極大および極小に関連する論考

『全集』pp.133–179

1629 年から 1662 年にかけて執筆された，極大・極小に関する論考で，『全集』は次の 9 つを載せている。

極大および極小を探求するための方法［および］曲線の接線について［の方法］(*Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam* [*et*] *de Tangentibus Linearum Curvarum*，1629 年)
同じ方法による，放物線状の円錐状体の重心［の決定］(*Centrum Gravitatis Parabolici Conoidis, ex Eadem Methodo*，1638 年)
［極大・極小を求めるための］同じ方法について (*Ad Eamdem Methodum* [*de Maximis et Minimis*]，1638 年)
極大および極小についての方法 (*Methodus de Maxima et Minima*)
極大および極小についての方法への補遺 (*Ad Methodum de Maxima et Minima Appendix*，1644 年)
［接線についての］同じ方法について (*Ad Eamdem Methodum* [*de Tangentibus*]，1640 年)
1642 年 11 月 10 日に尊敬すべき父メルセンヌに書き送られた問題 (*Problema Missum ad Reverendum Patrem Mersennum* 10^a *Die Novembris 1642*，1642 年)
屈折に関する解析 (*Analysis ad Refractiones*，1661 年)
屈折に関する総合 (*Synthesis ad Refractiones*，1662 年)

極値決定法およびその応用としての接線決定法，重心決定法など，微分法に関する先駆的な業績である。

極大および極小を探求するための方法［および］曲線の接線について［の方法］ 133

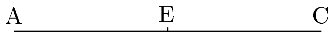
極大および極小の決定に関する全体の理論は 2 つの目印としておかれたもの［未知数］およびここでの 1 つの規則によって支えられている。

問題の任意の項［未知数］が A (問題によって満足させられる同等性に応じて，平面あるいは立体または長さのいずれか) であると定められて，A を含む項において極大または極小が，それが含まれている望むような階級［次数］によって，見出されるとし，元の項［A］と同じものがそれに代わって今度は $A+E$ であるとおかれるとし，そして，もう一度，A および E を含む項において，望むような係数の階級によって，極大または極小が見出されるとしよう。2 つの同等な同次のものの極大または極小が，ディオファントス (Διόφαντος (Diophantos)：250 頃活躍) が言うように，ほぼ等しくされる (adaequentur) とし，共通なものが取り除かれたもの (それがなし遂げられたものは，すべての同次のものがいずれか一方の側［辺］の中で E あるいはそれ自身の階級によって作用されている) において，すべて［の項が］E あるいはそれ自身のより高い階級によって，任意のものが 2 つのうちのどちらかの側の中で E によって作用された同次のものから完全に自由にされるまで，割られるとしよう。次に，両側からどのようなものにしろそこに含まれている E またはそれ 134
自身の階級を含む同次のものが追い出されて，残りのものが等しくされる，または，もし 1 つの側の中に何も残っていないならば，同じことになるが，拒否されたものが肯定されたものに等しくされるとしよう。その一番最後の方程式の解は，それが知られることによってより以前の解の跡をさかのぼって極大または極小が知られるようになるであろう，A の値を与えるであろう。

ディオファントスは『算術』(*Arithmetica*) 第 5 巻命題 11，14 などにおいて「近似値」「近似的に等しい」の意味で παρισότης あるいは παρισότητος ἀγωγή という語を使っており，これがクシュランダー (Xylander (本名は Wilhelm Holtzman)：1532–1576) やバシェ (Claude Gaspard Bachet de Méziriac：1581–1638) によってラテン語に訳されるときに *adaequalitas* や *adaequare* が用いられた，ということである (『全集』p.133)。

なお，この παρισότης は動詞 παρισόω（「等しくする」）と形容詞 πάρισον（「ほぼ等しい」）に由来する語だということである（［16］p.430)。
日本語では「向相等する」というようであるが，ここでは「ほぼ等しくする」とした。

私たちは例を提出する。直線 AC を，長方形 AEC［AE × EC］が極大になるように，E において分割しよう。



直線 AC が B といわれるとしよう。B 自身の一方の部分が A であるとおかれるとしよう。ゆえに，残りは $B-A$ であろうし，極大を見出さなければならない，それらの切片による長方形は $B \text{ in } A - A\ q.$ であろう。B 自身の一方の部分が今度は $A+E$ であるとおかれるとしよう。ゆえに，残りは $B-A-E$ であろうし，上の長方形 $B \text{ in } A - A\ q.$ にほぼ等しくされなければならない，それらの切片による長方形は $B \text{ in } A - A\ q. + B \text{ in } E - A \text{ in } E \text{ bis} - E\ q.$ であろう。共通なものが取り除かれたものは

$$B \text{ in } E \text{ が } A \text{ in } E \text{ bis} + E\ q. \text{ にほぼ等しくされる}$$

