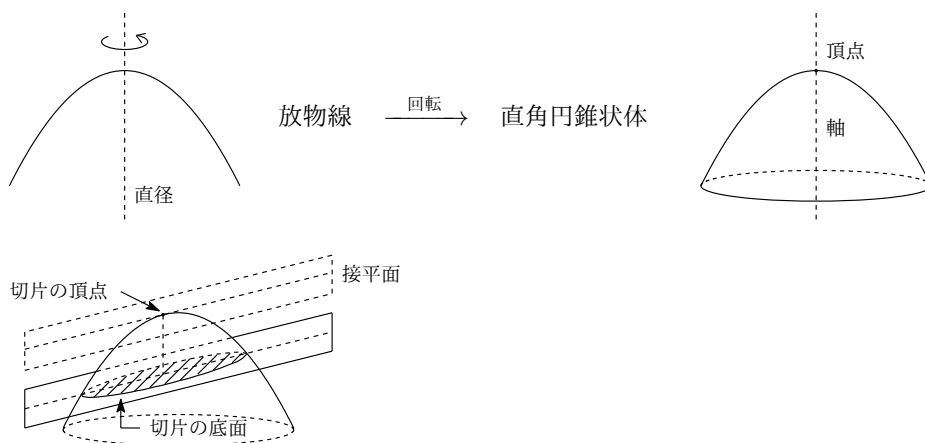


円錐状体と球状体について

Περὶ Κωνοειδῶν καὶ σφαιροειδῶν

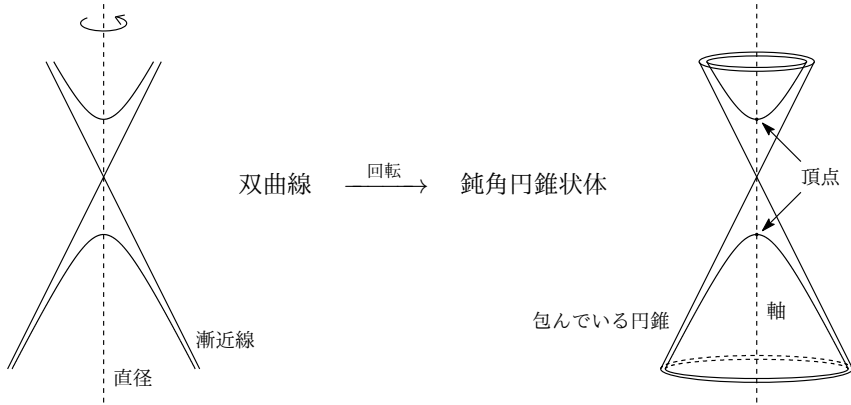
De Conoidibus et Sphaeroidibus

定義 I (序文中) もしその直径を固定したままで回転された直角円錐切断 [放物線] が, そこから動くことが始められた, その位置に再び戻されるならば, その直角円錐切断で囲まれた図形を直角円錐状体 [回転放物線体] と呼び, そして, 固定したままの直径をその軸と, さらに, そこにおいて軸が [直角] 円錐状体の表面に出会う点を頂点と呼ぶ。そして, もし平面が直角円錐状体に接し, 接している平面に平行な別の平面がその [直角] 円錐状体の何らかの切片を切り取るならば, 切り取っている平面において [直角] 円錐状体の切断線によって囲まれた平面を切り取られた切片の底面と, さらに, そこにおいてもう 1 つの平面が [直角] 円錐状体に接する点を [切片の] 頂点と, さらに, 切片の頂点を通して引かれた, [直角] 円錐状体の軸に平行な直線の, 切片の中に含まれる, 部分を [切片の] 軸と呼ぶ。



もし鈍角円錐切断 [双曲線], その直径, その鈍角円錐切断に隣接する直線 [漸近線] が [1 つの] 平面上にあり, その直径を固定したままで, それらの線のすべてがある, その平面が回転され, そこから動くことが始められた, その位置に再び戻されるならば, 鈍角円錐切断に隣接する直線が等脚円錐を囲むことは明らかであり, そこにおいて [鈍角円錐] 切断に隣接する直線が互いにそれ自身に出会う点は頂点, さらに, 固定した直径は軸であろう。さらに, 鈍角円錐切断によって囲まれた図形を鈍角円錐状体 [回転双曲線体] と呼び, さらに, 固定された直径をその軸と, さらに, そこにおいて軸が [鈍角] 円錐状体の表面に出会う点を頂点と呼ぶ。さらに, 鈍角円錐切断に隣接する直線が囲んだ円錐は [鈍角] 円錐状体を包んでいる [円錐] と呼ばれ, さらに, [鈍角] 円錐状体の頂点とその [鈍角] 円錐状体を包んでいる円錐の頂点の間におかれた直線は軸に付加された [直線] と呼ばれる。そして, もし平面が鈍角円錐状体に接し, 接している平面に平行な別の平面がその [鈍角] 円錐状体の切片を切り取るならば, 切り取っている平面において [鈍角] 円錐状体の切断線によって囲まれた平面を切り取られた切片の底面と, さらに, そこにおいて接している平面が [鈍角] 円錐状体に接する点を [切片の] 頂点と, さらに, 切片の頂点と [鈍角] 円錐状体包んでいる円錐の頂点を通して引かれた直線の, 切片の内部に含まれる, 部分を [切片の] 軸と, さらに, それらの両頂点の間におかれた直線は軸に付加された [直線] と呼ばれる。

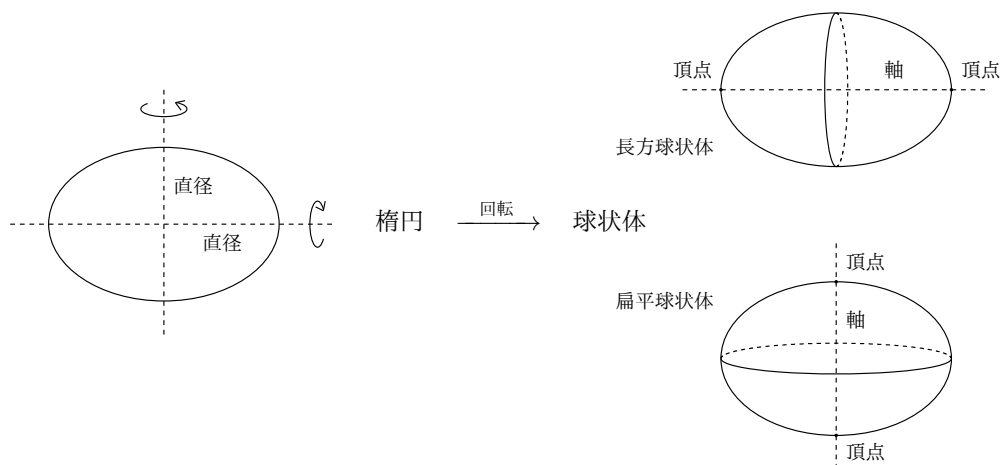
直角円錐状体はすべて相似であり、さらに、鈍角円錐状体は、[鈍角]円錐状体を包んでいる円錐が相似であるとき、相似であるといわれる。



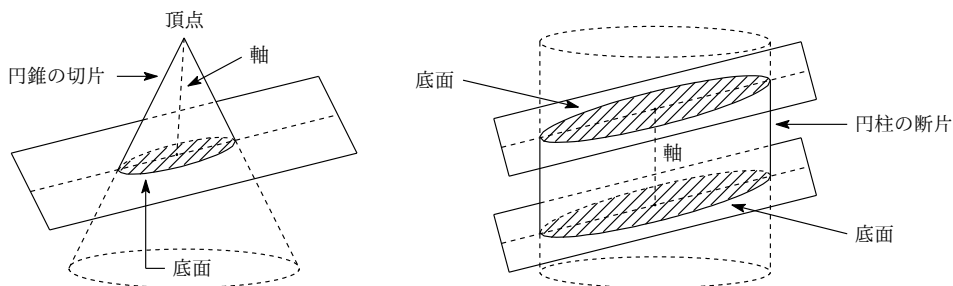
もしその大きい方の直径を固定したままで回転された鋭角円錐切断[楕円]が、そこから動くことが始められた、その位置に再び戻されるならば、その鋭角円錐切断によって囲まれた図形を長方球状体と呼ぶが、しかしもしその小さい方の直径を固定したまま回転された鋭角円錐切断が、そこから動くことが始められた、その位置に再び戻されるならば、その鋭角円錐切断によって囲まれた図形を扁平球状体と呼ぶ。さらに、それらのいずれについても、球状体の軸とは固定されたままの直径のことを、さらに、[球状体の]頂点とはそこにおいて軸が球状体の表面に出会う点のことを、さらに、[球状体の]中心とは軸の中点のことを、そして、[球状体の]直径とは中心を通って軸に垂直に引かれた直線のことをいう。そして、もし、いずれの球状図形についても、平行な平面がそれを切断することなく接しており、そして、接している平面に平行な、球状体を切断する、別の平面が引かれるならば、それによって生じる切片の底面とは切断している平面において球状体の切断線によって囲まれた平面のことを、さらに、[球状体の切片の]頂点とはそこにおいて[切片を切り取っている平面に]平行な平面が接する点のことを、さらに、[球状体の切片の]軸とは切片の頂点を結んでいる直線の、切片の内部に囲まれた、部分のことをいう。

さらに、球状図形が相似であるとはそれらの直径が軸に対して同じ比を持つことをいう。さらに、もし相似な図形から切り取られたものが相似な底面を持ち、そして、それらの軸が底面の平面に垂直であるか、あるいは、底面に対応している直径がつくっている等しい角が底面に対応している直径と互いに同じ比を持つならば、球状図形と円錐状図形の切片は相似であると呼ばれる。

ここでは長方球状体、扁平球状体を総称して球状図形や球状体と呼んでいるが、こんにちでは回転楕円体と呼んでいる。



定義 II (本文中) もし円錐がその円錐のすべての辺に出会う平面によって切断されるならば、切断線は円かあるいは鋭角円錐切断 [楕円] かであろう。もし切断線が円ならば、円錐の頂点があるのと同じ側に、円錐から切り取られた切片は円錐になるであろうことは明らかである。しかし、もし切断線が鋭角円錐切断ならば、円錐の頂点があるのと同じ側に、円錐から切り取られた図形は円錐の切片と呼ばれる。さらに、鋭角円錐切断によって囲まれた平面は切片の底面と、さらに、円錐の頂点と同じである点は [切片の] 頂点と、さらに、円錐の頂点から鋭角円錐切断の中心に引かれた直線は [切片の] 軸と呼ばれる。そして、もし円柱がその円柱のすべての辺に出会う平行な2つの平面によって切断されるならば、切断線は、互いにそれ自身に等しくて相似な、円であるかあるいは鋭角円錐切断であろう。いま、もし切断線が円ならば、円柱から平行な平面の間に切り取られた図形は円柱になるであろうことは明らかである。しかし、もし切断線が鋭角円錐切断ならば、円柱から平行な平面の間に切り取られた図形は円柱の断片と呼ばれる。さらに、鋭角円錐切断に囲まれた平面は断片の底面と、さらに、鋭角円錐切断の両中点を結んでいる直線は [断片の] 軸と呼ばれる。さらに、これはそこに円柱の軸がある直線と同じであろう。



[レンマ] もし互いに等しい空間だけ超えている任意個数の量が与えられ、そして、その差が最小のものに等しく、そしてさらに、先の [量] と同じ数の、すべての量が最大のものに等しい、別の量が与えられるならば、最大のものに等しいこれらすべての量 [の和] は、互いに等しい空間だけ超えているすべての量の [和の] 大きさの2倍よりは小さく、最大のものを除いた残りのものの [和の] 大きさの2倍よりは大きいであろう。

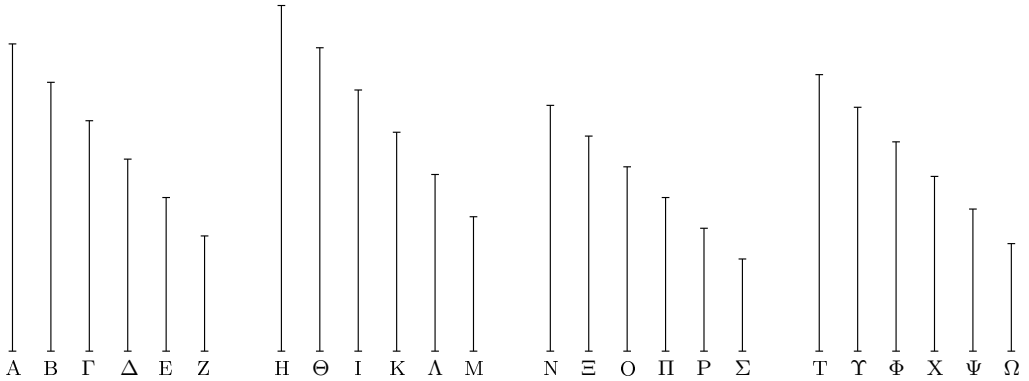
命題 1 もし任意個数の量とそれに等しい数の別の量とがあり、[それらから] 同様にとられた2

つずつと2つずつが同じ比を持ち、そして、前者の量のそれぞれが〔それら2つとは〕別の量に対して何らかの比にあり、さらに、後者の量が同様にとられた別の〔量〕に対して同じ比にあるならば、前者の量のすべて〔の和〕はそれと比例している〔別の量の〕すべて〔の和〕に対して、後者の量のすべて〔の和〕がそれと比例している〔別の量の〕すべて〔の和〕に対して持っている〔比〕と同じ比を持つであろう。

何らかの量 A, B, Γ, Δ, E, Z とそれに等しい数の別の量 H, Θ, I, K, Λ, M が2つずつと2つずつが同じ比を持ち、 $A : B = H : \Theta$, $B : \Gamma = \Theta : I$ であり、その他も同様であるとせよ。そして、A, B, Γ, Δ, E, Z は別の量 N, Ξ, O, Π, P, Σ に対して何らかの比にあり、そして、H, Θ, I, K, Λ, M は同様にとられた別の〔量〕 T, Υ, Φ, X, Ψ, Ω に対して同じ比にあるとして、 $A : N = H : T$, $B : \Xi = \Theta : \Upsilon$ であるとし、その他も同様であるとせよ。

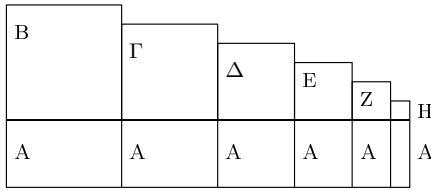
$$\frac{A + B + \Gamma + \Delta + E + Z}{N + \Xi + O + \Pi + P + \Sigma} = \frac{H + \Theta + I + K + \Lambda + M}{T + \Upsilon + \Phi + X + \Psi + \Omega}$$

であることが証明されなければならない。



命題2 もし互いに等しい任意個数の直線があり、そのそれぞれに平方図形〔正方形〕だけ超過している空間が付け加えられ、それらの超過している空間の辺は等しい差だけ互いに超過し、その差は最小のものに等しく、そしてさらに、これらと等しい数の、さらにその大きさはすべて最大のものに等しい、別の空間が与えられるならば、後者の空間〔のすべての和〕は前者の空間のすべて〔の和〕に対しては、超過している最大の空間の辺に等しい直線と互いに等しい直線の中の1つとが同時にとられたものが、超過している最大の空間の辺の3分の1に等しい直線と互いに等しい直線の中の1つの半分とが同時にとられたものに対するより小さい比を、さらに、〔前者の空間で〕最大の空間を除いた残り〔の和〕に対しては、同じ両直線〔の比〕より大きい比を、持つであろう。

なぜならば、任意個数の等しい直線が与えられたとし、その中には文字 A があるとせよ。そのそれぞれに平方図形〔正方形〕だけ超過している空間が付け加えられるとせよ。さらに、それらの超過している空間の辺 B, Γ, Δ, E, Z, H は等しい差だけ互いに超過し、その差は最小のものに等しいとせよ。そして、最大のものが B, 最小のものが H であるとせよ。しかしまた、これらに等しい数の別の空間が与えられたとし、そのそれぞれの中には文字 Θ, I, K, Λ があり、さらに、その大きさは、すべて、最大の空間として等しいものが付け加えられた直線 AB であるとせよ。さらに、 $\Theta + I = A$, $K + \Lambda = B$ で、 $\Theta + I = 2I$, $K + \Lambda = 3K$ であるとせよ。その中に文字 Θ, I, K, Λ があるすべての空間〔の和〕は、前者のすべての空間 AB, AΓ, AΔ, AE, AZ, AH 〔の和〕に対しては、 $\Theta + I + K + \Lambda : I + K$ より小さい比を、さらに、最大の空間 AB を除いた残り〔の和〕に対しては、 $\Theta + I + K + \Lambda : I + K$ より大きい比を、持つことが証明されなければならない。



Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ	Θ
I	I	I	I	I	I	I
K	K	K	K	K	K	K
Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ	Λ

互いに等しい直線 A の長さを a 、それに付け加えられる正方形の (最小のもの) 1 辺 H を x で表すと、付け加えられた最小の図形 AH (の面積) は $x(a+x)$ となる。

付加される H, Z, E, ... は初項が x 、公差が x の等差数列だから、最大の第 n 項 B は nx となる。従って、付加された図形のうちの最大の第 n 項 AB (の面積) は $(nx)(a+nx)$ となる。

また、 Θ, I, K, Λ についての条件から、 $\Theta = I = \frac{1}{2}a$ 、 $K = \frac{1}{3}(nx)$ 、 $\Lambda = 2K$ である。

そして、この命題の主張は

$$n \cdot AB : AH + \dots + AB < A + B : \frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B < n \cdot AB : AH + \dots + A\Gamma$$

すなわち、

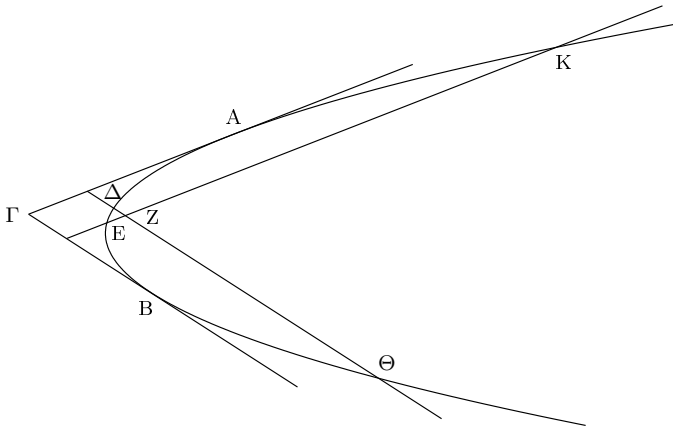
$$n(nx)(a+nx) : \sum_{k=1}^n (kx)(a+kx) < a+nx : \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}(nx) < n(nx)(a+nx) : \sum_{k=1}^{n-1} (kx)(a+kx)$$

ということ。

命題 3 もし同じ点から引かれた [2 つの] 直線が何らかの円錐切断に接し、そしてさらに、その円錐切断に接している [直線] に平行な別の直線が互いに [他を] 切断するならば、それらに囲まれた部分の空間は互いに接している直線の平方と同じ比を持つであろう。そして、直線によって囲まれたもう一方の部分の空間は接している直線に平行な直線の平方 [の比] と一致するであろう。しかし、これは円錐曲線原論において証明されている [アポロニオス『円錐曲線論』第 3 巻命題 17]。

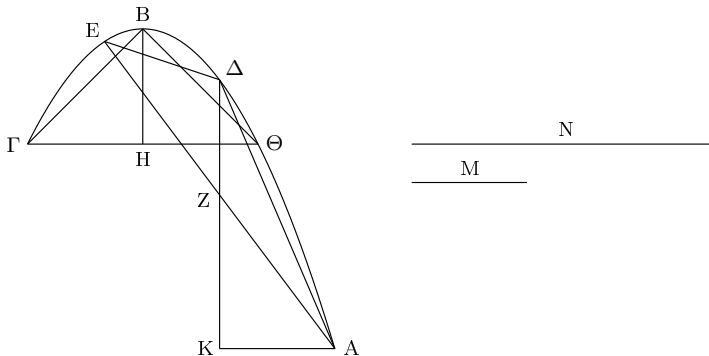
下の図で、直線 $\Gamma A, \Gamma B$ は何らかの円錐曲線への接線。そして、直線 $\Delta Z\Theta, EZK$ は、それぞれ、円錐曲線上の点 Δ, E から接線 $\Gamma B, \Gamma A$ に平行に引かれた直線。このとき、 $EZ \times ZK : \Delta Z \times Z\Theta = A\Gamma^2 : B\Gamma^2$ となる、ということ。

ここまでは命題 3 の前置き。



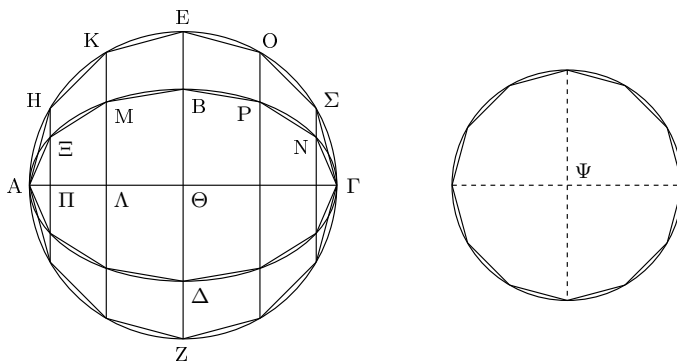
もし同じ直角円錐切断 [放物線] から、どのようなものであろうと、等しい直径を持っている 2 つの切片が切り取られるならば、その切片自身 [同士] も、その切片と同じ底辺と等しい高さを持っている、それらに内接された、三角形 [同士] も等しいであろう。ただし、その切片の直径とその底辺に平行なすべての直線を 2 つの等しい部分に分割する直線のことをいう。

ABΓ を直角円錐切断 [放物線] とし、そこから 2 つの切片 AΔE, ΘBΓ が切り取られるとせよ。そして、切片 AΔE の直径が ΔZ, 切片 ΘBΓ の直径が BH であるとし、 $\Delta Z = BH$ であるとせよ。切片 AΔE, ΘBΓ も、それらに内接された、私たちが述べたような、三角形 [同士] も等しいことが証明されなければならない。



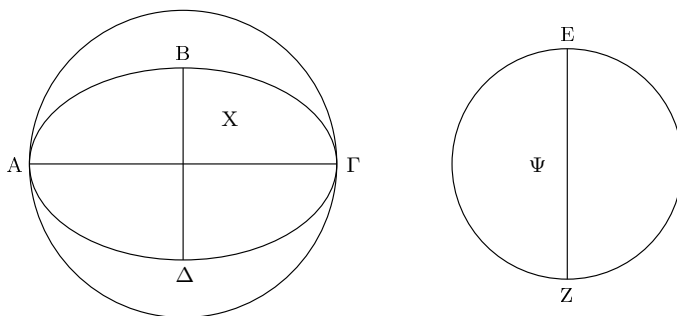
命題 4 鋭角円錐切断 [楕円] によって囲まれた任意の空間は鋭角円錐切断の大きい方の直径に等しい直径を持っている円 [補助円] に対して、小さい方の直径が、[補助] 円の直径であるという、大きい方 [の直径] に対するのと同じ比を持つ。

なぜならば、その中に文字 A, B, Γ, Δ がある、鋭角円錐切断 [楕円] があるとし、さらに、大きい方の直径がその中に A, Γ がある直線で、さらに、小さい方 [の直径] がその中に B, Δ がある [直線である] とせよ。直径 AΓ の周りに円が描かれたとせよ。鋭角円錐切断によって囲まれた空間が円に対して、 $B\Delta : \Gamma A$, すなわち $B\Delta : EZ$, と同じ比を持つことが証明されなければならない。いま、その中に文字 Ψ がある円が円 AETZ に対して $B\Delta : EZ$ と同じ比を持つとせよ。私は、円 Ψ は鋭角円錐切断に等しい、と言う。



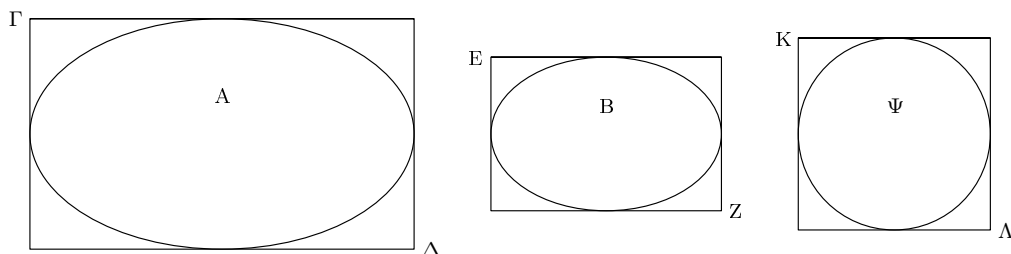
命題5 鋭角円錐切断〔楕円〕によって囲まれた任意の空間は任意の円に対して、鋭角円錐切断の両直径によって囲まれた長方形がその円の直径の平方に対するのと同じ比を持つ。

