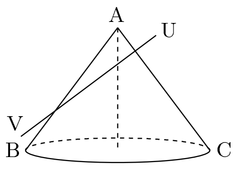
円錐曲線

［注意］ここで示した拙訳は，ギリシア語原文から訳出したものではなく，ラテン語訳からの重訳であるから，ギリシア語原文とは微妙にニュアンスが異なることがあることに注意。例えば，ギリシア語原文の ἡμιόλιος「1 と 2 分の 1」がラテン語訳の方では，sesquialter「1 倍半」という語があるにもかかわらず，dimidia parte maius ... quam「その半分だけ大きい」となっている。ἐπίτριτος「1 と 3 分の 1」についても同様。比の表し方も同様で，ギリシア語原文は $a : b$ のような書き方はしていない。

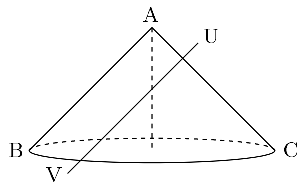
円錐［定義は後述］をある平面で切断したときに切断面に現れる曲線を総称して円錐曲線という。円錐曲線には楕円，円，放物線，双曲線がある。

(1) メナイクモス

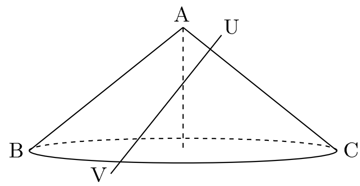
円錐曲線はメナイクモス (Μέναιχμος (Menaichmos，Menaechmus)：B.C.4 世紀) によって発見されたといわれている。彼は，円錐をある母線に垂直な平面によって切断するときにできる切断面が定める曲線として円錐曲線を捉えた。



鋭角円錐切断
楕円

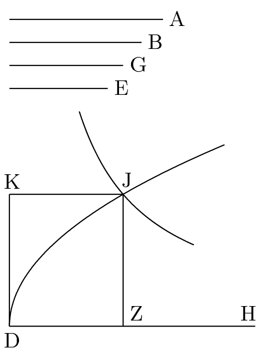


直角円錐切断
放物線



鈍角円錐切断
双曲線

彼は円錐曲線を立方体倍積問題［与えられた立方体の 2 倍の体積をもつ立方体を作図することで，$\sqrt[3]{2}$ の長さを作図することに相当する。］の解法に用いたといわれている。というか，問題解決のために円錐曲線を導入したのであろう。エウトキオス (Εὐτόκιος (Eutokios，Eutocius)：480?–540?) の伝えるところでは次のようである。［『アルキメデス著作集』(*Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii*) 第 3 巻所収の *Eutocii Commentarium in Librum II De Sphaera et Cylindro*（「『球と円柱について』第 2 巻についてのエウトキオスの注釈」）による (pp.92–97)。］



「与えられた 2 つの直線を A，E としよう。それゆえ，A，E の間に 2 つの比例中項が見出されなければならない。それを，B，G としよう。そして，D において終わらせられた，位置において与えられた直線 DH が置かれるとし，D の近くに直線 G に等しい DZ が置かれるとし，垂線 JZ が引かれ，ZJ = B とおかれるとしよう。それゆえ，3 つの直線 A，B，G は比例しているから，$A \times G = B^2$ であろう。従って，与えられた直線 A および直線 G，すなわち直線 DZ，に囲まれた長方形は直線 B の平方，すなわち直線 ZJ の平方，に等しい。従って，点 J は D を通って描かれた放物線の上にある［アポロニオス『円錐曲線論』第 1 巻命題 11］。平行な直線 JK，DK が引かれるとしよう。すると，長方形 $B \times G$ は与えられる (なぜなら，それは長方形 $A \times E$ に等しいから) から，長方形 $KJ \times JZ$ もまた与えられる。それゆえ，点 J は漸近線 KD，DZ の中に描かれた双曲線の上にある［アポロニオス『円錐曲線論』第 2 巻命題 12］。それゆえ，点 J は与えられ，それゆえ，点 Z もまた与えられる。

これは次のように作図されるであろう。与えられた直線が A，E，そして，D において終わらせられた，位置において与えられた直線が DH であるとし，D を通って放物線が描かれるとし，その軸が DH，さらにパラメーター［直立辺］が A，であるとし，DH に対して直角に引かれた直線の平方が，その幅として，D の近くに，それが切り取る直線をもっている，A に結びつけられた広がりに等しいとしよう。それが描かれたとして，それを DJ とし，DK は［DH に］垂直であるとしよう。そして，漸近線 KD，DZ の中に，直線 KD，DZ に平行に引

かれた直線による広がりが長方形 A × E に等しくなるような双曲線が描かれるとしよう。それゆえ，それは放物線を切断するであろう。J において切断するとし，垂直な JK が引かれるとしよう。いま，$\mathrm{ZJ}^2 = \mathrm{A} \times \mathrm{DZ}$［アポロニオス『円錐曲線論』第 1 巻命題 11］であるから，$\mathrm{A} : \mathrm{ZJ} = \mathrm{JZ} : \mathrm{ZD}$ であろう。さらに，$\mathrm{A} \times \mathrm{E} = \mathrm{JZ} \times \mathrm{ZD}$ であるから，$\mathrm{A} : \mathrm{ZJ} = \mathrm{ZD} : \mathrm{E}$ であろう。しかし，$\mathrm{A} : \mathrm{ZJ} = \mathrm{ZJ} : \mathrm{ZD}$ であった。それゆえ，$\mathrm{A} : \mathrm{ZJ} = \mathrm{ZJ} : \mathrm{ZD} = \mathrm{ZD} : \mathrm{E}$ でもある。$\mathrm{B} = \mathrm{JZ}$，$\mathrm{G} = \mathrm{DZ}$ とおかれるとしよう。それゆえ，$\mathrm{A} : \mathrm{B} = \mathrm{B} : \mathrm{G} = \mathrm{G} : \mathrm{E}$ であろう。それゆえ，A，B，G，E は連続した比例である。これが見出さなければならないことであった。」

放物線 $x = ky^2$，双曲線 $xy = l$ の交点は $ky^3 = l$ から得られるが，$l = 2k$ とすれば，$y^3 = 2$ となり，これから立方体倍積問題が解かれるというもの。

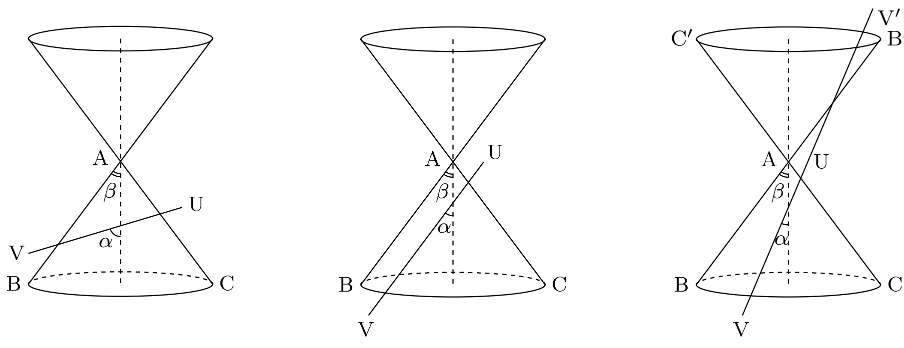
なお，$a : x = x : y = y : b$ のとき，$x^3 = a^2 b$ となるから，立方体倍積問題では $b = 2a$ とすればよく，立方体倍積問題は比例中項を求める問題に還元できるのである。

(2) アポロニオス

メナイクモスが切断の仕方を一定にしたうえで切断される円錐の種類によって切断面に現れる円錐曲線の違いを捉えたのに対して，アポロニオス (Ἀπολλώνιος (Apollonios，Apollonius) : 前 262–前 200?) は 1 つの円錐［斜円錐でもよい］に対する切断の仕方の違いによって円錐曲線の違いを捉えた。すなわち，切断面と円錐曲線の軸とのなす角を α，母線と軸とのなす角を β とするとき，

$$\begin{cases} \alpha > \beta \text{ なら，楕円または円} \\ \alpha = \beta \text{ なら，放物線} \\ \alpha < \beta \text{ なら，双曲線} \end{cases}$$

とした［下図］。なお，アポロニオス以来，円錐は下図のように (上下の) 2 つが対になったものを対象とする。



アポロニオスの成果は『円錐曲線論』(Κωνικῶν : *Conica*) 全 8 巻にまとめられている。ただし，ギリシア語原文が伝えられるのは第 1 巻から第 4 巻までで，第 5〜7 巻はアラビア語で伝わり，第 8 巻は失われている。

以下で利用する『円錐曲線論』は，ハイベア (Johan Ludvig Heiberg : 1854–1928) が編集した，

Apollonii Pergaei quae Graece Exstant cum Commentariis Antiquis. Edidit et Latine Interpretatus est I. L. Heiberg, Dr. Phil. Lipsiae in Aedibus B. G. Teubneri. (「ギリシア語で現存するペルガのアポロニオス，併せて古代の注釈」)

で，『ハイベア版』として利用・引用する。

彼は円錐などの用語を『円錐曲線論』第 1 巻の始めで次のように定義する (『ハイベア版』pp.6–9)。

「1　もし，ある点から，その点が属する同じ平面には置かれていない，円の周囲に引かれた直線が，いずれの方向にも延長され，その点はそのままにして，その直線が円の周囲に沿って回転させられて再び同じ位置に戻されるならば，そのためにもたらされる図形で，頂点に対して互いに対置させられた 2 つの表面からなり，それらを描いている直線が無限に延長されると両側に無限につくられる，その直線によって描かれた表面を私は円錐面 (κωνικός ἐπιφάνεια, superficies conicus) と，さらに，そのままにしているその点を頂点と，さらに，その点および円の中心を通って引かれた直線を軸と呼ぶ。

2　さらに，円および頂点と円の周囲との間に置かれた円錐面によって囲まれた図形を円錐 (κῶνος，conus) と，さらに，円錐面の頂点と同じである円錐の点を頂点と，さらに，頂点から円の中心まで引かれた直線を軸と，さらに，円を底面と［私は呼ぶ］。

3　さらに，底面に対して垂直な軸をもつものを私は直円錐と，さらに，底面に対して垂直ではない軸をもつものを斜円錐と呼ぶ。

4　ある平面の上に置かれたそれぞれの曲線について，ある直線に平行にその曲線の中に引かれたすべての直線を 2 つずつの等しい部分に分割する，その曲線において引かれた，直線を私は直径と，さらに，その曲線の中におけるこの直線の端点を［その曲線の］頂点と，さらに，［曲線内に引かれたそれらの］平行な直線のそれぞれを直径に対して規則正しく (τεταγμένως, ordinate) 引かれた線［縦線］であると呼ぶ。

5　さらに，同様に，ある平面に置かれた曲線の 2 つの直径について，それら 2 つの直線を切断している，［そして,］それら 2 つの直線の中の任意の直線に平行に引かれたすべての直線を 2 つずつの等しい部分に分割する，直線を私は横断する線［横線］と，さらに，その直線の上に置かれた直径の端点をその曲線の頂点と，さらに，［それらの中の］任意の直線に平行に引かれ，そして，それらの曲線の間に切り取られた，すべての直線を 2 つずつの等しい部分に分割する，直線をそれら 2 つの直線の間に置かれた［直線］と，さらに，平行な直線のそれぞれを直径に対して規則正しく引かれた線［縦線］であると呼ぶ。

6　それらの両方ともが他方に平行な直線を 2 つずつの等しい部分に分割する直径である，［2 つの］直線を 1 つの曲線と 2 つの曲線の共役直径と私は呼ぶ。

7　さらに，それらの線またはそれらの線に平行な線を直角に切断する直径である直線を 1 つの曲線と 2 つの曲線の軸と私は呼ぶ。

8　一方が他方に平行な直線を直角に切断する共役直径である直線を 1 つの曲線と 2 つの曲線の共役軸と私は呼ぶ。」

(3) オイラー

アポロニオスが総合幾何学的に考察した円錐曲線はオイラー (Leonhard Euler : 1707–1783) によって解析幾何学的な取り扱いを受けることになる。彼は『無限解析入門』(*Introductio in Analysin Infinitorum*) 第 2 巻のはじめで次のように述べている (『オイラーの解析幾何』pp.1，5)。

「1　変化量というのは一般的な視点に立って考察された大きさのことであり，その中にはありとあらゆる定量が包み込まれている。それゆえ，幾何学の場に移行すると，変化量は不定直線 RS を用いることによりきわめて適切に表示される。実際，不定直線に身を置くと，たとえ

どれほどの長さであろうとも，任意に指定された長さの線分を切り取ることができるのであるから，不定直線と変化量は，量というものの同一の観念をわれわれの心象風景の中に等しく描き出してくれるのである。そこでまず初めに不定直線 RS のどこかしら途中の一点を選び，その点に A という名をつけて指定しなければならない。そうしてある定まった長さの線分を切り取る際には，その点 A を始点と見ることにする。そうすると不定直線上のある定まった部分 AP は，変化量に包摂されている定量を表示していることになるであろう。

2　そこで x は変化量として，それは不定直線 RS で表示されるとしよう。すると明らかに，x の定値であって，しかも実値でもあるものはことごとくみな，直線 RS において切り取られた部分によって表示される。このあたりの事情をもう少し詳しく言うと，もし点 P が点 A と重なるなら区間 AP は消失するが，この区間は値 $x = 0$ を表している。また，点 P が点 A から遠ざかっていけばいくほど，区間 AP はそれだけ大きな x の定値を表すことになる。

この区間 AP は切除線と呼ばれる。

したがって，切除線は変化量 x の定値を表しているのである。」

「11　曲線について説明を行うにあたり，曲線の理論できわめてひんぱんに使用される若干の呼称を確保しておくのがよいと思う。

まず初めに，x の値を切り取る場である直線 RS は軸あるいは基準線と呼ばれる。

x の値は点 A を基点にして測定されるが，この点は切除の始点という名で呼ばれる。

軸の部分 AP により x の定値が明示されるが，この部分のことは切除線と呼ぶ習わしである。

切除線の端点 P から曲線に向かって伸びていって曲線に達する垂直線分 PM は，向軸線という名称を獲得した，

ところで，この場合，向軸線と軸とのなす角度は直角であるから，向軸線は垂直向軸線とか直交向軸線などと呼ばれる。実際，同様に考えていくと向軸線 PM が軸となす角度が斜角であってもかまわないわけであり，その場合には向軸線は傾斜向軸線と呼ばれるのである。この場では，はっきりとした言葉でそうではない旨が指示されない限り，つねに直交向軸線を用いて曲線の性質を説明することにしたいと思う。」

このように述べてから，オイラーは曲線の性質を解析幾何学的に調べていくのであるが，その際，曲線をその曲線を表す方程式の次数に従って分類し，分類されたそれぞれの種属を目 (ordo，もく) と呼んだ。それゆえ，直線は第 1 目の線，円錐曲線は第 2 目の線ということになる。

そして，

「85　第二目の線はあらゆる曲線の中で一番簡単な曲線であり，しかもはるかに崇高な幾何学的世界全体を通じて，きわめて広範囲に及ぶ応用をもっている。第二目の線は円錐曲線とも呼ばれるが，非常に多くの際立った性質が備わっている。それらは古代の幾何学者たちも発見していたが，近年の幾何学者たちの手によりその数は大幅に増大した。第二目の線の諸性質の知識はきわめて必要性が高いと判断されるから，たいていの著作者は，初等幾何学に続いてすぐに第二目の線の説明に移るのが習わしになっている。ただし，それらの性質はことごとくみな単一の原理から導かれるというわけではなく，方程式の力を借りて明るみに出されるものも

あれば，円錐の切断に由来するものもあるし，別の道筋を通って描写されるものもある。」

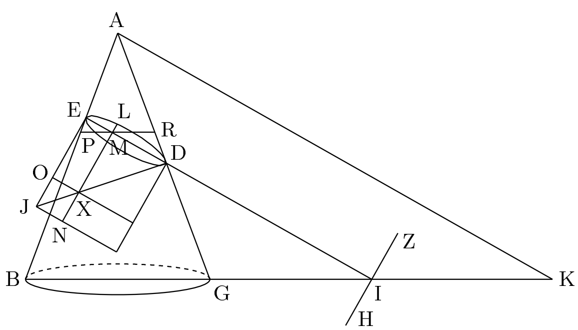
とも述べている (『オイラーの解析幾何』p.47)。

(4) 楕円の特性式

以下では，円を楕円の特殊な場合として，円を含めて楕円ということにする。

楕円は (対になっている円錐のうちの一方の円錐の) すべての母線と交わる平面で円錐を切断したときに切断面に現れる曲線といえる。アポロニオスは楕円を特徴づける関係を『円錐曲線論』第 1 巻命題 13 において導いている (『ハイベア版』pp.48–53)。

「円錐があるとし，その頂点が点 A であり，底面が円 BG であるとし，軸を通る平面によって切断されるとすると，切断面は三角形 ABG になるとし，さらに，軸を通って置かれた三角形の両方の辺と出会うが，円錐の底面に平行ではなく，反対側に引かれることもない，任意の別の平面によって切断されるとし，そして，円錐の表面における切断線が直線 DE になるとしよう。さらに，切断している面と円錐の底面である面の共通の切断線は BG に垂直な ZH であるとし，さらに，切断面の直径が ED であるとし，E から ED に垂直に EJ が引かれるとし，さらに，A を通って直線 ED に平行な AK が引かれるとし，$\mathrm{DE}:\mathrm{EJ}=\mathrm{AK}^2:\mathrm{BK}\times\mathrm{KG}$ になるとし，切断線の上に任意の点 L がとられるとし，L を通って直線 ZH に平行な LM が引かれるとしよう。私は，LM の平方は，幅として EM をもち，長方形 $\mathrm{DE}\times\mathrm{EJ}$ に相似な図形が不足している，直線 EJ に結びつけられた広がりに等しい，と言う。



なぜならば。DJ が引かれ，M を通って直線 JE に平行な MXN が引かれ，さらに，J, X を通って直線 EM に平行な JN, XO が引かれ，M を通って直線 BG に平行な PMR が引かれるとしよう。いま，PR は直線 BG に平行であり，さらに，LM は直線 ZH に平行であるから，LM，PR によって規定された平面は ZH，BG によって規定された平面，すなわち円錐の底面，に平行である［ユークリッド (Εὐκλείδης (Eukleides, Euclid) : 前 300 頃)『原論』第 11 巻命題 15]。それゆえ，もし LM，PR を通る平面がつくられるならば，切断面は円であろうし，その直径は PR であろう［命題 4]。そして，LM はそれに垂直である。それゆえ，$\mathrm{LM}^2=\mathrm{PM}\times\mathrm{MR}$ であろう。そして，

$$\mathrm{AK}^2:\mathrm{BK}\times\mathrm{KG}=\mathrm{ED}:\mathrm{EJ} \qquad [[\cdots\cdots ①]]$$

であり，

$$\mathrm{AK}^2:\mathrm{BK}\times\mathrm{KG}=(\mathrm{AK}:\mathrm{KB})\times(\mathrm{AK}:\mathrm{KG})$$

であり，

$$\mathrm{AK}:\mathrm{KB}=\mathrm{EH}:\mathrm{HB}=\mathrm{EM}:\mathrm{MP}\quad［ユークリッド第 6 巻命題 4］$$
$$\mathrm{AK}:\mathrm{KG}=\mathrm{DH}:\mathrm{HG}=\mathrm{DM}:\mathrm{MR}\quad［同］$$

［ここに載せた図では，BG (の延長) と ZH の交点として点 I を記入してあるが，原図には点 I はない。原文中の EH，HB，DH，HG は，本来，それぞれ EI，IB，DI，IG とすべき

であろう。原文では，点 H を交点とみて EH などとしたのであろう。]

であるから，

$$\mathrm{DE} : \mathrm{EJ} = (\mathrm{EM} : \mathrm{MP}) \times (\mathrm{DM} : \mathrm{MR})$$

であろう。さらに，

$$(\mathrm{EM} : \mathrm{MP}) \times (\mathrm{DM} : \mathrm{MR}) = \mathrm{EM} \times \mathrm{MD} : \mathrm{PM} \times \mathrm{MR}$$

である。それゆえ，

$$\mathrm{EM} \times \mathrm{MD} : \mathrm{PM} \times \mathrm{MR} = \mathrm{DE} : \mathrm{EJ} = \mathrm{DM} : \mathrm{MX} \text{［同］}$$

である。しかし，共通の高さ ME がとられると，

$$\mathrm{DM} : \mathrm{MX} = \mathrm{DM} \times \mathrm{ME} : \mathrm{XM} \times \mathrm{ME}$$

である。従って，

$$\mathrm{DM} \times \mathrm{ME} : \mathrm{PM} \times \mathrm{MR} = \mathrm{DM} \times \mathrm{ME} : \mathrm{XM} \times \mathrm{ME}$$

でもある。それゆえ，

$$\mathrm{PM} \times \mathrm{MR} = \mathrm{XM} \times \mathrm{ME} \text{［ユークリッド第 5 巻命題 9］}$$

である。しかし，

$$\mathrm{PM} \times \mathrm{MR} = \mathrm{LM}^2$$

であることを私たちは証明した。従って，

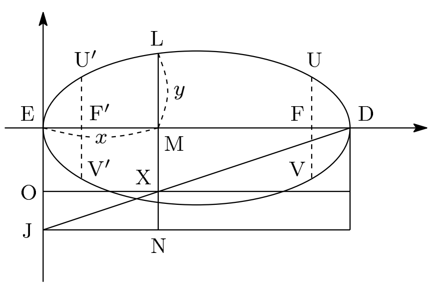
$$\mathrm{XM} \times \mathrm{ME} = \mathrm{LM}^2 \quad [[\cdots\cdots ②]]$$

でもある。ゆえに，LM の平方は，幅として EM をもち，長方形 DE × EJ に相似な広がり ON が不足している，JE に結びつけられた広がり MO に等しい。そこで，このような切断線は楕円 (ἔλλειψις，ellipsis) と，さらに，EJ は DE に対して規則正しく引かれた直立のパラメーターと，さらに，同じものは直立辺 (ὀρθία πλευρά，latus rectum) とも，さらに，ED は横断辺 (latus transversum) といわれる。」

ἔλλειψις は「不足，欠如」を表すギリシア語。
ὄρθιος は「直立した，真っ直ぐな」を表すギリシア語。
πλευρά は「(多角形の) 辺」を表すギリシア語。

直立辺は通径とも訳されている。(ここでは直立辺という言い方の方を使うが，通径という呼び名で言われることの方が多いかも知れない。)

直立辺を規定する関係式が ① なのであり，② は任意にとられた LM に関する関係式である。すなわち，これら 2 つの式によって楕円は特徴づけられるのである。それら 2 式のうち，特に，② が重要である。



左図のように座標軸を設定して，長軸 ED の長さを $2a$，短軸の長さを $2b$ とすると ……

この楕円を表す方程式は $\dfrac{(x-a)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ となるから，変形すると，

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad \cdots\cdots ③$$

が得られる。

そこで，直立辺 EJ を $\mathrm{EJ} = \dfrac{2b^2}{a}$ となるようにと

れば，ED : EJ = OX : OJ，すなわち $2a : \dfrac{2b^2}{a} = x : \mathrm{OJ}$，であることから，$\mathrm{OJ} = \dfrac{b^2}{a^2}x$ となる。

それゆえ，② 式から $\mathrm{LM}^2 = \mathrm{XM} \times \mathrm{ME} = \mathrm{OE} \times \mathrm{ME} = (\mathrm{EJ} - \mathrm{OJ}) \times \mathrm{ME}$ であるから，

$$y^2 = \left(\frac{2b^2}{a} - \frac{b^2}{a^2}x\right) \times x = \frac{2b^2}{a} \times x - \frac{b^2}{a^2}x \times x = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

が得られ，これは ③ 式と同じものである。つまり，② 式は

LM の平方 = 長方形 MX × EM = 長方形 EJ × EM − 長方形 OJ × OX

を表しているのであり，それは楕円の方程式そのものといえるのである。

このことから，楕円では，軸上の任意の点 M について，LM の平方は直立辺に結びつけられた長方形 EJNM と比べて長方形 OJNX の分だけ「不足」しているといえるので，ἔλλειψις と呼んだのであろう。

また，この楕円の焦点 F，F′ の座標は ($\pm\sqrt{a^2 - b^2} + a$，0) である［焦点の定義は後述］から，$x = \pm\sqrt{a^2 - b^2} + a$ を楕円を表す方程式に代入すると，$\dfrac{\left\{\left(\pm\sqrt{a^2-b^2}+a\right)-a\right\}^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ から，$y^2 = \dfrac{b^4}{a^2}$ が得られ，$y = \mathrm{FU} = \mathrm{F'U'} = \dfrac{b^2}{a}$ となる。従って，

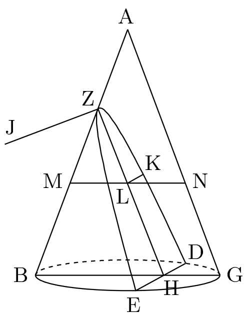
$$\mathrm{UV} = \mathrm{U'V'} = \frac{2b^2}{a} = \mathrm{EJ}$$

であり，直立辺の長さは焦点を通る (楕円内における) 線分の長さに等しいことが分かる。そして，この直立辺 EJ は 1 つずつの楕円に対して一意的に定まる定線分である。