であろうし，すべてが E で割られたものは

$$B \text{ が } A \text{ bis} + E \text{ にほぼ等しくされる}$$

であろう。E が追い出されると，

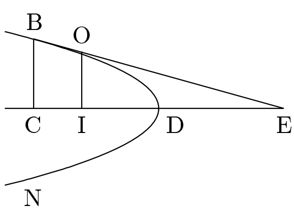
$$B \text{ が } A \text{ bis に等しくされる}$$

であろう。それゆえ，B が半分に分割されたものが問題の解である。より一般的な方法を与えることはできない。

極大・極小を求めるためのフェルマの方法は，ざっくりというと ……
極大・極小を求めたい関数 $y=f(x)$ について，
(1) $f(a)$ と $f(a+e)$ がほぼ等しい［向相等，$f(a) \simeq f(a+e)$］とおいて，
(2) この関係式を整理して，両辺を e の累乗で割って，
(3) 最後に，$e=0$ とすれば，極大・極小を与える x の値 a が求められる，
ということになろう。
この方法は「極大および極小についての方法」において「後の方法」と呼ばれることになる。

曲線の接線について［の方法］

私たちは任意の曲線の上の与えられた点における接線の発見［の方法］を上の方法に還元する［ことができる］。

135 

例えば，「放物線」BDN が与えられたとし，その頂点を D，直径を DC，そして，その上の与えられた点を B とし，放物線に接し，しかも，点 E において直径と交わる直線 BE が引かれるとしよう。

ゆえに，任意の点［O］が直線 BE の上にとられ，そこから縦線 (ordinatus) OI が，さらに，点 B から縦線 BC が引かれるとすると，点 O は放物線の外部にあるのだから，

CD が DI に対する比は BC の平方が OI の平方に対する比より大きい

であろう。しかし，三角形の相似性のために，

$$\text{BC の平方が OI の平方に対するように CE の平方が IE の平方に対し,}$$

それゆえ,

$$\text{CD が DI に対する比は CE の平方が IE の平方に対する比より大きい}$$

であろう。

さらに，点 B が与えられるとき，縦線 (applicata) BC が，ゆえに点 C が，与えられ，そのうえ，CD が与えられる。それゆえ，CD が与えられた D に等しいとしよう。CE が A であるとおかれるとしよう。CI が E であるとおかれるとしよう。

ゆえに,

$$D \text{ は } D - E \text{ に対して } A\ q. \text{ が } A\ q. + E\ q. - A \text{ in } E \text{ bis に対するより大きい比をもつ}$$

であろう。そして，中項および外項が互いに掛けられると,

$$D \text{ in } A\ q. + D \text{ in } E\ q. - D \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis は } D \text{ in } A\ q. - A\ q. \text{ in } E \text{ より大きい}$$

であろう。それゆえ，上の方法と同様に，[それらが] ほぼ等しくされるとしよう。それゆえ，共通なものが取り除かれたものは

$$D \text{ in } E\ q. - D \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis が } -A\ q. \text{ in } E \text{ にほぼ等しくされる}$$

であろう，または，同じことだが, 136

$$D \text{ in } E\ q. + A\ q. \text{ in } E \text{ が } D \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis にほぼ等しくされる}$$

であろう。すべて [の項] が E で割られると，ゆえに,

$$D \text{ in } E + A\ q. \text{ が } D \text{ in } A \text{ bis にほぼ等しくされる}$$

であろう。D in E が追い出されると，ゆえに,

$$A\ q. \text{ が } D \text{ in } A \text{ bis に等しくされる}$$

であろう。そしてそれゆえ,

$$A \text{ が } D \text{ bis に等しくされる}$$

であろう。ゆえに，私たちは CE が CD 自身の 2 倍であると証明した。確かに，これはそのような状況である。

この方法は決して失敗することはない。それどころか，非常に多くのとても美しい問題に拡張することができる。確かに，そのおかげで，もし時間が十分にあるならば，私たちは曲線および直線によって表された図形において，そして立体およびことによると他の場所で [述べるかもしれない] 多くの別のものにおいて，重心を見出す [ことができる]。

曲線および直線によって囲まれた広さの求積について，それどころか，それらによってつくられた立体の，同じ底面と高さによる円錐に対する比について，私たちは既にロベルヴァル (Gilles Personne de Roberval : 1602–1675) 氏とともに論じた。