なぜならば、その中に文字 X がある、鋭角円錐切断〔楕円〕に囲まれた任意の空間があるとせよ。さらに、鋭角円錐切断の直径が AG , BD であるとし、大きい方が AG であるとせよ。その中に文字 Ψ がある円があるとし、その直径が EZ であるとせよ。 $X : \Psi = AG \times BD : EZ^2$ であることが証明されなければならない。



命題6 鋭角円錐切断〔楕円〕によって囲まれた〔2つの〕空間は互いに、〔それらの〕鋭角円錐切断の両直径によって囲まれた長方形が互いに持つのと同じ比を持つ。

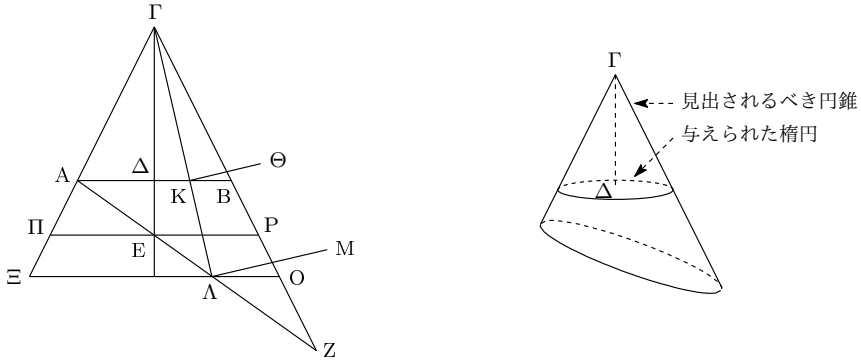
その中に文字 A, B がある、鋭角円錐切断〔楕円〕によって囲まれた〔2つの〕空間があるとせよ。さらに、空間 A を囲む長方形 $\Gamma\Delta$ が鋭角円錐切断の両直径によって囲まれ、さらに、長方形 EZ がもう一方の〔鋭角円錐〕切断の両直径によって囲まれるとせよ。 $A : B = \Gamma\Delta : EZ$ であることが証明されなければならない。



系 さらに、このことから、相似な鋭角円錐切断〔楕円〕によって囲まれた空間は互いに、それらの〔鋭角円錐〕切断の、対応している、直径の平方〔が持っているの〕と同じ比を持つ、ことは明らかである。

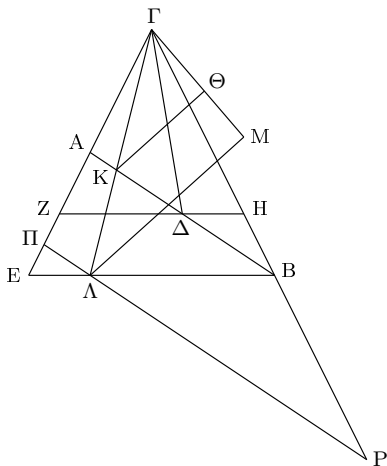
命題 7 鋭角円錐切断 [楕円] が与えられ, その鋭角円錐切断の中心から, その上にその鋭角円錐切断がある, 平面に対して垂直な直線が立てられると, 立てられた直線の端点を頂点として持って、その表面に与えられた鋭角円錐切断がある, 円錐が見出されるようにすることができる。

鋭角円錐切断 [楕円] が与えられ, その中心から, その上にその鋭角円錐切断がある, 平面に垂直な直線が立てられたとせよ。立てられた直線と小さい方の直径を通して平面が引かれるとし, その上に小さい方の直径 AB, 鋭角円錐切断の中心 Δ , 中心から立てられた垂直な直線 $\Delta\Gamma$, そして, その端点 Γ があるとせよ。さらに, 鋭角円錐切断が直線 $\Gamma\Delta$ に垂直な平面において直径 AB の周りに描かれたと考えられるとせよ。それゆえ, 頂点として点 Γ を持って、その表面に与えられた鋭角円錐切断がある, 円錐が見出されなければならない。



命題 8 鋭角円錐切断 [楕円] が与えられ, その鋭角円錐切断の中心から, その上にその鋭角円錐切断がある平面に対して垂直に一方の直径を通して立てられた, 平面内に [先の平面に] 垂直でない直線が立てられると, 立てられた直線の端点を頂点として持って、その表面に与えられた鋭角円錐切断がある, 円錐が見出されるようにすることができる。

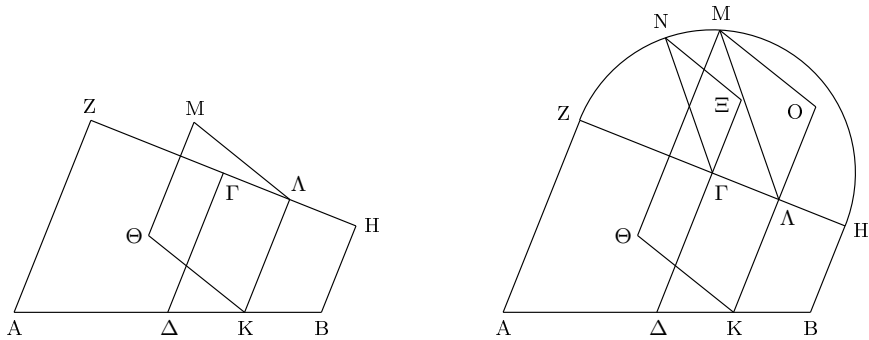
それゆえ, BA を鋭角円錐切断 [楕円] の直径, Δ をその中心とし, そして, $\Delta\Gamma$ が, 私たちが述べたように, 中心 [Δ] から立てられた直線であるとせよ。さらに, 鋭角円錐切断が, その上に直線 AB, $\Gamma\Delta$ がある平面に垂直である, 平面において直径 AB の周りに描かれたと考えられるとせよ。それゆえ, 頂点として点 Γ を持って、その表面に与えられた鋭角円錐切断がある, 円錐が見出されなければならない。



命題 9 鋭角円錐切断 [楕円] が与えられ, その鋭角円錐切断の中心から, その上にその鋭角円錐切断がある平面に対して垂直に一方の直径を通して立てられた, 平面内に [先の平面に] 垂直で

ない直線が立てられると、延長されたその立てられた直線の上に軸を持っていて、その表面に与えられた鋭角円錐切断がある、円柱が見出されるようにすることができる。

与えられた鋭角円錐切断 [楕円] の一方の直径が AB, 中心が Δ , さらに、中心から、私たちが述べたように、立てられた直線が $\Gamma\Delta$ であるとせよ。そして、鋭角円錐切断が、その上に直線 AB, $\Gamma\Delta$ がある平面に垂直である、平面において直径 AB の周りに描かれたと考えられるとせよ。それゆえ、延長された直線 $\Gamma\Delta$ の上に軸を持っていて、その表面に与えられた鋭角円錐切断がある、円柱が見出されなければならない。



命題 10 任意の円錐は第 2 の円錐に対して、底面の比と高さの比によって合成された比を持つことが、先人たちによって証明されている [ユークリッド『原論』第 12 巻命題 11, 命題 14]。さらに、同じ方法によって、円錐の任意の切片はその円錐の第 2 の切片に対して、底面の比と高さの比によって合成された比を持つことが証明される。

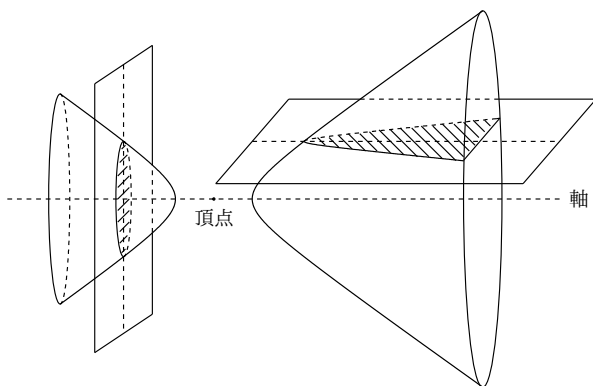
そして、円柱の任意の断片は、その断片と同じ底面と等しい高さを持つ円錐の切片の 3 倍大きいことが、円柱はその円柱と同じ底面と等しい高さを持つ円錐の 3 倍大きいことが証明される [ユークリッド『原論』第 12 巻命題 10] のと、同じ方法によって証明されるであろう。

命題 11 (a) もし直角円錐状体が軸を通る、あるいは軸に平行におかれた、平面によって切断されるならば、切断線はその図形を囲むもの [その直角円錐状体をつくり出す放物線] と同じ直角円錐切断 [放物線] であろう。さらに、その [切断線の] 直径は、図形を切断している平面にある、そして、軸を通過して切断している平面に垂直に引かれた平面にある、切断線に共通 [なそれらの交線] であろう。

しかしもし軸に垂直な平面によって切断されるならば、切断線は軸の上におかれた中心を持っている円であろう。

(b) もし鈍角円錐状体が軸を通る、あるいは軸に平行な、あるいはその [鈍角] 円錐状体を包んでいる円錐の頂点を通っておかれた、平面によって切断されるならば、切断線は鈍角円錐切断 [双曲線] であろうし、[切断する平面が、] もし軸を通るならば、その図形を囲んでいる [双曲線] と同じであり、もし軸に平行ならば、それと相似であり、さらに、もし [鈍角] 円錐状体を包んでいる円錐の頂点を通るならば、相似ではないであろう。さらに、切断線の直径は、図形を切断している平面にある、そして、軸を通過して切断している平面に垂直に引かれた平面にある、切断線に共通 [なそれらの交線] であろう。

もし軸に垂直な平面によって切断されるならば、切断線は軸の上におかれた中心を持っている円であろう。



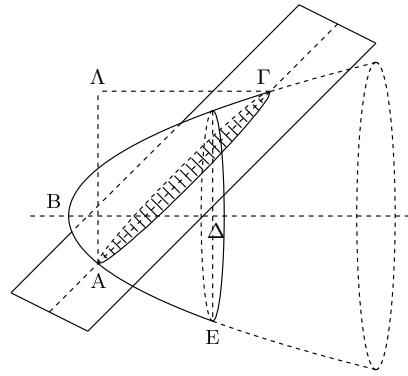
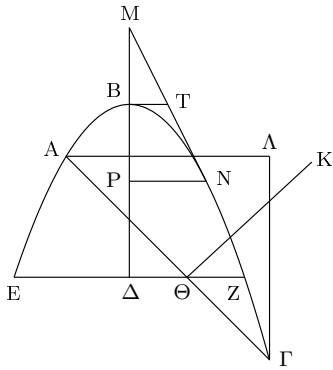
(c) もし、[長方球状体，扁平球状体の] どちらにしろ，球状図形が軸を通る，あるいは，軸に平行におかれた，平面によって切断されるならば，切断線は鋭角円錐切断 [楕円] であろうし，[切断する平面が，] もし軸を通るならば，その図形を囲んでいる [鋭角円錐] 切断自身で，もし軸に平行な平面によるならば，それと相似であろう。さらに，切断線の直径は，図形を切断している平面にある，そして，軸を通過して切断している平面に垂直に引かれた平面にある，切断線に共通 [なそれらの交線] であろう。

しかしもし軸に垂直な平面によって切断されるならば，切断線は軸の上におかれた中心を持っている円であろう。

(d) もし任意の，私たちが述べた，図形が軸を通過しておかれた平面によって切断されるならば，図形の表面におかれた，しかし切断線の上にはない，点から切断している面に垂直に引かれた直線は図形の切断線の中に落ちるであろう。

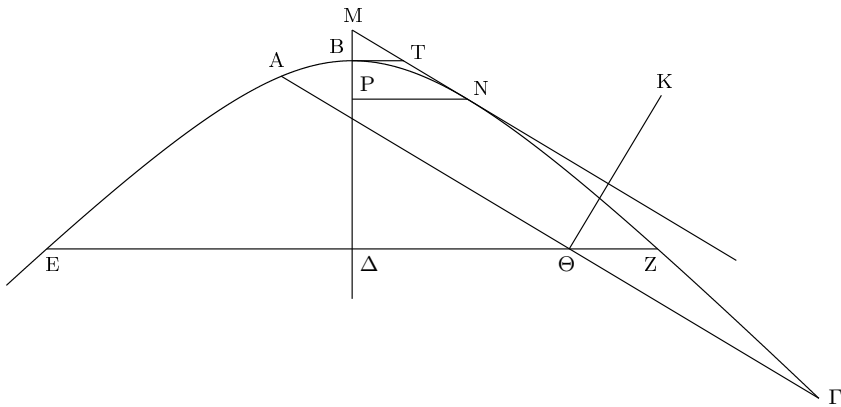
命題 12 もし直角円錐状体が，軸を通らず，しかも，軸に平行でもなく，しかも，軸に垂直でもない，平面によって切断されるならば，切断線は鋭角円錐切断 [楕円] であろうし，さらに，その大きい方の直径は，図形を切断している平面にある，そして，軸を通過して切断している平面に垂直に引かれた平面にある，共通の切断線である，直線が [直角] 円錐状体の内部に囲まれた部分であり，さらに，小さい方の直径は大きい方の直径の両端点から軸に平行に引かれる直線の距離であろう。

なぜならば，直角円錐状体が，[命題に] 言われたようにおかれた，平面によって切断されるとせよ。切断している平面に垂直な，軸を通過している，別の平面によって切断された [直角] 円錐状体の切断線が $AB\Gamma$ であり，図形を切断している平面にある直線が ΓA であるとせよ。さらに，[直角] 円錐状体の軸および切断線の直径が $B\Delta$ であるとせよ。直線 $A\Gamma$ がおかれた平面によってつくられた [直角] 円錐状体の切断面は鋭角円錐切断 [楕円] であること，そして，直線 $A\Gamma$ がその大きい方の直径であること，さらに，小さい方 [の直径] は直線 ΛA に等しく，さらに，[端点 Γ から] 引かれた直線 ΓA は直線 $B\Delta$ に平行であり，直線 ΛA は直線 ΓA に垂直であることが証明されなければならない。



命題 13 もし鈍角円錐状体が、その〔鈍角〕円錐状体を包んでいる円錐のすべての辺に出会う、軸に垂直ではない、平面によって切断されるならば、切断線は鋭角円錐切断〔楕円〕であろうし、その大きい方の直径は、図形を切断している平面にある、そして、軸を通して切断している平面に垂直な平面にある、共通の切断線である、直線が〔鈍角〕円錐状体の内部に囲まれた部分であろう。

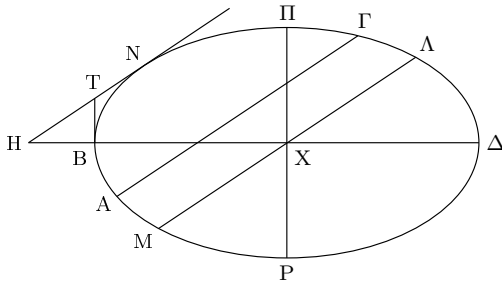
なぜならば、鈍角円錐状体が、〔命題に〕言われたような、平面によって切断されるとせよ。切断している平面に垂直な、軸を通っている、別の平面によって切断された〔鈍角〕円錐状体の切断線が鈍角円錐切断〔双曲線〕 $AB\Gamma$ であり、図形を切断している平面にある直線が $A\Gamma$ であるとせよ。さらに、〔鈍角〕円錐状体の軸および切断線の直径が $B\Delta$ であるとせよ。それゆえ、任意の点 K が切断面の上にとられ、そして、点 K から $A\Gamma$ に垂直な $K\Theta$ が引かれると考えられるとせよ。それゆえ、それ $[K\Theta]$ は、その上に〔鈍角〕円錐切断〔双曲線〕 $AB\Gamma$ がある、平面に垂直であろう。そして、 Θ を通って、 $B\Delta$ に垂直な EZ が引かれるとし、直線 EZ , $K\Theta$ を通って、〔鈍角〕円錐状体を切断している、平面が引かれるとせよ。



命題 14 もし長方球状体が軸に垂直でない平面によって切断されるならば、切断線は鋭角円錐切断〔楕円〕であろうし、その大きい方の直径は、図形を切断している平面にある、そして、軸を通して切断している平面に垂直な平面にある、共通の切断線である、直線が〔長方〕球状体の内部に囲まれた部分であろう。

これは、もし軸を通る、あるいは、軸に平行な平面によって切断されるならば、直ちに明らかである。そこで、別の平面によって切断されるとせよ。切断している平面に垂直な、軸を通っている、平面によって切断された〔長方〕球状体の切断線が鋭角円錐切断〔楕円〕 $AB\Gamma\Delta$ であり、〔長方〕球状体を切断している平面にある直線が ΓA であるとせよ。さらに、〔長方〕球状体の軸および鋭角円錐切断の直径が $B\Delta$ 、さらに、中心が X 、小さい方の直径が ΠP であるとせよ。さらに、 BT が $B\Delta$ に垂直に、鋭

角円錐切断 [楕円] に点 N において接している HN が直線 AΓ に平行に、引かれるとせよ。さらにまた、MA が点 X を通って直線 AΓ に平行に引かれるとせよ。



命題 15 (a) 直角円錐状体において、その [直角] 円錐状体の表面におかれた任意の点から軸に平行に引かれる、諸直線のうち、その [直線の] 部分が凸状であるのと同じ側に引かれるそれらは [直角] 円錐状体の外部に、一方、反対の側に引かれるものは内部に落ちるであろう。

(b) 鈍角円錐状体において、その表面におかれた任意の点から、その [鈍角] 円錐状体について [鈍角] 円錐状体を包んでいる円錐の頂点を通して引かれた、直線に平行に引かれる、諸直線のうち、その部分が凸状であるのと同じ側に引かれるそれらは [鈍角] 円錐状体の外部に、一方、反対の側に引かれるものは内部に落ちるであろう。

(c) もし平面が円錐状図形 [直角円錐状体および鈍角円錐状体] を切断することなく、その円錐状図形に接するならば、ただ 1 つだけの点で接するであろうし、そして、接している点と [円錐状図形の] 軸を通して引かれた平面は接している平面に垂直であろう。

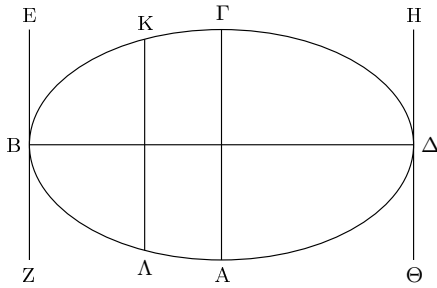
命題 16 (a) もし平面がどちらにしろ球状図形 [長方球状体および扁平球状体] に、その [球状] 図形を切断することなく、接するならば、ただ 1 つだけの点で接するであろうし、そして、接している点と [球状図形の] 軸を通して引かれた平面は接している平面に垂直であろう。

(b) もし任意の円錐状、または球状、図形が軸を通しておかれた平面によって切断され、そして、それによってつくられた切断線に接する直線が引かれ、そして、接している直線において接している平面に垂直な平面が立てられるならば、[その平面は] 図形に、そこで直線がその円錐切断に接するのと、同じ点において接する。

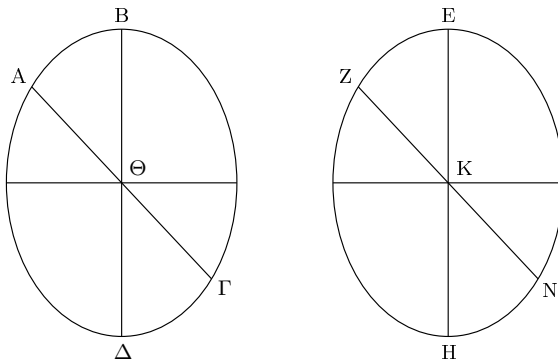
(c) もし 2 つの平行な平面がどちらにしろ球状図形に接するならば、接する点 [同士] を結んでいる直線は球状体の中心を通るようになるであろう。

命題 17 もしいずれか一方の球状図形に接している 2 つの平行な平面が引かれ、そして、その球状体の中心を通して、接している [両平面] に平行な [別の] 平面が引かれるならば、それによってつくられた切断線 [の上の点] を通って、接している点を結んでいる直線に平行に引かれた直線は球状体の外部に落ちるであろう。

私たちが [命題中に] 述べたことが仮定されるとし、それによってつくられた切断線の上に任意の点がとられ、そのようにとられた点と接している点を結んでいる直線を通る平面が引かれるとせよ。それゆえ、これは球状体および平行な平面を切断するであろう。それゆえ、球状体にある切断線が鈍角円錐切断 [楕円] $AB\Gamma\Delta$ であるとし、さらに、接している両平面にある切断線が EZ , $H\Theta$, そして、[先に] とられた点が A , そして、接している両点を結んでいる直線が $B\Delta$ であるとせよ。さらに、それは中心を通るであろう [命題 16(c)]。

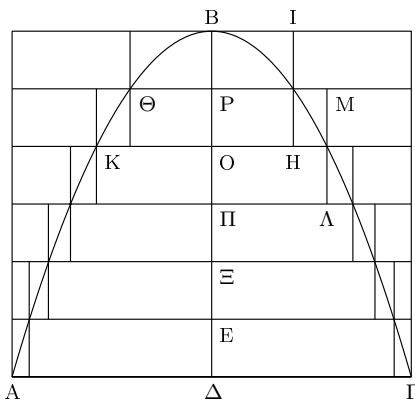


命題 18 中心を通る平面によって切断された任意の球状図形は、その平面によって、それ自身もその表面も [ともに] 2つの等しい部分に切断される。



命題 19 軸に垂直な平面によって切り取られたいずれかの円錐状体の切片、あるいは、いずれかの球状体の、その球状体の半分であるものより、大きくない方の切片が与えられると、等しい高さを持っている円柱から構成された図形がそのように切り取られた立体に内接され、そして、別の [図形] が外接されて、外接された図形が内接されたものを、任意に与えられた立体の大きさより、小さい空間だけ超えるようにすることができる。

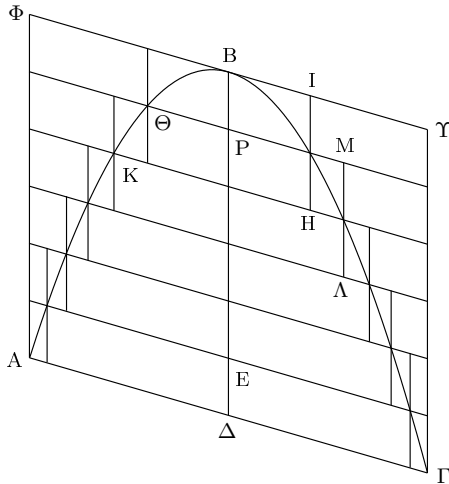
与えられた切片を、いずれによるものであれ、 $AB\Gamma$ とせよ。そして、軸を通っておかれた平面によって切断されたその切片の切断線が円錐切断 $AB\Gamma$ である [命題 11] とし、さらに、切片を切り取っている平面にある直線が $A\Gamma$ であるとせよ。さらに、切片の軸および切断線の直径が $B\Delta$ であるとせよ。いま、[切片を] 切り取っている平面が軸に垂直であることが仮定されているから、切断線は円であり、その直径は ΓA である [命題 11]。



命題 20 軸に垂直ではない平面によって切り取られたいずれかの円錐状体の切片、あるいは、

いずれかの球状体の、その球状体の半分であるものより、大きくない方の切片が与えられると、等しい高さを持っている円柱の断片から構成された図形がそのように切り取られた立体に内接され、そして、別の「図形」が外接されて、外接された図形が内接されたものを、任意に与えられた立体の大きさより、小さい空間だけ超えるようにすることができる。

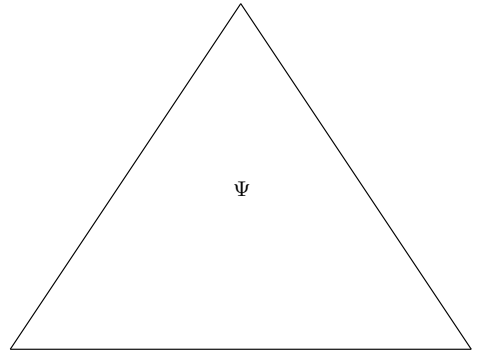
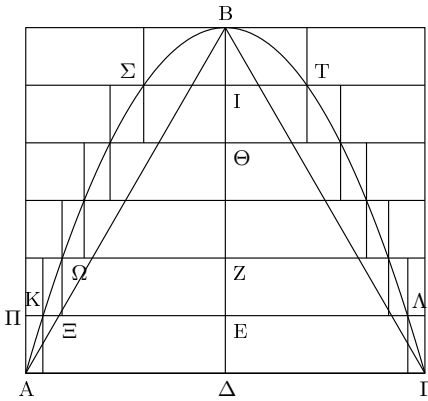
[命題に] 言われたような切片が与えられたとせよ。それゆえ、その図形から、軸を通して与えられた切片を切り取っている平面に垂直な別の平面によって切断された図形にある切断線が円錐切断 $AB\Gamma$ であるとし、切片を切り取っている平面にある直線が ΓA であるとせよ。いま、仮定されたことから、切片を切り取っている平面は軸に対して垂直ではないから、切断線は鋭角円錐切断「楕円」であり、その直径は直線 $A\Gamma$ であろう。それゆえ、円錐切断に接している直線 $\Phi\Upsilon$ が直線 $A\Gamma$ に平行であると、そして、それは点 B において接するとし、そして、 $\Phi\Upsilon$ において $A\Gamma$ がおかれた平面に平行な平面が立てられるとせよ。それゆえ、それは点 B において図形に接するであろう [命題 16(b)]。いま、もしそれが直角円錐状体の切片であるならば、点 B から軸に平行な $B\Delta$ が引かれるとし、あるいはもし鈍角円錐状体の切片ならば、その「鈍角」円錐状体を包んでいる円錐の頂点から点 B まで引かれた直線が延長されるとして、それが $B\Delta$ であると、あるいはもし球状体の切片ならば、球状体の中心から B まで引かれた直線が切り取られるとして、それが $B\Delta$ であるとせよ。それゆえ、直線 $B\Delta$ が直線 $A\Gamma$ を 2 つの等しい部分に分割することは明らかである。それゆえ、点 B は切片の頂点であろうし、さらに、直線 $B\Delta$ は軸であろう。