楕円の端に「へその緒」のような線分 EJ をつけることの背景はここにあったのである。

(5) 放物線の特性式

放物線はある母線に平行な平面で円錐を切断したときに切断面に現れる曲線といえる。放物線を特徴づける関係は『円錐曲線論』第 1 巻命題 11 で扱われる (『ハイベア版』pp.36–43)。



「円錐があるとし，その頂点が点 A であり，底面が円 BG であるとし，軸を通る平面によって切断されるとすると，切断面は三角形 ABG になるとし，さらに，円錐の底面が BG に垂直な第 2 の直線 DE を切り取る，任意の別の平面によって切断されると円錐の切断面に DZE をつくり，さらに，切断面の直径 ZH は軸を通って置かれた三角形の辺 AG に平行であるとし，点 Z から直線 ZH に垂直で，$\mathrm{BG}^2 : \mathrm{BA} \times \mathrm{AG} = \mathrm{ZJ} : \mathrm{ZA}$ となる，ZJ が引かれるとし，切断線の上に任意の点 K がとられるとし，K を通って直線 DE に平行な KL が引かれるとしよう。私は，$\mathrm{KL}^2 = \mathrm{JZ} \times \mathrm{ZL}$ である，と言う。

なぜならば。L を通って直線 BG に平行な MN が引かれるとしよう。確かに，KL もまた直線 DE に平行である。それゆえ，KL，MN によって規定された平面は BG，DE によって規定された平面，すなわち円錐の底面，に平行である［ユークリッド第 11 巻命題 15］。それゆえ，KL，MN によって規定された平面は円であり，その直径は MN である［命題 4］。そして，DE は BG に対して垂直でもあるから，KL は MN に対して垂直である［ユークリッド第 11 巻命題 10］。それゆえ，$\mathrm{ML} \times \mathrm{LN} = \mathrm{KL}^2$ である。そして，

$$\mathrm{BG}^2 : \mathrm{BA} \times \mathrm{AG} = \mathrm{JZ} : \mathrm{ZA}$$

であり，

$$\mathrm{BG}^2 : \mathrm{BA} \times \mathrm{AG} = (\mathrm{BG} : \mathrm{GA}) \times (\mathrm{BG} : \mathrm{BA})$$

であるから，

$$\mathrm{JZ} : \mathrm{ZA} = (\mathrm{BG} : \mathrm{GA}) \times (\mathrm{GB} : \mathrm{BA})$$

であろう。確かに，

$$\mathrm{BG} : \mathrm{GA} = \mathrm{MN} : \mathrm{NA} = \mathrm{ML} : \mathrm{LZ} \quad \text{［ユークリッド第 6 巻命題 4］}$$

であり，

$$\mathrm{BG} : \mathrm{BA} = \mathrm{MN} : \mathrm{MA} = \mathrm{LM} : \mathrm{MZ}\,\text{［同］} = \mathrm{NL} : \mathrm{ZA} \quad \text{［ユークリッド第 6 巻命題 2］}$$

である。それゆえ，

$$\mathrm{JZ} : \mathrm{ZA} = (\mathrm{ML} : \mathrm{LZ}) \times (\mathrm{NL} : \mathrm{ZA})$$

である。さらに，

$$(\mathrm{ML} : \mathrm{LZ}) \times (\mathrm{LN} : \mathrm{ZA}) = \mathrm{ML} \times \mathrm{LN} : \mathrm{LZ} \times \mathrm{ZA}$$

である。それゆえ，

$$\mathrm{JZ} : \mathrm{ZA} = \mathrm{ML} \times \mathrm{LN} : \mathrm{LZ} \times \mathrm{ZA}$$

である。さらに，共通の高さ ZL がとられると，

$$\mathrm{JZ} : \mathrm{ZA} = \mathrm{JZ} \times \mathrm{ZL} : \mathrm{LZ} \times \mathrm{ZA}$$

である。それゆえ，

$$\mathrm{ML} \times \mathrm{LN} : \mathrm{LZ} \times \mathrm{ZA} = \mathrm{JZ} \times \mathrm{ZL} : \mathrm{LZ} \times \mathrm{ZA}$$

である。それゆえ，

$$\mathrm{ML} \times \mathrm{LN} = \mathrm{JZ} \times \mathrm{ZL} \quad \text{［ユークリッド第 5 巻命題 9］}$$

である。確かに，$\mathrm{ML} \times \mathrm{LN} = \mathrm{KL}^2$ である。それゆえ，

$$\mathrm{KL}^2 = \mathrm{JZ} \times \mathrm{ZL}$$

でもある。

さらに，このような切断線は放物線 (παραβολή，parabola) といわれ，さらに，JZ は直径 ZH に対して規則正しく引かれた直立のパラメーターと，さらに，直立辺ともいわれる。」

παραβολή は「対比，比較，並置」を表すギリシア語。動詞なら，παραβάλλω「並べて置く，対置する，対比する，比較する」がある。

アポロニオスによって円錐曲線に付けられた名称 ἔλλειψις，παραβολή，ὑπερβολή は，領域付置 (面積のあてはめ，面積添付) といわれる「ギリシア幾何学の中でも注目を集めてきた問題」(『エウクレイデス全集』第 1 巻 p.108) およびその解法に関連する用語であるという。
なお，領域付置とは，「1 つの直線と，1 つの直線図形が与えられたときに，与えられた直線図形に等しい平行四辺形 (あるいは長方形) を与えられた直線の傍らに描く作図問題，およびその解法」(同上) であり，ピュタゴラス (Πυθαγόρας (Pythagpras)：B.C.572?–B.C.497?) 学派に由来するものとされている。
領域付置には単純な領域付置と，不足と超過を伴う領域付置とがあり，ユークリッド『原論』では前者は第 1 巻命題 44 に，後者は第 6 巻命題 28，29 に見られる。そして，不足を伴う領域付置は l，S が与えられたときに，

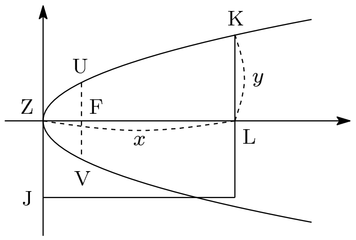
$$x + y = l\ ,\ \ xy = S$$

となる x，y を求める問題と解釈することができ，他方，超過を伴う領域付置は l，S が与えられたときに，

$$x - y = l\ ,\ \ xy = S$$

となる x，y を求める問題と解釈できる。

放物線を特徴づける関係式 $\mathrm{KL}^2 = \mathrm{JZ} \times \mathrm{ZL}$［…… ④］を現代的に見るために下図のように座標軸を設定すると ……



直立辺 ZJ を $\mathrm{ZJ} = 4p$ となるようにとると，④ 式が表しているのは $y^2 = 4px$ ということであり，これはまさしく放物線を表す方程式に他ならない。

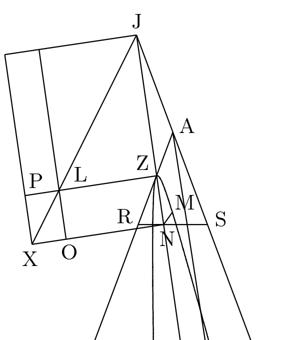
放物線 $y^2 = 4px$ の焦点 F の座標は (p, 0) であるから，$x = p$ を代入すると，$y^2 = 4p^2$ が得られ，これから $y = \mathrm{FU} = 2p$ となる。従って，$\mathrm{UV} = 4p = \mathrm{ZJ}$ となる。すなわち，直立辺の長さは焦点を通る線分の長さに等しい。

④ 式が表しているのは，放物線の軸上の任意の点 L について，LK の平方が直立辺に結びつけられた長方形 $\mathrm{ZJ} \times \mathrm{ZL}$ に等しいということだから，παραβολή と呼んだのであろう。

(6) 双曲線の特性式

双曲線は対になっている円錐の両方に交わる平面で円錐を切断したときに切断面に現れる曲線といえる。そして，双曲線を特徴づける関係は『円錐曲線論』第 1 巻命題 12 で述べられる (『ハイベア版』pp.42–47)。

> 「円錐があるとし，その頂点が点 A であり，底面が円 BG であるとし，軸を通る平面によって切断されるとすると，切断面は三角形 ABG になるとし，さらに，円錐の底面が三角形 ABG の底線 BG に垂直な第 2 の直線 DE を切り取る，任意の別の平面によって切断されると円錐の切断面に DZE をつくり，さらに，延長された切断面の直径 ZH は三角形 ABG の辺 AG と円錐の頂点を越えた J において出会うとし，A を通って切断面の直径 ZH に平行な AK が引かれ，BG を切断するとし，Z から ZH に垂直に ZL が引かれ，$\mathrm{KA}^2 : \mathrm{BK} \times \mathrm{KG} = \mathrm{ZJ} : \mathrm{ZL}$ となるとし，切断線の上に任意の点 M がとられるとし，M を通って直線 DE に平行な MN が引かれ，さらに，N を通って直線 ZL に平行な NOX が引かれて，引かれた JL が X まで延長されるとし，点 L，X を通って直線 ZN に平行な LO，XP が引かれるとしよう。私は，$\mathrm{MN}^2 = \mathrm{ZX}$ である，と言い，これ［右辺］は，幅として ZN をもち，長方形 $\mathrm{JZ} \times \mathrm{ZL}$ に相似な［ユークリッド第 1 巻命題 26 (第 6 巻命題 24？)］図形 LX が超過している，直線 ZL に結びつけられたものである。



なぜならば。N を通って直線 BG に平行な RNS が引かれるとしよう。さらに，NM は直線 DE に平行である。それゆえ，MN，RS によって規定される平面は BG，DE によって規定される平面，すなわち円錐の底面，に平行である［ユークリッド第 11 巻命題 15］。それゆえ，MN，RS によって規定される平面によってもたらされた切断面は円であろうし，その直径は RNS である［命題 4］。そして，MN はそれに対して垂直である。それゆえ，$\mathrm{RN} \times \mathrm{NS} = \mathrm{MN}^2$ である。そして，

$$\mathrm{AK}^2 : \mathrm{BK} \times \mathrm{KG} = \mathrm{ZJ} : \mathrm{ZL}$$

であり，

$$\mathrm{AK}^2 : \mathrm{BK} \times \mathrm{KG} = (\mathrm{AK} : \mathrm{KG}) \times (\mathrm{AK} : \mathrm{KB})$$

であるから，

$$\mathrm{ZJ}:\mathrm{ZL}=(\mathrm{AK}:\mathrm{KG})\times(\mathrm{AK}:\mathrm{KB})$$

でもあるであろう。さらに，

$$\mathrm{AK}:\mathrm{KG}=\mathrm{JH}:\mathrm{HG}=\mathrm{JN}:\mathrm{NS}\quad\text{［ユークリッド第 6 巻命題 4］}$$

であり，

$$\mathrm{AK}:\mathrm{KB}=\mathrm{ZH}:\mathrm{HB}=\mathrm{ZN}:\mathrm{NR}\quad\text{［同］}$$

である。それゆえ，

$$\mathrm{JZ}:\mathrm{ZL}=(\mathrm{JN}:\mathrm{NS})\times(\mathrm{ZN}:\mathrm{NR})$$

である。さらに，

$$(\mathrm{JN}:\mathrm{NS})\times(\mathrm{ZN}:\mathrm{NR})=\mathrm{JN}\times\mathrm{NZ}:\mathrm{SN}\times\mathrm{NR}$$

である。それゆえ，

$$\mathrm{JN}\times\mathrm{NZ}:\mathrm{SN}\times\mathrm{NR}=\mathrm{JZ}:\mathrm{ZL}=\mathrm{JN}:\mathrm{NX}\quad\text{［同］}$$

である。さらに，共通の高さ ZN がとられると，

$$\mathrm{JN}:\mathrm{NX}=\mathrm{JN}\times\mathrm{NZ}:\mathrm{ZN}\times\mathrm{NX}$$

である。それゆえ，

$$\mathrm{JN}\times\mathrm{NZ}:\mathrm{SN}\times\mathrm{NR}=\mathrm{JN}\times\mathrm{NZ}:\mathrm{XN}\times\mathrm{NZ}$$

でもある。それゆえ，

$$\mathrm{SN}\times\mathrm{NR}=\mathrm{XN}\times\mathrm{NZ}\quad\text{［ユークリッド第 5 巻命題 9］}$$

である。さらに，

$$\mathrm{MN}^2=\mathrm{SN}\times\mathrm{NR}$$

であることを私たちは証明した。それゆえ，

$$\mathrm{MN}^2=\mathrm{XN}\times\mathrm{NZ}$$

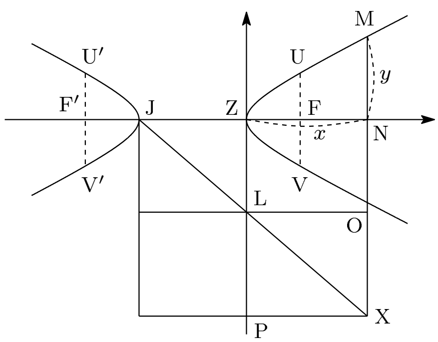
でもある。確かに，

$$\mathrm{XN}\times\mathrm{NZ}=\mathrm{XZ}$$

である。ゆえに，MN の平方は，幅として ZN をもち，長方形 JZL に相似な広がり LX が超過している，直線 ZL に結びつけられた長方形 XZ に等しい。さらに，このような切断線は双曲線 (ὑπερβολή, hyperbola) と，さらに，LZ は ZH に対して規則正しく引かれた直立のパラメーターといわれる。さらに，同じものは直立辺と，さらに，ZJ は横断辺といわれる。」

ὑπερβολή は「超過，過剰」を表すギリシア語。

双曲線を特徴づける関係は $\mathrm{MN}^2=\mathrm{XN}\times\mathrm{NZ}$ であるが，これは次のように現代化される。



左図のように座標軸を設定し，双曲線を表す方程式を $\dfrac{(x+a)^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とすると，

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{2b^2}{a}\,x+\frac{b^2}{a^2}\,x^2 \\ &= \frac{2b^2}{a}\times x+\frac{b^2}{a^2}\,x\times x \end{aligned}$$

となる。

いま，直立辺 ZL を $\mathrm{ZL}=\dfrac{2b^2}{a}$ となるようにとると，$\mathrm{ZJ}:\mathrm{ZL}=\mathrm{OL}:\mathrm{OX}$ であるから，$\mathrm{ZJ}=2a$

より，$\mathrm{OX} = \dfrac{b^2}{a^2}\,x$ となる。

従って，上の (変形された) 双曲線を表す方程式は

$$\mathrm{MN}\text{ の平方} = \text{長方形 }\mathrm{NX} \times \mathrm{ZN} = \text{長方形 }\mathrm{ZL} \times \mathrm{ZN} + \text{長方形 }\mathrm{OX} \times \mathrm{ZN}$$

を意味していることになる。

このように，双曲線では，軸上の任意の点 N について，MN の平方は直立辺に結びつけられた長方形 ZLON と比べて長方形 LPXO の分だけ「超過」していることになるから，ὑπερβολή と呼んだのであろう。

この双曲線の焦点 F，F′ の座標は $\left(\pm\sqrt{a^2+b^2}-a,\ 0\right)$ であるから，$x = \pm\sqrt{a^2+b^2}-a$ を双曲線を表す方程式に代入すると，$y^2 = \dfrac{b^4}{a^2}$ が得られ，$y = \mathrm{FU} = \dfrac{b^2}{a}$ となる。従って，$\mathrm{UV} = \dfrac{2b^2}{a} = \mathrm{ZL}$ であり，ここでも，直立辺の長さは焦点を通る線分の長さに等しいことが確認できる。

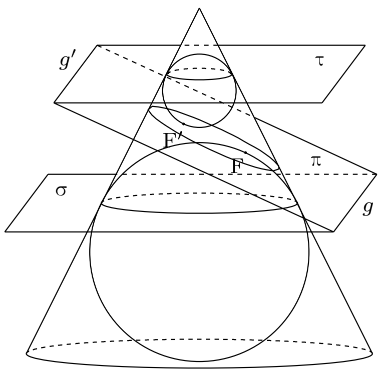
以上のように，円錐曲線における直線の平方は直立辺に結びつけられた長方形と同等であるか，あるいはそれに対して何らかの長方形が「不足」または「超過」しているか，という形で統一的に捉えられるのである。そして，そこに現れる，円錐曲線のそれぞれを特徴づける関係式 —— 特性式 (σύμπτωμα，symptoma) ——

$$\begin{cases} \text{楕　円} & \cdots\cdots & \mathrm{LM}^2 = \mathrm{EM} \times \mathrm{MX} \\ \text{放物線} & \cdots\cdots & \mathrm{KL}^2 = \mathrm{ZJ} \times \mathrm{ZL} \\ \text{双曲線} & \cdots\cdots & \mathrm{MN}^2 = \mathrm{ZN} \times \mathrm{NX} \end{cases}$$

はこんにち円錐曲線を表す方程式として用いているものと同じものであると解することができるのである。

(7) 焦点，準線，離心率

焦点は上で既に現れているが，円錐曲線の焦点や準線は次のように定義される。



円錐を平面 π で切断したときにできる円錐曲線［左図では楕円］に対して，平面 π および円錐面に接する球面が —— 楕円，双曲線のときは 2 つ，放物線のときは 1 つ —— できる。その球面と平面 π との接点 F，F′［放物線のときは，いずれか 1 つだけ］を切断面 π に現れた円錐曲線の焦点という。

また，このとき，その接する球面と円錐との接点の全体は円をつくる。その円を含む平面を τ，σ とし，平面 π と平面 σ との交線を g，平面 π と平面 τ との交線を g' とするとき，それらの直線 g，g'［放物線のときは，いずれか 1 つだけ］をその円錐曲線の準線 (directrix) という。

さらに，円錐曲線が楕円または双曲線の場合，線分 FF′ の中点を楕円または双曲線の中心という。放物線には中心はない。

また，円錐曲線は，焦点 F への距離の，準線 g への距離に対する比 e が一定である点の軌跡，ということができる。そして，この比 e を離心率 (eccentricity) または心差率という。$0 < e < 1$ のとき楕円，$e = 1$ のとき放物線，$e > 1$ のとき双曲線である (円のときは $e = 0$ と考える)。

特性式に関する項で見たように，適当な直交座標を導入すると，放物線は $y^2 = 4px$，楕円は $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b)$，双曲線は $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ と表せるが，このとき，

放物線では，F (p，0) で，準線 $x = -p$

楕円では，F，F$'$ ($\pm\sqrt{a^2-b^2}$，0)=($\pm ae$， 0) で，$e = \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$，準線 $x = \pm\dfrac{a}{e}$

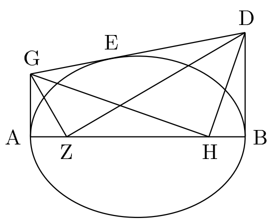
双曲線では，F，F$'$ ($\pm\sqrt{a^2+b^2}$，0)=($\pm ae$， 0) で，$e = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$，準線 $x = \pm\dfrac{a}{e}$

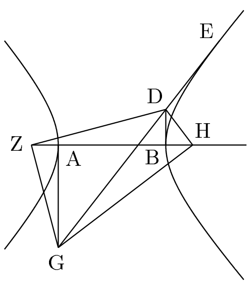
である。

さらに，楕円は $\mathrm{FX} + \mathrm{F'X} = 2a$ を満たす，双曲線は $|\mathrm{FX} - \mathrm{F'X}| = 2a$ を満たす，点 X の軌跡といってもよい。

焦点に関連して，アポロニウスは次のような定理［『円錐曲線論』第 3 巻命題 45］を挙げている (『ハイベア版』pp.422–427)。

「もし双曲線あるいは楕円あるいは円あるいは対置された［双曲線］において，軸の両端点から垂直な直線が引かれ，軸の両側において［直径に隣接している］図形の 4 分の 1 に等しい広がりが，双曲線および対置された［双曲線］においては平方の図形［正方形］が超過して，さらに，楕円においては［それが］不足して，添付され，そして，切片［曲線］に接し，垂直な直線と出会う直線が引かれるならば，それらの交点から添付によって生じた点［焦点］まで引かれた直線は，私たちが述べた，その点［焦点］において直角になる。





私たちが述べた，何らかの切片［曲線］があるとし，その軸が AB，さらに，垂線が AG，BD，さらに，接線が GED であるとし，そして，［軸の］両側において［直径に隣接している］図形の 4 分の 1 に等しい AZ × ZB および AH × HB が，私たちが述べたように，添付され，そして，GZ，GH，DZ，DH が引かれるならば，私は，角 GZD および GHD は直角である，と言う。

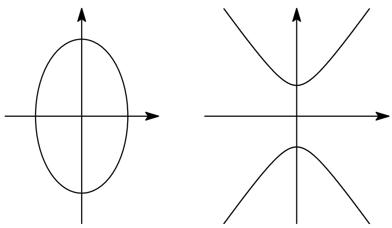
なぜならば。私たちは AG × BD が AB に隣接している図形の 4 分の 1 に等しいこと［命題 42］，さらに，AZ × ZB がその図形の 4 分の 1 に等しいことが真実であること，を証明したから，AG × DB = AZ × ZB であろう。それゆえ，GA : AZ = ZB : BD である［ユークリッド第 6 巻命題 16］。そして，A，B に置かれた角は直角である。それゆえ［ユークリッド第 6 巻命題 6］，∠AGZ = ∠BZD，∠AZG = ∠ZDB である。そして，∠GAZ は直角であるから，∠AGZ + ∠AZG は 1 つの直角に等しい［ユークリッド第 1 巻命題 32］。そして，私たちは，∠AGZ = ∠DZB であることもまた証明した。それゆえ，∠GZA + ∠DZB は 1 つの直角に等しいであろう。ゆえに，残りの角 DZG は直角である［ユークリッド第 1 巻命題 13］。さらに，同じ方法によって，私たちは，∠GHD もまた直角であることを証明するであろう。」

この命題のような添付［不足・超過を伴う領域付置］によって生じた点 Z，H がその円錐曲線の焦点である。ただし，アポロニオスは「焦点」という用語を用いていない。彼は焦点を，この命題にあるように，「添付［付置］によって生じた点」と呼んでいた。

なお，この命題に出てくる「直径に隣接している図形」とは直径と直立辺とがつくる長方形 (の面積) のことで，具体的には，$2a \times \dfrac{2b^2}{a} = 4b^2$ のことである。だから，その 4 分の 1 は b^2 で，楕円なら短軸の長さの半分の平方である。

また，楕円，双曲線の軸を AB とし，中心より A 側の焦点を Z，B 側の焦点を H とするとき，$\mathrm{AZ} \times \mathrm{ZB} = \mathrm{AH} \times \mathrm{HB} = b^2$ となることは容易に分かる。

« 注意 »



以上では，横長 (x 軸方向の方が長い) の楕円，左右 (x 軸の方向) に 2 つの双曲線について調べたが，左図のような，縦長 (y 軸方向の方が長い) の楕円，上下 (y 軸の方向) に 2 つの双曲線を考えることもできる。

そのときには，上の議論で，x と y の役割を交換することになる。

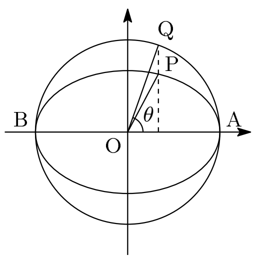
すなわち，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ については，$a < b$ であり，焦点の座標は (0，$\pm\sqrt{b^2 - a^2}$) で，直立辺の長さは $\dfrac{2a^2}{b}$ である。また，双曲線については，標準形は $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ で，焦点の座標は (0，$\pm\sqrt{a^2 + b^2}$)，直立辺の長さは $\dfrac{2a^2}{b}$ である。

ただし，以下でも，主に対象とするのは横長の楕円，左右 2 つの双曲線である。そのため，楕円については特に断らない限り $a > b$ とし，その旨をいちいち表記しないことにする。

(8) 極方程式，媒介変数表示

この項では e は離心率を表すものとする。

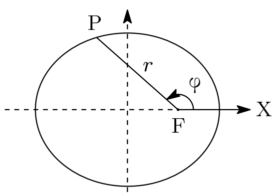
楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (上で注意したように $a > b$ とする) について，この楕円と x 軸との交点の間の線分を長軸といい，この楕円と y 軸との交点の間の線分を短軸という。このとき，長軸の長さは $2a$ で，短軸の長さは $2b$ である。



楕円の長軸を直径とする円をその楕円の補助円という。左図で，楕円 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ の補助円上の任意の点 Q に対して，Q から x 軸に下ろした垂線と楕円との交点を P(x，y) とし，$\angle\mathrm{AOQ} = \theta$ とするとき，

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$$

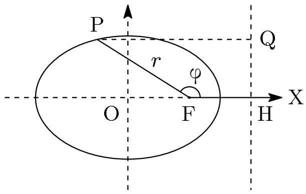
と表すことができる。これは楕円の媒介変数表示の 1 つである。この角 θ を離心角または心差角という。[θ は $\angle\mathrm{AOP}$ ではないことに注意。]



また，焦点 F(ae，0) を原点とし，x 軸の正の方向に向かう半直線 FX を原線 (始線ともいう) とするとき，楕円上の任意の点 P の極座標 (r，φ) について，

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\varphi} \qquad \left(\text{ただし，} l = \frac{b^2}{a}\right)$$

である。これは楕円の極方程式である。ここで，l は直立辺の長さの半分に等しいことに注意。



楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ について，左図の場合，焦点の座標は F$(\ ae,\ 0\ )$ で，準線の方程式は $x=\dfrac{a}{e}$ であるから，焦点と準線との距離は $c=\dfrac{a}{e}-ae=\dfrac{a}{e}\left(1-e^2\right)=\dfrac{b^2}{ae}$ となる。