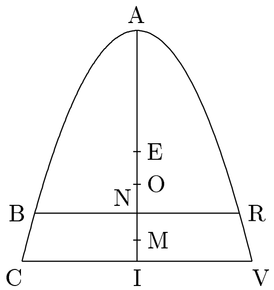
> 最後のことについては，ロベルヴァルあての 1636 年 9 月 22 日，11 月 4 日，12 月 16 日付けの書簡で論じられている。

同じ方法による，放物線状の円錐状体の重心 [の決定]

CBAV を放物線状の円錐状体とし，その軸を IA，直径に関する底面の円を CIV とせよ。一般的でしかも不変の重心が，新しい例によって，そして新しくしかも輝かしい使用法によって，この方 137

法が［極値などを］決定し損なうことはないということが明らかになるように，私たちが極大および極小および曲線の接線を探究した方法によって，探し求められる。

解析が整えられることができるように，軸 IA が B といわれるとし，重心が O であり，そして，未知の直線 AO が A といわれるとされるとしよう。軸 IA が任意の平面，例えば BN，によって切断され，IN が E であるとおかれるとしよう。ゆえに，NA は $B-E$ であろう。



この図形および相似な (放物線の，または放物線状の)［図形］において，底面に平行な［面］によって切り取られた部分にある，［それぞれの］重心は［それぞれの］軸を同じ比に分割することは明らかである (放物線についてアルキメデス (Ἀρχιμήδης (Archimēdēs)：前 287?–前 212) によって証明された，このことは，明らかに，すべての放物線および放物線状の円錐状体に異なることのない推論によって拡張される)。ゆえに，その軸が NA，底面の半径が BN である部分の重心は AN を点，例えば，E において

NA の AE に対する比が IA の AO に対する比と同じである

ように分割する。それゆえ，記号では，

B が A に対するように $B-E$ が軸の AE の部分に対する

であろう。それゆえ，これ［AE］は

$$\frac{B \text{ in } A - A \text{ in } E}{B}$$

等しくされるであろうし，2 つの重心の間の距離である，OE 自身は

$$\frac{A \text{ in } E}{B}$$

に等しくされるであろう。

> アルキメデス『平面板の平衡について』(*De Planorum Aequilibriis sive de Centris Gravitatis Planorum*) 第 2 巻命題 7
> 「直線および直角円錐切断［放物線］で囲まれた 2 つの相似な切片の重心はそれぞれの直径を同じ比に分割する。」

残りの部分 CBRV の重心が M であるとおかれるとすると，図形 CBRV は同じ凹部の部分にあるのだから，アルキメデスの『平面板の平衡について』の要請 9 によって，それは，図形の内部で，点 N および I の間にある必要がある。しかし，O を図形 CAV 全体の重心とし，点 E および M を［それぞれの］部分の重心とするとき，

CBRV の部分が BAR の部分に対するように EO が OM に対する。

さらに，アルキメデスの円錐状体において，CAV の部分は BAR の部分に，IA の平方が NA に平方に対するように，すなわち，記号では，

B $q.$ が B $q.$ $+$ E $q.$ $-$ B in E bis に対する

ように，対する。ゆえに，分割すると，

B in E bis $-$ E $q.$ が B $q.$ $+$ E $q.$ $-$ B in E bis に対するように
CBRV の部分は BAR の部分に対する。

さらに，私たちは

CBRV の部分が BAR の部分に対するように OE が OM に対する

ことを証明した。それゆえ，記号では，

$$B \text{ in } E \text{ bis} - E\ q. \text{ が } B\ q. + E\ q. - B \text{ in } E \text{ bis に対するように}$$

$$\text{OE あるいは } \frac{A \text{ in } E}{B} \text{ が OM に対する}$$

であろう。従って，これ［OM］は

$$\frac{B\ q. \text{ in } A \text{ in } E + A \text{ in } E\ c. - B \text{ in } A \text{ in } E\ q. \text{ bis}}{B\ q. \text{ in } E \text{ bis} - B \text{ in } E\ q.}$$

に等しくされるであろう。

アルキメデス『平面板の平衡について』第 1 巻要請 9

「どのような図形であろうと，その周囲が同じ凹部の部分にあるならば，その図形の重心はその内部にあること。」(*Archimedis Opera quae extant, novis demonstrationibus commentariisque illustrata*，Parisiis, Apud Claudium Morellum, via Jacobaea, ad insigne Fontis，1615，p.158)

なお，J. L. Heiberg 編集の『アルキメデス全集』(*Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii*，Lipsiae in aedibus B. G. Teubneri，Vol. II，1881，pp.144–145) では「要請 7」になっている。

アルキメデス『円錐状体と球状体について』(*De Conoidibus et Sphaeroidibus*) 命題 26 (命題 24)