命題 21 軸に垂直な平面によって切り取られた直角円錐状体の任意の切片は、その切片と同じ底面、同じ軸を持っている円錐よりその半分だけ大きい。

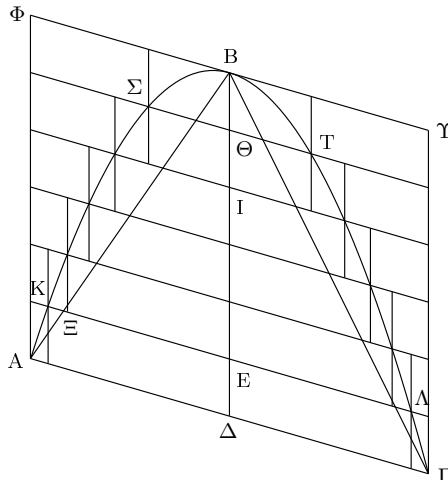
なぜならば、軸に垂直な平面によって切り取られた直角円錐状体の切片があると、軸を通る別の平面によって切断された表面の切断線が直角円錐切断「放物線」 $AB\Gamma$ であると、さらに、切り取られた切片の平面にある直線が ΓA 、切片の軸が $B\Delta$ であるとせよ。さらにまた、切片と同じ底面と同じ軸を持っている円錐があると、その頂点が B であるとせよ。[直角]円錐状体の切片がこの円錐よりその半分だけ大きいことが証明されなければならない。

なぜならば、その底面が直径 $A\Gamma$ の周りに描かれた円であり、軸が $B\Delta$ である円錐よりその半分だけ大きい円錐 Ψ がつくられるとせよ。さらにまた、底面として直径 $A\Gamma$ の周りに描かれた円を、さらに、軸として $B\Delta$ を持っている円柱があるとせよ。それゆえ、円錐 Ψ は円柱の半分であろう。私は、その「直角」円錐状体の切片は円錐 Ψ に等しい、と言う。



命題 22 さらにまた、もし直角円錐状体からその軸に垂直ではない平面によって切片が切り取られるならば、それはその切片と同じ底面、同じ軸を持っている円錐の切片よりその半分だけ大きい。

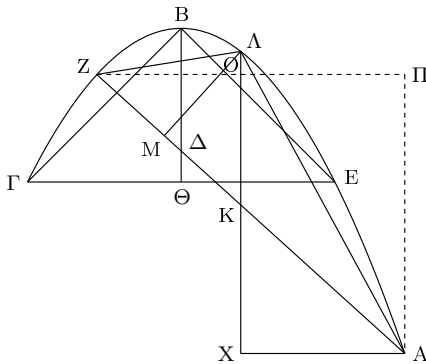
[命題に] 言われたように、切り取られた直角円錐状体の切片があるとし、軸を通して、その切片を切り取っている平面に垂直におかれた平面によって、それから切断された図形にある切断線が直角円錐切断 [放物線] $AB\Gamma$ [命題 11(a)] で、さらに、切片を切り取っている平面にある直線が $A\Gamma$ であるとし、そして、直線 $A\Gamma$ に平行で、直角円錐切断に点 B において接している、直線が $\Phi\Upsilon$ であるとし、直線 $B\Delta$ が軸に平行に引かれるとせよ。それゆえ、それは直線 $A\Gamma$ を 2 つの等しい部分に分割するであろう。そして、直線 $\Phi\Upsilon$ において、直線 $A\Gamma$ におかれた平面に平行な平面が立てられるとせよ。それゆえ、それは点 B において円錐状体に接する [命題 16(b)] であろうし、その切片の頂点は点 B で、軸は $B\Delta$ であろう。いま、直線 $A\Gamma$ におかれた、軸に垂直ではない平面が [直角] 円錐状体を切断するから、切断線は鋭角円錐切断 [楕円] で、その大きい方の直径は $A\Gamma$ であろう [命題 12]。



命題 23 もし直角円錐状体から、一方は軸に垂直な、他方は軸に垂直ではない平面によって、2 つの切片が切り取られ、それらの切片の軸 [の長さ] が等しければ、それらの切片 [の大きさ] は等しいであろう。

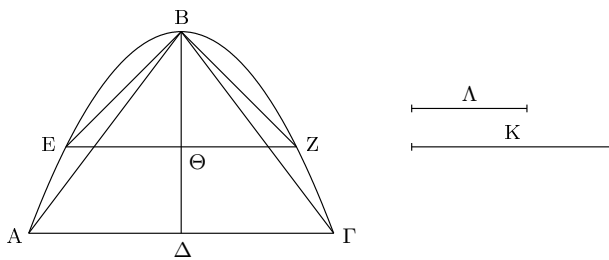
なぜならば、任意の直角円錐状体から、[命題に] 言われたように、2 つの切片が切り取られるとせよ。さらに、[直角] 円錐状体が軸を通しておかれた平面によって切断されたときの [直角] 円錐状体の切断線が直角円錐切断 [放物線] $AB\Gamma$ であるとして、さらに、その直径が $B\Delta$ [命題 11(a)]、その平面にある直線が AZ , $E\Gamma$ 、垂直ではない平面にある直線が ZA であるとせよ。さらに、切片の軸が互い

に等しい $B\Theta$, $K\Lambda$ で、頂点が B , Λ であるとせよ。その頂点が B である [直角] 円錐状体の切片が、その頂点が Λ である [直角] 円錐状体の切片に等しいことが証明されなければならない。
 なぜならば、同じ直角円錐切断から切り取られた 2 つの切片が ΛAZ と $EB\Gamma$ であり、それらの等しい直径が $K\Lambda$, $B\Theta$ であるから、三角形 ΛAK は三角形 $E\Theta B$ に等しい。なぜならば、三角形 ΛAZ は三角形 $EB\Gamma$ に等しいことが証明されている [命題 3] から。それゆえ、直線 AX が延長された直線 $K\Lambda$ に垂直に引かれるとせよ。すると、 $B\Theta = K\Lambda$ であるから、 $E\Theta = AX$ でもあろう。それゆえ、その頂点が B である切片にその切片と同じ底面、同じ軸を持っている円錐が、そして、その頂点が Λ である切片にその切片と同じ底面、同じ軸を持っている円錐が内接されるとせよ。さらに、点 Λ から直線 AZ に垂直な直線 ΛM が引かれるとせよ。それゆえ、それは頂点が Λ である円錐の切片の高さであろう。さらに、頂点が Λ である円錐の切片と、頂点が B である円錐は互いに、底面の比および高さの比によって合成された比を持つ。



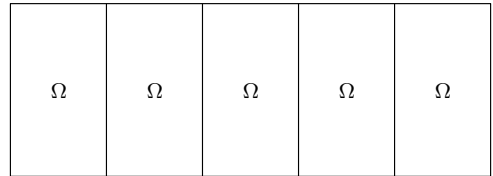
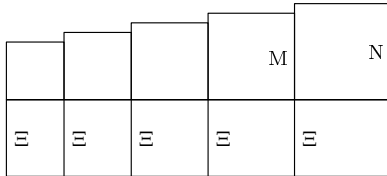
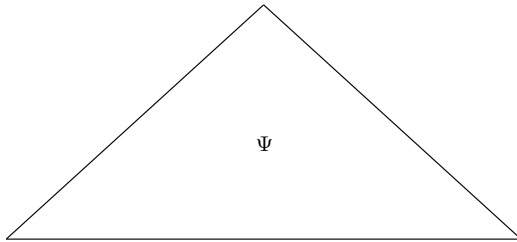
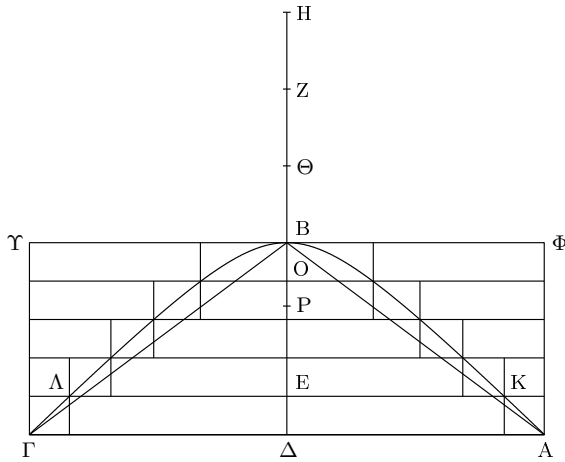
命題 24 もし直角円錐状体から任意の仕方で行かれた平面によって 2 つの切片が切り取られるならば、それらの切片は互いに軸の平方 [の比] と同じ比を持つであろう。

なぜならば、直角円錐状体から任意の仕方で行かれた 2 つの切片が切り取られるとし、一方の切片の軸が直線 K に等しく、他方 [の切片の軸] が直線 Λ [に等しい] とせよ。両切片は $K^2 : \Lambda^2$ と同じ比を持つことが証明されなければならない、



命題 25 軸に垂直な平面によって切り取られた鈍角円錐状体の任意の切片はその切片と同じ底面と等しい高さを持っている円錐に対して、切片の軸と軸に付加された直線の 3 倍との同時のもの [の和] に等しい直線が切片の軸と軸に付加された直線の 2 倍と [の和] に等しい直線に対するのと同じ比を持つ。

軸に垂直な平面によって切り取られた鈍角円錐状体の任意の切片があるとして、軸を通っておかれた別の平面によって切断された [鈍角] 円錐状体そのものの切断線が鈍角円錐切断 [双曲線] $AB\Gamma$ で、切片を切り取っている平面にある直線が $A\Gamma$, 切片の軸が $B\Delta$, 軸に付加された直線が $B\Theta$ であるとせよ。そして、 $B\Theta = Z\Theta = ZH$ であるとせよ。切片が切片と同じ底面と同じ軸を持っている円錐に対して $H\Delta : Z\Delta$ と同じ比を持つことが証明されなければならない。



それゆえ、切片と同じ底面、同じ軸を持っている円柱があるとし、さらに、その辺が ΦA , ΓY であるとせよ。さらにまた、その中に文字 Ψ がある、何らかの円錐があるとし、そして、それは、切片と同じ底面と同じ軸 $B\Delta$ を持っている円錐に対して、 $H\Delta : \Delta Z$ と同じ比を持つとせよ。それゆえ、私は、[この鈍角] 円錐状体の切片は円錐 Ψ に等しい、と言う。なぜならば、もし等しくないならば、より大きいかあるいはより小さいかである。

はじめに、もし可能ならば、より大きい [切片 $> \Psi$] とせよ。それゆえ、切片に、等しい高さを持っている円柱によって構成された、立体図形が内接されるとし、そして、別の [立体図形] が外接されるとして、外接された図形が内接された [図形] を、[鈍角] 円錐状体の切片が円錐 Ψ を超える [超過分] より小さい空間だけ超えるようにせよ [命題 19]。それゆえ、それぞれの円柱の平面が、底面として直径 $A\Gamma$ の周りに描かれた円を、軸として $B\Delta$ を持っている円柱 $[A\Phi Y \Gamma]$ の表面にまで広げられるとせよ。それゆえ、円柱全体は、外接された図形にある円柱と等しい数の、さらに、[それぞれが] それらのうちの最大のものに等しい、円柱に分割されるであろう。そして、外接された図形は内接された図形を、その切片が円錐 Ψ を超えるより小さい空間だけ超えていて、外接された図形は切片より大きいから、内接された図形もまた円錐 Ψ より大きいことは明らかである。それゆえ、 BP を直線 $B\Delta$ の 3 分の 1 であるとせよ。それゆえ、 $H\Delta = 3\Theta P$ であろう。そして、底面として直径 $A\Gamma$ の周りに描かれた円を、さらに、軸として $B\Delta$ を持っている円柱は、同じ底面と同じ軸を持っている円錐に対して、 $H\Delta : \Theta P$ と同じ比 $[3 : 1]$ を持ち、そしてまた、[仮定から] その円錐は円錐 Ψ に対して $Z\Delta : H\Delta$ と同じ比を持つから、それが乱比例 [ユークリッド『原論』第 5 巻定義 18] であるとすると、私たちが述べた円柱は円錐 Ψ に対して $Z\Delta : \Theta P$ と同じ比を持つであろう [ユークリッド『原論』第 5 巻命題 23]。さらに、数としては直線 $B\Delta$ の中にある [分割された] 部分 [の数] に等しく、大きさとしてはそれ

ぞれが直線 ZB に等しい、そこに文字 Ξ がある、いくつかの直線が描かれ、そして、それぞれに平方図形 [正方形] だけ超過している空間が結び付けられるとし、最大のものは $Z\Delta \times \Delta B$ に等しく、最小のものは $ZO \times OB$ に等しいとせよ。さらに、超過している [正方形の] 辺は等しい差だけ互いに超えているとせよ。そして、超過している最大の [正方形の] 辺は、そこに文字 N がある、直線 ΔB に等しい直線であり、さらに、超過している最小の [正方形の] 辺は BO に等しい直線であるとせよ。さらにまた、これらに等しい数の、そして、それぞれがそれらの最大のもの、[すなわち、] 直線 $Z\Delta$ 、 ΔB によって囲まれた長方形、に等しい、そこに文字 Ω がある、別の空間があるとせよ。それゆえ、底面として直径 AG の周りに描かれた円を、軸として ΔE を持っている円柱は、底面として直径 KA の周りに描かれた円を、軸として ΔE を持っている円柱に対して、 $\Delta A^2 : KE^2$ と同じ比を持つであろう。しかし、 $\Delta A^2 : KE^2 = Z\Delta \times \Delta B : ZE \times BE$ である。なぜならば、これはすべての鈍角円錐切断において起きる [アポロニオス『円錐曲線論』第 1 巻命題 21] から。そして、空間 ΞN は $Z\Delta \times \Delta B$ に等しく、 ΞM は $ZE \times BE$ に等しい。なぜなら、 $\Xi = ZB$ 、 $M = BE$ 、 $N = \Delta B$ だから。それゆえ、底面として直径 AG の周りに描かれた円を、軸として ΔE を持っている円柱は、底面として直径 KA の周りに描かれた円を、軸として ΔE を持っている円柱に対して、空間 Ω が ΞM に対するのと同じ比を持つであろう。そして、同じ仕方で、軸として等しい直線 ΔE を持っている、円柱全体の中にある、その他の円柱の 1 つ 1 つもまた、[それらに対応する] 内接された図形にある円柱に対して、空間 Ω が、直線 Ξ に超過している平方図形 [正方形] が付け加えられた、それらに対応する空間に対するのと同じ比を持つことを私たちは証明するであろう。それゆえ、それらのそれぞれが軸として等しい直線 ΔE を持っている、円柱全体の中にある [それぞれの] 円柱というある種の量、および、そこに文字 Ω がある、それらと等しい数の空間という別の量とは、2 つずつと 2 つずつが同じ比にある。[なぜなら、] 円柱も互いに等しく、そして、空間 Ω も互いに等しいから。そしてさらに、内接された図形にある円柱のいくつかは別の円柱と比例するが、最後のものは比例せず、そして、そこに文字 Ω がある空間のいくつかは、それに対応する、直線 Ξ に超過している平方図形 [正方形] が結び付けられた、別の空間と同じ比にあるが、最後のものは比例しない。それゆえまた、円柱全体にあるすべての円柱 [の和] は内接された図形にあるすべての円柱 [の和] に対して、空間 Ω のすべて [の和] が、最大のものを除いた、[正方形が] 結び付けられた空間のすべて [の和] に対するのと同じ比を持つこと [命題 1] は明らかである。さらに、同時に、空間 Ω のすべて [の和] が、最大のものを除いた、[正方形が] 結び付けられた空間のすべて [の和] に対して、 $N + \Xi : \frac{1}{2} \Xi + \frac{1}{3} N$ より大きい比を持つこと [命題 2] は証明されている。それゆえまた、円柱全体は内接された図形に対して、円柱全体が円錐 Ψ に対して持つことが [上で] 証明されている比である、 $Z\Delta : \Theta P$ より大きい比を持つ [なぜなら、 $N + \Xi = \Delta B + ZB = Z\Delta$ 、 $\frac{1}{2} \Xi + \frac{1}{3} N = B\Theta + BP = \Theta P$ だから]。それゆえ、円柱全体は内接された図形に対して、円錐 Ψ に対するよりも大きい比を持つ。それゆえ、円錐 Ψ は内接された図形より大きい。しかし、それは不可能である。なぜならば、内接された図形が円錐 Ψ より大きいことは証明されているから。それゆえ、円錐状体の切片は円錐 Ψ より大きくはない。しかし、確かに、より小さくもない。なぜならば、もし可能ならば、より小さい [切片 $< \Psi$] とせよ。それゆえ、再び、切片に、等しい高さを持っている円柱によって構成された、立体図形が内接されるとし、そして、別の [立体図形] が外接されるとして、外接された図形が内接された [図形] を、円錐 $[\Psi]$ が切片を超えるより小さい空間だけ超えるようにし、そして、その他は [上で] 同様につくられるとせよ。いま、内接された図形は切片より小さく、そして、外接された図形は、円錐 Ψ が切片を超えるより小さい空間だけ、内接された [図形] を超えるから、外接された図形もまた円錐 Ψ より小さいことは明らかである。それゆえ、再び、軸として ΔE を持っている円柱全体にある最初の円柱は、軸として ΔE を持っている外接された図形にある最初の円柱に対して、空間 Ω が ΞN に対するのと同じ比を持ち (なぜならば双方が等しいから)、そして、円柱全体において軸として等しい直線 ΔE を持っている、その他のそれぞれの円柱が、同じ位置におかれ、同じ軸を持っている外接された図形にある円柱に対して、空間 Ω がそれらに対応する、仮定された超過分が結び付けられた直線 Ξ である、空間に対するのと同じ比を持つであろう。というのは、最大のものを除く、外接された [図形にある] それぞれのものは、最大のものをあわせた、内接された [図形にある] 1 つのものに等しいからである。それゆえまた、円柱全体は外接された図形に対して、空間 Ω のすべて [の和] が超過分をあわせて付け

加えられた空間 [のすべての和] に対するのと同じ比を持つであろう [命題 1]。さらに、空間 Ω のすべて [の和] はそれらの空間のすべて [の和] に対して、 $\Xi + N : \frac{1}{2}\Xi + \frac{1}{3}N$ より小さい比を持つことが証明されている [命題 2]。それゆえまた、円柱全体は外接された図形に対して、 $Z\Delta : \Theta P$ より小さい比を持つであろう。しかし、 $Z\Delta : \Theta P$ は円柱全体が円錐 Ψ に対するものである。それゆえ、同じ円柱は外接された図形に対して、 Ψ に対するより小さい比を持つ。それゆえ、外接された図形は円錐 Ψ より大きい [ユークリッド『原論』第 5 巻命題 8]。しかし、それは不可能である。なぜならば、外接された図形が円錐 Ψ より小さいことは証明されているから。それゆえ、円錐状体の切片は円錐 Ψ より小さくはない。

そして、より大きくもなく、より小さくもないから、命題は成り立つ。

上の証明中に出てきた、乱比例については、ユークリッド『原論』第 5 巻によれば……

定義 17 等順位による比とは、多数の量と、それらと個数が等しい別の一連の量があって、2 つずつとられたときに同じ比にあるとき、最初の一連の量において第 1 [の量] が最後に対するように、後の一連の量において第 1 が最後に対するときをいう。別の言い方をすれば、中項を除くことによって両端項をとることである。

定義 18 乱比例とは、3 つの量と、それらと個数が等しい別の量があるとき、まず最初の 3 つの量において前項が後項に対するように、後の 3 つの量において前項が後項に対し、また最初の 3 つの量において後項が他の何らかの [残りの 1 つの] 量に対するように、後の 3 つにおいて他の何らかの [残りの 1 つの] 量が前項に対するときである。 [下の命題 23 参照。]

命題 20 もし 3 つの量と、それらと個数の等しい別の量があり、2 つずつとられても同じ比にあり、また、等順位によって第 1 が第 3 より大きいならば、第 4 も第 6 より大きく、そしてもし [第 1 が第 3 に] 等しいならば [第 4 も第 6 に] 等しく、そしてもし小さいならば小さくなる。

命題 21 もし 3 つの量と、それらと個数の等しい別の量があり、2 つずつとられても同じ比にあり、またそれらの乱比例が成立し、また等順位において第 1 が第 3 より大きいならば、第 4 も第 6 より大きく、そしてもし [第 1 が第 3 に] 等しいならば [第 4 も第 6 に] 等しく、そしてもし小さいならば小さくなる。

命題 22 もし任意個数の量があって、それらと個数の等しい別の量があり、2 つずつとられても同じ比にあるならば、等順位においても同じ比にあることになる。

[3 つの量 A, B, Γ と、別の 3 つの量 Δ, E, Z があるときに、 $A : B = \Delta : E$ および $B : \Gamma = E : Z$ ならば、 $A : \Gamma = \Delta : Z$ が成り立つ。]



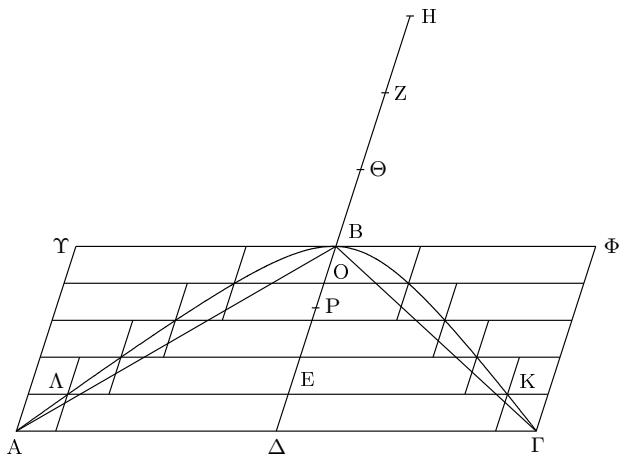
命題 23 もし 3 つの量と、それらと個数の等しい別の量があり、2 つずつとられると同じ比にあり、またそれらの乱比例が成立するならば、等順位においても同じ比にあることになる。

[3 つの量 A, B, Γ と、別の 3 つの量 Δ, E, Z があるときに、 $A : B = E : Z$ および $B : \Gamma = \Delta : E$ ならば、これが乱比例 ならば、 $A : \Gamma = \Delta : Z$ が成り立つ。]



命題 26 さらにまた、軸に垂直ではない平面によって鈍角円錐状体の切片が切り取られるならば、そのようなものも [上と] 同様に、その切片と同じ底面と同じ高さを持っている円錐の切片に対して、切片の軸と軸に付加された直線の 3 倍と [の和] に等しい直線が切片の軸と軸に付加された直線の 2 倍と [の和] に等しい直線に対するのと同じ比を持つであろう。

なぜならば、[命題に] 言われたような、平面によって切り取られた鈍角円錐状体の切片があるとせよ。その図形から、軸を通り、切片を切り取っている平面に垂直な、平面によって切断された図形の切断線が鈍角円錐切断 [双曲線] $AB\Gamma$ である [命題 11(b)] とし、さらに、切片を切り取っている平面にある直線が ΓA 、[鈍角] 円錐状体を包んでいる円錐の頂点が点 Θ であるとせよ。さらに、点 B を通って直線 $A\Gamma$ に平行で、[鈍角] 円錐切断に接する直線 $\Phi\Upsilon$ が引かれ、それが点 B において接するとし、そして、 Θ から B の方に直線が延長されるとせよ。それゆえ、それは直線 $A\Gamma$ を 2 つの等しい部分に切断するであろうし、切片の頂点は B 、軸は $B\Delta$ であろうし、そして、 $B\Theta$ は軸に付加された直線であろう。さらに、 $B\Theta = \Theta Z = ZH$ であるとせよ。そして、直線 $\Phi\Upsilon$ から [直線] $A\Gamma$ がおかれた平面に平行な平面が立てられるとせよ。それゆえ、それは B においてその [鈍角] 円錐状体に接するであろう [命題 16(b)]。そして、 $A\Gamma$ がおかれた、軸に垂直ではない平面がその [鈍角] 円錐状体を切断するから、切断線は鋭角円錐切断 [楕円] で、その大きい方の直径は ΓA であろう [命題 13]。