さて，$\dfrac{\mathrm{PF}}{\mathrm{PQ}}=e$ であり，$\mathrm{PQ}=c-r\cos\varphi$ であるから，

$$\frac{r}{c-r\cos\varphi}=e \quad \text{より} \quad r=\frac{ce}{1+e\cos\varphi}=\frac{\frac{b^2}{a}}{1+e\cos\varphi}=\frac{l}{1+e\cos\varphi}$$

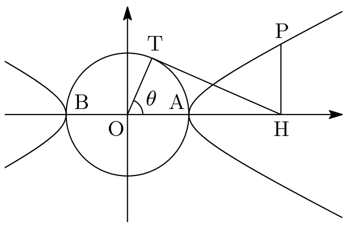
となる。

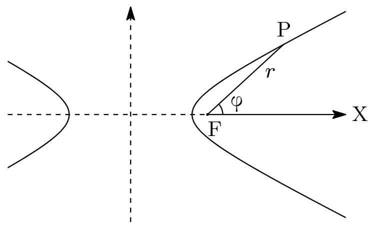
極方程式の導出は，双曲線，放物線の場合も同様にできる (はず) だから，以下では省略する。

双曲線の頂点 A，B を結ぶ線分［その長さは $2a$］を直径とする円をその双曲線の補助円という。下左図で，双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の上の任意の点 P$(\ x,\ y\ )$ から x 軸に下ろした垂線の足を H とし，H から補助円に接線を引いて，その接点を T とするとき，$\angle\mathrm{HOT}=\theta$ とすると，

$$\begin{cases} x=a\sec\theta \\ y=b\tan\theta \end{cases}$$

と表すことができる。これは双曲線の媒介変数表示の 1 つであり，この角 θ を離心角という。



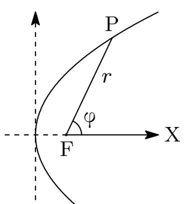


また，焦点 F$(\ ae,\ 0\ )$ を原点とし，x 軸の正の方向に向かう半直線 FX を原線とするとき，双曲線上の任意の点 P の極座標 $(\ r,\ \varphi\ )$ について，

$$r=\frac{l}{1-e\cos\varphi} \qquad \left(\text{ただし，}l=\frac{b^2}{a}\right)$$

である。これは双曲線の極方程式である。ここで，l は直立辺の長さの半分に等しいことに注意。

放物線については ……



焦点 $(\ p,\ 0\ )$ を原点とし，x 軸の正の方向に向かう半直線 FX を原線とするとき，放物線上の任意の点 P の極座標 $(\ r,\ \varphi\ )$ について，

$$r=\frac{l}{1-\cos\varphi} \qquad (\text{ただし，}l=2p)$$

である。これは放物線の極方程式である。ここで，l は直立辺の長さの半分に等しいことに注意。

放物線 $y^2=4px$ において，$x=pt^2$ とおけば，$y=2pt$ とできるから，放物線上の任意の点 P$(\ x,\ y\ )$ は

$$\begin{cases} x=pt^2 \\ y=2pt \end{cases}$$

と表すことができる。これは放物線の媒介変数表示の 1 つである。

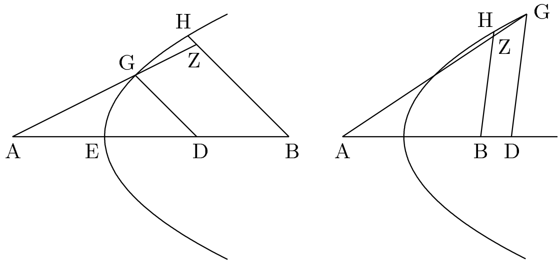
(9) 接線

ユークリッド『原論』第 3 巻の「定義」2 によれば，

「円に触れる直線で，延長されたとき円を切らないものはすべて円に接すると言われる」(『エウクレイデス全集』第 1 巻 p.279) のであるが，そのような直線を接線と呼び，この呼び名は円錐曲線にも準用される。

まず，放物線の接線については『円錐曲線論』第 1 巻命題 33 がその描き方を示している (『ハイベア版』pp.98–101)。

> 「もし放物線の上に任意の点がとられ，そして，そこから直径に対して規則正しく直線［縦線］が引かれ，そして，直径についてそこから頂点まで切り取られた直線に等しい直線がその端点から真っ直ぐに置かれるならば，そのようにして生じた点から仮定された点まで引かれた直線は切片［放物線］に接するであろう。



> 放物線があるとし，その直径が AB であるとし，そして，規則正しく［縦線］GD が引かれ，そして，AE = ED とおかれ，そして，AG が引かれるとしよう。私は，延長された AG は切片の外部に落ちる，と言う。
>
> なぜならば。もし可能ならば，GZ のように内部に落ちるとし，規則正しく［縦線］HB が引かれるとしよう。そして，$\mathrm{BH}^2 : \mathrm{GD}^2 > \mathrm{ZB}^2 : \mathrm{GD}^2$［ユークリッド第 5 巻命題 8］であり，さらに，$\mathrm{ZB}^2 : \mathrm{GD}^2 = \mathrm{BA}^2 : \mathrm{AD}^2$［ユークリッド第 6 巻命題 4］，$\mathrm{HB}^2 : \mathrm{GD}^2 = \mathrm{BE} : \mathrm{DE}$［命題 20］であるから，
>
> $$\mathrm{BE} : \mathrm{ED} > \mathrm{BA}^2 : \mathrm{AD}^2$$
>
> であろう。さらに，
>
> $$\mathrm{BE} : \mathrm{ED} = 4\,\mathrm{BE} \times \mathrm{EA} : 4\,\mathrm{AE} \times \mathrm{ED}$$
>
> である。それゆえ，
>
> $$4\,\mathrm{BE} \times \mathrm{EA} : 4\,\mathrm{AE} \times \mathrm{ED} > \mathrm{BA}^2 : \mathrm{AD}^2$$
>
> でもある。それゆえ，交換されると，
>
> $$4\,\mathrm{BE} \times \mathrm{EA} : \mathrm{AB}^2 > 4\,\mathrm{AE} \times \mathrm{ED} : \mathrm{AD}^2$$
>
> であるが，これは不可能である。なぜならば，AE = ED であるから，$4\,\mathrm{AE} \times \mathrm{ED} = \mathrm{AD}^2$ であろうし，さらに，$4\,\mathrm{BE} \times \mathrm{EA} < \mathrm{BA}^2$［ユークリッド第 2 巻命題 5］であり，確かに，E は中央の点ではない。それゆえ，AG は切片の内部には落ちない。ゆえに，接する。」

このことは解析幾何学的に見ると次のようになろう。

放物線を表す方程式を $y^2 = 4px$ とし，接点 G の座標を (g, h) ($g > 0$, $h > 0$) としよう［下図］。このとき，放物線を表す方程式の両辺を x で微分すると，$2yy' = 4p$ であるから，$y' = \dfrac{4p}{2y} = \dfrac{2p}{y} = \dfrac{p}{\sqrt{px}} = \sqrt{\dfrac{p}{x}}$ となる。

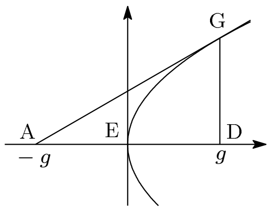
従って，$x = g$ に対応する点 G における接線の方程式は

$$y = \sqrt{\frac{p}{g}}\ (x - g) + 2\sqrt{gp} = \sqrt{\frac{p}{g}}\ x + \sqrt{gp}$$

となる。

この接線の方程式において $y = 0$ とすれば，$x = -g$ が得られるから，接線と x 軸との交点，す

なわち点 A，の x 座標は $-g$ であることが分かる。すなわち，x 軸上で AE = ED となる点 A を捜し，AG を結べば，直線 AG が接線になる。



さて，$y^2 = 4px$ であるから，$h^2 = 4gp$，$p = \dfrac{h^2}{4g}$ となって，点 G(g，h) における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{p}{g}}\,x + \sqrt{gp} = \sqrt{\frac{h^2}{4g^2}}\,x + \sqrt{\frac{h^2}{2}} \\ &= \frac{h}{2g}\,x + \frac{h}{2} \end{aligned}$$

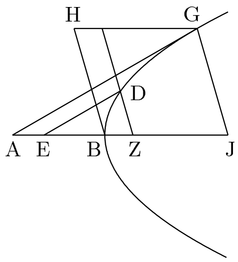
となる。この両辺に h を掛けて，整理すると，接線の方程式として

$$hy = \frac{h^2}{2g}\,x + \frac{h^2}{2} \quad \text{すなわち} \quad hy = 2p\,(x+g)$$

が得られる。[すなわち，接点を (x_1，y_1) とすると，接線の方程式は $y_1 y = 2p(x + x_1)$ ということになる。]

放物線の接線に関連して，アポロニオスは『円錐曲線論』第 1 巻命題 42 として次のような命題を挙げている (『ハイベア版』pp.128–131)。ヴァン・デル・ウァルデン (Bartel Leendert van der Waerden : 1903–1996) によれば，ノイゲバウアー (Otto Neugebauer : 1899–1990) はこの命題 42 および次の命題 43 を「二接線定理」と呼んでいたという (『数学の黎明』p.348)。

「もし放物線に接する直線が直径と出会い，そして，接点から直径の方に規則正しく直線［縦線］が引かれ，さらに，切片［放物線］の上に任意にとられた点から直径の方に，1 つは接線に，もう 1 つは接点から規則正しく引かれた直線に平行に，2 つの直線が引かれるならば，それらによってつくられた三角形は，接点から規則正しく引かれた直線および切片の頂点からその平行線によって切り取られた直線［横線］に囲まれた平行四辺形に等しい。



放物線があるとし，その直径が AB であるとして，切片に接する AG が引かれ，そして，規則正しく GJ が引かれ，そして，任意の点から［規則正しく］DZ が引かれ，そして，D を通って直線 AG に平行な DE が，さらに，G を通って直線 BZ に平行な GH が，さらに，B を通って直線 JG に平行な BH が引かれるとしよう。私は，［三角形］DEZ = ［平行四辺形］HZ である，と言う。

なぜならば。AG は切片に接し，GJ は規則正しく引かれているから，AB = BJ であろう［命題 35］。それゆえ，AJ = 2JB である。それゆえ，AJG = BG である［ユークリッド第 1 巻命題 41］。そして，切片であることから $\mathrm{GJ}^2 : \mathrm{DZ}^2 = \mathrm{JB} : \mathrm{BZ}$ であり［命題 20］，

$$\mathrm{GJ}^2 : \mathrm{DZ}^2 = \mathrm{AGJ} : \mathrm{EDZ} \quad \text{［ユークリッド第 6 巻命題 19］}$$
$$\mathrm{JB} : \mathrm{BZ} = \mathrm{HJ} : \mathrm{HZ} \quad \text{［ユークリッド第 6 巻命題 1］}$$

であるから，

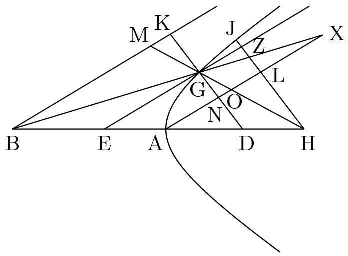
$$\mathrm{AGJ} : \mathrm{EDZ} = \mathrm{JH} : \mathrm{ZH}$$

であろう。それゆえ，入れ換えて，

$$\mathrm{AJG} : \mathrm{BG} = \mathrm{EDZ} : \mathrm{HZ}$$

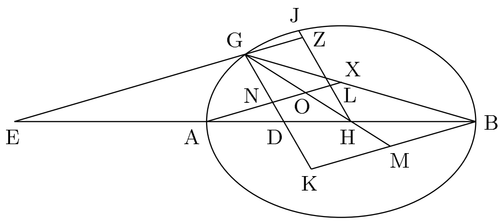
である。さらに，AGJ = HJ である。ゆえに，EDZ = HZ である。」

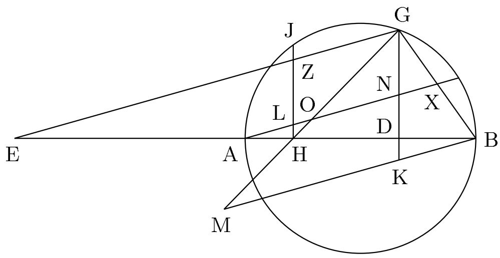
次に，楕円，双曲線の接線であるが，それは『円錐曲線論』第 1 巻命題 34 にある (『ハイベア版』pp.100–105)。



「もし双曲線あるいは楕円あるいは円周の上に［任意の］点がとられ，そして，そこから直径に対して規則正しく直線が引かれ，そして，規則正しく引かれた線からその図形の横断辺の両端まで切り取られた直線が互いにもつ比と，頂点のそばに置かれた部分が互いに［それらに］対応するように，横断辺の部分がそれ［に等しい比］をもつならば，横断辺の上にとられた点および切片の上にとられた点を結んでいる直線は切片［曲線］に接するであろう。

放物線あるいは楕円あるいは円周があるとし，その直径が AB であるとし，切片の上に任意の点 G がとられ，G から規則正しく GD が引かれ，$BD : DA = BE : EA$ になるとし，そして，EG が引かれるとしよう。私は，GE は切片に接する，と言う。





なぜならば。もし可能ならば，例えば EGZ が［曲線を］切断するとし，その上に任意の点 Z がとられ，そして，規則正しく HZJ が引かれ，A，B を通って直線 EG に平行な AL，BK が引かれ，そして，引かれた DG，BG，HG が点 K，X，M まで延長されるとしよう。そして，

$$BD : DA = BE : EA$$

であり，さらに，

$$BD : DA = BK : AN \quad \text{［ユークリッド第 6 巻命題 4］}$$

でもあり，そして［ユークリッド第 6 巻命題 2］,

$$BE : AE = BG : GX = BK : XN \quad \text{［ユークリッド第 6 巻命題 4］}$$

であるから，

$$BK : AN = BK : NX$$

である。それゆえ，$AN = NX$ である［ユークリッド第 5 巻命題 9］。それゆえ，

$$AN \times NX > AO \times OX \quad \text{［ユークリッド第 2 巻命題 5］}$$

である。それゆえ，$NX : XO > OA : AN$［エウトキオス］である。さらに，

$$NX : XO = KB : BM \quad \text{［ユークリッド第 6 巻命題 4］}$$

である。それゆえ，$KB : BM > OA : AN$ である。それゆえ，

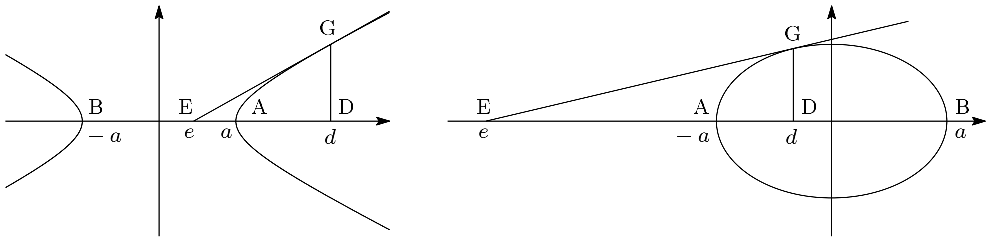
$$KB \times AN > MB \times AO$$

である。それゆえ，$KB \times AN : GE^2 > MB \times AO : GE^2$［ユークリッド第 5 巻命題 8］である。さらに，三角形 BKD，EGD，NAD の相似性［エウトキオス］のために

$$KB \times AN : GE^2 = BD \times DA : DE^2$$

であり，$\mathrm{MB}\times\mathrm{AO}:\mathrm{GE}^2=\mathrm{BH}\times\mathrm{HA}:\mathrm{HE}^2$ である。それゆえ，$\mathrm{BD}\times\mathrm{DA}:\mathrm{DE}^2>\mathrm{BH}\times\mathrm{HA}:\mathrm{HE}^2$ であろう。それゆえ，交換されると，$\mathrm{BD}\times\mathrm{DA}:\mathrm{BH}\times\mathrm{HA}>\mathrm{DE}^2:\mathrm{EH}^2$ である。さらに，$\mathrm{BD}\times\mathrm{DA}:\mathrm{BH}\times\mathrm{HA}=\mathrm{GD}^2:\mathrm{HJ}^2$［命題 21］であり，$\mathrm{DE}^2:\mathrm{EH}^2=\mathrm{GD}^2:\mathrm{ZH}^2$［ユークリッド第 6 巻命題 4］である。それゆえ，$\mathrm{GD}^2:\mathrm{JH}^2>\mathrm{GD}^2:\mathrm{ZH}^2$ でもある。それゆえ，$\mathrm{JH}<\mathrm{ZH}$［ユークリッド第 5 巻命題 8］である。これは不可能である。ゆえに，EG は切片を切断しない。それゆえ，接する。」

こちらも現代的に見てみよう。



上図のように座標軸を設定すると，双曲線，楕円を表す方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}\pm\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ［複号は双曲線が下側，楕円が上側］となる。いま，接点 G の座標を (d，g) とおくと，$\dfrac{d^2}{a^2}\pm\dfrac{g^2}{b^2}=1$ より，$g^2=\pm\left(b^2-\dfrac{b^2}{a^2}d^2\right)$ となる。

さて，双曲線，楕円を表す方程式の両辺を x で微分すると，$\dfrac{2x}{a^2}\pm\dfrac{2y}{b^2}y'=0$ となるから，$y'=\mp\dfrac{b^2x}{a^2y}$ となる。従って，点 G における接線の方程式は，$y=\mp\dfrac{b^2d}{a^2g}(x-d)+g$ より，

$$gy=\mp\frac{b^2d}{a^2}x\pm\frac{b^2}{a^2}d^2+g^2=\mp\frac{b^2d}{a^2}x\pm b^2 \quad \text{［複号同順］}$$

となる。ここで，接線と x 軸との交点を求めるために $y=0$ とおくと，$x\,[\,=e]=\dfrac{a^2}{d}$ が得られる。

なお，上の式から，

$$\frac{dx}{a^2}\pm\frac{gy}{b^2}=1 \qquad \text{［複号は楕円が }+\text{，双曲線が }-\text{］}$$

が得られるが，これが点 G(d，g) における楕円，双曲線の接線の方程式である。［教科書風には，点 (x_1，y_1) における接線の方程式は $\dfrac{x_1x}{a^2}\pm\dfrac{y_1y}{b^2}=1$ である，ということになる。］

ところで，アポロニオスが言うところでは，$\mathrm{BD}:\mathrm{DA}=\mathrm{BE}:\mathrm{EA}$ とするということだから，

$$\text{双曲線では }(d+a):(d-a)=(e+a):(a-e)$$
$$\text{楕円では }(a-d):(d+a)=(a-e):(-a-e)$$

である。いずれの場合にも，$e=\dfrac{a^2}{d}$ が得られるから，アポロニオスの主張が確かめられたことになる。

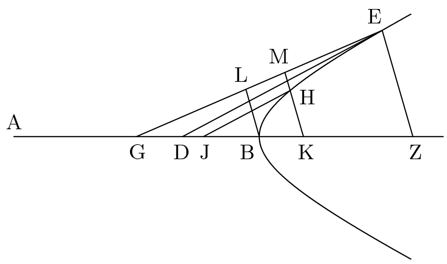
このように，双曲線でも楕円でも，$\mathrm{BD}:\mathrm{DA}=\mathrm{BE}:\mathrm{EA}$ によって点 E を捜せば，接線を引くことができるという統一的な方法が示されたのである。

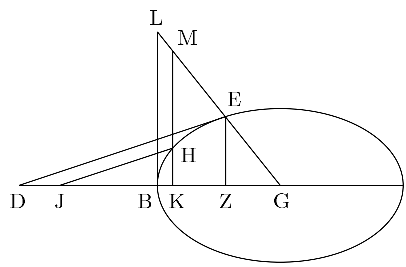
また，この結果を見ると，接線と x 軸との交点 E の位置は双曲線，楕円を表す方程式に現れる b の値には無関係であることが分かる。ということは，例えば楕円の場合，直径 AB の長さが一定な

らば，横長であろうと縦長であろうと，$x = d$ の線上にあるすべての接点に対して，接線はすべて同一の点 E から引ける，のである。

接線に関連する『円錐曲線論』第 1 巻命題 43 —— 楕円，双曲線についての二接線定理 —— は次のようである (『ハイベア版』pp.130–133)。

「もし双曲線あるいは楕円あるいは円の周囲に接する直線が直径と出会い，そして，接点から直径の方に規則正しく直線［縦線］が引かれ，さらに，頂点を通ってこれに平行な，そして接点および中心を通って引かれた直線に出会う，直線が引かれ，そして，切片［曲線］の上に任意にとられた点から直径の方に，1 つは接線に，もう 1 つは接点から規則正しく引かれた直線に平行に，2 つの直線が引かれるならば，それらによってつくられた三角形は，双曲線においては，中心および接点を通って引かれた直線によって切り取られた三角形より半径の上に描かれた，それによって切り取られた三角形に相似な三角形だけ小さいであろうし，楕円または円の周囲においては，中心の近くに切り取られた三角形が加えられると，半径の上に描かれた，それによって切り取られた三角形に相似な三角形に等しいであろう。





双曲線あるいは楕円あるいは円の周囲があるとし，その直径が AB，さらに中心が G であるとして，切片［曲線］に接する［直線］DE が引かれ，そして，GE が引かれ，そして，規則正しく EZ が引かれ，さらに，切片の上に任意の点 H がとられ，そして，接線に平行な HJ が引かれ，そして，規則正しく HK が引かれ，さらに，B を通って規則正しく BL が引かれるとしよう。私は，三角形 KMG は三角形 GLB より三角形 HKJ だけ異なっている，と言う。

なぜならば。ED は接する［直線］，さらに，EZ は規則正しく引かれた［直線］であるから，EZ : ZD は，比 GZ : ZE および直立辺が横断辺に対してもっているそれから合成された比をもつ［命題 39］。さらに，

$$\mathrm{EZ} : \mathrm{ZD} = \mathrm{HK} : \mathrm{KJ}$$

であり［ユークリッド第 6 巻命題 4］，GZ : ZE = GB : BL である［同］。それゆえ，HK : KJ は，比 BG : BL および直立辺が横断辺に対してもっているそれから合成された比をもつであろう。そして，命題 XLI で証明されたことから，三角形 GKM は三角形 BGL より三角形 HJK だけ異なっている。なぜなら，それらより 2 倍大きい，平行四辺形について同じことが証明されているから［エウトキオス］。」

接線に関しては，「もし放物線に接している 3 つの直線が互いに出会うならば，それらは同じ比に切断されるであろう。」(『円錐曲線論』第 3 巻命題 41) などの性質があるが，それらは割愛しよう。

(10) 法線

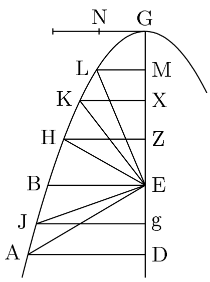
法線は，通常，曲線 C 上の 1 点 P において C に接線 t が引けるとき，接点 P を通り接線 t に垂直な直線を P における C の法線という，と定められる。平面曲線 C に対して，C 上の点 P における C の法線はただ 1 つである。

しかし，アポロニオスは「(曲線外の) ある点から曲線上の点に引いた線分が極大あるいは極小になるとき，その線分を法線という」というように定めた。法線については『円錐曲線論』第 5 巻で扱われるが，ここではハレー (Edmond Halley : 1656–1742) の手になる，

> *Apollonii Pergaei Conicorum Libri Tres Posteriores ex Arabico Sermone in Latinum Conversi, cum Pappi Alexandrini Lemmatis.* (「アラビア語からラテン語に翻訳された，ペルガのアポロニオスの円錐曲線論の後半の 3 巻，併せてアレクサンドリアのパッポスによる補題」)

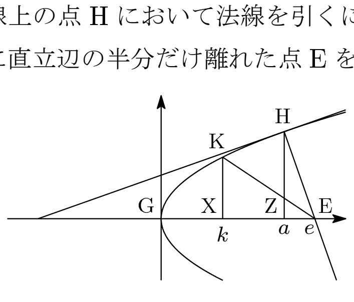
によるものとする。参照するときには『ハレー版』ということにする。

まず，放物線については『円錐曲線論』第 5 巻命題 8 (『ハレー版』pp.6–7)。



「もし放物線の軸の上に，切断線［円錐切断のことで，ここでは放物線］の頂点から直立辺の半分より大きく離れている，点［E］がとられるとし，そして，その点から切断線の頂点の方向に直立辺の半分に等しい軸の切片［EZ］が置かれるとし，その端点［Z］から切断線との交点［H］まで延長されるであろう軸に垂直な線［ZH］が立てられるとし，その交点およびはじめに与えられた点を結ぶ直線［EH］が引かれるならば，その直線［EH］は軸の上に与えられたその点［E］から切断線まで引かれるであろうすべての［直線のうちで］最小［極小］であろう。しかし，両側において同じもののより近くにあるその他のものはより遠く離れたものより小さいであろう。さらに，任意に引かれたものの平方の最小のものの平方を超える超過分はそれらの端点から軸まで下ろされた規則正しく結びつけられたもの［縦線］の間に切り取られた部分の平方に等しいであろう。」(証明略)

この命題は直線 EH が点 H における放物線の法線であることを主張している。すなわち，放物線上の点 H において法線を引くには，H から軸に垂線を下ろし，その足 Z から頂点とは逆の方向に直立辺の半分だけ離れた点 E を求めて，直線 EH を引けばよい，ということになる。