「もし直角円錐状体［回転放物線体］からどのようにであれ引かれた平面によって 2 つの部分が切り取られるならば，そのような部分は互いにその軸の平方と同様の比をもつであろう。」(*Archimedis Opera quae extant,* $\cdots$，p.313 ; *Archimedis Opera omnia* $\cdots$，Vol. I，pp.410–411)

さらに，証明から，点 M は点 N および I の間にあるのだから，直線 OM は直線 OI より小さいであろう。さらに，直線 OI は記号では $B - A$ である。それゆえ，問題はこの方法に導かれ， 139

$$B - A \text{ と } \frac{B\ q. \text{ in } A \text{ in } E + A \text{ in } E\ c. - B \text{ in } A \text{ in } E\ q. \text{ bis}}{B\ q. \text{ in } E \text{ bis} - B \text{ in } E\ q.}$$

がほぼ等しくされ，そして，それぞれに分母が掛けられ，E で割られることによって，

$$B\ c. \text{ bis} - B\ q. \text{ in } A \text{ bis} - B\ q. \text{ in } E + B \text{ in } A \text{ in } E$$

および

$$B\ q. \text{ in } A + A \text{ in } E\ q. - B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis}$$

がほぼ等しくされるであろう。

両方の側に共通なものはないから，E によって作用されたすべての同次のものが追い出され，残りが等しくされると，

$$B\ c. \text{ bis} - B\ q. \text{ in } A \text{ bis が } B\ q. \text{ in } A \text{ に等しい}$$

となるであろう。それゆえ，

$$A \text{ ter が } B \text{ bis に等しくされる}$$

であろう。それゆえ，

IA は AO に，3 が 2 に対するように，対する，

そして，

AO は OI に対して，2 が 1 に対するように，対する。

これが見出されなければならないことであった。

異なることのない方法によって，任意の放物線および放物線状の円錐状体において重心が無限に見出される。しかし，例えば，どのようにして縦線の軸のまわりに回転された私たちの放物線状の

円錐状体において重心が探求されるかを示している余裕が今はない。私には，この私たちの円錐状体において重心は軸を，11 が 5 に対する比を保っている，部分に分割することを明らかにしたことで十分である。

曲線 $y = f(x)$ $(\geqq 0)$ が x 軸のまわりに回転してできる曲面，2 平面 $x = a$，$x = b$ $(0 \leqq a < b)$ によって囲まれた回転体の重心 $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ は，密度が一定であると仮定すると，

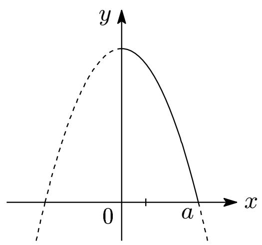
$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\int_a^b x\{f(x)\}^2\,dx}{\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx} \\ \overline{y} = \overline{z} = 0 \end{cases}$$

で与えられることが知られている。

いま，放物線を $y = \sqrt{ax}$ とし，$a = 0$ とすると (密度一定として)，

$$\overline{x} = \frac{\int_0^b x\,(\sqrt{ax})^2\,dx}{\int_0^b (\sqrt{ax})^2\,dx} = \frac{\int_0^b ax^2\,dx}{\int_0^b ax\,dx} = \frac{\left[\frac{1}{3}\,ax^3\right]_0^b}{\left[\frac{1}{2}\,ax^2\right]_0^b} = \frac{\frac{1}{3}\,ab^3}{\frac{1}{2}\,ab^2} = \frac{2}{3}\,b$$

であるから，この回転放物線体の重心は $\left(\dfrac{2}{3}\,b,\ 0,\ 0\right)$ であり，$\mathrm{AO} : \mathrm{OI} = 2 : 1$ である。



フェルマが最後に述べているのは，左図のような放物線を x 軸のまわりに回転させてできる立体の重心のことである。

この放物線の方程式を $y = -k(x-a)(x+a)$ とすると，

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{\int_0^a x(-kx^2+ka^2)^2dx}{\int_0^a(-kx^2+ka^2)^2dx} \\ &= \frac{\left[\frac{1}{6}\,k^2x^6 - \frac{1}{2}\,k^2a^2x^4 + \frac{1}{2}\,k^2a^4x^2\right]_0^a}{\left[\frac{1}{5}\,k^2x^5 - \frac{2}{3}\,k^2a^2x^3 + k^2a^4x\right]_0^a} \\ &= \frac{\frac{1}{6}\,k^2a^6}{\frac{8}{15}\,k^2a^5} = \frac{5}{16}\,a \end{aligned}$$