命題 27 任意の球状図形がその中心を通り軸に垂直な平面によって切断されると、その球状体の半分の部分はその切片と同じ底面、同じ軸を持っている円錐の 2 倍である。

中心を通り、軸に垂直な平面によって切断された球状図形があるとせよ。さらに、それが軸を通っておかれた別の平面によって切断された図形の切断線が鋭角円錐切断 [楕円] $AB\Gamma\Delta$ である [命題 11(c)] とし、さらに、その直径および球状体の軸が $B\Delta$ 、中心が Θ であるとせよ。しかし、 $B\Delta$ を鋭角円錐切断の大きい方の直径とするか、それとも、小さい方 [とする] かは、全く重要でない。さらに、図形を切断した平面にある切断線が直線 ΓA であるとせよ。それゆえ、それは、平面が中心を通ることも、軸に垂直であることも仮定されているから、点 Θ を通るであろうし、直線 $B\Delta$ と直角をなすであろう [ユークリッド第 11 巻命題 18, 定義 4]。底面として直径 $A\Gamma$ の周りに描かれた円を、頂点として点 B を持っている球状体の半分の部分が、その切片と同じ底面と同じ軸を持っている円錐の 2 倍であることが証明されなければならない。

のと同じ比を持つ。それゆえ、円柱全体の中にある円柱という量および直線 $\Xi\Xi$ による正方形という、[円柱全体にある] 円柱の数に等しい、別の量は、2 つずつと 2 つずつが同じ比にある。さらに、それらの円柱 [という量] は内接図形にある円柱という別の量と比例しているが、最後のものは比例していず、そして、それらの正方形は対応している正方形から取り去られたグノーモンと同じ比にあるが、最後の正方形はその比にない [比例していない]。それゆえ、円柱全体の中にあるすべての円柱 [の和] は他方の [すなわち、内接図形の中にある] すべての円柱 [の和] に対して、すべての正方形 [の和] がそれらから取り去られたすべてのグノーモン [の和] に対するのと同じ比を持つであろう [命題 1]。それゆえ、切片と同じ底面と同じ軸を持っている円柱は内接された図形に対して、すべての正方形 [の和] がそれらから取り去られたすべてのグノーモン [の和] に対するのと同じ比を持つ。しかし、それらのすべての正方形 [の和] は、それらから取り去られたすべてのグノーモン [の和] よりその半分だけ大きいものより大きい。なぜならば、 ΞP , $\Xi\Sigma$, ΞT , ΞY , $\Xi\Phi$ におかれた直線は互いに超えている差が等しく、最小のものはその差に等しいから。しかしまた、それらの中に 2 つの文字 $\Xi\Xi$ がある、それらに数が等しく、さらに、それぞれのものの大きさは最大のものに等しい、別の直線がある。それゆえ、それらの最大のものに等しいという、それらの直線によるすべての正方形 [の和] は、互いに等しい差だけ超えている直線によるすべての正方形 [の和] の 3 倍大きいものより小さく、さらに、最大の正方形を除いた残り [の正方形の和] の 3 倍大きいものより大きい。なぜならば、これは螺旋線について発表した本の中で証明されている [命題 10 の系] から。さらに、すべての正方形 [の和] は、それらから取り去られた、もう 1 つの正方形 [の和] の 3 倍大きいものより小さいから、それが残りよりその半分だけ大きいものより大きいことは明らかである。それゆえ、それはグノーモンよりその半分だけ大きいものより大きい。それゆえまた、切片と同じ底面と同じ軸を持っている円柱は、内接された図形よりその半分だけ大きいものより大きい。しかし、これは不可能である。なぜならば、それ [円柱] は円錐 Ψ よりその半分だけ大きく、内接された図形は円錐 Ψ より大きいことが証明されているから。それゆえ、球状体の半分の部分は円錐 Ψ より大きくはない。

しかし、確かに、より小さくもない。なぜならば、もし可能ならば、より小さいとせよ。それゆえ、再び、球状体の半分の部分に、等しい高さを持っている円柱によって構成された、立体図形が内接され、別の [立体図形] が外接されるとして、外接された図形が内接された図形を、円錐 Ψ が球状体の半分の部分を超える [超過分] より小さく超えるようにし、その他は前と同じにつくられるとせよ。いま、内接された図形は切片より小さいから、外接された図形もまた円錐 Ψ より小さいことは明らかである。それゆえ、再び、軸として ΘE を持っている、円柱全体の中にある最初の円柱は、軸として ΘE を持っている、外接された図形の中にある最初の円柱に対して、最初の正方形がそれ自身に対するのと同じ比を持つ。さらに、軸として $E\Pi$ を持っている、円柱全体にある 2 番目の円柱は、軸として $E\Pi$ を持っている、外接された図形にある 2 番目の円柱に対して、2 番目の正方形がそれから取り去られたグノーモンに対するのと同じ比を持つ。そして、円柱全体において軸として直線 ΘE に等しい直線を持っている、その他のそれぞれの円柱は、外接された図形において [円柱全体の中の円柱と] 同じ位置におかれ、同じ軸を持っている円柱に対して、同じ位置におかれた正方形がそれから取り去られたグノーモンに対するのと同じ比を持つ。それゆえまた、円柱全体の中にあるすべての円柱 [の和] は外接図形の中にあるすべての円柱 [の和] に対して、すべての正方形 [の和] が、最初の正方形と残りの正方形から取り去られたグノーモンとの同時 [の和] に等しい空間に対するのと同じ比を持つ [命題 1]。そして、すべての正方形 [の和] は、最初の正方形と残り [の正方形] から取り去られたグノーモンとの同時 [の和] に等しい空間よりその半分だけ大きいものより小さい。というのは、最大の正方形を除いて、互いに超えている差が等しい直線による正方形 [の和] はそれより 3 倍大きいから。それゆえ、切片と同じ底面と同じ軸を持っている円柱は外接された図形よりその半分だけ大きいものより小さい。しかし、これは不可能である。なぜならば、円錐 Ψ は [円柱より] その半分だけ大きい、外接された図形が円錐 Ψ より小さいことが証明されているから。それゆえ、球状体の半分の部分は円錐 Ψ より小さくはない。

それゆえ、より大きくもないし、より小さくもないから、等しい。

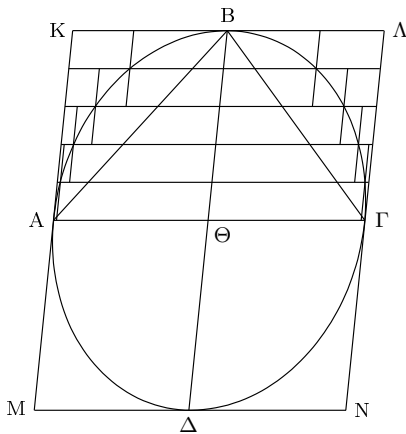
証明中に出てきたグノーモンとは ……

「あらゆる平行四辺形の領域のうち、その対角線の周りの〔2つの〕平行四辺形の任意の1つに2つの補形を合わせたものはグノーモンと言われるでしょう。」[ユークリッド『原論』第2巻定義2]

平行四辺形から、対角線を共有する全体に相似な小さな平行四辺形を取り去ったL字形の図形がグノーモンである。本来のグノーモンとは、太陽の影を測るために地面に垂直に立てた棒のこと。

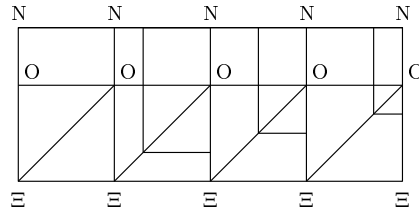
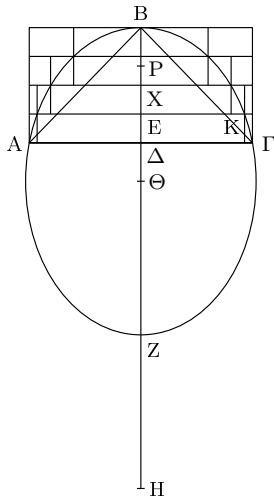
命題 28 しかしまた、もし球状体がその中心を通り軸に垂直ではない平面によって切断されるとしても、同様に、球状体の半分の部分はその切片と同じ底面、同じ軸を持っている円錐の切片の2倍であろう。

なぜならば、球状図形が〔命題に言われる平面によって〕切断されるとせよ。〔その球状体の〕軸を通っておかれた、切断している平面に垂直な、別の平面によって、それ〔球状体〕から切断された図形の切断線が鋭角円錐切断〔楕円〕 $AB\Gamma\Delta$ である〔命題 11(c)〕として、その中心が点 Θ 、図形を切断している平面にある切断線が直線 AF であるとせよ。それゆえ、平面が中心を通って引かれたことが仮定されているから、それは点 Θ を通るであろう。それゆえ、切断している平面は軸に垂直ではなく引かれたことが仮定されているから、それは直径 AF の周りに描かれた鋭角円錐切断であろう〔命題 14〕。それゆえ、直線 AF に平行な、鋭角円錐切断に点 B 、 Δ において接している、直線 KA 、 MN が引かれるとし、そして、直線 KA 、 MN において、直線 AF がおかれた平面に平行な平面が立てられるとせよ。それゆえ、それらは球状体に点 B 、 Δ において接するであろう〔命題 16(b)〕し、引かれた直線 $B\Delta$ は点 Θ を通るようになるであろう〔命題 16(c)〕し、そして、両切片の頂点は点 B 、 Δ で、軸は $B\Theta$ 、 $\Theta\Delta$ であろう。それゆえ、軸として $B\Theta$ を持ち、その表面に直径 AF の周りに描かれた鋭角円錐切断がある、円柱が見出されるようにすることができる〔命題 9〕。



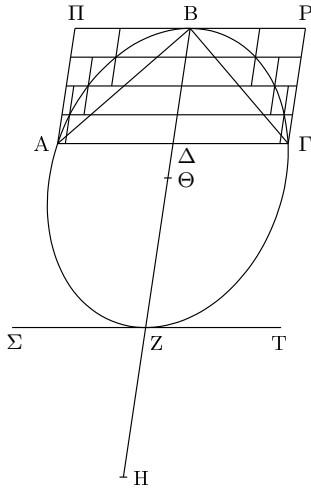
命題 29 中心は通らないが、軸に垂直におかれた平面によって何らかの球状図形が切断される時、小さい方の切片は、その切片と同じ底面、同じ軸を持っている円錐に対して、球状体の軸の半分と大きい方の切片の軸と〔の和〕に等しい直線が、大きい方の切片の軸に対するのと同じ比を持つ。

なぜならば、軸に垂直で、中心は通らない平面によって切り取られた球状図形の任意の切片があるとせよ。さらに、軸を通っておかれた別の平面によってそれから切断された図形の切断線が鋭角円錐切断〔楕円〕 $AB\Gamma$ である〔命題 11(c)〕として、さらに、その切断線の直径および球状体の軸が $B\Delta$ 、中心が Θ であるとし、さらに、切片を切り取っている平面にある切断線が直線 AF であるとせよ。それゆえ、平面は軸に垂直であることが仮定されているから、それは BZ と直角をなすであろう〔ユークリッド第11巻命題 18, 定義 4〕。さらに、その頂点が点 B であり、球状体の半分より小さい、切片が切り取られたとし、 $ZH = B\Theta$ であるとせよ。その頂点が B である切片は、その切片と同じ底面、同じ軸を持っている円錐に対して、 $\Delta H : \Delta Z$ と同じ比を持つことが証明されなければならない。



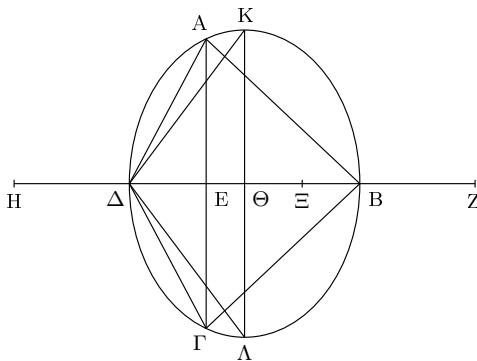
命題 30 さらにまた、もし軸に垂直ではなく、中心を通っておかれてもいない平面によって球状体が切断されるならば、その小さい方の切片はその球状体の切片と同じ底面、同じ軸を持っている円錐の切片に対して、はじめの両切片の両頂点を結んでいる直線の半分と大きい方の切片の軸と [の和] に等しい直線が大きい方の切片の軸に対するのと同じ比を持つであろう。

なぜならば、球状図形が、[命題に] 言われるように、切断されるとせよ。そして、それが、軸を通して、切断している平面に垂直な別の平面によって切断された図形の切断線が鋭角円錐切断 [楕円] $AB\Gamma$ である [命題 11(c)] とし、切断している平面にある直線が ΓA であるとせよ。そして、直線 $A\Gamma$ に平行な、点 B, Z においてその [鋭角] 円錐切断に接している、直線 $BP, \Sigma T$ が引かれるとし、それらにおいて直線 $A\Gamma$ がおかれた平面に垂直な平面が立てられるとせよ。それゆえ、それらは切片の頂点である点 B, Z において球状体に接するであろう [命題 16(b)]。それゆえ、両切片の両頂点を結んでいる直線が引かれるとし、それが BZ であるとせよ。それゆえ、それは中心を通るようになるであろう [命題 16(c)]。そして、球状体および鋭角円錐切断の中心が Θ であるとせよ。いま、軸に垂直ではない平面によって切断された図形であることを仮定しているから、切断線は鋭角円錐切断であり、その直径は ΓA であろう [命題 14]。それゆえ、延長された直線 $B\Delta$ の上に軸を持ち、その表面に直径 $A\Gamma$ の周りに描かれた鋭角円錐切断がある円柱 [命題 9]、および、頂点として点 B を持ち、その表面に直径 $A\Gamma$ の周りに描かれた鋭角円錐切断がある円錐 [命題 8] がとられるとせよ。それゆえ、そのような円柱の断片は [球状体の] 切片と同じ底面、同じ軸を、そして、円錐の切片は球状体の切片と同じ底面、同じ軸を持つであろう。その頂点が B である球状体の切片が、その球状体の切片と同じ底面、同じ軸を持っている円錐の切片に対して、 $\Delta H : \Delta Z$ と同じ比を持つことが証明されなければならない。さらに、 $ZH = \Theta Z$ であるとせよ。



命題 31 何らかの球状体が軸に垂直であるが、しかし、中心を通らずにおかれた平面によって切断されるとき、大きい方の切片は、その切片と同じ底面と同じ軸を持っている円錐に対して、球状体の軸の半分と小さい方の切片の軸と [の和] に等しい直線が、小さい方の切片の軸に対するのと同じ比を持つであろう。

任意の球状体が、[命題に] 言われるように、切断されるとせよ。さらに、それが、軸を通して、切断している平面に垂直な別の平面によって切断された図形の切断線が鋭角円錐切断 [楕円] $AB\Gamma$ であるとして、さらに、その直径および図形の軸が $B\Delta$ [命題 11(c)]、切断している平面にある直線が $A\Gamma$ であるとせよ。それゆえ、それは直線 $B\Delta$ に垂直であろう。その頂点が点 B である、大きい方の切片があるとし、球状体の中心が Θ であるとせよ。それゆえ、直線 $\Delta\Theta$ に等しい直線 ΔH およびそれに等しい BZ が付け加えられるとせよ。その頂点が B である球状体の切片が、その切片と同じ底面、同じ軸を持っている円錐に対して、 $EH : E\Delta$ が持つのと同じ比を持つことが証明されなければならない。



それゆえ、球状体がその中心を通り、軸に垂直な平面によって切断されるとし、それによって生じる円 [命題 11(c)] の上に、頂点として点 Δ を持つ円錐がつけられるとせよ。それゆえ、球状体全体は、底面として直径 $K\Lambda$ の周りに描かれた円を、さらに、頂点として点 Δ を持っている [球状体の] 切片の 2 倍である [命題 18]。さらに、その切片は、その切片と同じ底面、同じ軸を持っている円錐の 2 倍である [命題 27]。なぜならば、これは証明されているから。それゆえ、球状体全体は、私たちが述べた、円錐の 4 倍である。しかし、この円錐は、底面として直径 $A\Gamma$ の周りに描かれた円を、さらに、頂点として点 Δ を持っている円錐に対して、比 $\Theta\Delta : E\Delta$ および $K\Theta^2 : EA^2$ によって合成された比を持つ。しかし、 $K\Theta^2 : EA^2 = B\Theta \times \Theta\Delta : BE \times E\Delta$ である [アポロニオス第 1 巻命題 21]。それゆえ、 $\Xi\Delta : \Theta\Delta = \Theta\Delta : E\Delta$ とせよ [ユークリッド第 6 巻命題 11]。それゆえまた、 $\Xi\Delta \times B\Theta : B\Theta \times \Theta\Delta = \Delta\Theta : \Delta E$ であろう。さらに、 $\Xi\Delta \times \Theta B : B\Theta \times \Theta\Delta$ および

$B\Theta \times \Theta\Delta : BE \times E\Delta$ によって合成された比は、 $X\Delta \times \Theta B : BE \times E\Delta$ が持つ比と同じである。それゆえ、底面として直径 KA の周りに描かれた円を、頂点として点 Δ を持っている円錐は、底面として直径 AG の周りに描かれた円を、頂点として点 Δ を持っている円錐に対して、 $\Xi\Delta \times B\Theta : BE \times E\Delta$ と同じ比を持つ。しかし、底面として直径 AG の周りに描かれた円を、頂点として点 Δ を持っている円錐は、その円錐と同じ底面と同じ軸を持っている球状体の切片に対して、 $BE \times E\Delta : ZE \times E\Delta$ と同じ比を持つ。それゆえ、球状体の半分の部分の中にある円錐は、球状体の、半分の部分より小さい、切片に対して、 $\Xi\Delta \times B\Theta$ が $ZE \times E\Delta$ に対するのと同じ比を持つ [ユークリッド第 5 巻命題 22]。いま、球状体全体は、その球状体の半分の部分の中にある、円錐に対して、 $ZH \times \Xi\Delta : B\Theta \times \Xi\Delta$ と同じ比を持ち (なぜなら、 $[ZH = 4B\Theta$ より、] どちらも一方の 4 倍であるから。)、球状体の半分の部分の中にある、円錐は、球状体の半分の部分より小さい、切片に対して、 $\Xi\Delta \times B\Theta : ZE \times E\Delta$ と同じ比を持つから、さらに、球状体全体はその小さい方の切片に対して、 $ZH \times \Xi\Delta : ZE \times E\Delta$ と同じ比を持つであろうユークリッド第 5 巻命題 22]。それゆえまた、球状体の大きい方の切片は小さい方 [の切片] に対して、 $ZH \times \Xi\Delta - ZE \times E\Delta : ZE \times E\Delta$ と同じ比を持つ [ユークリッド第 5 巻命題 17]。しかし、 $ZH \times \Xi\Delta - ZE \times E\Delta = \Xi\Delta \times EH + ZE \times \Xi E$ である。それゆえ、大きい方の切片は小さい方 [の切片] に対して、 $\Xi\Delta \times EH + ZE \times \Xi E : ZE \times E\Delta$ と同じ比を持つ。しかし、球状体の小さい方の切片は、[その切片と] 同じ底面と同じ軸を持っている円錐に対して、 $ZE \times E\Delta : BE \times E\Delta$ と同じ比を持つ。そして、小さい方の切片の中にある円錐は、大きい方 [の切片] の中にある円錐に対して、 $BE \times E\Delta : BE^2$ と同じ比を持つ。なぜなら、それらは同じ底面を持つので、互いに高さの比を持つから [ユークリッド第 12 巻命題 14]。それゆえ、球状体の大きい方の切片はそれに内接された円錐に対して、 $\Xi\Delta \times EH + ZE \times \Xi E : BE^2$ と同じ比を持つ [ユークリッド第 5 巻命題 22]。さらに、これは、それが $EH : E\Delta$ を持つのと同一理由である。なぜなら、 $\Xi\Delta \times EH : \Xi\Delta \times E\Delta = EH : E\Delta$ であり、 $\Xi E \times ZE : ZE \times \Theta E = EH : E\Delta$ であるから。なぜならば、直線 $\Xi\Delta$ 、 $\Theta\Delta$ 、 ΔE は比例していて、 $\Theta\Delta = H\Delta$ であるので、 $\Xi E : \Theta E = EH : E\Delta$ であるから。それゆえまた、 $\Xi\Delta \times EH + ZE \times \Xi E : \Xi\Delta \times E\Delta + ZE \times \Theta E = EH : E\Delta$ である。しかし、 $BE^2 = \Xi\Delta \times E\Delta + ZE \times \Theta E$ である。なぜなら、 $B\Theta^2 = \Xi\Delta \times E\Delta$ であり、 $B\Theta = BZ$ より、 $BE^2 - B\Theta^2 = ZE \times \Theta E$ だから。それゆえ、球状体の大きい方の切片が、その切片と同じ底面と同じ軸を持っている円錐に対して、 $EH : E\Delta$ と同じ比を持つことは明らかである。

命題 32 さらにまた、もし軸に垂直ではなく、中心を通っておかれてもいない平面によって球状体が切断されるならば、その大きい方の切片は、[球状体の] 切片と同じ底面と同じ軸を持っている円錐の切片に対して、はじめの両切片の両頂点を結んでいる直線の半分と小さい方の切片の軸と [の和] に等しい直線が、小さい方の切片の軸に対するのと同じ比を持つであろう。

任意の球状体が、[命題に] 言われるような、平面によって切断されるとせよ。そして、それが、軸を通して、切断している平面に垂直な別の平面によって切断された図形の切断線が鋭角円錐切断 [楕円] $AB\Gamma\Delta$ である [命題 11(c)] として、図形を切断している平面にある直線が ΓA であるとせよ。そして、直線 AG に平行な、鋭角円錐切断と点 B 、 Δ で接する、直線 IP 、 ΣT が引かれるとし、それらから AG がおかれた平面に平行な平面が立てられるとせよ。それゆえ、それらは球状体に点 B 、 Δ において接するであろう [命題 16(b)] し、それらの切片の頂点は B 、 Δ であろう。それゆえ、そのようにつくられた両切片の両頂点を結んでいる直線は中心を通るようになるであろうし、そして、中心が Θ であるとし、その頂点が B である切片が球状体の半分の部分より大きいとせよ。さらに、直線 $\Delta\Theta$ に等しい直線 ΔH およびそれに等しい BZ が付け加えられるとせよ。球状体の大きい方の切片が、その切片と同じ底面、同じ軸を持っている円錐の切片に対して、 $EH : E\Delta$ が持つのと同一比を持つことが証明されなければならない。

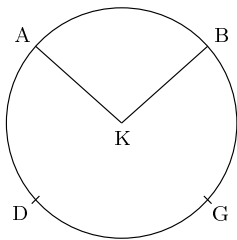
浮体について 第1巻

Περὶ τῶν ὕδατι ἐφισταμένων ἢ περὶ τῶν Ὀχομένων
De iis, quae in humido vehuntur

仮定1 液体とは次のような性質を持つものと仮定されるとせよ。すなわち、均一に、そして、連続的に横たわっているそれ自身の部分のために、より小さく押されたものがより大きく押されたものによって押し出され、そしてさらに、それ自身の部分の各々は、もし液体が何らかの[のもの]の中に沈んでいる、そして、別の何らかの[のもの]によって押されるとするならば、鉛直[線]に沿ってそれ自身の上方にある、液体によって押される、ようなものである。

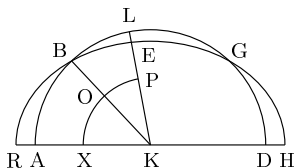
定理1 命題1 もし何らかの表面が平面によって切断されるとき、つねに同じ何らかの点を通り、その切断面に[つねに]その[何らかの]点を中心として持っている円の周囲をつくるような、平面によって切断されるならば、その表面は球面であろう。

なぜならば、点 K を通り、その切断面の上に K 自身を中心とする円の周囲をつくるような、平面によって切断された何らかの表面があるとせよ。それゆえ、もし表面が球面でないならば、中心から表面に達している直線はすべてが等しくはないであろう。それゆえ、表面の上に、AK, KB が不等である、点 A, B, G, D があるとし、KA, KB を通る平面が引かれ、表面の上に切断線 DABG をつくとせよ。



定理2 命題2 静止したままに留まっているすべての液体の表面は地球と同じ中心を持っている球面の形をしているであろう。

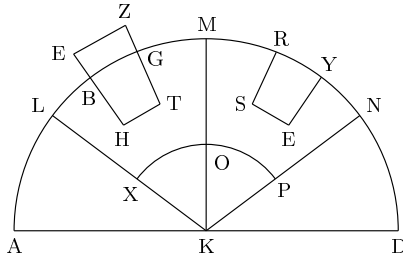
なぜならば、液体が不動のままに留まっていると考えられるとし、地球の中心を通る平面によってその表面が切断されるとせよ。さらに、地球の中心が K であり、[液体の]表面にある切断線が ABGD であるとせよ。それゆえ、私は、線 ABGD は円の周囲であり、K 自身をその中心とする、と言う。