左図のように座標軸を設定し，放物線を表す方程式を $y^2 = 4px$ とすると，先に見たように，点 H での接線の傾きは $\sqrt{\dfrac{p}{a}}$ となるから，点 H における法線の方程式は

$$y = -\sqrt{\frac{a}{p}}\,(x-a) + 2\sqrt{ap}$$

となる。

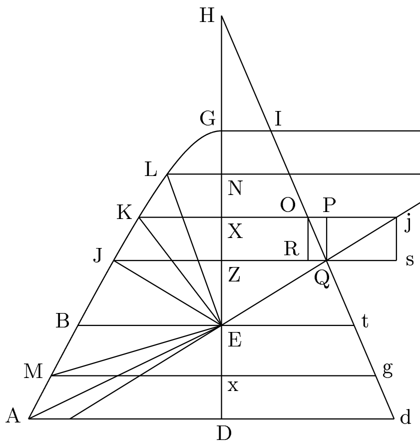
この法線が x 軸と交わる点 E の x 座標 e を求めるために $y=0$ とすると，$x\,[\,=e] = 2p+a$ となるから，線分 EZ の長さは $\mathrm{EZ} = e-a = 2p$ となる。これで，EZ が直立辺の半分であることが確認された。

また，放物線上の (H とは異なる) 任意の点を K とし，そこから x 軸へ下ろした垂線の足を X，X の x 座標を k とすると，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{EK}^2-\mathrm{EH}^2 &= (\mathrm{KX}^2+\mathrm{EX}^2)-(\mathrm{HZ}^2+\mathrm{EZ}^2)=\left\{4pk+(e-k)^2\right\}-\left\{4pa+(e-a)^2\right\}\\
&=(k-a)(k+4p-2e+a)=(k-a)\left\{k+2(e-a)-2e+a\right\}=(k-a)^2\\
&=\mathrm{ZX}^2
\end{aligned}
$$

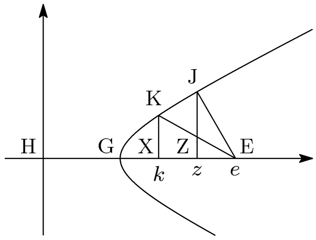
となる。これが命題 8 の最後の主張である。

次に，双曲線については『円錐曲線論』第 5 巻命題 9 (『ハレー版』pp.8–9)。



「もし双曲線の軸の上に，切断線［双曲線］の頂点から直立辺の半分より大きく離れている，点［E］がとられるとし，そして，与えられた点［E］および切断線の中心［H］の間に切り取られるもの［HE］が，中心に隣接するその部分［HZ］が横断する直径に対応するように，それらの切片に関して横断する直径が直立辺に対して互いにもっている比に分割されるとし，そして，分割点［Z］から切断線に出会うまで軸に垂直な線が立てられるとするならば，その交点［J］および軸の上にとられた点［E］を結んで引かれた直線［EJ］はその点から切断線に引かれたすべての直線のうちで最小［極小］であろう。しかし，両側において同じ辺に，より近くに，隣接しているその他のものはより遠く離れたものより小さいであろう。また，任意に引かれたものの平方の最小のものの平方を超える超過分は，同じところから下ろされた規則正しく結びつけられたもの［縦線］の間に切り取られたものの上につくられた，さらに，切り取られたものが横断する直径に対応するように，横断する直径および 1 つの横断する直径と直立辺とが同時にとられたものによって囲まれた長方形に相似である，長方形に等しいであろう。」(証明略)

すなわち，双曲線上の点 J において法線を引くためには，J から軸に下ろした垂線の足を Z とするとき，HZ : EZ = 直径 : 直立辺 となる点 E を求めればよく，その E と J を結べば，直線 EJ が法線になる，のである。



左図のように座標軸を設定し，双曲線を表す方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とすると，点 J(z, j) における接線の傾きは $\dfrac{b^2z}{a^2j}$ であるから，点 J における法線の方程式は

$$
y=-\frac{a^2j}{b^2z}(x-z)+j=-\frac{a^2j}{b^2z}x+\frac{a^2+b^2}{b^2}j
$$

となる。

この法線と x 軸との交点 E の x 座標 e を求めるために $y=0$ とおくと，$x\,[\,=e]=\dfrac{a^2+b^2}{a^2}z$ となるから，線分 EZ の長さは $\mathrm{EZ}=e-z=\dfrac{b^2}{a^2}z$ となる。また，$\mathrm{HZ}=z$ であるから，

$$
\mathrm{HZ}:\mathrm{EZ}=z:\frac{b^2}{a^2}z=2a:\frac{2b^2}{a}=\text{直径}:\text{直立辺}
$$

となることが分かる。

また，双曲線上の (J とは異なる) 任意の点を K とし，そこから x 軸へ下ろした垂線の足を X，X の x 座標を k とすると，

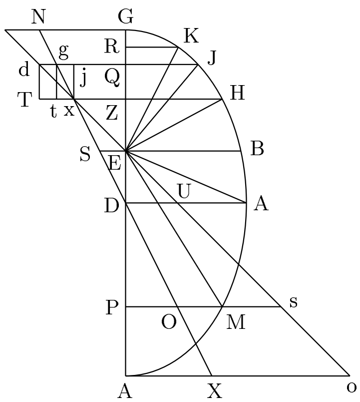
$$\begin{aligned}\mathrm{EK}^2-\mathrm{EJ}^2&=(\mathrm{KX}^2+\mathrm{EX}^2)-(\mathrm{JZ}^2+\mathrm{EZ}^2)\\&=\left\{\left(\frac{b^2}{a^2}k^2-b^2\right)+(e-k)^2\right\}-\left\{\left(\frac{b^2}{a^2}z^2-b^2\right)+(e-z)^2\right\}\\&=(k-z)\left\{\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)(k+z)-2e\right\}=(k-z)\times\left(\frac{b^2}{a^2}+1\right)(k-z)\end{aligned}$$

となる。ところで，この双曲線については 直径 $=2a$，直立辺 $=\dfrac{2b^2}{a}$ であるから，$(k-z)$ が直径に対応するものであるならば，直立辺に対応するものは $\dfrac{b^2}{a^2}(k-z)$ である。ゆえに，上の等式は

$$\mathrm{EK}^2-\mathrm{EJ}^2=\text{直径に対応するもの}\times\text{直径と直立辺の和に対応するもの}$$

ということを示しており，これは命題 9 の最後の主張である。

最後は楕円で，それについては『円錐曲線論』第 5 巻命題 10 (『ハレー版』pp.9–11)。



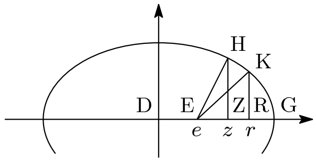
「もし楕円の長軸の上に，切断線［楕円］の頂点から直立辺の半分より大きく離れている，点［E］がとられるとし，そして，切断線の頂点［G］およびその点の間に切り取られたものが，切断線の中心［D］および分割点［Z］の間に横たわる切片が同じ点の，軸の上にはじめにとられたそれからの，距離に対して横断する直径が直立辺に対する比にあるように，分割されるとし，そして，分割点から，切断線に出会っている，軸に垂直な線が立てられるとし，そして，その交点［H］から軸の上にとられた点［E］まで直線が引かれるならば，それはその点を通って切断線まで引くことができるであろう直線の中で最小［極小］であろう。そして，同じもののより近くにあるその他のものはより遠く離れたものより小さいであろう。さらに，それらの任意のものの平方が最小のものの平方を超える超過分は，同じところから下ろされた規則正しく結びつけられたもの［縦線］の間に切り取られたものの上につくられた，さらに，横断する直径および横断する直径の直立辺にまさる超過分によって囲まれたものに相似である，長方形に等しいであろう。」(証明略)

楕円上の点 H において法線を引くためには，H から長軸に下ろした垂線の足を Z とするとき，DZ : EZ = 直径 : 直立辺 となる点を求め，E と H を結べばよい，のである。その直線 EH が H における法線になる。

下図のように座標軸を設定し，楕円を表す方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とすると，点 J(z，j) における接線の傾きは $-\dfrac{b^2z}{a^2j}$ であるから，点 J における法線の方程式は

$$y=\frac{a^2j}{b^2z}(x-z)+j=\frac{a^2j}{b^2z}x-\frac{a^2-b^2}{b^2}j$$

となる。



この法線と x 軸との交点 E の x 座標 e を求めるために $y=0$ とおくと，$x\,[=e]=\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\,z$ となるから，線分 EZ の長さは $\mathrm{EZ}=z-e=\dfrac{b^2}{a^2}\,z$ となる。また，$\mathrm{DZ}=z$ であるから，

$$\mathrm{DZ}:\mathrm{EZ}=z:\frac{b^2}{a^2}\,z=2a:\frac{2b^2}{a}=\text{直径}:\text{直立辺}$$

となることが分かる。

また，楕円上の (J とは異なる) 任意の点を K とし，そこから x 軸へ下ろした垂線の足を R，R の x 座標を r とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{EK}^2-\mathrm{EH}^2&=(\mathrm{KR}^2+\mathrm{ER}^2)-(\mathrm{HZ}^2+\mathrm{EZ}^2)\\&=\left\{\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}\,r^2\right)+(r-e)^2\right\}-\left\{\left(b^2-\frac{b^2}{a^2}\,z^2\right)+(z-e)^2\right\}\\&=(r-z)\left\{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)(r+z)-2e\right\}=(r-z)\times\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)(r-z)\end{aligned}$$

となる。ところで，この楕円については 直径 $=2a$，直立辺 $=\dfrac{2b^2}{a}$ であるから，$(r-z)$ が直径に対応するものであるならば，直立辺に対応するものは $\dfrac{b^2}{a^2}(r-z)$ である。ゆえに，上の等式は

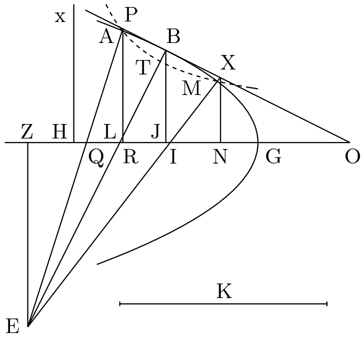
$$\mathrm{EK}^2-\mathrm{EH}^2=\text{直径に対応するもの}\times\text{直径と直立辺の差に対応するもの}$$

ということを示しており，これは命題 10 の最後の主張である。

また，『円錐曲線論』第 5 巻命題 11 では，特別な場合として点 E が楕円の中心に一致した場合が述べられている (『ハレー版』p.11)。

> 「楕円の中心から切断線［その楕円のこと］まで引かれた直線のうちで最小のものは短軸の半分である。さらに，最大のものは長軸の半分である。さらに，任意に引かれたものの平方が最小もののの平方を超える超過分は，規則正しく結びつけられたもの［縦線］および切断線の中心の間に切り取られたものの上につくられた，さらに，横断する直径および直立辺の上の同じものの超過分によって囲まれたものに相似である，長方形に等しい。」(証明略)

さらに，『円錐曲線論』第 5 巻では法線に関連する性質が多く述べられているのだが，その中の命題 51 は次のようなものである (『ハレー版』pp.34–36)。



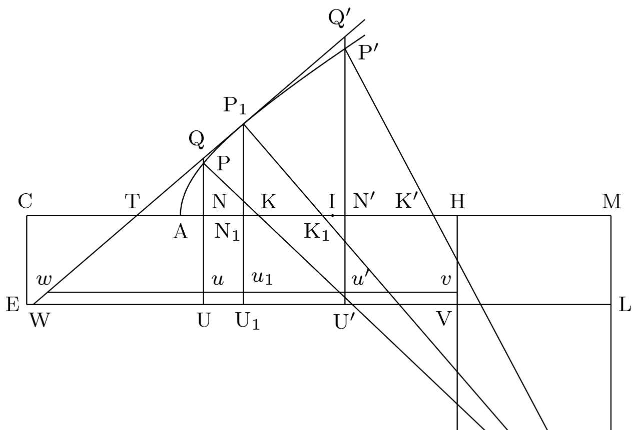
> 「そして，もし述べられた垂線が直立辺の半分より大きい軸の切片を切り取るならば，私は，比較がなされると，もし仮定された点の軸からの距離，あるいは垂線の長さ，が指定された［直線］より大きかったならば，垂線の端点から切片［曲線］までの直線で，それによって軸が最小［の直線］を切り取るものを全く引くことができない，直線を指定することができる，と言う。しかし，その点から出て行かされた［引かれた］，任意の直線の端点から切片までの最小［の直線］は，切断線［曲線］の頂点に隣接している，［そして］出て行かされたもの自身より大きな，切片を軸から切り取るであろう。

しかし，もし垂線が指定されたものと等しかったならば，その端点から，それによって最小［の直線］が切り取られるであろう，ただ 1 つの直線を引くことができる。さらに，同じ点から出て行ったその他のすべて［の直線］の端点から引かれたものの最小［の直線］は，軸の頂点に隣接している，［そして］出て行かされたもの自身によって切り取られたものより大きな，切片を切り取るであろう。

さらに，もし垂線が指定されたものより小さかったならば，それらによって軸の最小［の直線］を切り取る，ただ 2 つだけの直線を引くことができる。そして，それらが出て行った端点から引かれた，そして，述べられた 2 つの最小のものの間に横たわっている，最小［の直線］は，切断線の頂点に隣接している，［そして］出て行かされたもの自身によって切り取られるものより小さな，部分を軸から切り取るであろう。さらに，それらが出て行ったその他の端点から引かれ，［そして］それら 2 つの最小［の直線］の中間には［位置してい］ない，ものは，出て行かされたもの自身によって切り取られたものより大きな，部分を軸から切り取るであろう。

さらに，楕円においては垂線は長軸に下ろされなければならない。」(上では見やすさのため段落を分けたが，原文ではこの命題全体が 1 つの段落になっている。)

アポロニオスは「はじめに，ABG が放物線であるとし，その軸を GZ としよう。その上に垂線 EZ が立てられるとしよう。そして，軸の切片 GZ が直立辺の半分よりと大きいとしよう。私は，もし EZ の間に点がとられ，そこから切片まで直線が出されるのであれば，すべてことは必然的に，この命題において私たちが明示したように，起こるであろう。」と述べて証明を始める。しかし，ここではその証明は割愛し，ヒース (Thomas Little Heath : 1861–1940) の本 (*Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections. Edited in medern natation with introductions including an essay on the early history of the subject.* , 以下『ヒース版』と呼ぶ) に従って，この命題 51 に対して現代的解釈を (双曲線の場合に) 施してみよう (『ヒース版』pp.168–178)。



左図で，APP_1P' は A を頂点とする双曲線とし，C をその中心とする。AM が直立辺の長さ l の半分より大きくなるように点 M を軸上にとる。A に対置するもう 1 つの頂点を A′ とするとき，まず，$CH : HM = AA' : l$ となるように点 H を定める。次に，CA と CH の間に 2 つの比例中項 CN_1，CI をとる。さらに，M における垂線 MO の上に $OL : LM = AA' : l$ となるような点 L を定める。また，N_1 における垂線と双曲線との交点を P_1 とする。このとき，

$$y : P_1N_1 = (CM : MH) \times (HN_1 : N_1C)$$

であるように y を定めると，この y が指定されるべき長さである，という。

さて，ここに，中心 C を原点とし，CM を x 軸とする座標を設定する。そして，x = CM,

$y = \mathrm{MO}$ とし，$\dfrac{\mathrm{CH}}{\mathrm{HM}} = \dfrac{\mathrm{CH}}{x - \mathrm{CH}} = \dfrac{a^2}{b^2}$ としよう。すると，$l = \dfrac{2b^2}{a}$，$\mathrm{CA} = a$ とでき，$\mathrm{P_1}$ は双曲線上の点だから，$\dfrac{\mathrm{CN_1}^2}{a^2} - \dfrac{\mathrm{P_1N_1}^2}{b^2} = 1$ となる。

また，$\mathrm{CN_1}$，CI の定め方から，$a : \mathrm{CN_1} = \mathrm{CN_1} : \mathrm{CI} = \mathrm{CI} : \mathrm{CH}$ であるから，$\mathrm{CN_1}^2 = a\,\mathrm{CI}$，$\mathrm{CI} = \dfrac{a\,\mathrm{CH}}{\mathrm{CN_1}}$ となる。よって，$\mathrm{CN_1}^3 = a^2\,\mathrm{CH}$，すなわち $\mathrm{CH} = \dfrac{\mathrm{CN_1}^3}{a^2}$，となる。

さらに，y の定め方から，

$$\begin{aligned}\frac{y}{\mathrm{P_1N_1}} &= \frac{\mathrm{CM}}{\mathrm{MH}} \cdot \frac{\mathrm{HN_1}}{\mathrm{N_1C}} = \frac{a^2+b^2}{b^2} \cdot \frac{\mathrm{CH} - \mathrm{CN_1}}{\mathrm{CN_1}} = \frac{a^2+b^2}{b^2} \cdot \frac{\frac{\mathrm{CN_1}^3}{a^2} - \mathrm{CN_1}}{\mathrm{CN_1}} \\ &= \frac{a^2+b^2}{b^2} \cdot \frac{\mathrm{CN_1}^2 - a^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{b^2} \cdot \left(\frac{\mathrm{CN_1}^2}{a^2} - 1 \right) = \frac{a^2+b^2}{b^2} \cdot \frac{\mathrm{P_1N_1}^2}{b^2}\end{aligned}$$

となるから，$\mathrm{P_1N_1}^3 = \dfrac{b^4 y}{a^2+b^2}$ となって，$\mathrm{P_1N_1}^2 = b^2 \left(\dfrac{by}{a^2+b^2} \right)^{\frac{2}{3}}$ がいえる。

一方，$\dfrac{\mathrm{CH}}{x - \mathrm{CH}} = \dfrac{a^2}{b^2}$ から，$\mathrm{CH} = \dfrac{a^2 x}{a^2+b^2}$ となり，

$$\mathrm{CN_1}^2 = a^2\,\mathrm{CH} = \frac{a^4 x}{a^2+b^2} = a^2 \left(\frac{ax}{a^2+b^2} \right)^{\frac{2}{3}}$$

がいえる。

以上により，$1 = \dfrac{\mathrm{CN_1}^2}{a^2} - \dfrac{\mathrm{P_1N_1}^2}{b^2} = \left(\dfrac{ax}{a^2+b^2} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(\dfrac{by}{a^2+b^2} \right)^{\frac{2}{3}}$ であることから，

$$(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{2}{3}}$$

となる。

ところで，この最後の式の意味するところは $\cdots\cdots$

平面曲線 C 上の 1 点 P に対し，P とこれに近い C 上の 2 点 Q，R を通る円を考える。この円上の点の Q，R を C に沿って P に近づけたときの極限の円を P における C の曲率円という。C の各点における曲率円の中心 (その点を曲率中心という) の描く曲線を Γ とするとき，Γ を C の縮閉線という。そして，平面曲線 $\mathrm{C} : y = f(x)$ の縮閉線は

$$\xi = x - \frac{\left(1 + (y')^2\right) y'}{y''}\ ,\ \eta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}$$

から x，y を消去すれば得られる，ことが知られている。

そこで，双曲線を表す方程式を $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ としよう。すると，$y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}\left(x^2 - a^2\right)$ より，$y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ であり，また，$x^2 = \dfrac{a^2}{b^2}\left(y^2 + b^2\right)$ である。

従って，$y' = \dfrac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$ ，$y'' = \dfrac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2}^{\,3}}$ となるから，$1 + (y')^2 = \dfrac{\left(a^2+b^2\right)x^2 - a^4}{a^2\left(x^2 - a^2\right)}$ より，

$$\frac{\left(1 + (y')^2\right) y'}{y''} = \frac{bx\left\{\left(a^2+b^2\right)x^2 - a^4\right\}}{a^3\sqrt{x^2 - a^2}^{\,3}} \cdot \frac{-\sqrt{x^2 - a^2}^{\,3}}{ab} = \frac{-x\left\{\left(a^2+b^2\right)x^2 - a^4\right\}}{a^4}$$

$$\begin{aligned}\frac{1 + (y')^2}{y''} &= \frac{\left(a^2+b^2\right)x^2 - a^4}{a^2\left(x^2 - a^2\right)} \cdot \frac{-\sqrt{x^2 - a^2}^{\,3}}{ab} = \frac{-\sqrt{x^2 - a^2}\left\{\left(a^2+b^2\right) - a^4\right\}}{a^3 b} \\ &= \frac{-1}{a^3 b} \cdot \frac{ay}{b} \cdot \left\{\left(a^2+b^2\right) \cdot \frac{a^2}{b^2}\left(y^2 + b^2\right) - a^4\right\} = \frac{-y\left\{\left(a^2+b^2\right)y^2 + b^4\right\}}{b^4}\end{aligned}$$

となる。

よって，

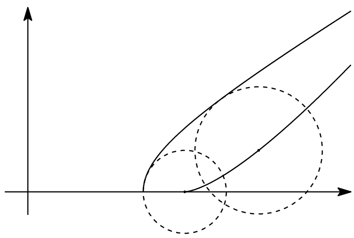
$$\xi = \frac{\left(a^2+b^2\right)x^3}{a^4}\ ,\ \eta = \frac{-\left(a^2+b^2\right)y^3}{b^4}$$

となり，$a\xi = \left(a^2+b^2\right)\left(\dfrac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ ，$b\eta = -\left(a^2+b^2\right)\left(\dfrac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ がいえる。

このことから，この双曲線の縮閉線は

$$\begin{aligned}(a\xi)^{\frac{2}{3}} - (b\eta)^{\frac{2}{3}} &= \left(a^2+b^2\right)^{\frac{2}{3}}\frac{x^2}{a^2} - \left(a^2+b^2\right)^{\frac{2}{3}}\frac{y^2}{b^2} = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\\ &= \left(a^2+b^2\right)^{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

より，$(ax)^{\frac{2}{3}} - (by)^{\frac{2}{3}} = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{2}{3}}$ となる。



例えば，双曲線を表す方程式が $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ のときは，$a=5$，$b=3$ ということだから，縮閉線を表す方程式は $(5x)^{\frac{2}{3}} - (3y)^{\frac{2}{3}} = 34^{\frac{2}{3}}$ となる。これら 2 曲線を図示すると左図のようになる。ここに破線で表した円は曲率円 (の例) である。なお，この双曲線の頂点 (5，0) における曲率中心は $\left(\dfrac{34}{5}，0\right)$ であることが分かる。

すなわち，命題 51 から導かれる先ほどの式は双曲線の縮閉線を表していると解釈することができるのである。アポロニオスが縮閉線のことまで認識していたとは思えないのだが，円錐曲線の研究に対する意識の高さや内容の深さは充分に感じられる。

(11) 放物線 (の切片) の面積

放物線の切片の面積はアルキメデス (Ἀρχιμήδης (Archimēdēs)：前 287?–前 212) によって算出されていて，その成果は『放物線の求積』(Τετραγωνισμὸς παραβολῆς，Quadratura Parabolae) に述べられている。

ここでは，本稿の最初にも利用した，

> *Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii. E codice Florentino recensuit, Latine uertit notisque illustrauit. J. L. Heiberg.* (「アルキメデス著作集，併せてエウトキオスの注釈。ハイベアが，フィレンツェの本によって調査し，誤りを明らかにして，ラテン語に翻訳したもの」) 全 3 巻

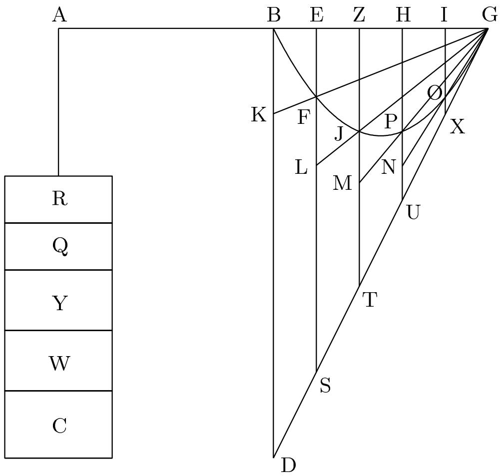
を利用する。参照するときは『アルキメデス著作集』ということにする。

アルキメデスは天秤の釣り合いの考え方を用いて機械的に証明した (命題 17) 後で，幾何学的にも証明している (命題 24)。機械的な方法について，命題 14 から見ていこう。

『放物線の求積』命題 14 は次のようである (『アルキメデス著作集』第 2 巻 pp.318–327)。

> 「BJG が直線および直角円錐切断［放物線］によって囲まれた切片であるとしよう。それゆえ，はじめに，BG が直径に対して垂直であるとし，点 B から直径に平行な直線 BD が，そして，G から点 G において円錐切断に接する直線 GD が引かれるとしよう。それゆえ，BGD は直角三角形であろう。さらに，BG が任意個数の等しい部分 BE，EZ，ZH，HI，IG に分割されるとし，そして，分割点から直径に平行な ES，ZT，HU，IX が引かれ，そして，それらが円

錐切断を切断する点から G まで直線が引かれて，それらが延長されるとしよう。それゆえ，私は，三角形 BDG は三角形 XIG が合わさった台形 KE，LZ，MH，NI［の和］の 3 倍より小さく，さらに，三角形 IOG が合わさった台形 ZF，HJ，IP［の和］の 3 倍より大きい，と言う。