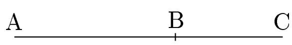
であるから，重心は $\left(\dfrac{5}{16}\,a,\ 0,\ 0\right)$ となる。そして，この点は x 軸，すなわち回転軸，を $5 : 11$ の比に内分する点である。

なお，この結果は 1636 年 11 月 4 日付けのロベルヴァルあての書簡で述べられている。

---

140 ［極大・極小を求めるための］同じ方法について

私は，私の方法によって，与えられた直線 AC を点 B において，AB の平方および直線 BC によって囲まれた立体が，直線 AC が任意の別の点において切断されることによって同じ仕方によって表された，すべての立体［の中］の極大であるように，切断することを望む。



私たちは，代数的な記号で，直線 AC が B と呼ばれ，未知の直線 AB が A［と呼ばれる］としよう。BC は $B - A$ であろう。それゆえ，立体 $A\ q.$ in $B - A\ c.$ が問題を満足させなければならない。

私たちは，今度は，A の位置に，$A + E$ を仮定することにしよう。$\overline{A + E}$ の平方および $B - E - A$ によってつくられるであろう，立体は

$$B \text{ in } A\ q. + B \text{ in } E\ q. + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis}$$
$$- A\ c. - A \text{ in } E\ q. \text{ ter} - A\ q. \text{ in } E \text{ ter} - E\ c.$$

であろう。

それを最初の立体

$$A\ q.\ \text{in}\ B - A\ c.$$

と，実際には等しくないけれども，あたかも等しいものであったかのように，比較する。そして，このような比較を私は，ディオファントスが言うように (なぜならば，彼が使ったギリシア語 παρισότης をそのように翻訳することができるから)，ほぼ等しい［向相等］と呼んだ。次いで，2 つの立体から共通であるもの，すなわち

$$B\ \text{in}\ A\ q. - A\ c.,$$

を取り除く。これがなし遂げられると，一方の側には何も残っていなくて，他方［の側］には

$$B\ \text{in}\ E\ q. + B\ \text{in}\ A\ \text{in}\ E\ \text{bis} - A\ \text{in}\ E\ q.\ \text{ter} - A\ q.\ \text{in}\ E\ \text{ter} - E\ c.$$

が残る。ゆえに，符号 + が印された同次のものが符号 − が印されているそれらと同等とみなされ，そして， 141

$$\text{一方の側}\ B\ \text{in}\ E\ q. + B\ \text{in}\ A\ \text{in}\ E\ \text{bis}$$

$$\text{および，他方［の側］}\ A\ \text{in}\ E\ q.\ \text{ter} + A\ q.\ \text{in}\ E\ \text{ter} + E\ c.$$

の間で比較されなければ［向相等されなければ］ならない。すべてを E で割ると，比較［向相等］は

$$B\ \text{in}\ E + B\ \text{in}\ A\ \text{bis} \quad \text{および} \quad A\ \text{in}\ E\ \text{ter} + A\ q.\ \text{ter} + E\ q.$$

の間で［なされるで］あろう。

この分離がなし遂げられると，もしすべての同次のものが E で割ることができるならば，同次のものの中にこのような除法を許すことができない，すなわち，ヴィエート (François Viète：1540–1603) の言葉を使うと，E によって作用されていない，何らかのものが見出されるまで，E による除法が繰り返されるであろう。しかし，提示された例において，私たちは除法を繰り返すことができないことを見出すから，ここで止まることになる。

次いで，両側から E によって作用されている同次のものを取り除くと，これ以上行うことができないものの間で，前のように，本当の相等ではなく，偽りの比較や向相等がなされなければならない，

$$\text{一方の側には}\ B\ \text{in}\ A\ \text{bis}\ \text{が，他方［の側］には}\ A\ q.\ \text{ter}\ \text{が}$$

残る。すべてを A で割ると，ゆえに，

$$B\ \text{bis}\ \text{が}\ A\ \text{ter}\ \text{に等しい}$$

であろうし，

$$B\ \text{は}\ A\ \text{に，}3\ \text{が}\ 2\ \text{に対するように，対する}$$

であろう。

私たちの問題に戻ることにし，そして，AC を点 B において

AC が AB に，3 が 2 に対するように，対する

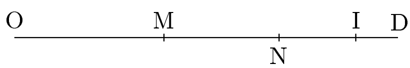
ように切断するなら，私は，BC が掛けられた AB の平方による立体は同じ直線 AC を別の任意の［点における］切断によってつくることができるすべて［の立体］の［中で］最大である，と言う。