定理3 命題3 液体と等しい大きさ[容積]で等しい重さである立体は、その液体の中に沈められると、決して液体の表面を超えることなく、さらに、より下部の方に向かわされることもないように、浸されるであろう。

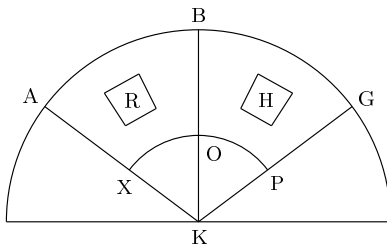
なぜならば、もし可能ならば、液体の中にある、その液体と等しい重さの任意の量[立体]がその液体自身の表面を超えることが証明される[とせよ]。さらに、液体は静止したままに留まっているとせよ。さらに、地球および液体の中心を通り、そして、その立体を通る、何らかの平面が引かれたと考えられるとせよ。さらに、[その平面による]切断線は、液体の表面のそれが ABGD で、そして、留まっている立体のそれが EZHT であり、さらに、地球の中心が K であるとせよ。さらに、その立体

のうち、液体の中にある〔部分〕がBGHTで、そして、外部にある〔部分〕がBEZGであるとせよ。そして、立体図形が、底面として液体の表面における平行四辺形を、頂点として地球の中心を持っている、角錐によって包まれたと考えられるとせよ。さらに、切断線は、その上に周囲ABGDがある、平面の上であり、そして、〔そこにおける〕角錐の平面〔側面〕のそれがKL, KMであるとせよ。さらに、EZHTより下方の液体の中に、中心Kの周りに別の球面——それがXOP——が描かれるとせよ。この平面の表面によって切断されるとせよ。さらに、立体を包んでいるのと等しくて相似な別の角錐が、それ〔最初の角錐〕と連続してとられるとせよ。さらに、それ自身の平面〔側面〕の切断線がKM, KNであるとせよ、そして、BHGTで表される立体に等しくて相似な量の、しかし、それ自身は液体の中にある、液体——それがRSEY——がその液体の中にとられたと考えられるとせよ。



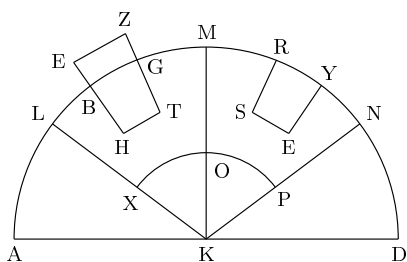
定理4 命題4 液体より軽い〔比重が小さい〕任意の立体は、その液体の中に沈められると、その全体が浸されることはなく、しかし、それ自身のある程度〔の部分〕が液体の表面の外部にあるであろう。

なぜならば、液体より軽い立体があるとせよ、それがその液体の中に沈められたとせよ。もし可能ならば、その全体が浸されて、それ自身〔の部分〕は決して液体の表面の外部にはないとせよ。さらに、液体は不動のままに留まっているとせよ。また、地球の中心を通り、その液体の間を、そして、その立体を通る、何らかの平面が引かれたと考えられるとせよ。さらに、この平面によってそれらの表面——ABGDで表される液体の表面、さらに、Rが中にある図形によ〔って表わされ〕る立体〔の表面〕——が切断されるとせよ。さらに、地球の中心がKであるとせよ。さらに、前と同様に、図形Rを包んでいて、頂点として点Kを持っている、何らかの角錐が考えられるとせよ。さらに、AK, KBに沿った平面〔側面〕が平面ABGの表面によって切断されるとせよ。さらに、これに等しくて相似な別の何らかの角錐がとられるとせよ。そして、KB, KGに沿った平面〔側面〕が平面ABGによって切断されるとせよ。さらに、立体より下方の液体の中に、中心Kの周りに別の何らかの球面が描かれるとせよ。それがXOPで表される同じ平面によって切断されるとせよ。さらに、後者の角錐において、Rで表される立体に等しい、Hで表される量が液体からとられたと考えられるとせよ。



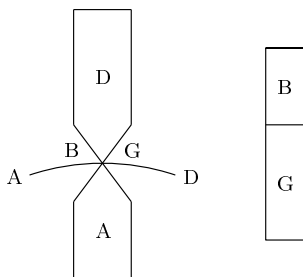
定理5 命題5 液体より軽い〔比重が小さい〕任意の立体は、その液体の中に沈められると、浸された〔立体の〕大きさと同じだけの液体の大きさが、量〔立体〕全体と等しい重さを持つような分だけ、その中に浸されるであろう。

前と同様に定められるとし、液体は不動であるとせよ。さらに、量〔立体〕EZHTは液体より軽いとせよ。



定理 6 命題 6 液体より軽い〔比重が小さい〕立体は、その液体の中に〔何らかの〕力で押し下げられると、その量〔立体〕と等しい大きさを持っているその液体がその量〔立体〕の重さであるというほどの力によって、より高い〔上の〕方に運ばれる。

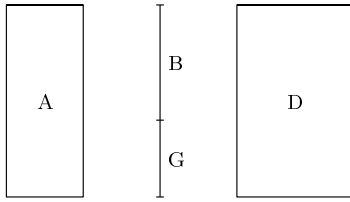
なぜならば、量〔立体〕A が液体より軽いとせよ。さらに、その中に A とある、量〔立体〕の重さが B であり、さらに、A と等しい大きさを持っている液体の重さが BG であるとせよ。量〔立体〕A は、その液体の中に押し下げられると、重さが G であるというほどの力によって、より高い〔上の〕方に引き戻されることが証明されなければならない。なぜならば、その中に D がある、量〔立体〕が G に等しい大きさを持っていると理解されるとせよ。



定理 7 命題 7 液体より重い〔比重が大きい〕〔立体〕は、その液体の中に沈められると、下降しようとする限りは〔どンドン〕下方へと運ばれる〔すなわち、底まで沈む〕であろうし、そして、その液体の中では、その立体の大きさほどの大きさの、その液体が持つ重さの分だけ〔本当の重さより〕軽いであろう。

確かに、下降しようとする限りは下方へと運ばれるであろうことは明らかである。なぜならば、それ〔立体〕自身より下にある液体の部分は、立体は液体より重いと仮定されているから、そこにあるそれ〔立体〕自身に等しい〔液体の〕部分より強く押されるはずだから。

さらに、述べられたように、〔立体は本当の重さより〕軽いであろうことが証明されるであろう。なぜならば、任意の量〔立体〕があるとして、それが A であり、それは液体より重いとし、さらに、その中に A とある、量〔立体〕の重さが BG であるとし、A 自身に等しい大きさを持っている液体の重さが B であるとせよ。その液体の中にある量〔立体〕A は G そのものに等しい重さをもつことが証明されなければならない。なぜならば、その中に D とある、別の任意の量〔立体〕がそれ自身と等しい大きさの液体より軽いと理解されるとせよ。さらに、その中に D とある量〔立体〕の重さが重さ B に等しいとし、量〔立体〕D に等しい大きさを持っている液体の重さが重さ BG に等しいとせよ。その中に A, D とある量〔立体〕が合成されると、それらが一緒になった量〔立体〕は〔それと等しい大きさの〕液体に重さが等しいであろう。



この命題は、こんにちではアルキメデスの原理といわれて、「流体の中におかれた物体はその物体が排除した流体の重さに等しい浮力を受ける」というような形で述べられることがある。なお、その浮力の向きは鉛直上向きである。

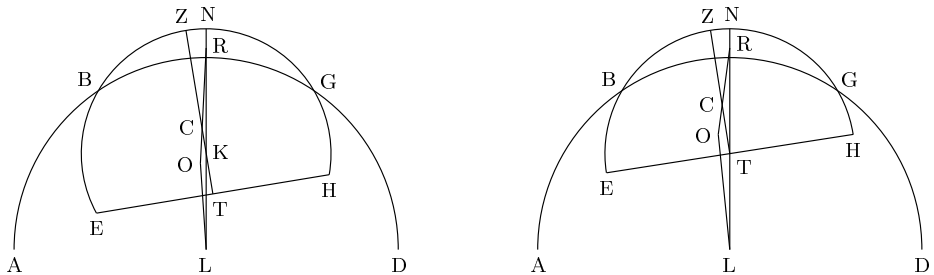
シラクサの王・ヒエロン 2 世 (Hieron (Ιέρων)) は細工師に純金製の王冠の作成を依頼し、そのため純金を渡した。細工師はその純金のうちのいくらかを銀に交換して、王冠を作成した。そのことを伝え聞いたヒエロン 2 世は事の真偽の調査をアルキメデスに依頼した。この命題は、その調査・検討中に発見された、と伝えられている。詳しくは [6] pp.389–390 参照。

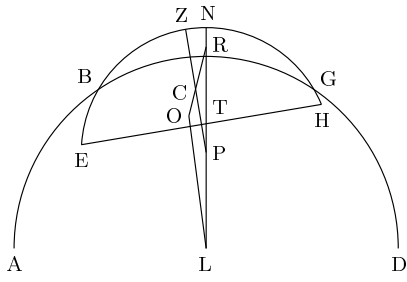
仮定 2 液体の中で上方へと運ばれるものは、それら自身の重心を通して延長される、[液体の表面に対する] 垂線に沿って上方へと運ばれることが仮定されるとせよ。

定理 8 命題 8 もし球の部分の形を持っている、[液体より軽い、] 任意の立体 [すなわち球の切片] が、その部分の底面が液体 [の表面] に接しないように、その液体の中に沈められるならば、その図形 [球の切片] は、その部分の軸が [液体の表面に対する] 垂線に一致するように、まっすぐに留まっているであろう。そして、もし図形 [球の切片] が何らかのものによって、その部分の底面が液体 [の表面] に接するように、[その位置を] 変えられ、次いでそれがやめられるならば、それは [元の位置から] 遠ざけられたままではなく、しかし、まっすぐに [な状態] に立て直されるであろう。

定理 9 命題 9 そしてそれゆえ、もし液体より軽い [比重が小さい] 図形 [球の切片] が、それ自身の底面全体がその液体の中にあるように、その液体の中に沈められるならば、図形 [球の切片] は、その軸が [液体の表面に対する] 垂線に一致するように、まっすぐに留まっているであろう。

なぜならば、[命題に] 言われたような、任意の量 [球の切片] が液体の中に沈められたと考えられるとせよ。そしてまた、[球の切片の] 部分の軸を通り、そして、地球の中心を通る、平面が引かれたと考えられるとせよ。さらに、液体の表面にある切断線が [円の] 周囲 ABGD であり、さらに、図形 [球の切片] の周囲が EZH で、[底面を表す] 直線が EH であるとせよ。さらに、[球の切片の] 部分の軸が ZT であるとせよ。それゆえ、もし可能ならば、ZT が [液体の表面に対する] 垂線に一致しないとせよ。それゆえ、図形 [球の切片] はそのままではなく、まっすぐに立てられるであろうことが証明されなければならない。



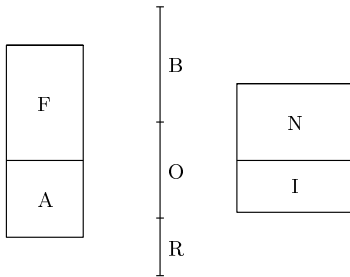


浮体について 第2巻

Περὶ τῶν ὕδατι ἐφισταμένων ἢ περὶ τῶν Ὀχοιμένων
De iis, quae in humido vehuntur

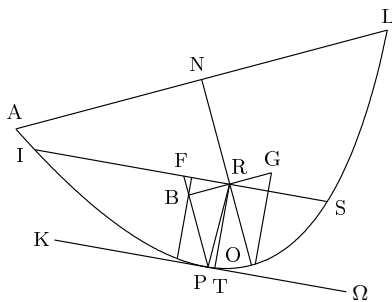
定理1 もし液体より軽い〔比重が小さい〕任意の量〔立体〕がその液体の中に沈められるならば、重さに関して、それはそれと等しい大きさの液体に対して、浸された量が全体の量に対して持つ、比を持つであろう。

なぜならば、液体の中に、その液体より軽い任意の立体が沈められたとし、それがFAであるとせよ。さらに、浸された〔部分〕がAであり、液体の外部にある〔部分〕がFであるとせよ。量〔立体〕FAが、〔それに〕等しい大きさの液体に対して、重さに関して、AがFAに対する比を持つことが証明されなければならない。なぜならば、FAと等しい大きさの、何らかの量の液体NIがあるとし、FがNに、さらに、AがIに等しいとせよ。そしてさらに、量〔立体〕FAの重さがBであり、NIのそれがROで、IのそれがRあるとせよ。それゆえ、量〔立体〕FAはNIに対して、重さBが重さROに対する比を持つであろう。



定理2 直角円錐状体の〔任意の〕まっすぐな部分〔切片〕が、〔その焦点を通るように、〕その軸まで〔垂直に引かれた直線〕の1倍半〔すなわち、直立辺の4分の3〕より大きくない軸を持ち、全体として重さに関して液体に対する比を持っているとき、〔その切片が〕それ自身の底面が液体に接しないようにその液体の中に沈められ、傾けられて置かれたとすると、それは傾けられたままではなくて、しかし、まっすぐに立て直されるであろう。まっすぐにとは、私は、それを切断したものの〔切断面〕が液体の表面から等距離であるような部分になる〔すなわち、切断面が液面と平行になる〕ときを言う。

〔定理に〕述べられたような直角円錐状体の部分〔切片〕があるとし、傾けられて横たわっているとせよ。それはそのままではなくて、しかし、まっすぐに立て直されることが証明されなければならない。



この命題の仮定の部分を、Heath [3] (p.264) は、*“If a right segment of a paraboloid of revolution whose axis is not greater than $\frac{3}{4} p$ (where p is the principal parameter of the*

generating parabola), and whose specific gravity is less than that of a fluid, ...”として、上の図で、 $ON \neq \frac{3}{4}p$ としている。

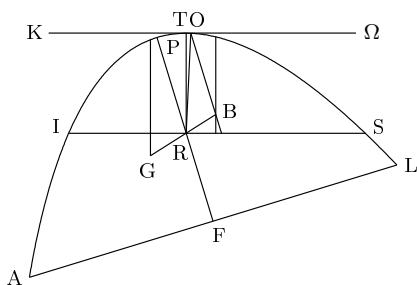
また、Peyrard [11] (p.383) は、“Lorsqu’un segment droit d’un conoïde parabolique n’a pas son axe plus grand que trois fois la moitié du demi-paramètre; si ce segment, quelle que soit sa pesanteur par rapport a celle d’un fluide, ...”としている。

直立辺や焦点の概念はアポロニオス以後のものであり、アルキメデスはそれらを用いていない。放物線の場合、直立辺は、その焦点を通り、その軸に垂直な直線が、その放物線によって切り取られた線分に等しいから、焦点を通るように、放物線上の点からその軸まで垂直に引かれた線分は直立辺の半分になる。だから、その1倍半なら直立辺の4分の3である。

なお、放物線を $y^2 = 4px$ で表すとき、 x の係数 $4p$ が直立辺の長さ。

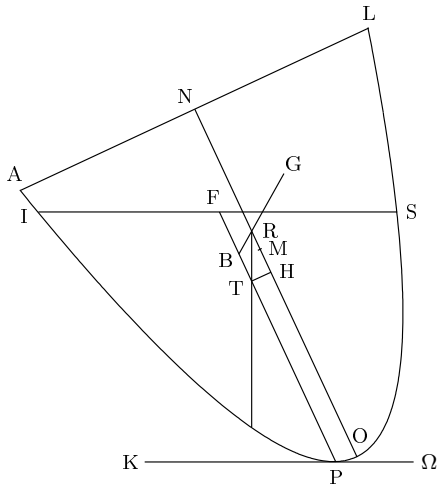
定理3 直角円錐状体の [任意の] まっすぐな部分 [切片] が、[その焦点を通るように、] その軸まで [垂直に引かれた直線] の1倍半より大きくない軸を持ち、全体として重さに関して液体に対する比を持っているとき、[その切片が] それ自身の底面全体が液体の中にあるようにその液体の中に沈められ、傾けられて置かれたとすると、それは傾けられたままではなくて、しかし、その軸が [液体の表面に対する] 垂線と一致するように立て直されるであろう。

[定理に] 述べられたような直角円錐状体の部分 [切片] があるとし、その底面がその液体の中にあるとせよ。さらに、それが軸を通る平面によって液体の表面に対して直角に切断されると、切断線は直角円錐切断 [放物線] APOL であり、さらに、その部分 [切片] の軸および切断線の直径が PF、液体の表面にある切断線が IS であるとせよ。そして、もしその部分 [切片] が傾けられて横たわっているならば、その軸は [液面に対する] 垂線と一致しないであろう。それゆえ、IS に対する角 PF は等しくならないであろう。



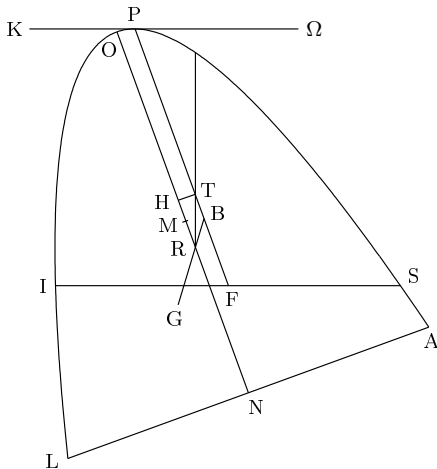
定理4 直角円錐状体の [任意の] まっすぐな部分 [切片] が、液体より軽く [比重が小さく]、[その焦点を通るように、] その軸まで [垂直に引かれた直線] の1倍半より大きい軸を持つとき、もしそれが、重さに関して、[それと] 等しい大きさの液体に対して、その [軸による] 正方形が、その軸がその軸までの1倍半より大きい [というその] 超過分による [正方形] に対して持つ [比] より小さくない比を持つならば、その底面が液体に接しないようにその液体の中に沈められ、傾けられて置かれたとすると、それは傾けられたままではなくて、しかし、まっすぐに立て直されるであろう。

[定理に] 述べられたような直角円錐状体の部分 [切片] があるとし、それが液体の中に沈められ、もし可能ならば、まっすぐにはなく、傾けられているとせよ。さらに、それが軸を通り液体の表面に直角な平面によって切断されると、切断線は直角円錐切断 [放物線] APOL であり、さらに、その部分 [切片] の軸が NO で、液体の表面にある切断線が IS であるとせよ。それゆえ、もしその部分 [切片] がまっすぐでないならば、IS に対する角 NO は等しくならないであろう。



定理 5 直角円錐状体の [任意の] まっすぐな部分 [切片] が、液体より軽く [比重が小さく]、[その焦点を通るように、] その軸まで [垂直に引かれた直線] の 1 倍半より大きい軸を持つとき、もしそれが、重さに関して、[それと等しい大きさの] 液体に対して、その軸による正方形の、その軸がその軸までの 1 倍半より大きい [というその] 超過分による正方形より、大きい超過分が、その軸による正方形に対して持つ [比] より大きくない比を持つならば、それ自身の底面全体が液体の中にあるようにその液体の中に沈められ、傾けられて置かれたとすると、それは傾けられたままではなくて、しかし、その軸が [液体の表面に対する] 垂線と一致するように立て直されるであろう。

なぜならば、[定理に] 述べられたような任意の部分 [切片] が液体の中に沈められるとし、その底面全体が液体の中にあるとせよ。さらに、軸を通り液体の表面に直角な平面によって切断されると、切断線は直角円錐切断 [放物線] であろうし、それが APOL であるとし、さらに、その軸および切断線の直径が NO で、液体の表面にある切断線が IS であるとせよ。そして、その軸は [液体の表面に対する] 垂線と一致していないから、IS に対する角 NO は等しくならないであろう。



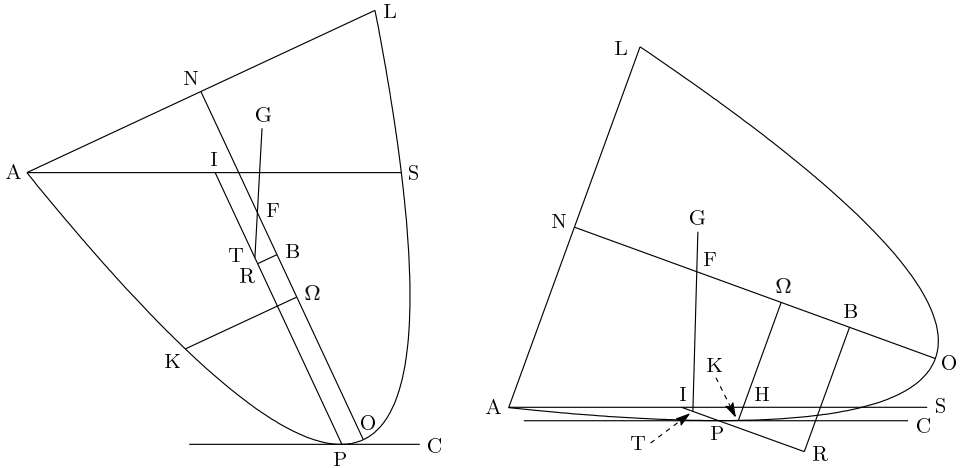
直立辺を $4p$ で表すとき、この命題の仮定の部分は ……

軸が軸までの線分の 1 倍半より大きいとしているから、 $ON > 3p = \frac{3}{4}(4p)$ 。

だから、切片 : 液体 $\neq \{ON^2 - (ON - 3p)^2\} : ON^2$ ということ。

定理6 直角円錐状体の [任意の] まっすぐな部分 [切片] が, 液体より軽く [比重が小さく], [その焦点を通るように, その軸まで垂直に引かれた直線の] 1 倍半より大きい軸を持ち, さらに, それ [軸] が軸までのそれ [直線] に対して, 15 が 4 に対して持つ [比] より小さい比を持つとき, それ自身の底面が液体 [の表面] に接するようにその液体の中に沈められたとすると, それ自身の底面がただ 1 つの点において液体 [の表面] に接するように傾いて留まることは決してないであろう。

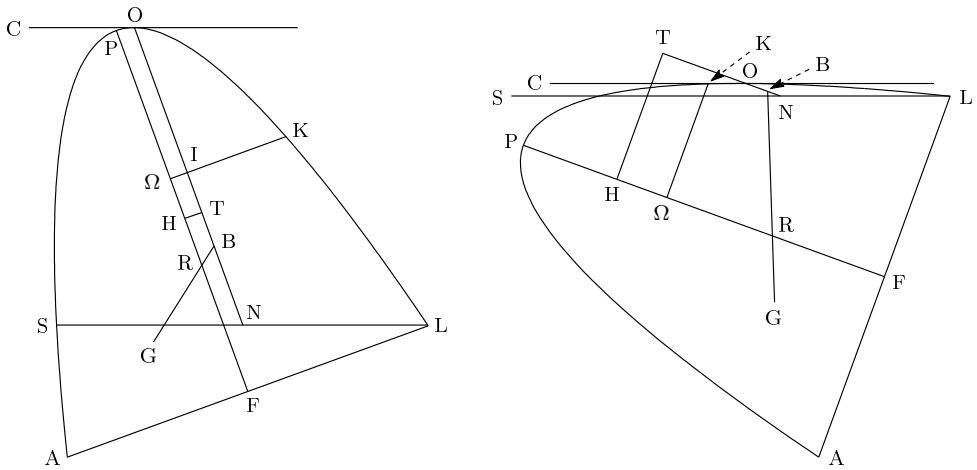
[定理に] 述べられたような部分 [切片] があるとし, それが液体の中に沈められて, その底面がただ 1 つの点において液体 [の表面] に接するように留まるとせよ。さらに, 軸を通して液体の表面に直角な平面によって切断されるとき, 部分 [切片] の表面にある切断線は直角円錐切断 [放物線] APOL であるとせよ。さらに, 液体の表面にある [切断線] が AS で, 軸および部分 [切片] の直径が NO で, そして, OF が FN の 2 倍であるように F において, NO が FΩ に対して 15 が 4 に対する比を持つように Ω において, 切断されるとき, そして, NO 自身が ΩK に引き寄せられるとせよ。さらに, NO は FΩ に対して, 軸までのそれ [直線] に対するより大きい比を持つ [とせよ]。FB が軸までのそれ [直線] に等しいとし, PC が切断線 APOL に接している AS と等距離に, さらに, PI が NO と等距離に引かれるとせよ。



定理7 直角円錐状体の [任意の] まっすぐな部分 [切片] が, 液体より軽く [比重が小さく], [その焦点を通るように,] その軸まで [垂直に引かれた直線] の 1 倍半より大きい軸を持ち, さらに, それ [軸] がその軸までのそれ [直線] に対して, 15 が 4 に対するより小さい比を持つとき, それ自身の底面全体が液体の中にあるようにその液体の中に沈められたとすると, それ自身の底面が液体の表面に接していて, しかし, その全体が液体の中にあり, ただ 1 つの点において [液体の] 表面に接することがないように留まることは決してないであろう。