なぜならば。直線 ABG が引かれ，そして，直線 BG に等しい AB が切り取られるとし，私たちは，AG が，その中点が点 B であり，B で吊るされる，天秤であると想像しよう。さらにまた，BDG が天秤に点 B，G から吊るされ，天秤の他方の側には点 A から広がり R，Q，Y，W，C が吊るされるとしよう。そのようになっている，広がり R と台形 DE が，さらに，Q と台形 ZS が，さらに，Y と台形 TH が，さらに，W と台形 UI が，そして，C と三角形 XIG が，互いにもっている釣り合いを保つものとしよう。それゆえ，全体と全体が［もっている］釣り合いもまた保つであろう。それゆえ，三角形 BDG は広がり

$$\mathrm{R} + \mathrm{Q} + \mathrm{Y} + \mathrm{W} + \mathrm{C}$$

の 3 倍［に等しい］であろう［命題 6]。そして，BGJ は直線および直角円錐切断によって囲まれた切片であり，B から直径に平行に引かれたものが直線 BD であり，さらに，点 G から［引かれたもの］は G において円錐切断に接する直線 GD であり，同様に，別の直線 SE は直径に平行に引かれたものであるから，

$$\mathrm{BG} : \mathrm{BE} = \mathrm{SE} : \mathrm{EF}$$

であろう［命題 5]。それゆえ，$\mathrm{BA} : \mathrm{BE} = \mathrm{DE} : \mathrm{KE}$ でもある。そして，同じ方法によって，$\mathrm{AB} : \mathrm{BZ} = \mathrm{SZ} : \mathrm{LZ}$ および

$$\mathrm{AB} : \mathrm{BH} = \mathrm{TH} : \mathrm{MH} \text{ および } \mathrm{AB} : \mathrm{BI} = \mathrm{UI} : \mathrm{NI}$$

であることが証明されるであろう。さて，DE は点 B，E において直角を，さらに，G において傾いた辺をもつ台形であり，さらに，天秤において A から吊るされた何らかの広がり R はそれ［DE］と，それが今ある位置のままで，互いにもっている釣り合いを保っており，そして，$\mathrm{BA} : \mathrm{BE} = \mathrm{DE} : \mathrm{KE}$ であるから，$\mathrm{KE} > \mathrm{R}$ であろう。なぜなら，これは証明されたことだからである［命題 10]。さらにまた，ZS は Z，E において直角を，そして，G において傾いた辺 ST をもつ台形であり，そして，天秤において A から吊るされた広がり Q が台形と，それが今ある位置のままで，互いにもっている釣り合いを保っており，$\mathrm{BA} : \mathrm{BE} = \mathrm{ZS} : \mathrm{ZF}$，$\mathrm{AB} : \mathrm{BZ} = \mathrm{ZS} : \mathrm{LZ}$ である。それゆえ，$\mathrm{LZ} > \mathrm{Q} > \mathrm{ZF}$ であろう。なぜなら，同様に，これは証明されたことだからである［命題 12]。それゆえ，同じ理由により，$\mathrm{MH} > \mathrm{Y} > \mathrm{JH}$ および

$$\mathrm{NOIH} > \mathrm{W} > \mathrm{PI}$$

でもあろう。そして，同じ方法から，$\mathrm{XIG} > \mathrm{C} > \mathrm{GIO}$ であろう［命題 8]。さて，

$$\mathrm{KE} > \mathrm{R},\ \mathrm{LZ} > \mathrm{Q},\ \mathrm{MH} > \mathrm{Y},\ \mathrm{NI} > \mathrm{W},\ \mathrm{XIG} > \mathrm{C}$$

であることは明らかだから，それらの広がり全部［の和］は広がり $\mathrm{R} + \mathrm{Q} + \mathrm{Y} + \mathrm{W} + \mathrm{C}$ より大きい。しかし，

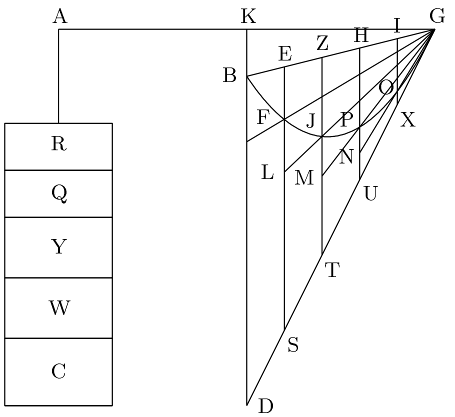
$$R + Q + Y + W + C = \frac{1}{3}\,BGD$$

である。それゆえ,

$$BGD < 3\,(KE + LZ + MH + NI + XIG)$$

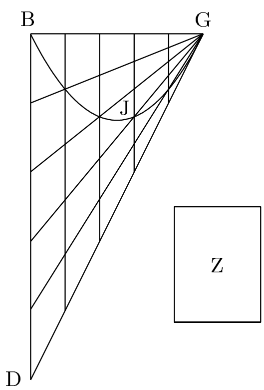
であることは明らかである。さらに，$ZF < Q$，$JH < Y$，$IP < W$，$IOG < C$ であることは明らかであるから，それらの広がり全部［の和］は広がり $C + W + Y + Q$ より小さい。それゆえ，三角形 BDG は三角形 IGO が合わさった広がり FZ，JH，IP［の和］の 3 倍より大きく，さらに，上で言及された広がり［の和］の 3 倍より小さいことは明らかである。」

また，『放物線の求積』命題 15 は放物線が軸に対して直角ではない直線によって切られた場合であり，次のように述べられる。



「再び，BJG が直線および直角円錐切断［放物線］囲まれた切片であるとし，そして，BG が直径に対して垂直ではないとしよう。それゆえ，切片における同じ部分に直径に平行に点 B から引かれた直線，あるいは点 G から引かれた直線は，直線 BG と鈍角をつくらなければならない。それゆえ，それと鈍角をつくっている直線は B におけるものであるとしよう。そして，点 B から直径に平行な BD が，G から円錐切断に接する直線 GD が引かれるとしよう。そして，直線 BG が任意個数の等しい部分 BE，EZ，ZH，HI，IG に分割されるとし，点 E，Z，H，I から直径に平行な ES，ZT，HU，IX が引かれ，その円錐切断を切断する点から点 G まで直線が引かれて，それらが延長されるとしよう。それゆえ，私は，同様に，$3\,(BF + LZ + MH + NI + GIX) > BDG > 3\,(ZF + HJ + IP + GOI)$ である，と言う。」(証明略)

続く命題 16 は次のようなものである。



「再び，BJG が直線および直角円錐切断［放物線］によって囲まれた切片であるとし，そして，B を通って直径に平行な BD，および G から点 G において円錐切断に接する直線 GD が引かれるとしよう。そして，広がり Z が三角形 BDG の 3 分の 1 であるとしよう。それゆえ，私は，切片 BJG は広がり Z に等しい，と言う。」(証明略)

そして，命題 17 で結論が述べられる。

「これが証明されると，直線および直角円錐切断［放物線］によって囲まれた任意の切片はその切片と同じ底線，および等しい高さをもつ三角形よりその 3 分の 1 だけ大きいことは明らかである。」(証明略)

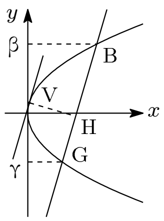
すなわち,

$$(\text{放物線の切片の面積}) = \frac{4}{3}\,(\text{その切片と同底等高の三角形の面積})$$

となる。

アルキメデスはこの後，同じことを今度は幾何学的に証明するのだが，それは割愛する (『ギリシアの科学』,『アルキメデスを読む』などを参照のこと)。なお，彼は，幾何学的証明に入る前に底辺，高さ，頂点を次のように定義している (『アルキメデス著作集』pp.336–337)。

「直線および何らかの曲線によって囲まれた切片の底線と，私は，その直線を呼び，さらに，曲線［上の点］から底線に垂直に引かれた直線のうちの最大のものを高さ，さらに，そこから最大の垂線が引かれる点を頂点と呼ぶ。」



左図において，放物線 BVG と直線 BG によって囲まれた切片について，直線［線分］BG がこの切片の底線であり，放物線上の点からこの底線への垂線のうち長さが最大の VH がこの切片の高さであり，このときの放物線上の点 V がこの切片の頂点である。なお，この点 V は直線 BG に平行な直線が放物線と接する点といってもよい。

このとき，(切片 BVG) $= \dfrac{4}{3}$ (三角形 BVG) となるというのがアルキメデスの導き出したことである。

上図において，放物線 BVG を表す方程式を $y^2 = 4px$，直線 BG を表す方程式を $y = mx + n$ とするとき，それらの交点 B，G の y 座標 β，γ は $\dfrac{2p \pm \sqrt{4p^2 - 4mnp}}{m}$ で与えられる。そして，この切片の面積 S について

$$S = \int_{\gamma}^{\beta} \left\{ \left(\frac{1}{m}\,y - \frac{n}{m} \right) - \frac{1}{4p}\,y^2 \right\} dy = \frac{4}{3} \times \mathrm{BG} \times \mathrm{VH}$$

が成り立つというのである。

このことについての検証は具体例のみにとどめよう。

放物線を表す方程式を $y^2 = 2x$，直線を表す方程式を $y = x - 4$ とすると，それらの交点の y 座標は，$y^2 = 2y + 8$ から，$y = -2$，4 となる。そして，これらの y の値に対して，それぞれ，$x = 2$，8 である。それゆえ，$\mathrm{BG} = \sqrt{(8-2)^2 + (4+2)^2} = 6\sqrt{2}$ である。一方，$y' = \dfrac{1}{y}$ であるから，傾きが，与えられた直線に等しい，1 である接線の接点の y 座標は $y = 1$ となる。このとき，$x = \dfrac{1}{2}$ であるから，その接点と与えられた直線との距離は $\mathrm{VH} = \dfrac{|\frac{1}{2} - 1 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{9}{2\sqrt{2}}$ となる。

以上のことから，

$$S = \int_{-2}^{4} \left(y + 4 - \frac{1}{2}\,y^2 \right) dy = 18\ ,\ \ \text{三角形 BVG} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{27}{2}$$

となるから，確かに，(切片 BVG) $= \dfrac{4}{3}$ (三角形 BVG) である。

(12) 楕円 (の切片) の面積

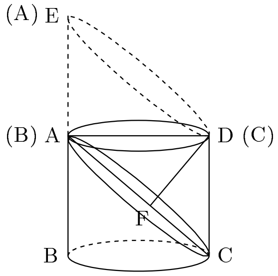
楕円の全体 (あるいは切片) の面積を初めて算出したのは誰か，ということは調べ得なかった。しかし，アルキメデスが『放物線の求積』の「序文」の中で

「前の時代に幾何学に携わった人びとは，与えられた 1 つの円や与えられた 1 つの欠円 (円

> の切片) に等しい面積の直線図形を見出すことの可能なことを証明しようと試みました。ついでその人たちは，全円錐の切断と 1 つの直線によって囲まれる面積を，正方形になおそう (求積しよう) と努めましたが，…… 」(『ギリシアの科学』p.403)

と述べていることからすると，紀元前 3 世紀には既にそれを算出する試みがなされていたのかも知れない。

時代はずっと下るが，楕円全体の面積の算出について，関 孝和 (せき たかかず：1642?–1708) が残したというアイデアを紹介しよう (『東西数学物語』pp.239–240)。



直円柱 ABCD を斜めに切断すると，その切り口には楕円 AC が現れる。その面積を S としよう。2 つに切断された円柱の切断面より下の部分 ABC を AD と BC が重なるように上の部分 ADC にのせる。そうすると斜円柱 EACD ができる。その底面は楕円 AC で，高さは DF である。そして，直円柱 ABCD と斜円柱 EACD は体積が等しい。このことから面積 S を求めようというのである。

まず，直円柱の体積 V_1 は 底面 BC の面積 × 高さ AB であるから，$V_1 = \pi\left(\dfrac{\mathrm{BC}}{2}\right)^2\mathrm{AB} = \dfrac{\pi}{4}\cdot\mathrm{BC}^2\cdot\mathrm{AB}$ である。

次に，斜円柱の高さ DF は，△ACD と △ADF が相似であることから，AC : CD = AD : DF より，$\mathrm{DF} = \dfrac{\mathrm{CD}\cdot\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ となる。それゆえ，斜円柱の体積 V_2 は $V_2 = S\cdot\dfrac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ である。

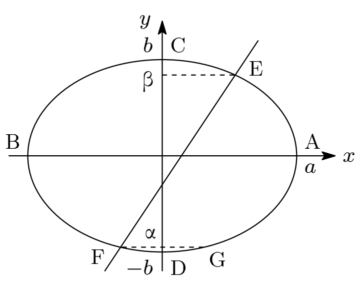
ここで，$V_2 = V_1$ であることから，$S\cdot\dfrac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\pi}{4}\cdot\mathrm{BC}^2\cdot\mathrm{AB}$ となり，

$$S = \frac{\pi}{4}\cdot\mathrm{BC}^2\cdot\mathrm{AB}\times\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}} = \frac{\pi}{4}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AC} = \frac{\pi}{4}\cdot(\text{短径})\cdot(\text{長径})$$

が得られる。(底面の直径 BC が短径になることは直円柱を上から見てみれば，分かる。)

それゆえ，楕円を表す方程式が $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a > b)$ のときは，長径 $= 2a$，短径 $= 2b$ であるから，この楕円によって囲まれた図形の面積 S は $S = \pi a\,b$ となる。

現代的手法を用いて，つまり微分積分法によって，楕円の切片の面積を求めるには ……



楕円を表す方程式を $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ とし，直線を表す方程式を $y = mx + n\ (m > 0)$ として，それらの交点を E，F としよう。(他の点等については左図のとおりとする。)

さて，交点 E，F の y 座標を求めるために上の 2 式から x を消去すると，

$$\frac{a^2m^2 + b^2}{b^2m^2}\,y^2 - \frac{2n}{m^2}\,y + \frac{n^2 - a^2m^2}{m^2} = 0$$

となるから，この 2 次方程式から

$$y\ [\,=\beta,\ \alpha] = \frac{b^2n \pm abm\sqrt{a^2m^2 + b^2 - n^2}}{a^2m^2 + b^2}$$

が得られる。

さて，交点 E，F の x 座標をそれぞれ e，f とするとき，

(i) $e \geqq 0$，$f \geqq 0$ のとき

$$(\text{切片 EAF}) = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} - \left(\frac{1}{m}\,y - \frac{n}{m} \right) \right\} dy$$

(ii) $e \geqq 0$，$f < 0$ のとき［上図］

$$(\text{切片 EAF}) = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} - \left(\frac{1}{m}\,y - \frac{n}{m} \right) \right\} dy + 2\int_{-b}^{\alpha} \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\; dy$$

(iii) $e < 0$，$f < 0$ のとき

$$(\text{切片 EAF}) = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} - \left(\frac{1}{m}\,y - \frac{n}{m} \right) \right\} dy + 2\int_{-b}^{\alpha} \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\; dy + 2\int_{\beta}^{b} \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\; dy$$

(iv) $e < 0$，$f \geqq 0$

$m > 0$ なら，この場合はあり得ない

となる。なお，直線を表す方程式が $x = k$ のときも，被積分関数および積分区間 ($e = f = k$，$\alpha = -\beta$ に注意) を変えるだけで，同様にできる。

しかし，$\displaystyle\int \sqrt{b^2-y^2}\; dy = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{b^2-y^2} + b^2 \sin^{-1}\frac{y}{b} \right)$ であるから，ここに示したような，一般的な場合について計算するのは非常に煩瑣。

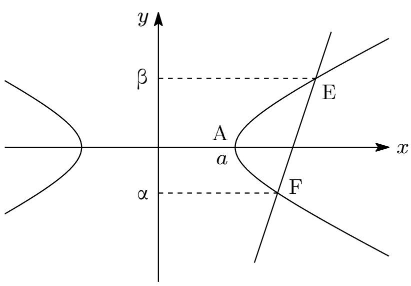
簡単な場合の例を挙げると ……

楕円，直線を表す方程式をそれぞれ $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$，$x = 2$ とすると，それらの交点は E(2，$\sqrt{3}$)，F(2，$-\sqrt{3}$) となるから，

$$\begin{aligned}(\text{切片 EAF}) &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 2\sqrt{4-y^2}\; dy = 2\int_{0}^{\sqrt{3}} 2\sqrt{4-y^2}\; dy = 4\int_{0}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-y^2}\; dy \\ &= 4\left[\frac{1}{2}\left(y\sqrt{4-y^2} + 4\sin^{-1}\frac{y}{2} \right) \right]_0^{\sqrt{3}} = 2\left(\sqrt{3} + 4\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 0 \\ &= 2\sqrt{3} + \frac{8}{3}\,\pi\end{aligned}$$

となる。

(13) 双曲線 (の切片) の面積



双曲線を表す方程式を $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，直線を表す方程式を $y = mx + n$ とすると，これら 2 式から x を消去した 2 次方程式

$$(a^2m^2 - b^2)y^2 + 2b^2ny + (a^2b^2m^2 - b^2n^2) = 0$$

から，それらの交点 E，F の y 座標が求められ，それは

$$y\,[\,= \beta,\ \alpha] = \frac{-b^2n \pm abm\sqrt{b^2 - a^2m^2 + n^2}}{a^2m^2 - b^2}$$

である。

いま，上図のように，交点 E，F の x 座標がともに a より大きいとすると，

$$(\text{切片 EAF}) = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \left(\frac{1}{m}\,y - \frac{n}{m} \right) - \frac{a}{b}\sqrt{b^2+y^2} \right\} dy$$

となる。

ここでは，$\displaystyle\int\sqrt{b^2+y^2}\;dy=\frac{1}{2}\left(y\sqrt{b^2+y^2}+b^2\log\left|y+\sqrt{b^2+y^2}\right|\right)$ に注意 (対数は，もちろん，自然対数)。

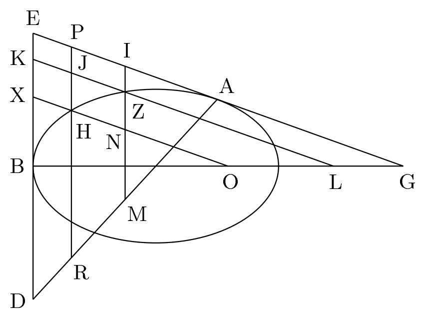
簡単な場合の例を挙げよう。

双曲線，直線を表す方程式をそれぞれ $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$，$x=10$ とすると，それらの交点は E(10, 7)，(10, -7) となるから，

$$\begin{aligned}(\text{切片 EAF})&=\int_{-7}^{7}\left(10-\sqrt{2}\sqrt{1+y^2}\right)dy=2\int_{0}^{7}\left(10-\sqrt{2}\sqrt{1+y^2}\right)dy\\&=2\left[10y-\sqrt{2}\times\frac{1}{2}\left(y\sqrt{1+y^2}+\log\left|y+\sqrt{1+y^2}\right|\right)\right]_0^7\\&=70-\sqrt{2}\ \log\left(7+5\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

となる。

円錐曲線の面積に関連して，アポロニオスは『円錐曲線論』第 3 巻命題 3 において，次のような命題を述べている (『ハイベア版』pp.322–325)。



「同じこと［円錐切断あるいは円の周囲に接する (2 つの) 直線が互いに出会うこと］が仮定されたとして，もし切断線［円錐曲線］あるいは円の周囲の上に 2 つの点がとられ，それらを通って接線に絶えず平行な直線が直径まで引かれるならば，そのように引かれた直線によってつくられた，そして直径の上に置かれた，四角形は互いに等しいであろう。［図は楕円のみを挙げた。］

確かに，切断線および接線および直径が，以前に私たちが述べた［AB が円錐切断あるいは円の周囲であり，線 AB に接する AG，BD が E において出会い，A，B を通って直径 AD，BG が引かれる］ように，さらに，切断線の上に任意の 2 つの点 Z，H が，とられるとし，Z を通って接線に平行な ZJKL，NZIM が，さらに，H を通って［接線に平行な］HXO，JPR が，引かれるとしよう。私は，LH = MJ，LN = RN である，と言う。

なぜならば。以前に私たちが証明した［命題 2］ことから，RPA = GH，AMI = GZ であり，ARP = AMI + PM であるから，GH = GZ + PM でもあろう。共通である GJ は取り去られるとしよう。それゆえ，残りの LH = JM である。ゆえに，LN = RN である。」

この命題は，円錐曲線に関連するある四辺形の面積が一定であることのアポロニオス流の表現なのだそうであるが，そのことについては『数学の黎明』などを見てもらおう。

(14) 弧長

一般に，連続曲線 $y=f(x)$ の $x=a$ に対応する点 A から $x=b$ に対応する点 B までの弧長 s は $s=\displaystyle\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\;dx$ で与えられる。

また，曲線が媒介変数表示 $x=f(t)$，$y=g(t)$ で表されるとき，$t=a$ に対応する点から $t=b$ に対応する点までの弧長 s は $s=\displaystyle\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\;dt$ で与えられる。

さらに，曲線が極方程式 $r=f(\theta)$ で表されるとき，$\theta=\alpha$ に対応する点から $\theta=\beta$ に対応する点までの弧長 s は $s=\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$ で与えられる。

ただし，これらの積分の値が簡単に得られるとは限らない。

はじめに，楕円 $x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$ の場合は，$\dfrac{dx}{d\theta}=-a\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=b\cos\theta$ であるから，$\theta=0$ に対応する点から $\theta=\alpha$ に対応する点までの弧長 s は

$$\begin{aligned}
s&=\int_0^{\alpha}\sqrt{(-a\sin\theta)^2+(b\cos\theta)^2}\,d\theta=\int_0^{\alpha}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\,d\theta\\
&=\int_0^{\alpha}\sqrt{a^2\left(1-\cos^2\theta\right)+b^2\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\alpha}\sqrt{a^2-\left(a^2-b^2\right)\cos^2\theta}\,d\theta\\
&=a\int_0^{\alpha}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2\theta}\,d\theta=a\int_0^{\alpha}\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}\,d\theta\qquad\left(e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)
\end{aligned}$$

となる。が，この最後の積分は初等関数では表せない。なお，この積分は無限級数で表すことができて，

$$s=a\int_0^{\alpha}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}\,e^{2n}\cos^{2n}t\right)dt$$

となるらしい (『解析演習』pp.251，200，240)。

$\theta=\gamma$ に対応する点から $\theta=\delta$ に対応する点までの弧長 s は $s=\displaystyle\int_{\gamma}^{\delta}=\int_0^{\delta}-\int_0^{\gamma}$ とすれば求められるから，積分の下端は 0 としても一般性を失わない。そこで，積分の下端は 0 としてある。

ところで，楕円を表す方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ とするときは，$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ であるから，

$$\begin{aligned}
s&=\int_0^{c}\sqrt{1+\left(\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\,dx=\int_0^{c}\sqrt{\frac{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}{a^2-x^2}}\,dx\qquad\left(e=\sqrt{a^2-x^2}/a\right)\\
&=\int_0^{c}\sqrt{\frac{a^2-e^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx\qquad[x=a\sin\theta\text{ とおいた}]\\
&=\int_0^{\gamma}\sqrt{\frac{a^2-e^2a^2\sin^2\theta}{a^2-a^2\sin^2\theta}}\,a\cos\theta\,d\theta=a\int_0^{\gamma}\sqrt{1-e^2\sin^2\theta}\,d\theta
\end{aligned}$$

となろう。

楕円の求長に関連して出てくる積分

$$E(k,\ \varphi)=\int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta\quad,\qquad E(k,\ x)=\int_0^{x}\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt$$

を第 2 種の (不完全) 楕円積分という $[t=\sin\theta]$。また，$\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ とした，

$$E(k)=E\left(k,\frac{\pi}{2}\right)[=E(k,\ 1)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$$

を第 2 種の完全楕円積分という。

さらに，ここには現れていないが，

$$F(k,\ \varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta\ ,\ F(k,\ x)=\int_0^{x}\frac{1}{\sqrt{\left(1-t^2\right)\left(1-k^2t^2\right)}}\,dt$$

$$K(k)=F\left(k,\frac{\pi}{2}\right)[=F(k,\ 1)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta$$

をそれぞれ第 1 種の (不完全) 楕円積分，完全楕円積分という。

また，放物線を表す方程式を $y^2 = 4px$ とすると，$y = \pm 2\sqrt{px}$ となるから，+ の方について見ることにして，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{p}{x}}$ となる。従って，$x = 0$ に対応する点から $x = a$ に対応する点までの弧長 s は

$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^a \sqrt{1 + \left(\sqrt{\frac{p}{x}}\right)^2}\, dx = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{p}{x}}\, dx = \int_0^a \frac{\sqrt{x+p}}{\sqrt{x}}\, dx \\
&= \int_0^{\sqrt{a}} \frac{\sqrt{t^2+p}}{\sqrt{x}} \cdot 2\sqrt{x}\, dt \qquad [\sqrt{x} = t \text{ とおいた}] \qquad = 2\int_0^{\sqrt{a}} \sqrt{t^2+p}\, dt \\
&= 2\left[\frac{1}{2}\left(t\sqrt{t^2+p} + p\log\left|t + \sqrt{t^2+p}\right|\right)\right]_0^{\sqrt{a}}
\end{aligned}
$$

で与えられる。

さらに，双曲線 $x = a\sec\theta$，$y = b\tan\theta$ では，$\dfrac{dx}{d\theta} = a\sec\theta\tan\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta} = b\sec^2\theta$ であるから，$\theta = 0$ に対応する点から $\theta = \alpha$ に対応する点までの弧長 s は