この方法の確実さを明らかにするために，私はアポロニウス (Ἀπολλώνιος (Apollonius)：前 262– 142
前 200?) の本『定量切断』(Διωρισμένης τομῆς：*De determinata sectione*) から，パッポス (Πάππος (Pappos，Pappus)：4 世紀前半) が［『数学集成』(Συναγωγη：*Synagoge*，*Collectio*) の］第 7 巻の初めで述べているように，厄介な限界をもっている例を取り上げよう。そして，それに続くものを，パッポスが第 7 巻においてそれが見出されることを仮定するように，私は最も厄介であるとみな

す。なぜならば，その真実性は証明されていないけれども，その真実性を仮定するものと考えると，そこから別の帰結が引き出されるからである。この状況において，パッポスは最小の比率を μοναχὸν καὶ ἐλάχιστον，最小でただ 1 つの，と言う。それゆえ，確かに，もし与えられた大きさに関して，2 つ［の点］の位置が常に問題を満足させる，問題が提示されるならば，しかし，最小または最大の限界において，［問題を］満足させるはずの位置はただ 1 つだからである。それゆえに，パッポスは最小［の位置］を提示することができるそれぞれの比率を最小でただ 1 つの，すなわち唯一の，と言う。この状況において，コンマンディーノ (Frederico Commandino : 1506–1575) はパッポスが μοναχός［という言葉］によって認識しているものを疑っているし，彼は私がちょうど今説明した真実を知らなかった。ところで，命題はこうである。

> μοναχός : *unique*, *single*, *solitary*; *monk*
> ἐλάχιστος : *smallest*, *least*; of Time, *shortest*; of Number, *fewest*; (Math., ἐλάχιστα καὶ μέγιστα で *minima and maxima*)

与えられた直線を OMID とし，その上に与えられた 4 つの点を O，M，I，D としよう。部分 MI が点 N において，長方形 OND が長方形 MNI に対して，OND に等しい任意の長方形が MNI に等しい別の任意の長方形に対する比より，小さい比であるように，分割されるであろう。



私たちは，記号で，与えられた直線 OM が B と呼ばれ，与えられた直線 DM が Z，与えられた［直線］MI が G と呼ばれると仮定しよう。私たちは，いま，求めている MN が A と呼ばれると思うことにしよう。ゆえに，長方形 OND は記号で

$$B \text{ in } Z - B \text{ in } A + Z \text{ in } A - A\,q.$$

143 であろうし，長方形 MNI は

$$G \text{ in } A - A\,q.$$

であろう。それゆえ，

$$B \text{ in } Z - B \text{ in } A + Z \text{ in } A - A\,q. \text{ の } G \text{ in } A - A\,q. \text{ に対する}$$

比が直線 MI の別の任意の切断によってつくることができるすべて［の比の中で］の最小でなければならない。

再び，A の位置に $A + E$ を仮定すると，

$$B \text{ in } Z - B \text{ in } A - B \text{ in } E + Z \text{ in } A + Z \text{ in } E - A\,q. - E\,q. - A \text{ in } E \text{ bis が}$$

$$G \text{ in } A + G \text{ in } E - A\,q. - E\,q. - A \text{ in } E \text{ bis に対する}$$

比をもち，これは最初［の比］と向相等性 (adaequalitas) によって比較されなければならないであろう。すなわち，一方では最初の項に第 4［の項］を掛け，他方では第 2［の項］に第 3［の項］を掛けて，そして同時に，これら 2 つの積を比較しなければならないであろう。

$$\text{最初の項である，} B \text{ in } Z - B \text{ in } A + Z \text{ in } A - A\,q. \text{ の}$$

$$\text{最後の項である，} G \text{ in } A + G \text{ in } E - A\,q. - E\,q. - A \text{ in } E \text{ bis}$$

による積は

$$\begin{aligned}&B \text{ in } Z \text{ in } G \text{ in } A - G \text{ in } B \text{ in } A\,q. + G \text{ in } Z \text{ in } A\,q. - G \text{ in } A\,c.\\ &+ B \text{ in } Z \text{ in } G \text{ in } E - B \text{ in } A \text{ in } G \text{ in } E + Z \text{ in } A \text{ in } G \text{ in } E - A\,q. \text{ in } G \text{ in } E\\ &- B \text{ in } Z \text{ in } A\,q. + B \text{ in } A\,c. - Z \text{ in } A\,c. + A\,qq.\end{aligned}$$

$-B$ in Z in E $q.$ $+$ B in A in E $q.$ $-$ Z in A in E $q.$ $+$ A $q.$ in E $q.$

$-B$ in Z in A in E bis $+$ B in A $q.$ in E bis $-$ Z in A $q.$ in E bis $+$ A $c.$ in E bis