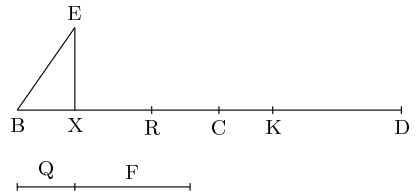
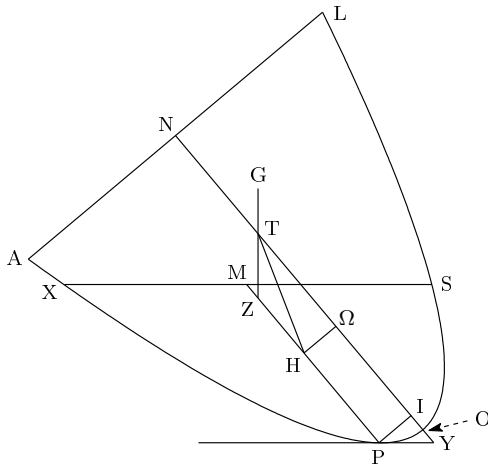
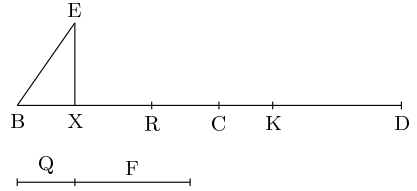
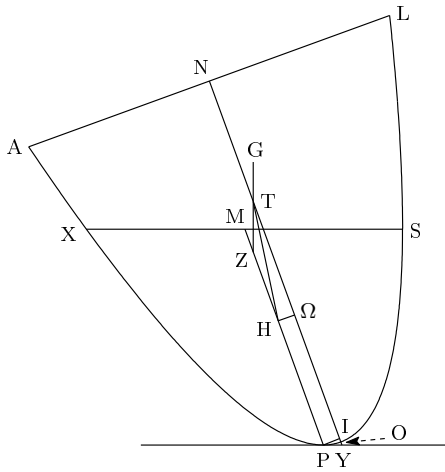
[定理に] 述べられたような部分 [切片] があるとし, 述べられたようにそれが液体の中に沈められ, その底面が液体の表面に接するように留まるとせよ。それはそのままではなくて, しかし, その底面が, ただ 1 つの点においてではなく, 液体の表面に接するように回転されることが証明されなければならない。なぜならば, それが液体の表面に直角な平面によって切断されるとき, 切断線が直角円錐切断 [放物線] APOL であるとせよ。さらに, 液体の表面にある切断線が SL で, 部分 [切片] の軸および直径が PF であるとせよ。I があるとせよ。さらに再び, PF が, RP が RF の 2 倍であるような R において, さらに, PF が RΩ に対して 15 が 4 に対する比を持っている Ω において, 切断されるとき, そして, PF の向こうに直線 ΩK が引かれるとせよ。さらに, RΩ は軸までのそれ [直線] より小さいであろう。それゆえ, 軸までのそれ [直線] は RH に等しいと理解され, SL と等距離にあり,

点 O において切断線に接している CO が引かれ、そして、NO と PF が等距離であるとせよ。



定理 8 直角円錐状体の [任意の] まっすぐな部分 [切片] が、[その焦点を通るように、] その軸まで [垂直に引かれた直線] の 1 倍半より大きい軸を持ち、さらに、それ [軸] がその軸までのそれ [直線] に対して、15 が 4 に対して持つ [比] より小さい比を持つとき、もしその重さが [それと等しい大きさの] 液体に対して、その軸がその軸までの 1 倍半より大きい超過分による正方形が、軸による正方形に対して持つ [比] より小さい比を持つならば、それ自身の底面が液体に接しないようにその液体の中に沈められたとすると、その軸が液体の表面に対して、[以下で] 述べられるであろう、それ [角] に等しい角をつくらない限り、まっすぐに立て直されることもなく、傾いたままに留まることもないであろう。

[定理に] 述べられたような部分 [切片] があるとし、BD がその軸に等しく、BK が KD の 2 倍であり、さらに、RK がその軸までのそれ [直線] に等しいとせよ。さらに、CB が BR の 1 倍半であるとせよ。さらに、重さに関して、部分 [切片] は [それと等しい大きさの] 液体に対して、FQ による正方形が DB によるそれに対して持つ [のと同じ] 比を持つとせよ。さらに、F は Q の 2 倍であるとせよ。それゆえ、FQ は DB に対して、CB が BD に対して持つ [比] より小さい比を持つことは明らかである。なぜならば、CB は軸が軸までのそれ [直線] の 1 倍半より大きい超過分であるから。ゆえに、FQ は BC より小さいであろう。それゆえ、F は BR より小さい。さらに、RX は F に等しく、BD の上方に、その [平方] が KR, BX による [長方形] の半分である、直線 XE が引かれ、BE が結ばれるとせよ。述べられたように液体の中に沈められた部分 [切片] がその軸が液体の表面に対して角 EBX に等しい角をつくるように傾いて留まるであろうことが証明されなければならない。



定理 9 直角円錐状体の [任意の] まっすぐな部分 [切片] が, [その焦点を通るように,] その軸まで [垂直に引かれた直線] の 1 倍半より大きい軸を持ち, さらに, それ [軸] が [その軸までの直線に対して,] 15 が 4 に対して持つ [比] より小さい比を持ち, そして, 重さに関して, それが [それと同じ大きさの] 液体に対して, その軸による正方形が, その軸がその軸までのそれ [直線] の 1 倍半より大きい超過分による正方形より大きい, 超過分がその軸による正方形に対して持つ [比] より大きい比を持つとき, それ自身の底面全体が液体の中にあるように沈められ, 傾けられて置かれたとすると, その軸が液体の表面に対して前と同様に受け入れられた [角] に等しい角をつくらない限り, その軸が垂直になる [ように立て直される] こともなく, 傾いたままに留まることもないであろう。

[定理に] 述べられたような部分 [切片] があるであろうとし, DB がその部分 [切片] の軸に等しく, BK が KD の 2 倍であり, KR が軸までのそれ [直線] に等しく, さらに, CB が BR の 1 倍半であるようにおかれるとせよ。さらに, 重さに関して, その部分 [切片] は [同じ大きさの] 液体に対して, BD による正方形が FQ による正方形を超える超過分が BD による正方形に対する比を持つ [とせよ]。さらに, F が Q の 2 倍であるとせよ。それゆえ, BD による正方形が BC による正方形を超える超過分は BD による正方形に対して, BD による正方形が FQ による正方形を超える超過分が BD による正方形に対する [比] より小さい比を持つことは明らかである。なぜならば, BC はその部分 [切片] の軸がその軸までのそれ [直線] の 1 倍半より大きい超過分であるから。ゆえに, BD による

底面がただ1つの点において液体の表面に接し、そして、軸と液体の表面がつくる角が角 X に等しいように傾けられたままであろう。

場合3 その2 もし部分 [切片] が液体に対して、重さに関して、 PF による正方形が BD による正方形に対して持つ比を持つならば、底面が液体に接しないように傾けられて液体の中に沈められると、底面がただ1つの点において液体の表面に接し、そして、軸がそれとつくる角が角 Φ に等しいように傾けられて留まるであろう。

場合4 もし部分 [切片] が液体に対して、重さに関して、 FP の平方が BD の平方に対するより大きい [比を持ち]、そのうえ、 XO の平方が BD の平方に対するより小さい比を持つならば、液体の中に沈められて、底面が液体に接しないように傾けられると、底面が液体の中により大きく浸されるように傾けられたままであろう。

場合5 もし部分 [切片] が液体に対して、重さに関して、 FP による正方形が BD による正方形に対して持つより小さい比を持つならば、液体の中に沈められて、底面が液体に接しないように傾けられて置かれると、軸が液体の表面に対してつくる角が角 Φ より小さく、さらに、底面がただ1つの点において液体の表面に接しないように傾けられて留まるであろう。

エラトステネスに宛てた、機械学的な定理についてのアルキメデスの方法

Ἀρχιμήδους Περὶ τῶν Μηχανικῶν Θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην Ἔφοδος

Archimedis De Mechanicis Propositionibus ad Eratosthenem Methodus

レンマ 1 もし、ある量からある量が切り取られ、全体の量の重心と切り取られる量の重心が同一の点であるなら、残りの量の重心もその同じ点である。

レンマ 2 もし、ある量からある量が切り取られ、全体の量の重心と切り取られる量の重心が同一の点でないなら、残りの量の重心は、全体の量の重心と切り取られる量の重心を結んだ直線上にあり、それは次のような点である。すなわち、その直線が(全体の量の重心側に)延長され、延長された直線から、切り取られた量の重さが残りの量の重さに対してもつような比を、上述の両重心間の距離に対してもつ線分が切り取られるとき、その切り取られた線分の端点になる点である。

レンマ 3 もし、任意の個数の量の重心が同じ直線上にあるならば、それらすべての量から構成される量の重心も、その同じ直線上にあるであろう。

レンマ 4 すべての線分の重心は、その線分の 2 等分点である。

レンマ 5 すべての三角形の重心は、その三角形の頂点から(対)辺の midpoint に引かれた直線が互いに交わる点である。

レンマ 6 すべての平行四辺形の重心は、(2 つの)対角線が交わる点である。

レンマ 7 円の重心は、その円の中心である。

レンマ 8 すべての円柱の重心は、その軸の 2 等分点である。

レンマ 9 すべての角柱の重心は、その軸の 2 等分点である。

レンマ 10 すべての円錐の重心は、その軸上にあつて、かつ、この軸を、頂点に近い方の軸の切片が残りの部分の 3 倍になるように分ける点である。

レンマ 11 もし、任意の個数の(第一の)諸量と、それと同じ個数の別の(第二の)諸量があり、その(第一の諸量の中の連続した)2 つの量が、それらと対応するように取られた(第二の諸量の中の)2 つの量と順々に同じ比をもち、さらに、第一の諸量のすべてか、またはいくつかの量が、(第三の)別の諸量の中の対応する量に対して、ある任意の比をもっていて、そして、これと同じ比を、第二の諸量が(第四の)別の諸量の中の対応する量に対してもつならば、第一の諸量の和は、第三の諸量の中の対応する量の和に対して、第二の諸量の和が、第四の諸量の中の対応する量の和に対すのと同じ比をもつ。

命題 1 線分 AG と直角円錐切断 [放物線] $AB\Gamma$ によって囲まれた切片 $AB\Gamma$ があるとして、 AG が Δ で 2 等分され、 ΔBE が(直角円錐切断の)直径に平行に引かれ、 AB 、 $B\Gamma$ が結ばれたとせよ。

(直角円錐切断の)切片 $AB\Gamma$ は、三角形 $AB\Gamma$ の $1\frac{1}{3}$ 倍であると主張する。

直線 AZ が点 A から ΔBE に平行に引かれ、(直角円錐切断の)切片への接線 ΓZ が点 Γ から引かれたとせよ。 ΓB が K の方へ延長され、 $K\Theta$ が ΓK に等しくとられたとせよ。いま、 $\Gamma\Theta$ は天秤の横木で、 K がその中心であると想定しよう。そして、 $M\Xi$ は $E\Delta$ に平行な任意の直線であるとせよ。

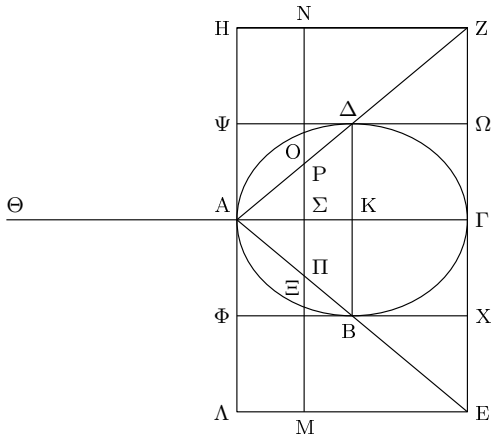
方形と ΠP 上の正方形の和に対する。そして、 MN 上の正方形が、 ΞO 上の正方形と ΠP 上の正方形の和に対するように、円柱の中の直径 MN の円は、円錐の中の直径 ΠP の円と、球の中の直径 ΞO の円との両者の和に対する。したがって、 ΘA が $A\Sigma$ に対するように、円柱の中の円は、球の中の円と円錐の中の円との和に対する。そこで、 ΘA が $A\Sigma$ に対するように、円柱の中の円自体は、そのままの位置で、 Θ がそれぞれの重心であるように移されて置かれた直径 ΞO 、 ΠP の円の両方の和に対するから、それらは点 A に関して釣り合うであろう。同様に、別の直径が、平行四辺形 AZ の中に、 EZ に平行に引かれ、その直線上に、 $A\Gamma$ に垂直な平面が立てられると、円柱の中に出来る円は、そのままの位置で、 Θ がそれぞれの重心であるように天秤の横木上で Θ に移されて置かれた、球の中に出来る円と円錐の中に出来る円との両方の和に、点 A に関して釣り合うことが示されるであろう。そこで、円柱と球と円錐が、(断面として出来た) とられた円によって (それぞれが) 満たされると、円柱は、そのままの位置で、 Θ がそれらそれぞれの重心であるように天秤の横木上で移されて置かれた球と円錐の両者に、点 A に関して釣り合うであろう。そこで、円柱が、その重心が K になるようにそのままの位置に置かれ、一方、球と円錐が、先に述べられたように、それらの重心が Θ になるように移されると、これらの立体は、点 A に関して釣り合うのであるから、 ΘA が AK に対するように、円柱は、球と円錐との和に対するであろう。ところで、 ΘA は AK の 2 倍である。それゆえ、円柱は、球と円錐との和の 2 倍である。そして、円柱は、その円錐の 3 倍である。したがって、3 つの円錐は、その円錐 2 つと、球 2 つとの和に等しい。共通である 2 つの円錐が取り去られると、軸を通る三角形が AEZ であるような円錐 1 つは、先に言われた球 2 つに等しい。ところで、軸を通る三角形が AEZ であるような円錐は、軸を通る三角形が $AB\Delta$ であるような円錐 8 つに等しい。なぜなら、 EZ は $B\Delta$ の 2 倍であるから、それゆえ、いま言われたような円錐 8 つが、球 2 つに等しい。したがって、その大円が円 $AB\Gamma\Delta$ の球は、頂点が A で、底面が $A\Gamma$ に垂直な直径 $B\Delta$ の円であるような円錐の 4 倍である。次に、点 B 、 Δ から、平行四辺形 AZ の中で、 $A\Gamma$ に平行に直線 ΦBX 、 $\Psi\Delta\Omega$ が引かれたとし、底面が、直径 $\Phi\Psi$ 、 $X\Omega$ の円で、軸が $A\Gamma$ であるような円柱が考えられたとせよ。さて、軸を通る平行四辺形が $\Phi\Omega$ であるような円柱は、軸を通る平行四辺形が $\Phi\Delta$ であるような円柱の 2 倍である。そして、後者の円柱自体は、『原論』の中で示されているように、軸を通る三角形が $AB\Delta$ であるような円錐の 3 倍である。それゆえ、軸を通る平行四辺形が $\Phi\Omega$ であるような円柱は、軸を通る三角形が $AB\Delta$ であるような円錐の 6 倍である。ところで、大円が円 $AB\Gamma\Delta$ である球は、そうした円錐の 4 倍であることが先に示されていた。したがって、円柱は球の $1\frac{1}{2}$ 倍である。このことが示すべきことであった。

すべての球は、底面として (球の) 大円をもち、高さとして球の半径をもつ円錐の 4 倍であることが見出されたあとで、すべての球の表面は、球の大円の 4 倍であるという考えが導かれた。なぜなら、すべての円は、底面としてその円周に (に等しい線分) をもち、高さとして円の半径に等しい線分をもつ三角形に等しいのであり、また、すべての球は、底面としてその球の表面 (に等しい平面) をもち、高さとして球の半径に等しい線分をもつ円錐に等しいのであるという想定が成り立つからである。

命題 3 球状体の大円に等しい底面をもち、球状体の軸に等しい高さをもつ円柱は、この球状体の $1\frac{1}{2}$ 倍である。[さらに、] すべての球状体は、その中心を通り、その軸に垂直な平面によって切られると、(そのとき出来る) 球状体の半分である切片は、その切片と同じ底面をもち、同じ軸をもつ円錐の 2 倍である。

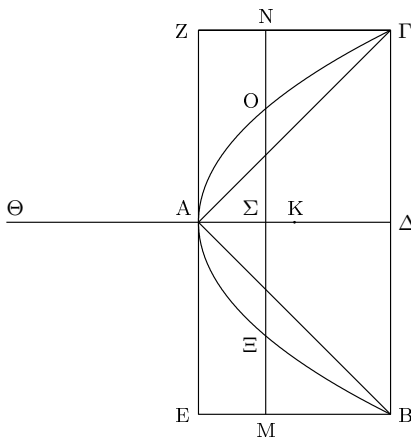
ある任意の球状体が、その軸を通る平面によって切られ、その平面の中に (断面として) 鋭角円錐切断 [楕円] $AB\Gamma\Delta$ を作るとせよ。その (鋭角円錐切断の) 直径が $A\Gamma$ 、 $B\Delta$ であり、その中心が K であるとせよ。そして、球状体の中に、 $A\Gamma$ に垂直な直径 $B\Delta$ の円があるとす。その円を底面にもち、点 A を頂点に持つ円錐が想定され、その (円錐の側) 面が延長されて、(延長されて出来た) 円錐が、 Γ を通り、底面に平行な平面によって切られるとせよ。そのとき、断面は、 $A\Gamma$ に垂直な、直径が EZ であるような円になるであろう。そして、底面として、直径が EZ であるこの円をもち、軸として線分 $A\Gamma$ をもつ円柱があるとせよ。いま、 ΓA が延長されて、 $A\Theta$ が ΓA に等しくとられたとせよ。そして、 $\Theta\Gamma$ が、その中心が点 A である天秤の横木と想定されるとせよ。さて、平行四辺形 AZ の中に、 EZ に平行に、任意の直線 MN が引かれたとせよ。そして、 MN の上に、 $A\Gamma$ に垂直な平面を描くと、その平

面は、断面として、円柱の中に直径 MN の円を、球状体の中に直径 ΞO の円を、円錐の中に直径 IIP の円を作るであろう。



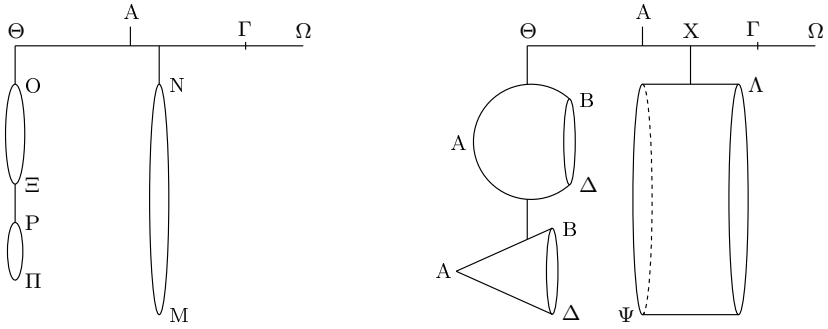
命題 4 軸に垂直な平面によって切りとられた直角円錐状体のすべての切片は、その切片と同じ底面と同じ軸をもつ円錐の $1\frac{1}{2}$ 倍である。

直角円錐状体があるとして、その軸を通る平面によって切られたとせよ。そのとき、断面として、その平面の中に、直角円錐切斷 [放物線] ABΓ を作るとせよ。次に、(直角円錐状体が) 軸に垂直なもう一つの平面によって切られたとし、BΓ をそれら (2 つ) の平面が交わる交線とせよ。ΔA がその (直角円錐状体の) 切片の軸であるとし、ΔA が Θ まで延長されて、AΘ が AΔ に等しくとられたとせよ。いま、ΔΘ を、その中点が A である天秤の横木であると考えよ。そして、(直角円錐状体の) 切片の底面が、AΔ に垂直な、直径 BΓ の円であるとせよ。さらに、底面として直径 BΓ の円を、頂点として点 A をもつ円錐を考えよ。また、底面として直径 BΓ の円を、軸として AΔ をもつ円柱があるとせよ。さて、平行四辺形 (EΓ) の中に、任意の直線 MN が BΓ に平行に引かれたとし、MN 上に、AΔ に垂直な平面を立てるとせよ。そのとき、この平面は、円柱の中に直径 MN の円を、直角円錐状体の切片の中に直径 ΞO の円を、断面として作るであろう。



命題 5 軸に垂直な平面によって切りとられた直角円錐状体の切片の重心は、この切片の軸である線分上にあり、かつ、この線分を、(直角円錐状体の) 頂点に近い方の部分が、残りの部分の 2 倍になるように分割する点である。

軸に垂直な平面によって切りとられた直角円錐状体の切片があるとして、その切片が、軸を通るもう一つの平面によって切られたとせよ。そのとき、断面として、その平面の中に、直角円錐切斷 [放物



いま、 $AX = XH$, $H\Phi = \frac{1}{3}AH$ とする。そのとき、点 X は円柱 $\Psi\Lambda$ の重心になるから、

$$\Theta A : AX = (\text{円柱 } \Psi\Lambda) : (\text{円錐 } AEZ + \text{球の切片 } AB\Delta).$$

ところで、

$$(\text{辺 } GH, H\Phi \text{ の長方形}) = \frac{1}{3}(\text{辺 } AH, H\Gamma \text{ の長方形}),$$

$$(\text{辺 } HB \text{ の正方形}) = (\text{辺 } AH, H\Gamma \text{ の長方形})$$

であるから、 $(\text{辺 } GH, H\Phi \text{ の長方形}) = \frac{1}{3}(\text{辺 } BH \text{ の正方形})$ 。また、 $(\text{辺 } AH \text{ の正方形}) = 3(\text{辺 } AH, H\Phi \text{ の長方形}) = 3(\text{辺 } AX, A\Phi \text{ の長方形})$ 。

いま、 $\Theta A = KH$, $AH = HE$ であるから、

$$(\text{辺 } \Theta A \text{ の正方形}) : \frac{1}{3}(\text{辺 } AH \text{ の正方形}) = (\text{円柱 } \Psi\Lambda) : (\text{円錐 } AEZ).$$

そこで、

$$(\text{辺 } \Theta A \text{ の正方形}) : (\text{辺 } AX, A\Phi \text{ の長方形}) = (\text{円柱 } \Psi\Lambda) : (\text{円錐 } AEZ).$$

$\Theta A = A\Gamma = A\Phi + \Phi\Gamma$ であるから、

$$\begin{aligned} (\text{辺 } \Theta A \text{ の正方形}) : (\text{辺 } A\Phi, AX \text{ の長方形} + \text{辺 } \Phi\Gamma, AX \text{ の長方形}) \\ = (\text{円柱 } \Psi\Lambda) : (\text{円錐 } AEZ + \text{球の切片 } AB\Delta). \end{aligned}$$

そこで、

$$(\text{辺 } \Theta A \text{ の正方形}) : (\text{辺 } \Phi\Gamma, AX \text{ の長方形}) = (\text{円柱 } \Psi\Lambda) : (\text{球の切片 } AB\Delta).$$

ところで、

$$(\text{辺 } \Theta A \text{ の正方形}) : \frac{1}{3}(\text{辺 } BH \text{ の正方形}) = (\text{円柱 } \Psi\Lambda) : (\text{円錐 } AB\Delta).$$

そして、

$$(\text{辺 } \Theta A \text{ の正方形}) : \frac{1}{3}(\text{辺 } BH \text{ の正方形}) = (\text{辺 } \Theta A \text{ の正方形}) : (\text{辺 } GH, H\Phi \text{ の長方形}).$$

それゆえ、

$$(\text{辺 } \Phi\Gamma, AX \text{ の長方形}) : (\text{辺 } GH, H\Phi \text{ の長方形}) = (\text{球の切片 } AB\Delta) : (\text{円錐 } AB\Delta).$$

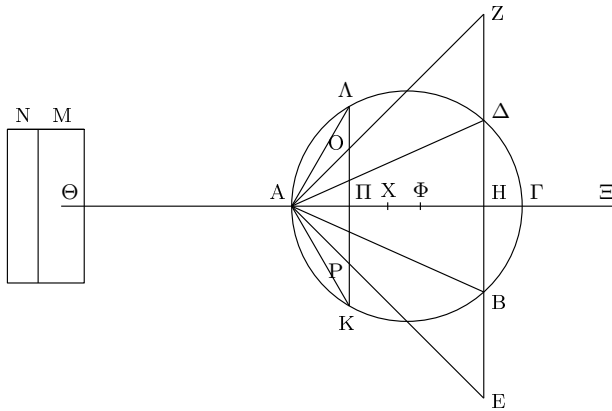
$AH = 2AX = A\Phi + \Phi H = 3\Phi H$, $\Phi\Gamma = \Phi H + H\Gamma = \frac{1}{3}AH + H\Gamma$ であるから、

$$\begin{aligned} (\text{辺 } \Phi\Gamma, AX \text{ の長方形}) &= (\text{辺 } \frac{1}{3}AH, \frac{3}{2}\Phi H \text{ の長方形}) + (\text{辺 } H\Gamma, \frac{3}{2}\Phi H \text{ の長方形}) \\ &= (\text{辺 } \Phi H, \frac{1}{2}A\Gamma + H\Gamma \text{ の長方形}). \end{aligned}$$