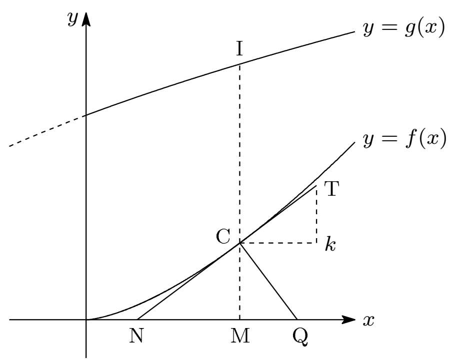
$$
\begin{aligned}
s &= \int_0^\alpha \sqrt{a^2\sec^2\theta\tan^2\theta + b^2\sec^4\theta}\, d\theta = \int_0^\alpha \sqrt{\sec^2\theta\left(a^2\tan^2\theta + b^2\sec^2\theta\right)}\, d\theta \\
&= \int_0^\alpha \sqrt{\sec^2\theta\left\{a^2\left(\sec^2\theta - 1\right) + b^2\sec^2\theta\right\}}\, d\theta = \int_0^\alpha \sqrt{\sec^2\theta\left\{\left(a^2+b^2\right)\sec^2\theta - a^2\right\}}\, d\theta \\
&= a\int_0^\alpha \sqrt{\sec^2\theta\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\sec^2\theta - 1\right)}\, d\theta = a\int_0^\alpha \sqrt{\sec^2\theta\left(e^2\sec^2\theta - 1\right)}\, d\theta
\end{aligned}
$$

(ここで，$e = \sqrt{a^2+b^2}/a$) となろう。

以上のことから，楕円，双曲線では一般的に弧長を見出すのは困難。

17 世紀には，曲線の求積や求長についての研究が活発に行われた。求長に関して，最初に成功したのはニール (William Neile : 1637–1670) で 1657 年のことらしいが，翌 1658 年にはファン・ヘラート (Hendrik van Heuraet : 1634–1660) がこんにちの積分による求長へとつながる第一歩を記している。

ファン・ヘラートのアイデアは次のとおりである。



求長されるべき曲線 $y = f(x)$ に対して, 別に定めた定数 Σ について, つねに, $\mathrm{MC} : \mathrm{CQ} = \Sigma : \mathrm{MI}$ が成り立つような，求積可能な曲線 $y = g(x)$ を定めれば，その見出された曲線を基にして最初の曲線の弧長が求められるという。

左図において, 点 C における接線 NT, 法線 CQ について，$\Sigma : \mathrm{MI} = \mathrm{MC} : \mathrm{CQ} = \mathrm{MN} : \mathrm{NC} = \mathrm{C}k : \mathrm{CT}$ であるから，

$$\Sigma \times \mathrm{CT} = \mathrm{MI} \times \mathrm{C}k$$

がいえる。

いま，M(x，0) とし，Ck，CT をそれぞれ微小な dx，ds とすると，$\mathrm{MI} = g(x)$ で，接線 CT の傾きは $f'(x)$ だから，

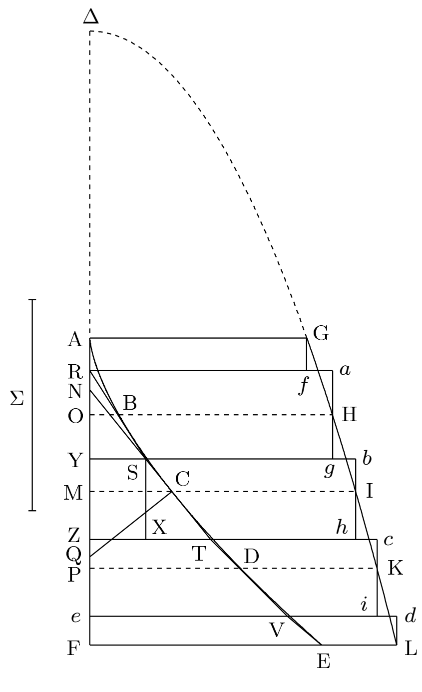
$$\Sigma \times ds = g(x) \times dx$$
$$ds^2 = \mathrm{C}k^2 + \mathrm{T}k^2 = dx^2 + \{f'(x)\}^2\, dx^2 = \left(1 + \{f'(x)\}^2\right) dx^2$$

となる。

従って，$\Sigma \displaystyle\int_0^a \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx = \int_0^a g(x)dx$ がいえて，これによって弧長が求められるという仕掛け。

ファン・ヘラートの成果は彼からスホーテン (Frans van Schooten : 1615–1660) に宛てられた，1659 年 1 月 13 日付けの書簡にしたためられており，それはスホーテンが詳しい注釈をつけたデカルト (René Descartes : 1596–1650) の『幾何学』(*La Géométrie*) の 1659 年発行のラテン語版 (*Geometria à Renato Des Cartes Anno 1637 Gallicè Edita*) に載せられている (同書，pp517–520)。彼自身の言葉を聞いてみよう。

「もし 2 つの曲線，例えば ABCDE，GHIKL，および直線 AF が与えられ，その性質が，(直線 AF の上に任意にとられた点 M から，与えられた曲線を C および I において切断し，そして，CQ が曲線 ABCDE に対して垂直であるように，垂線 MI が引かれたら) MC は CQ に対してちょうど与えられた別の直線 Σ が MI に対するようになる，であるならば，表面 AGHIKLF は与えられた直線 Σ および曲線 ABCDE に等しい別の直線によって囲まれる長方形に等しいであろう。



直線 AF が任意個数の部分に分割され，例えば，点 O，M および P において，曲線 ABCDE を点 B，C および D において，しかし，曲線 GHIKL を点 H，I および K において切断する，垂線 OH，MI，PK が引かれるとしよう。そして，点 A，B，C，D および E を通って，それらが互いに R，S，T および V において出会う，接線が引かれるとしよう。そして，それらの点を通って，AF 自身に垂直な直線 Ra，Yb，Zc，ed が引かれるとしよう。そして，点 G，H，I，K および L を通って，Ra を f および a において，Yb を g および b において，Zc を h および c において，ed を i および d において切断する，AF 自身に平行な直線が引かれるとしよう。最後に，S から直線 AF に平行な SX が引かれ，そして，接線 TS が N まで延長されるとしよう。

角 NCQ が直角であるために，CM は CQ に対して MN が NC に対するようであろう。しかし，MN は NC に対して SX が ST に対するようである。それゆえ，SX は ST に対して CM が CQ に対するようであろう。そして，CM は CQ に対して Σ が MI に対するようであるから，SX は ST に対して Σ が MI に対するようであろうし，そして，それゆえに，SX あるいは YZ および MI あるいは Yb による長方形は ST および Σ による長方形に等しいであろう。同じ方法によって，長方形 ce が TV および Σ による長方形に等しいこと，そして，長方形 dF が VE，Σ

による長方形に等しいこと，そして，長方形 aY が RS および Σ による長方形に等しいことが証明されるであろう。そのために，それらの長方形がすべて同時にとられたものは Σ およびすべての接線が同時にとられたものに等しい別の直線による長方形に等しいであろう。そしてそのために，任意個数の長方形と接線および平行線からなる図形についてそれは真実であるから，もしそれらの個数が無限に増やされるならば，その結果は表面 AGHIKLF と曲線 ABCDE の接線についても同様であり，表面 AGHIKLF が Σ および曲線 ABCDE に等しい直線による長方形に等しいことは明らかであることになる。これが証明されるべきことであった。」

この後，彼は曲線 $y^2 = \dfrac{1}{a}x^3$ について，$x = 0$ に対応する点から $x = v$ に対応する点までの弧長 s を算出したうえで，「もし $yy = \dfrac{x^3}{a}$ の代わりにこの方程式 $y^4 = \dfrac{x^5}{a}$，または $y^6 = \dfrac{x^7}{a}$，または $y^8 = \dfrac{x^9}{a}$ が，そして無限に前へ［続く］ものがおかれるならば，同じ性質の表面 AGHIKLF がつねに求積できることが見出されるであろうし，そのことから，これらすべての曲線は直線に変換されることになる」と述べているが，それらについては割愛しよう。

(15) 回転放物線体 (の切片) の体積

アルキメデスは『円錐状体と球状体について』(Περί Κωνοειδέων και Σφαιροειδέων：*De Conoidibus et Sphaeroidibus*) において円錐曲線をその軸のまわりに回転させてできる立体の体積について調べている。

彼は回転放物線体を直角円錐状体と呼んでいるが，引用部以外では回転放物線体の名を用いることにする。『円錐状体と球状体について』の「序文」で彼は次のように定義している (『アルキメデス著作集』第 1 巻 pp.274–277)。

「もし直角円錐切断［放物線］が直径を保ったまま回転させられて再び，そこから動くことが始まった，その位置に戻されるならば，その直角円錐切断に囲まれた図形は直角円錐状体［回転放物線体］と呼ばれ，そして，保たれている直径は軸と，さらに，そこにおいて軸が円錐状体の表面に触れる，点は頂点と呼ばれる。そして，もし平面が直角円錐状体に接し，そして，接している［平面に］平行な別の平面が円錐状体の何らかの切片を切り取るならば，切り取る平面において円錐状体の切断線によって囲まれた平面は切り取られた切片の底面と呼ばれ，そこにおいて第 2 の平面が円錐状体に接する点は頂点と，切片の頂点を通って円錐状体の軸に平行に引かれた，切片の内部に含まれる，直線の部分は軸と呼ばれる。」

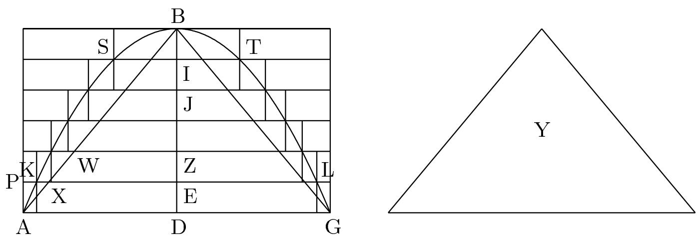
そして，『円錐状体と球状体について』命題 21 で，回転放物線体の切片の体積はそれと同じ底面，同じ軸をもつ円錐の体積の $\dfrac{3}{2}$ 倍であることが示される。次に，それを見てみよう (『アルキメデス著作集』第 1 巻 pp.386–397)。

「これまで述べてきたことによって，私たちは，提示されていた図について，［次のことを］証明すべきである。

軸に垂直な平面によって切り取られた任意の直角円錐状体の切片はその切片と同じ底面および同じ軸をもつ円錐よりその半分だけ大きい。

なぜならば。軸に垂直な平面によって切り取られた直角円錐状体の切片があるとし，軸を通

る別の平面によって切断された表面の切断線が直角円錐切断 ABG であるとし，さらに，切片を切り取っている平面の［上にできる］直線を GA，さらに，切片の軸を BD としよう。さらにまた，その切片と，同じ底面および同じ軸をもつ円錐があるとし，その頂点が B であるとしよう。円錐状体の切片がこの円錐よりその半分だけ大きいことが証明されなければならない。



なぜならば。その底面が直径 AG のまわりに描かれた円であり，さらに，軸が BD である，円錐よりその半分だけ大きい円錐 Y がつくられるとしよう。さらにまた，底面が直径 AG のまわりに描かれた円であり，さらに，軸が BD である，円柱があるとしよう。それゆえ，円錐 Y はその円柱の半分であろう。私は，円錐状体の切片が円錐 Y に等しい，と言う。

なぜならば。もし等しくないならば，大きいか小さいかである。[[1]] それゆえ，はじめに，もし可能ならば，大きいとしよう。それゆえ，外接させられた図形が内接させられた［図形］を，円錐状体の切片が円錐 Y を超えるほどの広がりより小さい広がりだけ超えるように，切片に立体図形が内接させられ，そして，それとは別に，等しい高さをもって配置された円柱たちによって外接させられるはずであり［命題 19］，そして，それらによって外接させられた図形がつくられた円柱の，最大のものは底面が直径 AG のまわりに描かれた円であり，さらに，軸が ED［である円柱］であり，最小のものは底面が直径 ST のまわりに描かれた円であり，さらに，軸が BI［である円柱］である。他方，それらによって内接させられた図形がつくられた円柱の，最大のものは底面が直径 KL のまわりに描かれた円であり，さらに，軸が DE［である円柱］であり，最小のものは底面が直径 ST のまわりに描かれた円であり，さらに，軸が JI［である円柱］である。さらに，すべての円柱の平面が，底面が直径 AG のまわりに描かれた円であり，さらに，軸が BD である，円柱の表面にまで延長されるとしよう。それゆえ，その円柱全体は，数においては外接させられた図形の円柱の数に等しく，さらに，大きさにおいてはそれらの最大のものに等しい，円柱たちに分割されるであろう。そして，切片のまわりに外接させられた図形は，切片が円錐を超える［量］よりも小さな広がりだけ，内接させられた図形を超えるから，［外接図形 − 内接図形 < 切片 − 円錐 であり，外接図形が切片より大きいので,］切片に内接させられた図形が円錐 Y より大きいこともまた明らかである。それゆえ，円柱全体の［うち］軸として DE をもつ最初の円柱は内接させられた図形の［うち］軸として DE をもつ最初の円柱に対して，$\mathrm{DA}^2 : \mathrm{KE}^2$ と同じ比をもつ。しかし，$\mathrm{DA}^2 : \mathrm{KE}^2 = \mathrm{BD} : \mathrm{BE} = \mathrm{DA} : \mathrm{EX}$ であり，同じ方法によって，私たちは，円柱全体の［うち］軸として EZ をもつ第 2 の円柱は内接させられた図形の［うちの］第 2 の円柱に対して，PE，すなわち DA，が ZW に対するのと同じ比をもち，そして，円柱全体の［うち］軸として DE に等しい直線をもつその他のそれぞれの円柱は内接させられた図形の［うち］同じ軸をもつそれぞれの円柱に対して，その底面の直径の半分が直線 AB，BD の間に切り取られたその［直径の］部分に対するのと同じ比をもつ，ことを証明するであろう。それゆえまた，その円柱の中に置かれた，底面が直径 AG のまわりに描かれた円であり，さらに軸が直線 DI である，すべての円柱［の和］は内接させられ

た図形のすべての円柱［の和］に対して，私たちが述べた，円柱の底面である円の半径である直線すべて［の和］がそれら［それぞれ］について AB，BD の間に切り取られた直線のすべて［の和］に対するのと同じ比をもつであろう。しかし，前者の直線［の和］は，直線 AD を除いた，後者［の直線の和］よりその 2 倍の大きさより大きい。それゆえまた，その円柱の中に置かれた，その軸が DI である，円柱全体は内接させられた図形の 2 倍の大きさより大きい。それゆえまた，その軸が DB である，円柱全体は内接させられた図形の 2 倍の大きさよりもはるかに大きい。さらに，それは円錐 Y の 2 倍の大きさであった。それゆえ，内接させられた図形は円錐 Y より小さい。しかし，このことが起こることはできない。なぜなら，それより大きいことは証明されているから。それゆえ，円錐状体［の切片］は円錐 Y より大きくはない。［[2]］しかし，また，［切片は円錐 Y より］小さくもない。なぜならば。再び，円錐 Y が円錐状体を超える大きさより小さい広がりだけ，一方が他方を超えるように，図形が内接および外接させられるとし［命題 19］，そして，その他は上と同様につくられるとしよう。さて，内接させられた図形は切片より小さく，そして，内接させられた図形は，切片が円錐 Y より小さい［量］よりも小さい広がりだけ，外接させられた図形より小さいから，外接させられた図形が円錐 Y より小さいことは明らかである。さらに，再び，円柱全体の［うち］軸として DE をもつ最初の円柱は外接させられた図形の［うち］軸として同じ ED をもつ最初の円柱に対して，$AD^2 : AD^2$ と同じ比をもつ。そして，円柱全体の［うち］軸として EZ をもつ第 2 の円柱は外接させられた図形の［うち］軸として EZ をもつ第 2 の円柱に対して，$DA^2 : KE^2$ と同じ比をもつ。さらに，それが BD が BE に対する［比］，および DA : EX をもつことも同様である。そして，円柱全体の中にあり，軸として DE に等しい直線をもつ，その他のそれぞれの円柱は外接させられた図形の中にあり，同じ軸をもつ，それぞれの円柱に対して，それらの底面の直径の半分の部分が直線 AB，BD の間に切り取られたその［直径の］部分に対するのと同じ比をもつであろう。それゆえまた，円柱全体の，その軸が BD である，すべての円柱［の和］は外接させられた図形のすべての円柱［の和］に対して，前者のすべての直線［の和］が後者のすべての直線［の和］に対するのと同じ比をもつであろう。しかし，円柱の底面である円の半径である，直線すべて［の和］はそれらから切り取られた直線すべてと直線 AD［の和］の 2 倍の大きさより小さい。それゆえまた，円柱全体のすべての円柱［の和］が外接させられた図形の［すべての］円柱［の和］の 2 倍の大きさより小さいことは明らかである。それゆえ，底面が直径 AG のまわりに描かれた円であり，さらに，軸が BD である円柱は外接させられた図形の 2 倍の大きさより小さい。しかし，そうではなく，2 倍の大きさより大きい。なぜなら，円錐 Y は 2 倍の大きさであり，証明されたように，外接させられた図形は円錐より小さいからである。それゆえ，円錐状体の切片は円錐 Y より小さいことはない。［[3]］さらに，それが大きいことはないことが証明されている。それゆえ，［切片は］切片と同じ底面および同じ軸をもつ円錐よりその半分だけ大きい。」

以上のように，アルキメデスは，回転放物線体の切片と同じ底面，同じ軸をもつ円錐よりその半分だけ大きいもう 1 つの円錐 Y をつくって，

［[1]］ 切片は円錐 Y より大きくはない，

［[2]］ 切片は円錐 Y より小さくはない，

という 2 つのことから，[[3]] 切片が円錐 Y に等しい，ということを結論するという背理法を用いて証明している。

ここに，円錐 Y = (同底同軸の円錐) + $\frac{1}{2}$(同底同軸の円錐) = $\frac{3}{2}$(同底同軸の円錐) ということだから，

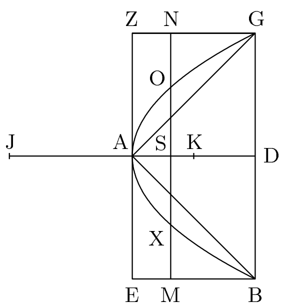
$$(\text{回転放物線体の切片の体積}) = \frac{3}{2}(\text{切片と同底同軸の円錐の体積})$$

ということになる。なお，この命題 21 では切片を切り取る平面は軸に垂直であったが，平面が軸に垂直でない場合は次の命題 22 で議論される。ただし，それはここでは割愛する。

ところで，背理法を用いるためにはあらかじめ結果となる値を知っておく必要があるが，そのためにアルキメデスが利用した機械的な手法が『方法』(Ἀρχιμήδους Περὶ τῶν μηχανικῶν θεωρημάτων πρὸς Ἐρατοσθένην ἔφοδος, *Archimedis De mechanicis propositionibus ad Eratosthenem methodus*, 「エラトステネス宛ての，機械学的定理についてのアルキメデスの方法」) と呼ばれる著作に残されている。エラトステネス (Ἐρατοσθένες (Eratosthenes) : B.C.276–B.C.194) に宛てたこの著作はハイベアによって 1906 年になって発見されたもので，アルキメデスの思考の跡が見られる貴重なものである。

回転放物線体の切片の体積についてはその中の命題 4 で扱われている。それを見てみよう (『新版アルキメデス著作集』(*Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii. Iterum edidit Johan Ludvig Heiberg, Corrigenda adiecit Evangelos S. Stamatis.*) 第 2 巻 pp.454–459)。

「さらに，軸に垂直な平面によって切り取られた直角円錐状体 [回転放物線体] の任意の切片はその切片と同じ底面，そして，同じ軸をもつ円錐よりその半分だけ大きい，ことはこの方法によって次のように確かめられる。



なぜならば。直角円錐状体がその軸を通る平面によって切断されるとし，その切断面の表面にできる直角円錐切断 [放物線] が ABG であるとし，さらに，軸に垂直な任意の別の平面によって切断されるとし，そして，それらの平面に共通の切断線が BG であるとし，さらに，切断線 [放物線] の軸が DA であるとし，そして，DA が J まで延長されて，そこに [DA に] 等しい AJ が置かれるとし，そして，DJ は，その中心 [支点] が点 A である，天秤 [の横木] であると想像されるとし，さらに，切片の底面は AD に垂直な直径 BG のまわりに描かれた円であるとし，そして，底面が，その直径が BG である，円であり，さらに，頂点が点 A である，円錐が [想像され]，さらにまた，その直径が BG であり，さらに，軸が AD である，円柱が想像されるとし，そして，直角な平行四辺形 [長方形] において BG に平行な任意の直線 MN が引かれるとし，さらに，MN を含む平面が AD に垂直に立てられるとしよう。それゆえ，これは円柱の中に，その直径が MN である，円を，さらに，直角円錐状体の切片の中に，その直径が XO である，円をつくるであろう。

直角円錐切断が BAG であり，さらに，その直径が AD で，規則正しく XS，BD が引かれていたから，DA : AS = $\text{BD}^2 : \text{XS}^2$ であろう [『放物線の求積』命題 3]。しかし，DA = AJ である。それゆえ，JA : AS = $\text{MS}^2 : \text{SX}^2$ である。しかし，$\text{MS}^2 : \text{SX}^2$ であるように，円柱の中に置かれた，その直径が MN である，円は直角円錐状体の切片の中に置かれた，その直径が XO である，円に対する [ユークリッド第 12 巻命題 2]。それゆえ，JA : AS であるよう

に，その直径が MN である円はその直径が XO である円に対するであろう。それゆえ，円柱の中に置かれた，その直径が MN である，円は，その位置はそのままで，その重心が J であるように天秤の上で J まで移動させられて［そこに］据えられた，その直径が XO である，円と点 A の両側で釣り合いを保つ。そして，その直径が MN である円の重心は S であり，その直径が XO である円の移動させられた重心は J であり，そして，それは逆比［の関係］にあり，JA : AS であるように，その直径が MN である円がその直径が XO である円に対する。さらに，同様に，私たちは，もし平行四辺形 EG の中に直線 BG に平行な別の任意の直線が引かれ，その直線を含む平面が AD に垂直に立てられるならば，［その平面によって］円柱の中に生じた，その位置はそのままの，円は直角円錐状体の切片の中に生じた，その重心が J であるように，天秤の上で J まで移動させられた，円と点 A に関して釣り合いを保つであろうということもまた，証明するであろう。それゆえ，［そのような円によって］円柱および直角円錐状体の切片が満たされると，その位置はそのままの円柱はその重心が J であるように，天秤の上で J まで移動させられて［そこに］据えられた，直角円錐状体の切片と点 A の両側で釣り合いを保つであろう。さらに，私たちが述べてきた［ように］，大きさにおいて点 A の両側で釣り合いを保ち，そして，円柱の重心である点 K は直線 AD を K において等しい 2 つの部分に分割し，さらに，移動させられた切片の重心は J であるから，それは逆比［の関係］にあり，JA : AK であるように円柱が切片に対するであろう。しかし，JA = 2AK である。それゆえまた，円柱は切片より 2 倍大きい。しかし，同時に，円柱は，底面が，その直径が BG である，円であり，さらに，頂点が点 A である，円錐より 3 倍大きい［ユークリッド第 12 巻命題 10］。それゆえ，切片は同じ円錐よりその半分だけ大きいことは明らかである。」

このように，アルキメデスは天秤の考えを利用していろいろな結果を導き出していたのであろうか。

(16) 回転双曲線体 (の切片) の体積

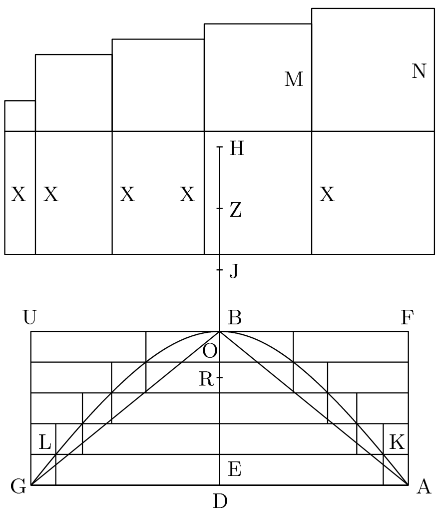
アルキメデスは回転双曲線体を鈍角円錐状体と呼ぶが，その定義は次のようである (『アルキメデス著作集』第 1 巻 pp.276–279)。

「もし平面の上に鈍角円錐切断［双曲線］，その直径，鈍角円錐切断に非常に近い直線［漸近線］があるとし，直径を保ったまま，これらすべての線がその上にある，平面が回転させられて再び，そこから動くことが始まった，その位置に戻されるならば，その頂点が，切断線［双曲線］の漸近線が互いにそれ自身を切断する，点であり，さらに，軸が［回転のときに］保っていた直径である，等脚円錐を鈍角円錐切断の漸近線［が回転してできる円錐］が囲むであろうことは明らかである。さらに，鈍角円錐切断に囲まれた図形は鈍角円錐状体［回転双曲線体］と呼ばれ，さらに，保たれているその直径は軸と，さらに，そこにおいて軸が円錐状体に触れる点は頂点と呼ばれる。さらに，鈍角円錐切断の漸近線によって囲まれた円錐は円錐状体を包んでいる［円錐］と呼ばれ，さらに，円錐状体の頂点および円錐状体を包んでいる円錐の頂点の間に置かれた直線は軸に隣接した［直線］と呼ばれる。そして，もし平面が鈍角円錐状体に接し，そして，接している平面に平行な別の平面が円錐状体の切片を切り取るならば，切り取る平面において円錐状体の切断線によって囲まれた平面は切り取られた切片の底面と呼ばれ，さらに，そこにおいて平面が円錐状体に接する点は頂点と，さらに，切片の頂点および円錐状