になる。

さらに，

第 2 の項，G in $A - A$ $q.$ の

第 3 の項，B in $Z - B$ in $A - B$ in $E + Z$ in $A + Z$ in $E - A$ $q. - E$ $q. - A$ in E bis

による積は

B in Z in G in $A - G$ in B in A $q. - G$ in B in A in $E + G$ in Z in A $q.$ 144

$+ G$ in Z in A in $E - G$ in A $c. - G$ in A in E $q. - G$ in A $q.$ in E bis

$- B$ in Z in A $q. + B$ in A $c. + B$ in A $q.$ in $E - Z$ in A $c.$

$- Z$ in A $q.$ in $E + A$ $qq. + A$ $q.$ in E $q. + A$ $c.$ in E bis

になる。

私はこれら 2 つの積を向相等性によって比較する。それらに共通であるものを取り除き，そして，残りを E で割ると，

一方には，B in Z in $G - A$ $q.$ in $G - B$ in Z in $E + B$ in A in E

$- Z$ in A in $E - B$ in Z in A bis $- Z$ in A $q.$ bis $+ B$ in A $q.$ bis

が，そして，

他方には，$- G$ in A in $E - G$ in A $q.$ bis $+ B$ in A $q. - Z$ in A $q.$

が残るであろう。

その中に再び E が見出されるすべての同次のものを消し去ると，

B in Z in $G - A$ $q.$ in $G - B$ in Z in A bis $- Z$ in A $q.$ bis $+ B$ in A $q.$ bis

が $- G$ in A $q.$ bis $+ B$ in A $q. - Z$ in A $q.$ に等しい

が残るであろうし，［項を］移動させると

$- B$ in A $q. + Z$ in A $q. - G$ in A $q. + B$ in Z in A bis が B in Z in G に等しい

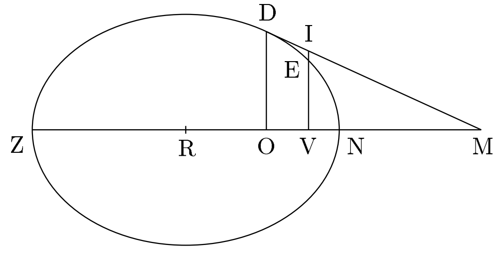
であろう。

その方程式の解から，私たちは，直線 A の値，すなわち MN の値，そして結果として点 N，を見出すであろうし，見出されるであろう点 N によって，

長方形 OMD が長方形 OID に対するように MN の平方が NI の平方に対する

ことを示す，パッポスの命題の真実性が明らかになるであろう。なぜならば，方程式の解は私たちを同じ作図に導くからである。

いよいよ，この方法が接線［を引くこと］に結び付けられる［ことを見る］ために，次のように進むことができる。



例えば，ZDN を楕円とし，その軸を ZN，そして中心を R としよう。その周の上に点，例えば D，を仮定して，そこから楕円に接する直線 DM を引くものとしよう。さらに，縦線 DO を引き，代数的な記号で，与えられた OZ が B と呼ばれ，与えられた ON が G と呼ばれると仮定しよう。求めている未知量で 145

ある，OM が A と呼ばれると考えよう (さらに，OM によって点 O および接線が出会う［点］の間の延長された軸の部分と理解しよう)。

DM は楕円に接するのだから，もし直線 IEV を，DO に平行に，O および N の間の任意に仮定された点 V を通って，引くならば，直線 IEV は楕円と同様に接線 DM を，例えば点 E および I において，切断することは確実である。そして，直線 DM は楕円に接するのだから，D を除くすべての点は楕円の外部にあるであろう。ゆえに，直線 IV は直線 EV より大きいであろう。それゆえ，