それゆえ、 $(\text{球の切片 } AB\Delta) : (\text{円錐 } AB\Delta) = (\frac{1}{2}A\Gamma + H\Gamma) : H\Gamma$ 。」

命題 8 (軸に) 垂直な平面によって切りとられた球状体のすべての切片は、その切片と同じ底面と同じ軸をもつ円錐に対して、球状体の軸の半分と (切りとられた球状体の切片の) 反対側の (球状体の残りの) 切片の軸との和が、反対側の切片の軸に対するのと同じ比をもつ。

命題 9 球のすべての切片の重心は、その (球の) 切片の軸である線分上にあり、かつ、(この線分を、球の) 切片の頂点に近い方の部分が、残りの部分に対して、(球の) 切片の軸と、(球の切りとられた切片と) 反対側の (球の) 切片の軸の 4 倍との和が、(球の) 切片の軸と、反対側の (球の) 切片の中に含まれる軸の 2 倍との和に対するのと同じ比をもつように分割する点である、… [途中欠損] …



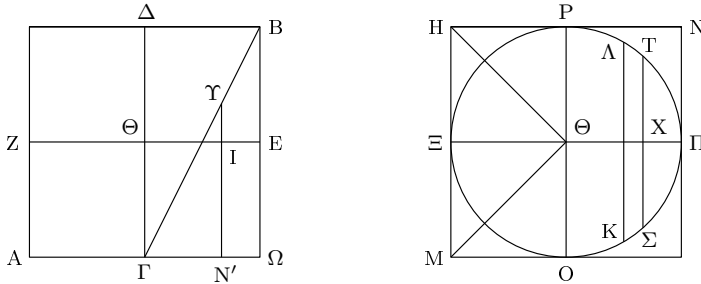
命題 10 球状体のすべての切片の重心は、その(球状体の)切片の軸である線分上にあり、かつ、この線分を、(球状体の)切片の頂点に近い方の部分が、残りの部分に対して、(球状体の)切片の軸と、(球状体の切りとられた切片と)反対側の切片の軸の4倍との和が、(球状体の)切片の軸と、反対側の切片の中に含まれる軸の2倍との和に対するのと同じ比をもつように分割する点である。

命題 11 鈍角円錐状体のすべての切片は、その(鈍角円錐状体の)切片と同じ底面と同じ軸をもつ円錐に対して、(鈍角円錐状体の)切片の軸と、軸に隣接する線分の3倍との和が、(鈍角)円錐状体の切片の軸と、軸に隣接する線分の2倍との和に対してもつ比と同じ比をもつ。そして、鈍角円錐状体の(切片の)重心は、その(鈍角円錐状体の切片の)軸上において、かつ、(その切片の軸である線分を、鈍角円錐状体の切片の)頂点に近い方の部分が、残りの部分に対して、(鈍角円錐状体の切片の)軸の3倍と、軸に隣接する線分の8倍との和が、(鈍角円錐状体の切片の)軸と、軸に隣接する線分の4倍に対してもつ比と同じ比をもつように分割する点である。

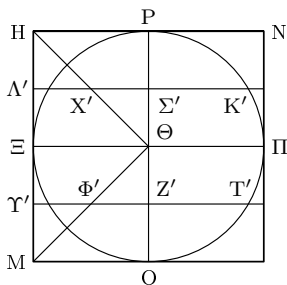
命題 12, 13 底面として正方形をもつ正角柱の中に、円柱が内接されるとして、その円柱は、(互いに)反対側にある(正角柱の2つの)正方形上に(2つの)底面を、そして、(正角柱の)残りの4つの平面に接する側面をもつとする。いま、もし、円柱の底面である円の中心と、(その底面の円の)反対側にある(正角柱の底面である)正方形の一つの辺とを通る平面が引かれたとすると、この引かれた平面によって切りとられた図形は、全体の角柱の $\frac{1}{6}$ 倍である。

底面として正方形をもつ正角柱と、先ほど述べられたように、この角柱に内接された円柱を考える。さて、この角柱が、軸を通り、かつ、円柱の切片を切りとる平面に垂直な平面によって切られるとせよ。そのとき、円柱を含む角柱の断面を平行四辺形 AB とする。そして、円柱から切片を切りとる平面と、円柱から切片を切りとる平面に垂直で、軸を通して引かれた平面との共通の交線を直線 BG とせよ。いま、線分 $\Gamma\Delta$ を、角柱と円柱の軸であるとし、EZ が $\Gamma\Delta$ を垂直に2等分するとせよ。さて、EZ を通って、 $\Gamma\Delta$ に垂直な平面を作ると、この平面は、断面として、角柱の中に正方形を、円柱の中に円を作るであろう。いま、角柱の断面を正方形 MN とし、円柱の断面を円 $\Xi O\Pi P$ として、その円は、正方形 (MN) の辺に点 Ξ, O, Π, P で接しているとする。そして、円柱から切片を切りとる平面と、円柱の軸に垂直に、EZ を通って引かれた平面との共通の交線を直線 KA とせよ。そのとき、直線 $\Pi\Theta\Xi$ は KA を2等分する。さて、任意の直線 ΣT が、半円 $O\Pi P$ の中で、 ΠX に垂直に引かれたとせよ。そして、 ΣT を通って、 $\Xi\Pi$ に垂直に平面が作られ、その平面が、円 $\Xi O\Pi P$ のある平面の上下両方向に延長されたとする。そのとき、この(延長された)平面は、底面が半円 $O\Pi P$ で高さが角柱の軸であるような半円柱の中に、断面として、一つの辺が ΣT に等しく、他の辺が円柱の母線に等しいような平行四辺形を作るであろう。また、この(延長された)平面は、円柱から切りとられた切片の中に、断面として、その一つの辺が ΣT に等しく、他の辺が $N'\Upsilon$ に等しいような平行四辺形を作る

であろう。さて、 $N'\Upsilon$ は、 EI が ΠX と等しく切りとられるように、平行四辺形 ΔE の中で、 $B\Omega$ に平行に引かれているとせよ。そのとき、 $E\Gamma$ は平行四辺形であり、 $N'I$ は $\Theta\Gamma$ に平行で、 $E\Theta$ と ΓB は ($N'I$ や $\Theta\Gamma$ に) 交わるように引かれているので、 $E\Theta$ が ΘI に対するように、 $\Omega\Gamma$ は $\Gamma N'$ に、すなわち、 $B\Omega$ は $\Upsilon N'$ に対する。ところで、 $B\Omega$ が $\Upsilon N'$ に対するように、半円柱の中に出来た平行四辺形は、円柱から切りとられた切片の中に出来た平行四辺形に対する。なぜなら、 ΣT は、両方の平行四辺形の共通の辺 (の長さ) であるから。さて、 $E\Theta$ は $\Theta\Pi$ に等しく、 $I\Theta$ は $X\Theta$ に等しい。また、 $\Pi\Theta$ は $\Theta\Xi$ に等しい。したがって、 ΘE が ΘX に対するように、半円柱の中に出来た平行四辺形は、円柱から切りとられた切片の中に出来た平行四辺形に対する。



(円柱から切りとられた) 切片の中に出来た平行四辺形が、その重心が点 Ξ になるように、点 Ξ に移されて置かれたと想定せよ。そして、 $\Pi\Xi$ を、その中点 Θ である天秤の横木と考える。すると、半円柱の中に出来た平行四辺形は、そのままの位置で、重心が点 Ξ になるように天秤の横木上で点 Ξ に移されて置かれた、円柱から切りとられた切片の中に出来た平行四辺形に、点 Θ に関して釣り合う。そのとき、点 X は、半円柱の中に出来た平行四辺形の重心であり、点 Ξ は、(Ξ に) 移された、(円柱から) 切りとられた切片の中に出来た平行四辺形の重心である。そして、 $\Xi\Theta$ は ΘX に対して、点 X がその重心であると述べた平行四辺形が、点 Ξ がその重心であると述べた平行四辺形に対してもつと同じ比をもつ。そこで、その重心が点 X であるような平行四辺形は、その重心が点 Ξ であるような平行四辺形に、点 Θ に関して釣り合うであろう。さて、別の任意の直線が、半円 $O\Pi P$ の中で、 $\Pi\Theta$ に垂直に引かれ、その引かれた直線上に、 $\Pi\Theta$ に垂直な平面が作られ、円 $\Xi O\Pi P$ がある平面の上下両方向に延長される場合にも、半円柱の中に出来た平行四辺形は、そのままの位置で、重心が点 Ξ であるように天秤の横木上で点 Ξ に移されて置かれた、円柱から切りとられた切片の中に出来た平行四辺形に、点 Θ に関して釣り合うことが、前と同様にして導かれるであろう。そこで、半円柱の中に出来たすべての平行四辺形は、そのままの位置で、天秤の横木上で点 Ξ に移されて置かれた、円柱から切りとられた切片の中に出来たすべての平行四辺形に、点 Θ に関して釣り合うであろう。したがって、半円柱は、そのままの位置で、点 Ξ がその重心になるように天秤の横木上で点 Ξ に移された置かれた、(円柱から) 切り取られた切片に、点 Θ に関して釣り合う。



さて、軸に垂直な平行四辺形 MN と、円 $\Xi O\Pi P$ があり、 Θ と M 、 Θ と H が結ばれたとせよ。いま、 ΘM 、 ΘH を通って、半円 $O\Pi P$ がある平面に垂直な (2 つの) 平面を作り、それらの平面が (円 $O\Pi P$ のある平面の) 上下両方向に延長されたとせよ。すると、三角形 $\Theta M H$ と同じ大きさの底面をもち、円柱の軸に等しい (長さの) 高さをもつような一つの角柱が出来るであろう。この角柱は、円柱に外接し

ている全体の角柱の $\frac{1}{4}$ である。いま、半円 OIP と正方形 MN の中に、 $\Pi\Xi$ から等距離に、任意の直線 $K'\Lambda'$ 、 $T'\Upsilon'$ が引かれたとし、それらは、半円 OIP の周を点 K' 、 T' で、直径 OP を点 Σ' 、 Z' で、直線 ΘH 、 ΘM を点 X' 、 Φ' で (それぞれ) 切るとする。さらに、 $K'\Lambda'$ 、 $T'\Upsilon'$ を通って、OP に垂直な (2 つの) 平面を作り、それらの平面が、円 ΞOIP のある平面の上下両方向へ延長されたとせよ。そのとき、それらの平面の一方は、底面が半円 OIP で高さが円柱と同じであるような半円柱の中に、断面として、一つの辺が $K'\Sigma'$ に等しく、他の辺が円柱の軸に等しい平行四辺形を作るであろう。また、この平面は、角柱 ΘHM の中にも同様に、断面として、一つの辺が $\Lambda'X'$ に等しくて、他の辺が (円柱の) 軸に等しい平行四辺形を作るであろう。そして同じく、(もう一つの平面により、) 半円柱の中には、一つの辺が $T'Z'$ に等しく、他の辺が円柱の軸に等しい平行四辺形が出来、角柱 (ΘHM) の中には、一つの辺が $\Upsilon'\Phi'$ に等しくて、他の辺が円柱の軸に等しい平行四辺形出来るであろう。… [以下欠損] …

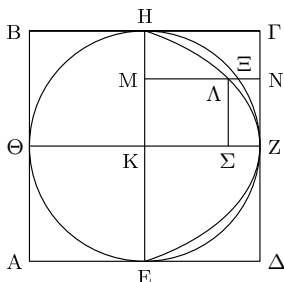
佐藤 徹は「Heiberg 版のテキストでは、命題 12 と 13 が分けられているけれども、その内容からみて、一続きの命題であるので、本書では、一つの命題として扱う。なお、Heiberg 版のテキストにある 3 つの図の記号は、一部重複しているので、それらを区別するために、本書では図の記号の一部にダッシュをつけた。」([5] p.81) として、上のように訳出している。
 なお、3 つ目の図の下の、「さて、軸に垂直な平行四辺形 MN と、……」以降が Heiberg 版の命題 13 に相当する部分。

命題 14 底面として正方形をもつ正角柱があるとして、その底面の 1 つを正方形 $AB\Gamma\Delta$ とせよ。その角柱の中に、円柱が内接されるとする。そして、その (内接された) 円柱の底面を、点 E, Z, H, Θ で正方形 $AB\Gamma\Delta$ の各辺に接する円 $EZH\Theta$ とせよ。さて、円 ($EZH\Theta$) の中心を通り、かつ、正方形 $AB\Gamma\Delta$ と向かいあっている平面にある正方形の、 $\Gamma\Delta$ に対応する辺を通る平面が引かれたとせよ。すると、この平面は、全体の角柱から、全体の角柱の $\frac{1}{4}$ 倍であるような別の角柱を切りとるであろう。そして、この (切りとられた) 角柱は、3 つの平行四辺形と、互いに向きあっている 2 つの三角形によって囲まれている。いま、半円 EZH の中に、直角円錐切断 [放物線] が内接されるとせよ。そして、 ZK が (直角円錐) 切断の中に、… [途中欠損] …

この命題も欠損部分があるが、主張したいことは命題 12 と同様の
 ($EZH\Theta$ の中心および $\Gamma\Delta$ に対応する辺を通る平面によって、
 円柱から切りとられる切片) = $\frac{1}{6}$ (角柱全体)

である。

命題 12 は機械学的な発見方法について、命題 14 は幾何学的な取扱いについて述べられている。そして、命題 15 では幾何学的な証明が与えられることになる。



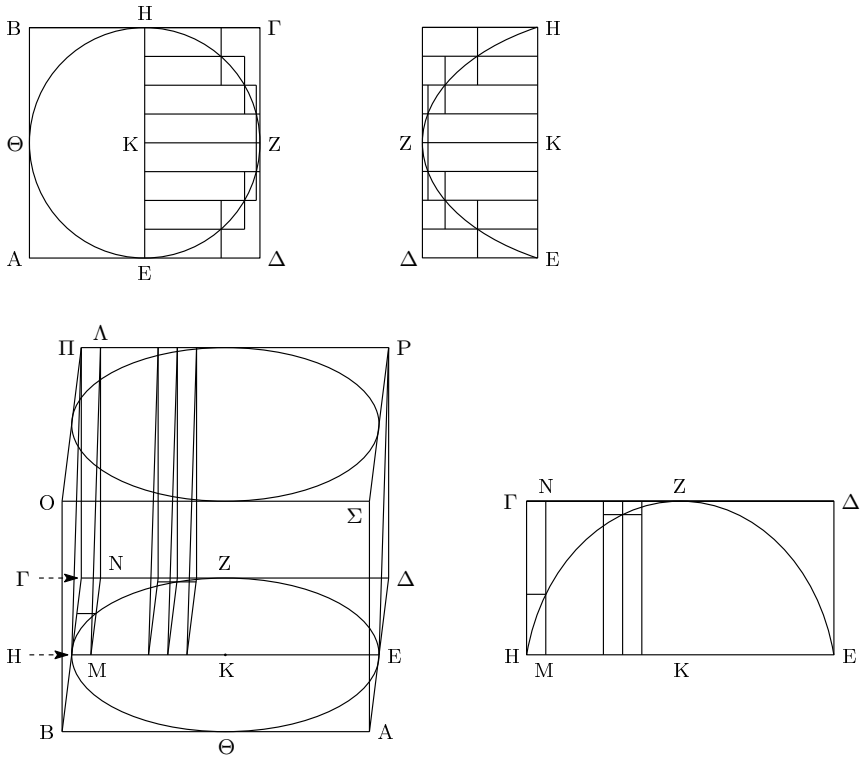
さて、平行四辺形 ΔH の中に、 KZ に平行な任意の直線 MN が引かれるとせよ。そのとき、 MN は、半円の周囲を点 Ξ で、(直角) 円錐切断 [放物線] を点 Λ で切るとする。ところで、 MN 、 NA によって囲まれる長方形は、 NZ 上の正方形に等しいことは明らかである。そこで、 MN が NA に対するよ

うに、KH 上の正方形は $\Lambda\Sigma$ 上の正方形に対する。いま、直線 MN 上に、EH に垂直な平面を立てると、この平面は、全体の角柱から切り取られた角柱の中に、断面として、次のような直角三角形を作るであろう。すなわち、直角をはさむ 1 つの辺が MN で、もう 1 つの辺、つまり、 $\Gamma\Delta$ 上にある平面内で $\Gamma\Delta$ に垂直に N から引かれた辺が円柱の軸 (の長さ) に等しく、斜辺は (円柱を) 切る平面内にあるような直角三角形である。また、EH と、 $\Gamma\Delta$ に向かいあっている正方形の辺とを通過して引かれた平面によって、円柱から切り取られた切片の中に、断面として、次のような直角三角形が出来るであろう。すなわち、直角をはさむ 1 つの辺が ME であり、もう 1 つの辺は、円柱の側面内で平面 KN に垂直に K から引かれた線分であり、斜辺は (円柱を) 切る平面内にあるような直角三角形である。ところで、MN、MA によって囲まれた長方形が、ME 上の正方形に等しいことも明らかである。そこで、MN が MA に対するように、MN 上の正方形は ME 上の正方形に対する。ところで、MN 上の正方形が ME 上の正方形に対するように、角柱の中に出来る MN 上の三角形は、円柱側面によって切り取られた切片の中に出来る ME 上の三角形に対する。それゆえ、MN が MA に対するように、(角柱内の) 三角形は、(円柱部分内の) 三角形に対する。さて、もし、別の直線が、(直角円錐) 切断に外接している平行四辺形 (ΔH) の中に、KZ に平行に引かれたとし、その引かれた直線上に、EH に垂直な平面が立てられると、角柱の中に出来る三角形が、… [途中欠損] …

に対するように、平行四辺形 ΔH の中に、KZ に平行に引かれた線分は、直角円錐切断 EHZ と (円の) 直径 EH によって切り取られた線分に対することも、同様にして導かれるであろう。そこで、平行四辺形 ΔH が、KZ に平行に引かれた線分によって満たされ、また、直角円錐切断と (円の) 直径によって囲まれた切片が、その切片内に切り取られた線分によって満たされると、… [途中欠損] …

そして、角柱の中のすべての三角形が、円柱から切り取られた切片内に取られたすべての三角形に対するように、平行四辺形 ΔH の中のすべての線分は、直角円錐切断と線分 EH の間にあるすべての線分に対するであろう。ところで、角柱は、角柱内の三角形から出来ており、(円柱の) 切片は、円柱から切り取られた切片内の三角形から出来ている。また、平行四辺形 ΔH は、平行四辺形 ΔH 内にある KZ への平行線から出来ており、(直角円錐切断の) 切片は、直角円錐切断と線分 EH の間にある… [途中欠損] … から出来ている。そこで、角柱が円柱から切り取られた切片に対するように、平行四辺形 ΔH は、直角円錐切断と線分 EH によって囲まれた切片 EZH に対する。ところで、平行四辺形 ΔH は、直角円錐切断と線分 EH によって囲まれた切片の $1\frac{1}{2}$ 倍である。このことは、前に発表された書物の中で証明されている。それゆえ、角柱も、円柱から切り取られた切片の $1\frac{1}{2}$ 倍である。そこで、たとえば、円柱から切り取られた切片が 2 であるとき、角柱は 3 である。そして、角柱が 3 であるとき、円柱を包んでいる全体の角柱は、先の (部分) 角柱の 4 倍であるから、12 になる。したがって、円柱から切り取られた切片が 2 であるとしたとき、全体の角柱は 12 である。それゆえ、円柱から切り取られた切片は、(全体の) 角柱の $\frac{1}{2}$ 倍である。

命題 15 底面として正方形をもつ正角柱があるとして、その底面の 1 つを正方形 $AB\Gamma\Delta$ とせよ。そして、その角柱の中に、円柱が内接されるとし、その円柱の底面を円 EZH よせよ。いま、円 (EZH) は、正方形 ($AB\Gamma\Delta$) の各辺に、点 E, Z, H, Θ で接しており、点 K を円 (EZH) の中心とする。さて、直径 EH と… [途中欠損] … の一つの辺を通過して、平面が引かれたとしよう。すると、この平面は、全体の角柱から (別の) 角柱を切りとり、円柱からは円柱の切片を切りとる。そのとき、引かれた平面によって円柱から切りとられた切片は、全体の角柱の $\frac{1}{6}$ 倍であることが証明されるであろうと主張する。



「この命題のテキストは、欠損部分が多くて判読しにくいので、その内容全体の骨子を、現代風の記法を用いて復元しておく」として、佐藤 徹は次のように復元している ([5] pp.95-99)。

「正方形 $AB\Gamma\Delta$ を 1 つの底面とする正角柱の中に、左図のように、円柱が内接されたとする。いま、円柱の底面である円 $EZH\Theta$ の中心を K とし、円 $EZH\Theta$ の直径 EH と、正角柱の上側にある正方形の ($\Gamma\Delta$ に対応する) 辺 ΠP とを通る平面が引かれるとする。そのとき、

$$(\text{引かれた平面によって円柱から切り取られる切片}) = \frac{1}{6}(\text{角柱全体})$$

が証明されるべきことである。

まず、切り取られる円柱部分に、高さが等しくて、底面が相似な三角形であるような諸角柱から出来る立体を内接させ、外接させる。角柱 $\Pi\Pi\Gamma P E \Delta$ は左図のように、 HE に垂直な平面によって、たえず半分に分割されていくと、分割された 1 つの部分は、(ユークリッド『原論』第 10 巻命題 1 によって) いつか、任意に取られた量よりも小さくなる。いま、そのような小部分を角柱 $\Pi\Pi\Gamma M A N$ とする。ところで、(外接立体) - (内接立体) = 2(角柱 $\Pi\Pi\Gamma M A N$)。そこで、外接立体と内接立体との差を、任意に取られた量よりも小さくすることができる。

さて、角柱 $\Pi\Pi\Gamma P E \Delta$ は、当初の角柱の $\frac{1}{4}$ であるから、円柱から切り取られる切片が当初の角柱の $\frac{1}{6}$ 倍に等しくないとすると、切り取られる円柱の切片は、角柱 $\Pi\Pi\Gamma P E \Delta$ の $\frac{2}{3}$ 倍より大きい小さいかである。

[I] (切り取られる円柱の切片) $> \frac{2}{3}$ (角柱 $\Pi\Pi\Gamma P E \Delta$) とせよ。

そのとき、(円柱の切片への外接立体) - (円柱の切片への内接立体) $< (\text{円柱の切片}) - \frac{2}{3}(\text{角柱 } \Pi\Pi\Gamma P E \Delta)$ となるように、切り取られる円柱の切片に、等しい高さの諸角柱から成る立体を外接、内接することができる。そのとき、(内接立体) $> \frac{2}{3}(\text{角柱 } \Pi\Pi\Gamma P E \Delta)$ 。命題 14 と同じように、右図のごとく、 KZ を直径 (軸) とし、点 E, Z, H を通る直角円錐切断 (放物線) が描かれ、それに外接、内接する平行四辺形が、切り取られる円柱の切片に外接、内接する諸角柱に対応するように同じ数だけ描かれたとする。そのとき、命題 14 の議論、および補助定理 11 (『円錐状体と球状体について』命題 1) によって、次の関係が導かれる。(角柱 $\Pi\Pi\Gamma P E \Delta$): (円柱切片への内接立体) = (平行四辺形 ΔH): (直角円錐切断への内接平行四辺形の和)。それゆえ、(平行四

辺形 ΔH) $< \frac{3}{2}$ (直角円錐切断への内接平行四辺形の和)。これは不可能である。なぜなら(『放物線の求積』において), (平行四辺形 ΔH) $= \frac{3}{2}$ (直角円錐切断の切片 EZH) であることが示されていたから。そこで, 切り取られる円柱の切片は, 角柱 $\Pi\Pi\Gamma\text{E}\rho\Delta$ の $\frac{2}{3}$ 倍より大きくない。

[II] (切り取られる円柱の切片) $< \frac{2}{3}$ (角柱 $\Pi\Pi\Gamma\text{E}\rho\Delta$) とせよ。

そのとき, (円柱切片への外接立体) $-$ (円柱切片への内接立体) $< \frac{2}{3}$ (角柱 $\Pi\Pi\Gamma\text{E}\rho\Delta$) $-$ (円柱切片) となるように, 切り取られる円柱の切片に, 等しい高さの諸角柱から成る立体を, 外接し, 内接することができる。このとき, (外接立体) $< \frac{2}{3}$ (角柱 $\Pi\Pi\Gamma\text{E}\rho\Delta$)。前と同様にして, (角柱 $\Pi\Pi\Gamma\text{E}\rho\Delta$) : (円柱切片への外接立体) $=$ (平行四辺形 ΔH) : (直角円錐切断への外接平行四辺形の和)。そこで, (平行四辺形 ΔH) $> \frac{3}{2}$ (直角円錐切断への外接平行四辺形の和)。これは不可能である。なぜなら, (平行四辺形 ΔH) $= \frac{3}{2}$ (直角円錐切断の切片 EZH) であるから。そこで, 切り取られる円柱の切片は, 角柱 $\Pi\Pi\Gamma\text{E}\rho\Delta$ の $\frac{2}{3}$ 倍より小さくもない。