体を包んでいる円錐の頂点を通って引かれた，切片の内部に含まれる，直線の部分は軸と，さらに，それらの頂点の間に置かれた直線は軸に隣接した［直線］と呼ばれる。

直角円錐状体はすべて相似であるが，しかし，鈍角円錐状体は円錐状体を包んでいる円錐が相似であるものについて相似であると呼ばれるとしよう。」

そして，回転双曲線体の体積については命題 25 において語られる (『アルキメデス著作集』第 1 巻 pp.416–429)。



「軸に垂直な平面によって切り取られた鈍角円錐状体［回転双曲線体］の任意の切片はその切片と同じ底面および等しい高さをもつ円錐に対して，切片の軸および軸に隣接した直線の 3 倍の両方に同時［の和］に等しい直線が切片の軸および軸に隣接した直線の 2 倍の両方［の和］に等しい直線に対するのと同じ比をもつ。

軸に垂直な平面によって切り取られた任意の鈍角円錐状体があるとし，そして，円錐状体自身の軸を通る別の平面によって切断された切断線が鈍角円錐切断 ABG であるとし［命題 11b］，さらに，切片を切り取っている平面の［上にできる］直線を AG，さらに，切片の軸を BD とし，そして，軸に隣接した直線を BJ とし，そして，$\mathrm{BJ} = \mathrm{ZJ} = \mathrm{ZH}$ であるとしよう。［円錐状体の］切片はその切片と同じ底面および同じ軸をもつ円錐に対して，HD : ZD と同じ比をもつことが証明されるであろう。

それゆえ，［円錐状体の］切片と同じ底面および同じ軸をもつ円柱があるとし，さらに，その辺が直線 FA，GU であるとしよう。さらにまた，その中に文字 Y がある，何らかの円錐があるとし，［円錐状体の］切片と同じ底面および同じ軸 BD をもっている円錐に対して，HD : DZ と同じ比をもつとしよう。それゆえ，私は，円錐状体の切片は円錐 Y に等しい，と言う。なぜならば。もし等しくないならば，大きいか小さいかである。[[1]] はじめに，もし可能ならば，大きいとしよう。…… (この後，命題 21 と同様に，背理法による証明へと進むのであるが，それは省略する。)」

この引用部と同じ記号を用いることにして，回転双曲線体の切片の軸を BD，軸に隣接した直線を BJ とするとき，

(回転双曲線体の切片の体積) : (切片と同底等高の円錐の体積) $= (\mathrm{BD} + 3\,\mathrm{BJ}) : (\mathrm{BD} + 2\,\mathrm{BJ})$

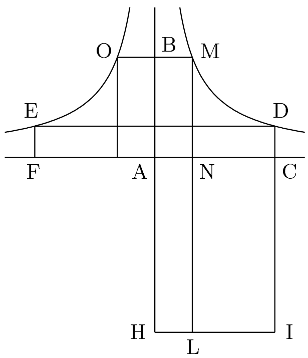
が成り立つということである。

なお，切片を切り取る平面が軸に垂直でない場合は命題 26 で述べられる。結論はもちろん命題 25 と同じく，上の比例式。

回転双曲線体ではないが，直角双曲線を回転させたときにできる立体について，トリチェリ (Evangelista Torricelli : 1608–1647) が興味深い結果を出している (1643 年頃か?) ので，それを

紹介しよう。『エヴァンジェリスタ・トリチェリ幾何学著作集』(*Opera Geometrica Evangelistae Torricellii*) 所収の『古代人の方法に従う双曲線による尖った立体の測定について』(*De Dimensione Acuti Solidi Hyperbolici juxta Methodum Antiquorum*) によると ······

「直角を囲んでいるその漸近線が AB，AC である，双曲線があるとせよ。そして，双曲線の上に任意にとられた点 D から BA に平行な DC が引かれるとしよう。さらに，双曲線によって B の部分の方向に無限に長い尖った立体ができ (遠くの点 B はつねに無限の距離にあると理解せよ)，そして，双曲線による前述の立体は 2 つの立体，すなわち，直円柱 FEDC および，確かにその底面は円 ED で，さらに高さは限界がない，尖った立体 EBD，からなるように，軸 AB のまわりに図形が回転させられるとしよう。



私は，そのような種類の立体 FEBDC の全体は，その高さが AC (すなわち，尖った立体の底面の半径) であり，さらに，底面の直径 AH が双曲線の軸全体に等しい，ある円柱に等しい，と言う。

なぜならば。(もし可能ならば) 双曲線による立体 FEBDC が円柱 AI より小さいとしよう。そして，円柱 AI の中に双曲線による立体に等しい何らかの円柱 NCIL が置かれるとし，そして，LNM が M において双曲線に出会う (漸近線 AB に平行であると仮定されているから，確かに出会うであろう) まで延長されるとしよう。

さて，円柱 NI は，混合された四辺形 NMDC の回転によってつくられる，環状の立体に等しいであろう。そして，それゆえに，確かに，双曲線による立体 FEBDC 全体より小さいであろう。ゆえに，同じものに等しくはない。これは仮定されたことに反する。

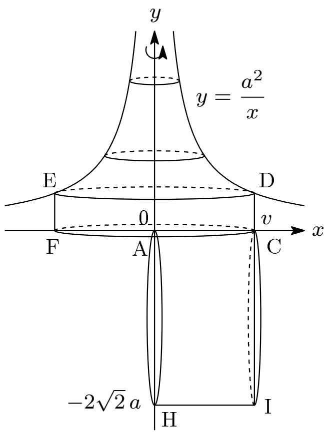
次に，(もし可能ならば) 双曲線による立体 FEBDC が円柱 AI より大きいと仮定されるとしよう。それゆえ，(有限の大きさか，あるいは無限［の大きさ］である) 双曲線による立体 FEBDC は円柱 AI より大きいと仮定されるから，それ自身の何らかの切片，純粋な［立体］FEOMDC，が円柱 AI に等しいであろう。これは不合理である。なぜなら，四辺形 NMDC の回転によってつくられた環状の立体は円柱 NI に等しく，さらに，円柱 ON は円柱 NH の半分だからである。ゆえに，双曲線による立体 FEOMDC の全体は円柱 AI より小さいであろう。

ゆえに，双曲線による尖った立体 FEBDC の全体が，無限の長さであるにもかかわらず，それでもやはり，前述の円柱 AI に等しいことは明らかである。小さいことも，大きいことも，できないからである。これが証明されなければならないことであった。」

ここに，直角双曲線を基にした無限の長さをもつ回転体が有限の体積をもつことが示されたのである。これは次のように確かめられる。

直角双曲線を表す方程式を $y = \dfrac{a^2}{x}$ として，この双曲線，y 軸，x 軸，および，直線 $x = v$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに回転してできる立体を考えよう。

トリチェリに従って，この y 軸の正の方向に無限に伸びた立体の体積を求めたいのだが，この立体を底面 CF から面 DE までの円柱の部分 P_1 と面 DE より y 軸の正の方向向きの部分 P_2 との 2 つに分けよう。



まず，円柱 P_1 の体積 V_1 は，高さすなわち D の y 座標が $\dfrac{a^2}{v}$ であることから，

$$V_1 = \pi v^2 \times \frac{a^2}{v} = \pi a^2 v$$

である。

次に，「尖った」部分 P_2 の体積 V_2 は，

$$\begin{aligned}V_2 &= \int_{\frac{a^2}{v}}^{\infty} \pi \left(\frac{a^2}{y}\right)^2 dy = \pi a^4 \int_{\frac{a^2}{v}}^{\infty} \frac{1}{y^2}\, dy \\ &= \pi a^4 \left(\lim_{u\to\infty} \int_{\frac{a^2}{v}}^{u} \frac{1}{y^2}\, dy\right) \\ &= \pi a^4 \left(\lim_{u\to\infty} \left[-\frac{1}{y}\right]_{\frac{a^2}{v}}^{u}\right) \\ &= \pi a^4 \left\{\lim_{u\to\infty} \left(-\frac{1}{u} + \frac{v}{a^2}\right)\right\} = \pi a^2 v\end{aligned}$$

となる。従って，無限に伸びた立体の体積 V は $V = V_1 + V_2 = 2\pi a^2 v$ となる。

そこで，AH の長さが $2\sqrt{2}\,a$ となるように点 H 定め，AH が直径となる円を底面とし，AC が高さとなる円柱を考えると，その円柱の体積 W は

$$W = \pi \left(\frac{2\sqrt{2}\,a}{2}\right)^2 \times v = 2\pi a^2 v$$

となる。

よって，$V = W$ がいえることになる。

考え方としては ……

(先のトリチェリの図の記号を援用することにして，) 線分 AC 上の任意の点 N (x 座標が x とする) に対して，y 軸の正の方向に円柱 NO をつくり，y 軸の負の方向に円 NJ をつくるとき，円柱 NO の側面積と円 NL の面積はともに $2\pi a^2$ で等しい。そこで，線分 AC 上のすべての点 N についてそれらの総和をとれば，［面積の総和，すなわち積分，が体積だから］それぞれ尖った立体，円柱の体積となり，1 つ 1 つの面積が等しいのだから総和［体積］としてもそれらは相等しい，ということになる。

ここにはカヴァリエリ (Bonaventura Francesco Cavalieri : 1598–1647) の原理 —— 円柱 NO の側面積と円 NL の面積が「不可分者」(indivisibilis) —— が見てとれるのだが，それについての考察は本稿のテーマではない。

(17) 回転楕円体 (の切片) の体積

回転楕円体をアルキメデスは球状体と呼ぶが，球状体には (長方球状体と扁平球状体の) 2 つのものがあることなどが，『円錐状体と球状体について』の「序文」で述べられる (『アルキメデス著作集』第 1 巻 pp.280–283)。

> 「もし鋭角円錐切断［楕円］が長い方の直径［長軸］を保ったまま回転させられて再び，そこから動くことが始まった，その位置に戻されるならば，その鋭角円錐切断に囲まれた図形は長方球状体［回転楕円体］と呼ばれ，しかし，もし鋭角円錐切断が短い方の直径［短軸］を保ったまま回転させられて再び，そこから動くことが始まった，その位置に戻されるならば，その鋭角円錐切断に囲まれた図形は扁平球状体［回転楕円体］と呼ばれる。さらに，保たれている直径はそれぞれ球状体の軸と，さらに，そこにおいて軸が球状体の表面に接する，点は頂点と，

さらに，軸の中点は中心と，そして，中心を通って軸に垂直に引かれた直線は直径と呼ばれる。そして，もし平行な平面が［長方，扁平の］どちらであろうと球状図形［球状体］に，それを切断することなく，接しており，接している平面に平行に球状体を切断している平面が引かれるならば，切断している平面において球状体の切断線［楕円］によって囲まれた平面はそれによって生じる切片の底面と呼ばれ，さらに，そこにおいて平行な平面が球状体に接する点は頂点と，さらに，切片のそれらの頂点を結んでいる，切片の内部に含まれる，直線の部分は軸と呼ばれる。さらに，球状体にただ 1 つの点で接している平面がその表面に接すること［命題 16］，および，接点を結んでいる直線は球状体の中心を通ることになること［命題 16］を私たちは証明するであろう。さらに，それらの軸が直径に対して同じ比をもっている，球状図形は相似あるといわれる。さらに，球状図形［の切片］および円錐状体の切片は，もし相似な図形から切り取られていて，相似な底面をもち，そして，底面の平面に垂直であるか，または，対応する底面の直径とともに等しい角をつくっている，それらの軸が対応する底面の直径と互いに同じ比をもつならば，相似であるといわれる。」

回転楕円体の切片の体積については，その切片を切り取る平面の状態に応じて，

(i) 平面が球状体の中心を通り，球状体の軸に垂直である

(ii) 平面が球状体の中心を通り，球状体の軸に垂直ではない

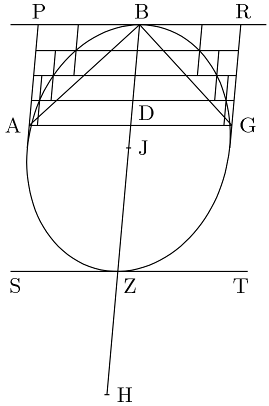
(iii) 平面が球状体の中心を通らず，球状体の軸に垂直である

(iv) 平面が球状体の中心を通らず，球状体の軸に垂直ではない

の 4 つの場合が考えられる。

ここでは，最後の (iv) の場合を見ることにしよう。平面が中心を通らないのだから，切片は大きいものと小さいものの 2 つができる。まず，小さい方の切片については『円錐状体と球状体について』命題 30 である (『アルキメデス著作集』第 1 巻 pp.474–481)。

「もし軸に垂直ではなく，しかも，中心を通って置かれてもいない，平面によって球状体が切断されるならば，その小さい方の切片はその球状体の切片と同じ底面および同じ軸をもつ円錐の切片に対して，つくられた切片の頂点を結んでいる直線の半分および大きい方の切片の軸の両方［の和］に等しい直線が大きい方の切片の軸に対するのと同じ比をもつ，ということも真実である。



なぜならば。球状図形が，私たちが述べたように，切断されるとしよう。そして，それが軸を通り，切断している平面に垂直な別の平面によって切断されたとして，図形の切断線を鋭角円錐切断［楕円］ABG とし［命題 11c］，さらに，図形を切断している平面の直線を GA としよう。そして，直線 AG に平行な，円錐切断と点 B，Z において接する，直線 PR，ST が引かれるとし，そして，同じ平面の上に直線 AG に平行に置かれた平面が立てられるとしよう。それゆえ，それらは，切片の頂点である，点 B，Z において球状体に接するであろう。それゆえ，切片の頂点を結ぶ直線が引かれるとし，それを BZ としよう。それゆえ，それは中心を通ることになるであろう［命題 16c］。そして，球状体の，およ

び鋭角円錐切断の中心を J としよう。さて，図形が軸に垂直ではない平面によって切断されることが仮定されているから，切断線は鋭角円錐切断であり，その直径は GA である［命題 14］。延長された直線 BD の上に軸をもち，直径 AG のまわりに描かれた鋭角円錐切断がその表面にある，円柱［命題 9］が，そして，頂点として点 B をもち，直径 AG のまわりに描かれた鋭角円錐切断がその表面にある，円錐［命題 8］がとられるとしよう。それゆえ，それはその切片と同じ底面および同じ軸をもつ何らかの円柱の断片，および，球状体の切片と同じ底面および同じ軸をもつ円錐の切片であろう。その頂点が B である球状体の切片が球状体のその切片と同じ底面および同じ軸をもつ円錐の切片に対して，DH : DZ と同じ比をもつであろうことが証明されなければならない。さらに，ZH = JZ としよう。

それゆえ，その中に文字 Y があり，その切片と同じ底面および同じ軸をもつ円錐の切片に対して，DH : DZ と同じ比をもつ何らかの円錐がとられるとしよう。さて，もし球状体の切片が円錐 Y に等しくないならば，[[1]] はじめに，もし可能ならば，大きいとし，…… (この後，背理法を用いて切片が円錐 Y に等しいことが示されるのだが，それは省略する。)」

アルキメデスは，この命題において，お得意の背理法を用いる論法によって，

$$(\text{球状体の小さい方の切片の体積}) : (\text{切片と同底同軸の円錐の体積}) = \left(\frac{\mathrm{BD}}{2} + \mathrm{DZ}\right) : \mathrm{DZ}$$

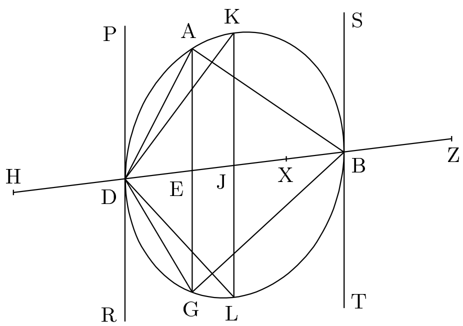
であることを示したのである。ここに，BD は球状体の切片の頂点を結ぶ直線，DZ は大きい方の切片の軸を表す。

次に，大きい方の切片については，球状体の切片の頂点を結ぶ直線を BD，小さい方の切片の軸を DE とするとき，

$$(\text{球状体の大きい方の切片の体積}) : (\text{切片と同底同軸の円錐の体積}) = \left(\frac{\mathrm{BD}}{2} + \mathrm{DE}\right) : \mathrm{DE}$$

となるのだが，それは『円錐状体と球状体について』命題 32 で次のように証明される (『アルキメデス著作集』第 1 巻 pp.490–499)。

「もし軸に垂直ではなく，しかも，中心を通って置かれてもいない，平面によって球状体が切断されるならば，その大きい方の切片は球状体の切片と同じ底面および同じ軸をもつ円錐の切片に対して，それからつくられた切片の頂点を結んでいる直線の半分および小さい方の切片の軸の両方［の和］に等しい直線が小さい方の切片の軸に対するのと同じ比をもつ，ということも真実である。



なぜならば。球状体が，私たちが述べたように，切断されるとしよう。そして，それが軸を通り，切断している平面に垂直な別の平面によって切断されたとして，図形の切断線を鋭角円錐切断［楕円］ABGD とし［命題 11c］，さらに，図形を切断している平面の直線を GA としよう。そして，直線 AG に平行な，鋭角円錐切断と点 B，D において接する，直線 PR，ST が引かれるとし，同じ平面から直線 AG に平行に置かれた平面が立てられるとしよう。それゆえ，それらは点 B，D において球状体に接するであろうし［命題 16b］，

切片の頂点は B，D であろう。それゆえ，そのようにつくられた切片の頂点を結んでいる（さらに，中心を通ることになる［命題 16c］）直線 BD が引かれるとし，そして，その中心を J とし，その頂点が B である切片は球状体の半分より大きいとしよう。さらに，直線 DJ に等しい直線 DH および同じものに等しい直線 BZ が付け加えられるとしよう。球状体の切片はその切片と同じ底面および同じ軸をもつ円錐の切片に対して，$\mathrm{EH} : \mathrm{ED}$ と同じ比をもつことが証明されなければならない。

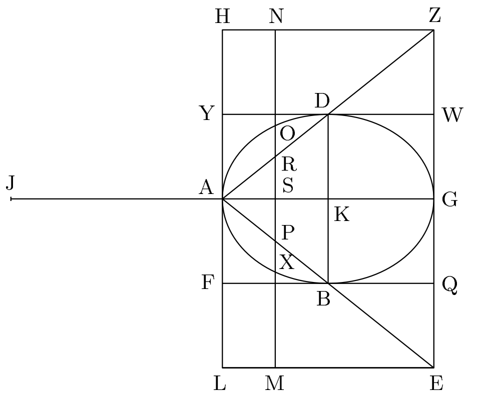
なぜならば。球状体が軸を通って置かれた，直線 AG の上に置かれた平面に平行な，平面によって切断されるとし，球状体の半分の部分に頂点として点 D をもつ円錐の切片が内接させられるとし，$\mathrm{XD} : \mathrm{JD} = \mathrm{JD} : \mathrm{ED}$ であるとしよう。それゆえ，上と同じ方法によって，私たちは，球状体の半分の部分に内接させられた円錐の切片が小さい方［の球状体］の切片に内接させられた円錐の切片に対して $\mathrm{XD} \times \mathrm{BJ} : \mathrm{BE} \times \mathrm{ED}$ と同じ比をもつこと，および，小さい方の切片に内接させられた円錐の切片がそれが内接させられた切片に対して $\mathrm{BE} \times \mathrm{ED} : \mathrm{ZE} \times \mathrm{ED}$ と同じ比をもつこと，を証明するであろう。それゆえ，球状体の半分の部分に内接させられた円錐の切片は球状体の小さい方の切片に対して $\mathrm{XD} \times \mathrm{BJ} : \mathrm{ZE} \times \mathrm{ED}$ と同じ比をもつであろう［ユークリッド第 5 巻命題 22］。それゆえ，球状体全体は球状体の半分の部分に内接させられた円錐の切片に対して $\mathrm{ZH} \times \mathrm{XD} : \mathrm{BJ} \times \mathrm{XD}$ と同じ比をもつであろうし，確かに，［$\mathrm{ZH} = 4\,\mathrm{BJ}$ であるから］両方とも［の前項］が両方とも［の後項］の 4 倍大きい。しかし，私たちが述べた円錐の切片は球状体の小さい方の切片に対して $\mathrm{XD} \times \mathrm{BJ} : \mathrm{ZE} \times \mathrm{ED}$ と同じ比をもつ。それゆえ，球状体全体はその小さい方の切片に対して $\mathrm{ZH} \times \mathrm{XD} : \mathrm{ZE} \times \mathrm{ED}$ と同じ比をもつであろう［ユークリッド第 5 巻命題 22］。さらに，大きい方の切片そのものは小さい方に対して $\mathrm{ZH} \times \mathrm{XD} - \mathrm{ZE} \times \mathrm{ED} : \mathrm{ZE} \times \mathrm{ED}$ と同じ比をもつ［ユークリッド第 5 巻命題 17 (除比の理)］。さらに，小さい方の切片はそれに内接させられた円錐の切片に対して $\mathrm{ZE} \times \mathrm{ED} : \mathrm{BE} \times \mathrm{ED}$ と同じ比をもつ。さらに，小さい方の切片に内接させられた円錐の切片は大きい方の切片に内接させられた円錐の切片に対して $\mathrm{BE} \times \mathrm{ED} : \mathrm{BE}^2$ と同じ比をもつ。確かに，私たちが述べた円錐の切片は，それらは同じ底面をもつから，高さ同士の比をもち，それらの高さは $\mathrm{DE} : \mathrm{EB}$ と同じ比をもつ。それゆえまた，球状体の大きい方の切片はそれに内接させられた円錐の切片に対して $\mathrm{HZ} \times \mathrm{XD} - \mathrm{ZE} \times \mathrm{ED} : \mathrm{BE}^2$ と同じ比をもつ。しかし，この比が $\mathrm{EH} : \mathrm{ED}$ と同じであることを，上と同じ方法によって，私たちは証明するであろう。」

このようにして，アルキメデスは球状体の切片の体積についての関係式を導いたのであるが，球状体全体の体積については次のような結果を得ている。『方法』の命題 3 として挙げられているものを見てみよう（『新版アルキメデス著作集』第 2 巻 pp.446–455)。

「この方法によって次のことも同様に確かめられる。［すなわち，］球状体の大円に等しい底面，さらに，球状体の軸に等しい高さをもっている円柱はその球状体よりその半分だけ大きいこと。これが確かめられると，任意の球状体が中心を通り軸に垂直な平面によって切り取られると，その球状体の半分はその切片と同じ底面および同じ高さをもつ円錐の 2 倍大きいことは明らかである。

なぜならば。何らかの球状体があるとし，それが軸を通る平面によって切断されるとし，そして，その表面において鋭角円錐切断［楕円］ABGD がつくられるとし，さらに，その直径が

AG，BD であり，中心が K であり，そして，球状体における直径 BD のまわりの円は AG に垂直であるとし，さらに，底面として，私たちが指摘した，円をもち，さらに，頂点が点 A である円錐が想像されるとし，そして，延長されたその円錐の表面が，G を通り底面に平行な平面によって切断されるとしよう。それゆえ，その切断線は AG に垂直で，その直径が EZ である円であろう。さらにまた，底面として，その直径が EZ である，同じ円をもち，軸が直線 AG である，円柱があるとし，そして，延長された直線 GA にそれに等しい AJ が置かれるとし，JG が天秤［の横木］であり，さらに，その中心［支点］が点 A であると想像されるとし，平行四辺形 LZ において直線 EZ に平行な別の直線 MN が引かれるとし，さらに，MN において AG に垂直な平面が立てられるとしよう。それゆえ，この切断線は，円柱においてはその直径が MN である円になり，さらに，球状体においてはその直径が XO である円［『円錐状体と球状体について』命題 11c］，さらに，円錐においてはその直径が PR である円になるであろう。



そして，$GA : AS = EA : AP$［ユークリッド第 6 巻命題 4］$= MS : SP$［ユークリッド第 6 巻命題 4，第 5 巻命題 18］であるから，$JA : AS = MS : SP$ であろう。しかし，$MS : SP = MS^2 : MS \times SP$ であり，$MS \times SP = PS^2 + SX^2$ である。確かに，$AS \times SG : SX^2 = AK \times KG : KB^2 = AK^2 : KB^2$ であり，$AK^2 : KB^2 = AS^2 : SP^2$［ユークリッド第 6 巻命題 4］であるから，入れ換えられると，$AS^2 : AS \times SG = PS^2 : SX^2$ であろう。しかし，$AS^2 : AS \times SG = SP^2 : SP \times PM$ である［ユークリッド第 5 巻命題 9］。それゆえ，$MP \times PS = XS^2$ である［ユークリッド第 5 巻命題 9］。共通の PS^2 が加えられるとしよう。それゆえ，$MS \times SP$［ユークリッド第 2 巻命題 3］$= PS^2 + SX^2$ である。それゆえ，$JA : AS = MS^2 : PS^2 + SX^2$ である。しかし，$MS^2 : SX^2 + SP^2$ であるように，円柱の中に置かれた，その直径が MN である，円が，それらの直径が XO，PR である，円の両方［の和］に対する［ユークリッド第 12 巻命題 2］。それゆえ，その直径が MN であり，その位置が点 A のまわりにとどまっている円は，それらの直径が XO，PR であり，天秤の上で J まで移動させられて［そこに］据えられた両方の円［の和］と，J が両方［一緒］の重心であるように，釣り合いを保つであろう。さらに，その直径が MN であり，その位置がとどまっている円の重心は S であり［補題 7］，そして，それらの直径が XO，PR である，移動させられた両方同時の円の重心は J である。それゆえ，$JA : AS$ であるように，その直径が MN である円がそれらの直径が XO，PR である両方の円［の和］に対するであろう。さらに，同様に，私たちは，もし平行四辺形 LZ の中に直線 EZ に平行な別の直線が引かれ，そして，その直線から AG に垂直な平面が立てられるならば，［それによって］つくられた円柱の中の，その位置が点 A のまわりにとどまっている円は，［それによって］つくられた球状体および円錐の中の，両方［一緒］の重心が J であるように，天秤［の上］の点 J まで移動させられた両方同時の円［の和］と釣り合いを保つであろう。それゆえ，円柱，球状体，円錐が［そのように］とられた円によって満たされると，位置がとどまっている円柱は，両方［一緒］の重心が J であるように，天秤の上で J まで移動させられ

た［そこに］据えられた球状体および円錐［の和］と，点 A に関して釣り合いを保つであろう。そして，円柱の重心は点 K であり［補題 8］，さらに，結合された球状体および円錐［の重心］は，述べられたように，点 J である。それゆえ，JA : AK であるように，円柱が球状体および円錐の両方［の和］に対するであろう。しかし，AJ = 2 AK である。それゆえまた，円柱は球状体および円錐の両方［の和］の 2 倍である，すなわち，1 つの円柱は 2 つの円錐および 2 つの球状体［の和］に等しい。しかし，1 つの円柱は同じ円錐の 3 倍に等しい［ユークリッド第 12 巻命題 10］。それゆえ，3 つの円錐は 2 つの円錐および 2 つの球状体［の和］に等しい。共通のものである 2 つの円錐が取り去られるとしよう。それゆえ，その三角形が軸を通って置かれた AEZ である 1 つの円柱，それに等しい 2 つの球状体が残される。しかし，同様に，1 つの円錐は，それらの三角形が軸を通って置かれた ABD である 8 つの円錐に等しい。それゆえ，8 つの，私たちが述べたような，円錐は 2 つの球状体に等しい，すなわち，4 つの円錐が 1 つの球状体に等しい。それゆえ，球状体は，その頂点が点 A であり，さらに，底面が直径 BD のまわりに描かれた，AG に垂直な円である，円錐の 4 倍大きく，そして，球状体の半分は，私たちが述べた，円錐の 2 倍大きい。

さらに，平行四辺形 LZ の中に点 B，D を通って直線 AG に平行な FQ，YW が引かれるとし，その底面が直径 FY，QW のまわりに描かれた円であり，さらに，軸が直線 AG である円柱が想像されるとしよう。

それゆえ，軸を通って置かれたその平行四辺形が FW である円柱は，軸を通って置かれたその平行四辺形が FD である円柱の 2 倍大きく［ユークリッド第 12 巻命題 13］—— それらの底面は等しく，さらに，軸は 2 倍大きいから —— ，そして，軸を通って置かれたその平行四辺形が FD である円柱そのものは，その頂点が点 A であり，さらに，底面が直径 BD のまわりに描かれた，AG に垂直な円である円錐の 3 倍大きい［ユークリッド第 12 巻命題 10］から，軸を通って置かれたその平行四辺形が FW である円柱は，私たちが示した，円錐の 6 倍大きい。さらに，私たちは，球状体が同じ円錐より 4 倍大きいことを証明した。ゆえに，円柱は球状体よりその半分だけ大きい。これが証明されなければならないことであった。」

このように，球状体全体の体積については，

$$(\text{球状体の体積}) = \frac{2}{3}\,(\text{底面が球状体の軸に垂直な大円で，球状体の軸に等しい高さの，円柱})$$

となるのである。積分を使って確かめるのなら，回転させる前の楕円を表す方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b)$ とするとき，長方球状体については，

$$\begin{aligned}(\text{長方球状体の体積}) &= 2\times\pi\int_0^a y^2\,dx = 2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx\\ &= 2\pi\left[\frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{1}{3}\,x^3\right)\right]_0^a = \frac{4}{3}\,\pi ab^2\end{aligned}$$

$$(\text{円柱の体積}) = \pi b^2\times(2a) = 2\pi ab^2$$

となろう。

また，扁平球状体なら，$(\text{扁平球状体の体積}) = 2\pi\displaystyle\int_0^b x^2\,dy = \frac{4}{3}\,\pi a^2 b$ ，となる。

このことから，球の場合は $a=b$ であるから，球の体積は球の半径を r と表すと，

$$(\text{球の体積}) = \frac{4}{3}\,\pi r^3$$

ということになる。

(18) 円錐曲線の性質

この項では e は離心率を表すものとする。また，この項では証明は省略する。

『岩波 数学辞典』によれば，円錐曲線には次のような性質がある。

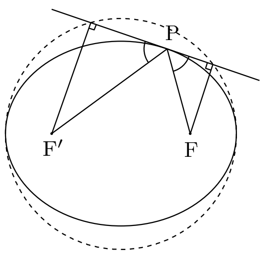
はじめに，楕円。

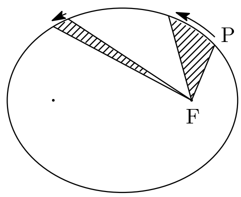
(i) 楕円の接線に対して，その楕円の焦点から下ろした垂線の足はその楕円の補助円の上にある。

(ii) 楕円上の任意の点 P とその楕円の焦点 F，F′ を結ぶ 2 つの直線 FP，F′P は，その楕円上の点 P における接線に対して等しい角をなす。［だから，一方の焦点を発した光線が楕円によって反射されると，それらの光線はすべて他方の焦点に集まる。］

(iii) 楕円の両焦点からその楕円の任意の接線までの距離の積は一定であり，それは b^2 に等しい。

(iv) F が定点，P が動く質点で，P はいつも F の方向に FP の長さの 2 乗に反比例する中心力で引かれ，F を焦点とする楕円 C の接線の方向へ向かう初速度で出発するとすれば，P はつねに楕円 C の上を動き，動径 FP の描く面積速度は一定である。(惑星運動に関するケプラー (Johannes Kepler : 1571–1630) の第 2 法則) ［面積速度とは，動径 FP が描く扇形の面積を S とし，微小時間 dt の間に S が dS だけ増したとするとき，比 dS/dt のことをいう。動径が単位時間内に描く面積ともいえる。］

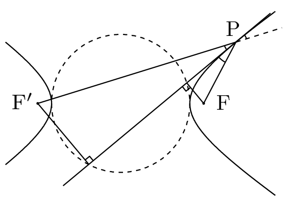


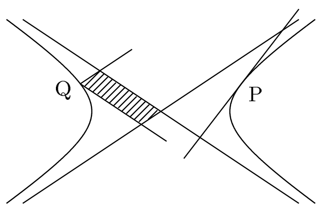


次に，双曲線。

(i) 双曲線上の任意の点 P とその双曲線の焦点 F，F′ を結ぶ 2 つの直線 FP，F′P の間の角は，その双曲線上の点 P における接線によって 2 等分される。［だから，一方の焦点を発した光線が双曲線によって反射されると，それらの光線はすべて他方の焦点から発した光線のように見える。］

(ii) 双曲線の両焦点からその双曲線の任意の接線までの距離の積は一定であり，それは b^2 に等しい。



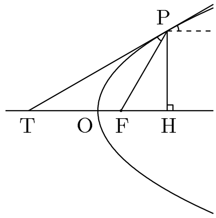


(iii) 双曲線上の任意の点 P における接線が両漸近線にはさまれる部分は接点 P によって 2 等分される。

(iv) 双曲線上の任意の点 Q から両漸近線に平行線を引くとき，それらの直線と両漸近線とで囲まれた平行四辺形の面積は一定である。

最後に，放物線。

(i) 放物線上の任意の点 P における接線は，焦点 F と P を結ぶ直線 FP および (主) 軸の方向と等しい角をなす。［だから，焦点を発した光線が放物線によって反射されると，それらの光線はすべて軸に平行になる。］



(ii) 放物線上の任意の点 P における接線が焦点 F を通る軸と交わる点を T とし，P からその軸に下ろした垂線の足を H とし，放物線の頂点を O とするとき，FP = FT である［すなわち，△FPT は二等辺三角形である］。また，OH = OT であった。

(19) 2 次曲線

2 元 2 次の方程式

$$F(x,\ y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

(ただし，$(a,\ b,\ h) \neq (0,\ 0,\ 0)$ とする)

で表される曲線を 2 次曲線という。円錐曲線を表す方程式はこの形に変形することができるから，円錐曲線は 2 次曲線である。が，ここで名づけた 2 次曲線は必ずしも円錐曲線ではない。

なお，2 次曲線がただ 1 つの中心をもつとき有心 2 次曲線といい，中心をもたない，または，無数に中心をもつとき無心 2 次曲線という。

そして，2 元 2 次方程式 (∗) に対して，

$$D_0 = \begin{vmatrix} a & h \\ h & b \end{vmatrix} = ab - h^2 \quad , \quad D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

とおいて，D をこの方程式が表す 2 次曲線の判別式という。

また，

$$C_0 = \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \overline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおくと，2 元 2 次方程式 (∗) について，

$$\begin{aligned} F(x,\ y) &= {}^t\overline{X}\,C\,\overline{X} = \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= {}^tX\,C_0\,X + 2\,{}^tF\,X + c = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & h \\ h & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} g & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \end{aligned}$$

となる。

結論を言うと，2 元 2 次方程式 (∗) が表す 2 次曲線は

$$\begin{cases} \text{(i)} & D \neq 0 & D_0 > 0 & \text{ならば} & \text{楕円または空集合} \\ \text{(ii)} & D \neq 0 & D_0 = 0 & \text{ならば} & \text{放物線} \\ \text{(iii)} & D \neq 0 & D_0 < 0 & \text{ならば} & \text{双曲線} \\ \text{(iv)} & D = 0 & D_0 > 0 & \text{ならば} & 1\,\text{点} \\ \text{(v)} & D = 0 & D_0 = 0 & \text{ならば} & \text{空集合または}\,1\,\text{直線または平行な}\,2\,\text{直線} \\ \text{(vi)} & D = 0 & D_0 < 0 & \text{ならば} & \text{相交わる}\,2\,\text{直線} \end{cases}$$

となる。のだが，その確認は『初等幾何學』などを見てもらうことにして，ここでは，方程式 $(*)$ の標準化［式の形を標準形に変形すること］の手順だけを紹介しておこう。

まず，$\begin{cases} ax + hy + g = 0 \\ hx + by + f = 0 \end{cases}$ とすると，この (連立) 方程式の解は

$$\begin{cases} D_0 \neq 0\,\text{のとき，ただ}\,1\,\text{つの解}\ x_0 = \dfrac{fh - bg}{D_0}，y_0 = \dfrac{gh - af}{D_0}\,\text{をもつ} \\ D_0 = 0\,\text{のとき，不能または不定} \end{cases}$$

である。そして，$D_0 \neq 0$ のとき，この 2 次曲線は有心 2 次曲線であって，$(\ x_0，y_0\ )$ がその中心の座標となり，$D_0 = 0$ のときは，無心 2 次曲線となる。

次に，$D_0 \neq 0$ として，中心が原点になるように，$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ という平行移動を行うと，方程式 $(*)$ は $a\,(x')^2 + 2hx'y' + b\,(y')^2 + a\,(x_0)^2 + 2hx_0y_0 + b\,(y_0)^2 + 2gx_0 + 2fy_0 + c = 0$，すなわち

$$a\,(x')^2 + 2hx'y' + b\,(y')^2 + \frac{D}{D_0} = 0 \qquad \cdots\cdots\ ①$$

となる。

さらに，$\begin{cases} x' = x'' \cos\theta - y'' \sin\theta \\ y' = x'' \sin\theta + y'' \cos\theta \end{cases}$ という回転を行うと，方程式 ① は

$$\begin{aligned} &\left(a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta\right)(x'')^2 + \{2h\cos 2\theta - (a-b)\sin 2\theta\}\,x''y'' \\ &\qquad + \left(a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta\right)(y'')^2 + \frac{D}{D_0} = 0 \end{aligned}$$

となるから，$x''y''$ の項を消去するために，

$$\begin{cases} a \neq b\,\text{のときは，}\tan 2\theta = \dfrac{2h}{a-b} \quad \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right) \\ a = b\,\text{のときは，}\cos 2\theta = 0 \quad \left(\text{だから，}\theta = \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

となるように角 θ を定めれば，方程式 ① は

$$A\,(x'')^2 + B\,(y'')^2 + \frac{D}{D_0} = 0 \qquad \cdots\cdots\ ②$$

$$(\text{ただし，}A + B = a + b，AB = ab - h^2)$$

となる。

ここで，$(x''y''\,\text{の項の係数}) = 0$ にするのだから，

$$\begin{aligned} AB &= \left\{(x'')^2\,\text{の項の係数}\right\} \times \left\{(y'')^2\,\text{の項の係数}\right\} - (x''y''\,\text{の項の係数})^2 \\ &= \left(a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta\right)\left(a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta\right) \\ &\qquad - \left\{h\cos 2\theta - \frac{1}{2}(a-b)\sin 2\theta\right\}^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= ab(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+(a^2+b^2)\sin^2\theta\cos^2\theta-(a-b)h(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\sin 2\theta \\
&\qquad\qquad -h^2(\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta)+(a-b)h\sin 2\theta\cos 2\theta-\frac{1}{4}(a-b)^2\sin^2 2\theta \\
&= ab\left\{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta\right\}+\frac{1}{4}(a^2+b^2)\sin^2 2\theta-(a-b)h\sin 2\theta\cos 2\theta \\
&\qquad\qquad -h^2+(a-b)h\sin 2\theta\cos 2\theta-\frac{1}{4}(a^2-2ab+b^2)\sin^2 2\theta \\
&= ab-h^2
\end{aligned}
$$

である。

方程式 ② は標準形目前の形だから，標準形への変形は省略する。

ところで，方程式 ② における $(x'')^2$，$(y'')^2$ の係数 A，B は，$A+B=a+b$，$AB=ab-h^2$ ということだから，方程式

$$t^2-(a+b)t+(ab-h^2)=0 \qquad \cdots\cdots\ (\#)$$

の解ということになる。この方程式 (#) は行列 C_0 の固有方程式だから，A，B は C_0 の固有値ということである。

それゆえ，図が不要ならば，方程式 (#) から C_0 の固有値を求めて，方程式 ① から方程式 ② を (回転の計算をとばして) 直接導くことができる。その辺りのことや実際の計算例などは例えば『線形代数学』などを参照のこと。

いずれにしろ，これで，方程式 $(*)$ が表す 2 次曲線が有心 2 次曲線 —— すなわち，楕円および双曲線 —— の場合に，方程式 $(*)$ は標準化できた。図式化すると，

$$
\begin{array}{ccccccc}
(x,\ y)\ \text{座標系} & \xrightarrow[\text{平行移動}]{} & (x',\ y')\ \text{座標系} & \xrightarrow[\text{回転}]{} & (x'',\ y'')\ \text{座標系} & \longrightarrow & \text{標準形} \\
& \begin{cases} x=x'+x_0 \\ y=y'+y_0 \end{cases} & & \begin{cases} x'=x''\cos\theta-y''\sin\theta \\ y'=x''\sin\theta+y''\cos\theta \end{cases} & & &
\end{array}
$$

となろう。

$D_0=0$ の場合，すなわち，方程式 $(*)$ が表す 2 次曲線が無心 2 次曲線の場合は次のようにする。この場合も平行移動と回転という 2 つの操作は同じなのだが，今度は回転を先に行う。

はじめに，$\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta \end{cases}$ という回転を行うと，方程式 $(*)$ は，先と同様に，

$$
\begin{aligned}
&\left(a\cos^2\theta+2h\sin\theta\cos\theta+b\sin^2\theta\right)(x')^2+\left\{2h\cos 2\theta-(a-b)\sin 2\theta\right\}x'y' \\
&\quad +\left(a\sin^2\theta-2h\sin\theta\cos\theta+b\cos^2\theta\right)(y')^2+2\left(g\cos\theta+f\sin\theta\right)x' \\
&\quad +2\left(-g\sin\theta+f\cos\theta\right)y'+c=0
\end{aligned}
$$

となるから，$a\neq b$ のとき，$\tan 2\theta=\dfrac{2h}{a-b}$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ から角 θ を定めれば，方程式 $(*)$ は

$$A(x')^2+B(y')^2+K=0 \qquad \cdots\cdots\ ③$$

となる。

このときも，先と同様に，$AB=D_0=0$ となるから，$A=0$ または $B=0$ である。どちらにしても一般性を失わないから，ここでは，$A=0$ とする。このときは，方程式 $(*)$ は

$$B(y')^2+2Lx'+2My'+c=0$$

となるが，この方程式は

$$B\left(y'+\frac{M}{B}\right)^2=-2L\left(x'-\frac{M^2-Bc}{2BL}\right) \qquad \cdots\cdots\ ④$$

ここに，$B = a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta$

$$L = g\cos\theta + f\sin\theta$$

$$M = -g\sin\theta + f\cos\theta$$

と変形できる。

次に，$\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{M^2 - Bc}{2BL} \\ y'' = y' + \dfrac{M}{B} \end{cases}$　という平行移動を行えば，方程式 ④ は

$$B\,(y'')^2 = -2Lx''$$

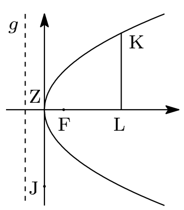
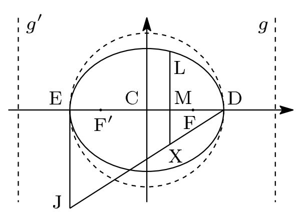
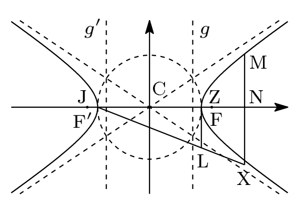
となる。

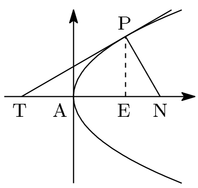
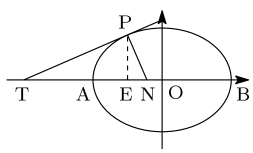
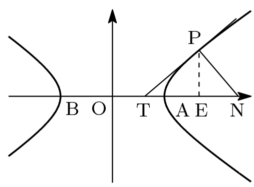
この最後の方程式は，容易に，放物線を表す方程式の標準形に変形できる。

なお，方程式 ③ における係数 A，B (いずれか一方は 0 だけど) が C_0 の固有値であることを利用すれば，回転についての計算をせずに，標準形を導くことができることは先の場合と同様である。

ここに述べた場合の他にいくつかの場合があるが，円錐曲線にはならない場合なので，それらについては割愛する。

(20) まとめ

	放物線	楕　円	双曲線
メナイクモス	直角円錐切断	鋭角円錐切断	鈍角円錐切断
アポロニオス	切断面と軸とのなす角が母線と軸とのなす角に等しい平面で切断	切断面と軸とのなす角が母線と軸とのなす角より大きい平面で切断	切断面と軸とのなす角が母線と軸とのなす角より小さい平面で切断
	ある母線に平行な平面で切断	対のうちの一方の円錐のすべての母線と交わる平面で切断	対の両方の円錐と交わる平面で切断
軌跡	1 定点および 1 定直線からの距離が等しい点の軌跡	2 定点からの距離の和が一定である点の軌跡	2 定点からの距離の差が一定である点の軌跡
	1 定点からの距離の，1 定直線からの距離に対する比 e が一定である点の軌跡		
	$e = 1$	$0 < e < 1$	$e > 1$
グラフ			
直立辺	ZJ	EJ	ZL
特性式	$\mathrm{KL}^2 = \mathrm{ZJ} \times \mathrm{ZL}$	$\mathrm{LM}^2 = \mathrm{EM} \times \mathrm{MX}$	$\mathrm{MN}^2 = \mathrm{ZN} \times \mathrm{NX}$

	放物線	楕　円	双曲線
標準形	$y^2 = 4px$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
直立辺の長さ	$4p$	$\dfrac{2b^2}{a}$ ($a > b$ のとき)	$\dfrac{2b^2}{a}$
焦点	$(p,\ 0)$	$\left(\pm\sqrt{a^2 - b^2},\ 0\right)$	$\left(\pm\sqrt{a^2 + b^2},\ 0\right)$
離心率	$e = 1$	$e = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$	$e = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$
準線	$x = -p$	$x = \pm\dfrac{a}{e}$	$x = \pm\dfrac{a}{e}$
中心	ない	両焦点を結ぶ線分の中点 (0, 0)	
漸近線	ない		$y = \pm\dfrac{b}{a}\,x$
媒介変数表示	$\begin{cases} x = pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$	$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$	$\begin{cases} x = a\sec\theta \\ y = b\tan\theta \end{cases}$
極方程式	$r = \dfrac{l}{1 - \cos\varphi}$ $(l = 2p)$	$r = \dfrac{l}{1 + e\cos\varphi}$ $\left(l = \dfrac{b^2}{a}\right)$ (準線は右側にとった)	$r = \dfrac{l}{1 - e\cos\varphi}$ $\left(l = \dfrac{b^2}{a}\right)$ (準線は左側にとった)
接線			
	$\mathrm{AT} = \mathrm{AE}$	$\mathrm{BE} : \mathrm{EA} = \mathrm{BT} : \mathrm{TA}$	
	$y_1 y = 2p\,(x + x_1)$	$\dfrac{x_1 x}{a^2} + \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$	$\dfrac{x_1 x}{a^2} - \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$
法線	$\mathrm{EN} = \dfrac{1}{2}$(直立辺)$= 2p$	$\mathrm{OE} : \mathrm{EN} =$ (直径) : (直立辺) $= 2a : \dfrac{2b^2}{a}$	
	$y_1 x + 2py = y_1\,(x_1 + 2p)$	$\dfrac{a^2 x}{x_1} - \dfrac{b^2 y}{y_1} = a^2 - b^2$	$\dfrac{a^2 x}{x_1} + \dfrac{b^2 y}{y_1} = a^2 + b^2$
面積	(切片の面積) $= \dfrac{4}{3}$(切片と同底等高の三角形)	(全楕円の面積) $= \pi\,a\,b$	

	放物線	楕　円	双曲線
回転体の体積	(回転放物線体の切片の体積) $= \dfrac{3}{2}$(切片と同底同軸の円錐の体積)	(回転楕円体の小さい方の切片の体積)：(切片と同底同軸の円錐の体積) $= \left(\dfrac{\mathrm{BD}}{2}+\mathrm{DZ}\right):\mathrm{DZ}$ (BD は切片の頂点を結ぶ直線，DZ は大きい方の切片の軸)	(回転双曲線体の切片の体積)：(切片と同底等高の円錐の体積) $= (\mathrm{BD}+3\,\mathrm{BJ}) : (\mathrm{BD}+2\,\mathrm{BJ})$ (BD は切片の軸，BJ は軸に隣接した直線)
		(回転楕円体の大きい方の切片の体積)：(切片と同底同軸の円錐の体積) $= \left(\dfrac{\mathrm{BD}}{2}+\mathrm{DE}\right):\mathrm{DE}$ (BD は切片の頂点を結ぶ直線，DE は小さい方の切片の軸)	
		(回転楕円体全体の体積) $= \dfrac{4}{3}\,\pi\,a\,b^2$	

［引用・参考文献］

本文中に示したものの他に次のような文献を利用した。

［1］ ユークリッド (中村 幸四郎，寺阪 英孝，伊東 俊太郎，池田 美恵・訳・解説)「ユークリッド原論」，共立出版，1971 (昭和 46)

［2］ 斎藤 憲，三浦 伸夫・訳・解説「エウクレイデス全集」(第 1 巻)，東京大学出版会，2008 (平成 20)

［3］ 田村 松平 (責任編集)「ギリシアの科学」，中央公論社 (世界の名著 9)，1972 (昭和 47)

［4］ アポッロニオス (ポール・ヴェル・エック・仏訳，竹下 貞雄・和訳)「円錐曲線論」，大学教育出版，2009 (平成 21)

［5］ L. オイラー (高瀬 正仁・訳)「オイラーの解析幾何」，海鳴社，2005 (平成 17)

［6］ B. L. ヴァン・デル・ウァルデン (村田 全，佐藤 勝造・訳)「数学の黎明　— オリエントからギリシアへ —」，みすず書房，1984 (昭和 59)

［7］ 佐々木 力「数学史」，岩波書店，2010 (平成 22)

［8］ V. カッツ (上野 健爾，三浦 伸夫・監訳)「カッツ 数学の歴史」，共立出版，2005 (平成 17)

［9］ 上垣 渉「アルキメデスを読む」，日本評論社，1999 (平成 11)

［10］ 矢野 健太郎「初等解析幾何學」，岩波書店 (岩波全書 113)，1950 (昭和 25)

［11］ 矢野 健太郎「図形と式　解析幾何入門」，講談社 (リフレッシュ数学 2)，1979 (昭和 54)

［12］ 杉浦 光夫，清水 秀男，金子 晃，岡本 和夫「解析演習」，東京大学出版会 (基礎数学 7)，1989 (平成元)

［13］ 塹江 誠夫，桑垣 煥，笠原 皓司「詳説演習 線形代数学」，培風館，1981 (昭和 56)

［14］ 平山 諦「増補新版 東西数学物語」，恒星社厚生閣，1973 (昭和 48)

索 引