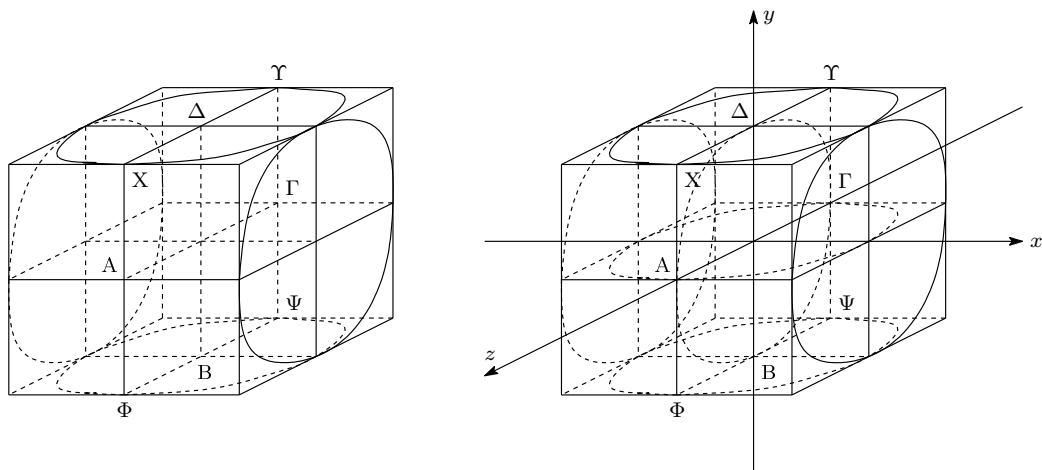
したがって, (切り取られる円柱の切片) $= \frac{2}{3}$ (角柱 $\Pi\Pi\Gamma\text{E}\rho\Delta$) $= \frac{1}{6}$ (当初の角柱)。」

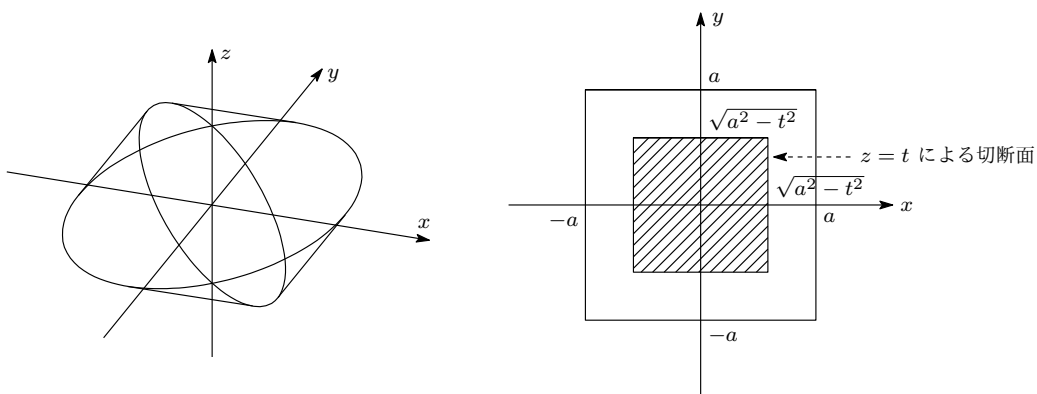
.....

テキスト本文はここで終わりであるが, アルキメデスはこの書簡において 2 つの定理の証明を与える旨を(ここでは省略した)「序文」中に述べている。そのうちの第 1 のものがここでの命題 12 ~15 であり, 他の 1 つは

「もし, 立方体の中に, (互いに) 向かいあった平行四辺形(内)に(2つの)底面をもち, 残りの 4 つの平面に接する(側)面をもつ円柱が内接され, さらに, この同じ立方体の中に, 別の(向かいあった)平行四辺形内に(2つの)底面をもち, 残りの 4 つの平面に接する(側)面をもつ別の円柱が内接されると, 2 つの円柱の中にある両円柱の(曲)面によって囲まれた図形は, 立方体全体の $\frac{2}{3}$ である」

というものである。したがって, 命題 15 の後には, この第 2 の定理の発見方法と幾何学的証明が書かれていたのだらうと推察される。





上左図のような立方体について、上右図のように座標軸を設定し、立方体の1辺の長さを a とする。すると、平面 $z = t$ による切断面は1辺の長さが $2\sqrt{a^2 - t^2}$ の正方形となるから、この正方形の面積は $S(t) = 4(a^2 - t^2)$ となる。したがって、問題の立体(交差した円柱)の体積 V は

$$V = 2 \int_0^a 4(a^2 - t^2) dt = \frac{16}{3} a^3 = \frac{2}{3} (8a^3) = \frac{2}{3} (\text{立方体の体積})$$

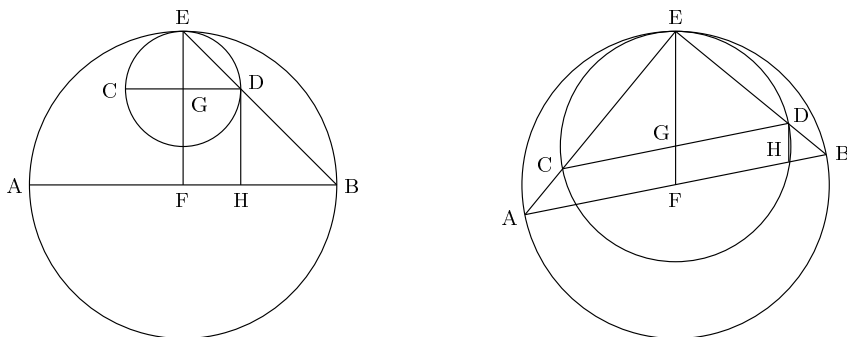
となる。

補助定理集

Liber Assumptorum

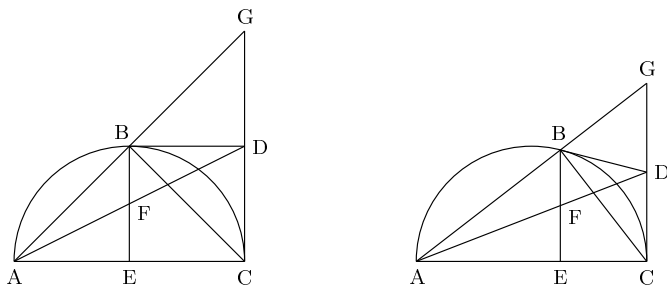
命題1 もし2つの円が互いに、例えば2つの円 AEB, CED が E において、接するとし、そして、それらの直径、例えば AB, CD, が平行であったとし、2つの点 B, D および接点 E が直線 DE, BD によって結ばれるならば、線 BE はまっすぐ [D を通る直線] であろう。

2つの [円の] 中心が G, F であるとし、GF が結ばれて、E まで延長するとし、DH を GF に平行に引くとせよ。

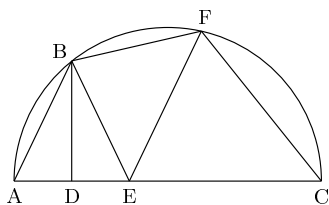


命題2 CBA が, DC, DB が接する, 半円であるとし, BE が AC の上の垂線であり, AD を結ぶとすると, BF は FE に等しいであろう。

AB を結び, それをまっすぐに延長し, そして, CD を引き, それらが G において出会うとし, CB を結ぶとせよ。

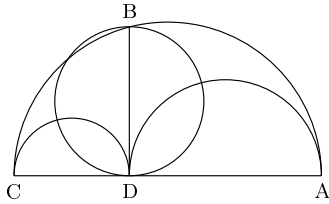


命題3 CA が円の切片であるとして, B がその上の任意の点, BD が AC の上の垂線であるとし, 切片 DE が DA に等しく, 弧 BF が弧 BA に等しいとすると, 確かに, 結ばれた CF は CE に等しいであろう。



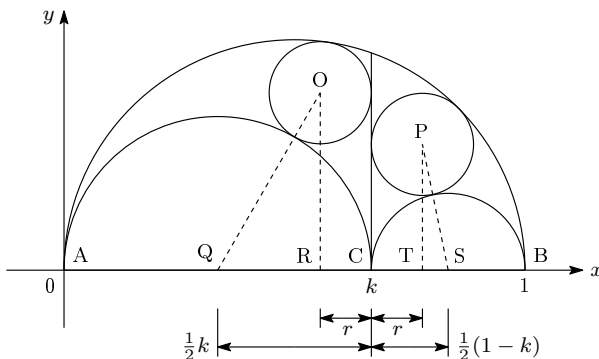
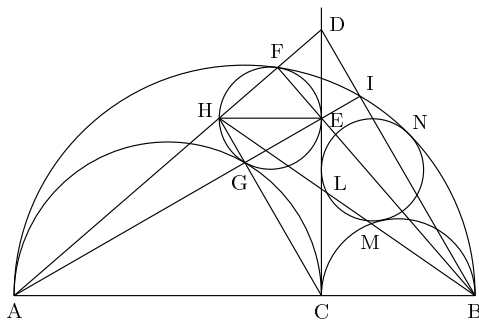
命題4 ABC が半円であるとして, 直径 AC の上に2つの半円, それらの一方は AD で他方は DC, そして, 垂線 DB がつくられると, 確かに, そこにできている図形 —— それをアルキメデ

スは靴屋のナイフ [アルベロス ; Arbelos ; ἄρβηλος] (それは大きい半円の弧と小さい2つの半円の周によって囲まれた領域である) と呼ぶ —— はその直径が垂線 DB である円に等しい。



命題5 もし半円 AB があって、その直径の上に任意の点 C が刻まれたとし、そして、その直径の上に2つの半円 AC, CB をつくるとし、C から AB の上に垂線 CD が引かれるとし、そして、2つの円のどこかの部分においてそれに接して、しかも、[2つの] 半円にも接している、[2つの円が] 描かれるとするならば、確かに、それら2つの円は等しい。

それらの円の一方が E において DC に、F において半円 AB に、G において半円 AC に接しているとき。そして、直径 HE を引く。2つの角 HEC, ACE が [ともに] 直角であるから、それは直径 AB に平行であろう。そして、FH, HA を結ぶ。ゆえに、命題1において述べられたように、線 AF はまっすぐである。そして、[その和が] 直角より小さい2つの角 A, C から出発しているから、AF, CE は D において出会うであろう。そして、FE, EB もまた結ぶ。ゆえに、述べたように、FEB もまたまっすぐである。そして、半円 AB に中に落ちるから、角 AFB は直角であるから、それ [FEB] は AD の上の垂線である。HG, GC を結ぶと、HC もまたまっすぐであろう。EG, GA を結ぶと、EA [もまた] まっすぐであろう。そして、それを I まで延長し、BI を結ぶと、それはまた AI の上の垂線であるはずである。



ここのできる2つの等円 EH (中心 O), LN (中心 P) はアルキメデスの双子の円、あるいは単にアルキメデスの円、といわれるらしい。なお、奥村博・渡邊雅之 [12] によれば、このアルキメデスの双子の円と合同な円はすべてアルキメデスの円と呼ばれるそうである。

さて、図のように座標軸を設定し、 $AB = 1$, $AC = k$ として、2つの等円の半径を r とする。
 まず、上の図で、 $AB : AC = AD : AH = CD : CE = 1 : k$ であるから、 $DE = CD - CE = (1 - k)CD$ となる。それゆえ、 $AC : EH = CD : DE = 1 : (1 - k)$ であるから、 $EH = (1 - k)AC = k(1 - k)AB$ となる。

ここで、 $AB = 1$ であったから、2つの等円の半径は $r = \frac{1}{2}EH = \frac{1}{2}k(1 - k)$ ということになる。[なお、半円 AC , BC の半径をそれぞれ a , b とすると、2つの等円の半径は $\frac{ab}{a+b}$ であることが知られている。]

次に、下の図で、 $OQ = \frac{1}{2}k + r$, $QR = \frac{1}{2}k - r$ であるから、

$$OR^2 = OQ^2 - QR^2 = \left(\frac{1}{2}k + r\right)^2 - \left(\frac{1}{2}k - r\right)^2 = 2kr = k^2(1 - k)$$

となり、 $OR = k\sqrt{1 - k}$ である。また、 $AR = AC - CR = k - r = \frac{1}{2}k(1 + k)$ である。

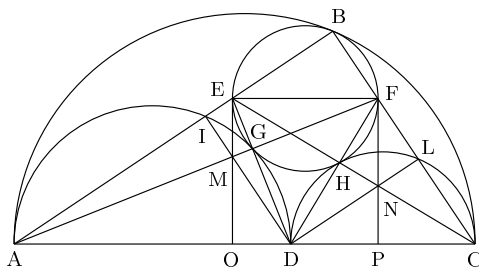
一方、 $PS = \frac{1}{2}(1 - k) + r$, $ST = \frac{1}{2}(1 - k) - r$ であるから、 $PT^2 = PS^2 - ST^2 = k(1 - k)^2$

より、 $PT = (1 - k)\sqrt{k}$ である。そして、 $AT = AC + CT = k + r = \frac{1}{2}k(3 - k)$ である。

したがって、2つの等円の中心は $O\left(\frac{1}{2}k(1 + k), k\sqrt{1 - k}\right)$, $P\left(\frac{1}{2}k(3 - k), (1 - k)\sqrt{k}\right)$ となる。

命題6 もし半円 ABC があったとして、その直径の上に点 D がとられるとし、 AD が DC の1倍半であったとし、 AD , DC の上に2つの半円が描かれるとし、3つの半円の間にそれらの接している円 EF が置かれるとし、その中に直径 AC に平行な直径 EF が引かれるとするならば、直径 AC の直径 EF に対する比が見出されなければならない。

なぜならば、2つの直線 AE , EB および2つの直線 CF , FB を結ぶ。最初の命題で述べられたように、 CB , AB はまっすぐであろう。そのうえ、2つの直線 FGA , EHC を描くとすると、同様に、それらはまっすぐであることが示されるであろう。同様に、2つの線 DE , DF [もまっすぐであり]、 DI , DL および EM , FN を結び、それらを O , P まで延長する。



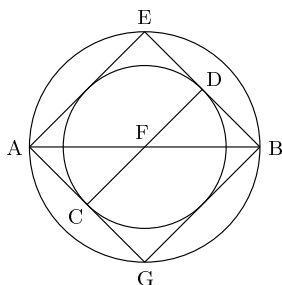
三角形 AED において、 AG は ED に垂直であり、 DI も同様に AE に垂直であり、それらは M において互いに他を切断するから、ゆえに、三角形の性質についてなし遂げた、そして、その証明が確かに上の方の命題において先に行われた、説明の中で私たちが示したように、 EMO もまたまっすぐであろう。同様に、 FP もまた CA の上の垂線であろうし、そして、 L および B の近くにある2つの角は直角であるから、 DL は AB に、同様に、 DI は CB に平行であろう。それゆえ、 AD が DC に対する比は AM が FM に対する比であり、それどころか、 AO が OP に対する比であり、そして、 CD が DA に対する比は CN が NE に対する比であり、それどころか、 CP が PO に対する比である。そして、 AD は DC の1倍半であった。ゆえに、 AO は OP の1倍半であり、 OP は CP の1倍半である。ゆえに、3つの直線 AO , OP , PC は比例しており、そして、同じ基準で、 PC は4であり、 OP は6であり、 AO は9であり、 CA は19であろう。そして、 PO は EF に等しいから、 AC が EF に対する比は19が6に対するようであろう。それゆえ、私たちは指定された比を見出す。そのうえ、もし AD が DC に対して、例えば3分の4、あるいは4分の5、あるいはそれ以外の、どのよう [な比] であったとしても、指定された比が定まるであろう。そして、これが私たちが望んでいたものである。

$AD : DC = AM : FM = AO : OP$, $DC : AD = CN : NE = CP : OP$ であるから、いま、 $AD : DC = r : 1$ とすると、 $CP : OP : AO : AC = 1 : r : r^2 : (1 + r + r^2)$ となる。

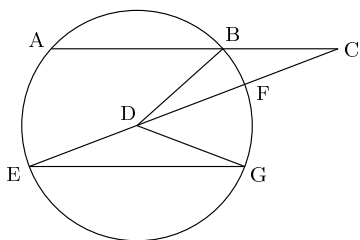
ところで、 $EF = OP$ であるから、 $AC : EF = (1 + r + r^2) : r$ となる。

例えば、 $r = \frac{4}{3}$ なら、 $AC : EF = (1 + \frac{4}{3} + \frac{16}{9}) : \frac{4}{3} = 37 : 12$ ということになる。

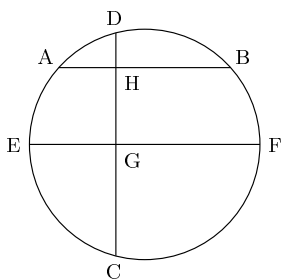
命題7 もし正方形の周りに円が、そして、第2の[円]がその内部に、描かれたとしたならば、確かに、外接された[円]は内接された[円]の2倍であろう。



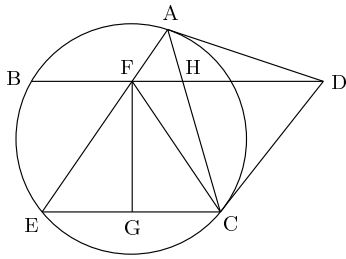
命題8 もし円の中にどこであろうと直線 AB が引かれるとし、それがまっすぐに延長されるとき、BC が円の半径に等しくとられるとし、C から円の中心 D まで結ばれるとし、それが E まで延長されるとするならば、弧 AE は弧 BF の3倍であろう。



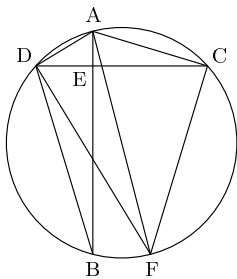
命題9 もし2つの直線 AB, CD が円の中において (しかし、中心においてではなく) 互いに他を直角に切断したとするならば、確かに、2つの弧 AD, CB [の和] は2つの弧 AC, DB [の和] に等しい。



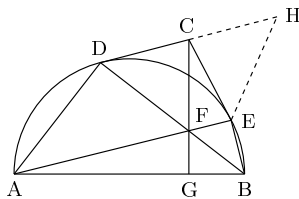
命題10 もし DA がそれに接していて、DB がそれを切断していて、DC もまた [それに] 接している、円 ABC があつたとし、そして、DB に平行な CE が引かれたとし、F において DB を切断している EA が結ばれたとし、F から CE に垂直な FG が引かれたとするならば、確かに、それ [FG] は G においてそれ [CE] を半分に切断するであろう。



命題 11 もし円の中において 2 つの直線 AB, CD が E において、しかし中心においてではなく、互いに他を直角に切断したとするならば、確かに、AE, BE, EC, ED の平方のすべて [の和] は直径の平方に等しい。

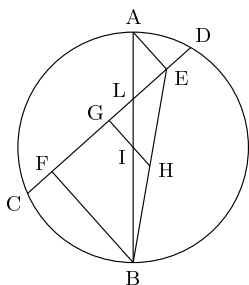


命題 12 もし直径 AB の上に半円があったとして、C から 2 つの点 D, E においてそれに接している 2 つの直線が引かれたとし、F において互いに他を切断している EA, DB が結ばれたとし、CF が結ばれたとして、それが G まで延長されたとするならば、CG は AB に垂直であろう。

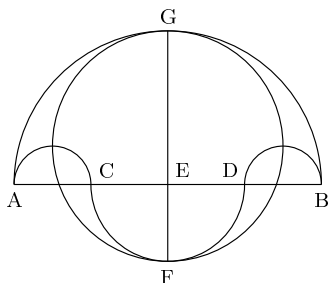


命題 13 もし 2 つの直線 AB, CD が円の中において互いに他を切断するとして、AB はその直径で、CD はそうではなかったとし、2 つの点 A, B から CD に対して 2 つの垂線 —— それが AE, BF であるとする —— が引かれるとするならば、確かに、それらはそれから等しい CF, DE を切りとるのである。

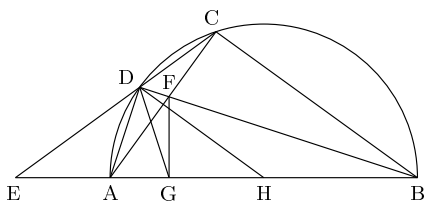
EB を結ぶとし、[円の] 中心である I から CD の上に垂直な IG を引くとし、それを EB の上の H まで延長するとせよ。



命題 14 もし半円 AB があったとして、その直径 AB から等しい AC , BD が切られたとし、直線 AC , CD , DB の上に半円がつくられるとし、2つの半円 AB , CD の中心が点 E であるとし、 EF は AB 上の垂線であるとし、それが G まで延長されるとするならば、確かに、その直径が FG である円は、大きい方の半円およびその内部にある2つの半円およびその外部にある中間の [大きさの] 半円によって囲まれた表面 —— それはアルキメデスが塩壺 [塩入れ; サリノン; salinum; σάλινον] と呼ぶ図形である —— に等しい。



命題 15 もし半円 AB があったとして、 AC が五角形の [1 辺である] 弦で、弧 AC の半分が AD であるとし、 CD が結ばれるとし、それが E の上に落ちるように延長されるとし、 F において AC を切断する DB が結ばれるとし、 F から AB 上に垂直な FG が引かれるとするならば、直線 EG は円の半径に等しいであろう。



索引

アルキメデス	
— の円	132
— の原理	106
— の公理	30
— の塩壺	136
— のナイフ	132
アルベロス	132
エウドクソス・アルキメデスの公理	30
液体	103
円錐状図形	86
円錐状体	55
円錐の切片	77
円柱の断片	77
同じ向きに凹である	29
回転双曲線体	75
回転楕円体	76
回転放物線体	75
球状図形	86
球状体	76
靴屋のナイフ	132
グノーモン	97
後続方向	61
サリノン	136
軸	75, 76
切片の —	75-77
断片の —	77
軸に付加された [直線]	75
始線	61
始点	61
重心	
円錐の —	117
円柱の —	117
円の —	117
角柱の —	117
球状体の切片の —	124
球の切片の —	123
三角形の —	20, 22, 117
線分の —	117
台形の —	22
直角円錐状体の切片の —	120
鈍角円錐状体の切片の —	124
半球の —	121
平行四辺形の —	19, 20, 117
放物線の切片の —	25, 26
放物線の断片の —	28
数列の和	
4 倍比の等比数列	13
等差数列の —	58, 77, 78
等差数列の平方和	59
切片	
円錐の —	77
前進方向	61

相似である	76
相似な位置	17, 20
第 1 円	61
第 1 線	61
第 1 部分	61
第 2 円	61
第 2 線	61
第 2 部分	61
体積	
円柱の —	43
球状体に外接する円柱の —	119
球状体の切片の —	123
球状体の半分の —	94, 97
球に内接する立体の —	40
球の —	42, 118
球の切片の —	51, 121
直角円錐状体の切片の —	88, 89, 120
鈍角円錐状体の切片の —	124
立体扇形の —	48
立体菱形の —	36
高さ	12
断片	
円柱の —	77
中心	76
頂点	12, 55, 75, 76
切片の —	75-77
長方球状体	76
直立辺	109
直角円錐状体	75
直径	76
切片の —	80
通約可能	18
包んでいる	75
底辺	12
底面	55
切片の —	75-77
断片の —	77
動径	73
等順位による比	93
鈍角円錐状体	75
長さ	
円周の —	4
螺線の第 1 円の周囲の —	64
倍量	19
比	
円とその直径の平方との —	3
球状体の小切片とそれと同底同軸の円錐との —	97, 98
球状体の大切片とそれと同底同軸の円錐との —	99, 100
鈍角円錐状体の 2 つの切片の —	90, 93
表面積	
円柱の —	43
球に外接する図形の —	41

球に内接する図形の —	39
球の —	42
球の切片に外接する図形の —	46
球の切片に内接する図形の —	44
直円柱の —	34
等脚円錐台の —	35
等脚円錐に外接する角錐の —	32
等脚円錐に内接する角錐の —	32
等脚円錐の —	35
半球より大きい球の —	48
半球より小さい球の —	47
双子の円	132
平方において通約可能	19
扁平球状体	76
補助円	80
まっすぐに	108
面積	
放物線の切片の —	10, 12, 14, 117
螺線と始線との間の —	71
螺線と第 1 線との間の —	68
約量	19
螺線	55, 61
乱比例	93
立体扇形	29
立体菱形	29