DO の平方の EV の平方に対する比は DO の平方の IV の平方に対する比より大きい

であろう。しかし，

DO の平方が EV の平方に対するように，

楕円の性質により，

長方形 ZON が長方形 ZVN に対し，

そして，

DO の平方が IV の平方に対するように OM の平方が VN の平方に対する。

それゆえ，

長方形 ZON の長方形 ZVN に対する比は OM の平方の VM の平方に対する比より大きい。

任意にとられた OV を E に等しいと仮定すると，

長方形 ZON は B in G であろう，

長方形 ZVN は B in $G - B$ in $E + G$ in $E - E\ q.$ であろう，

OM の平方は $A\ q.$ であろう，

VM の平方は $A\ q. + E\ q. - A$ in E bis であろう。

146 それゆえ，

B in G の B in $G - B$ in $E + G$ in $E - E\ q.$ に対する比は

$A\ q.$ の $A\ q. + E\ q. - A$ in E bis に対する比より大きい

であろうし，結果として，もし最初の項に最後［の項］が，そして第 2［の項］に第 3［の項］が掛けられるならば，確かに，最初の項の最後［の項］による積

B in G in $A\ q. + B$ in G in $E\ q. - B$ in G in A in E bis

は［第 2 と第 3 の積］

B in $G\ A\ q. - B$ in E in $A\ q. + G$ in E in $A\ q. - A\ q.$ in $E\ q.$

より大きいであろう。

それゆえ，私の方法に従って，これら 2 つの積が向相等性によって比較されなければならない。それらに共通であるものを取り除き，残りを E で割ると，

一方には，B in G in $E - B$ in G in A bis

他方には，$- B$ in $A\ q. + G$ in $A\ q. - A\ q.$ in E

が残るであろう。

ある程度直線 E をもっている同次のものを消し去ると，

一方には，$- B$ in G in A bis，他方には，$- B$ in $A\ q. + G$ in $A\ q.$

が残るであろう。

それら 2 つの項を，［私の］方法に従って，等しくしなければならない。そして，必要に応じて，項を移動すると，

$$B \text{ in } A - G \text{ in } A \text{ が } B \text{ in } G \text{ bis に等しい}$$

ことを見出すであろう。あなたはこの［方程式の］解がアポロニウスのものと同じであることを認識する。なぜならば。接線が見出されるであろう私の作図によって

$$B - G \text{ が } G \text{ に対するように } B \text{ bis が } A \text{ に対する，}$$

すなわち

$$\mathrm{ZO} - \mathrm{ON} \text{ が ON に対するように ZO bis が OM に対する，}$$

ようにならなければならず，しかし，アポロニウス［の作図］によって

$$\text{ZO が ON に対するように ZM が MN に対する}$$

ようにならなければならない。さらに，これら 2 つの作図は，明らかに，同じものになる。

私の方法の第 1 の場合だけでなく，第 2［の場合］にも，より多くの別の例を付け加えることが 147
できるが，これらで十分であり，それらが一般的なものであって決して失望させることがないということを十分に示している。私は規則の証明に，その達成を確かなものにすることができる非常に多くの別の使用法も，大学者であるロベルヴァル氏に私が送った例である重心，漸近線の発見法も，付け加えない。

最後の言明については，メルセンヌ (Marin Mersenne : 1588–1648) を介してロベルヴァルにあてた 1638 年 4 月の書簡で触れられているという。

極大および極小についての方法

私が，ヴィエートの混成法 (syncrasis) および倒置 (anastrophe) の方法を熟考していた，そして，相互に関連付けられた方程式の性質から見つけられるであろうそれらの使用法をより詳細に調査していた間に，そこから導かれるであろう極大および極小の発見に関する新しい方法 —— その助けによって，どのようなものであれ，古代のそして最近の幾何学の煩わしさを引き起こした，それらに関係している限界の言明 (διορισμόν) に関する疑問が非常に容易に打ち負かされる —— が心に思い浮かんだ。

「ヴィエートの混成法および倒置の方法」については『方程式の再検討および改良についての 2 つの論文』(*De Æquationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo* : 1591 年) を参照のこと。

syncrasis : *a mingling*, *blending*
σύγκρασις : *mixing together*, *commixture*, *blending*, *tempering*; *mixture*, *compound*
ἀναστροφή : *turning upside down*, *upsetting*, *overthrow*; *turning back*, *return*; *dwelling in* a place; *abode*, *haunt*, *the place where one tarries*; *mode of life*, *behaviour*; *delay*, *respite*, *time for doing* a thing; *occupation*, *concern*; *return*, *way back*; *recourse*

διορισμός : *division*, *distinction*; *logical distinction*; Math., *particular enunciation* of a problem; *statement of limits of possibility* of a problem

極大および極小は確かにただ 1 つの単独のものであり，パッポスが唯一 (μοναχός)［という言葉］によって認識していたことをコンマンディーノが知らないということを否認しないにもかかわら

148 ず，そのことはパッポスが予告し，古代の人々が既によく知っていた。そこから，境界の点の規定する両方の側について不確かな1つの方程式を仮定することができ，両側から仮定された2つ［の点］によって相互に関連付けられた不確かな2つの方程式は同等であり類似している，ことが従う。

μοναχός : *unique*; *solitary*, *deserted*; of legal documents, *executed in a single copy*

例として，直線 B がその切片によ［ってつくられ］る長方形が最大になるように切断されること，が提示されるとしよう。提示されたことを満足する点は，明らかに，与えられた直線を半分に切断し，最大の長方形は B の平方の4分の1に等しくされる。この直線の任意の別の切断から B の平方の4分の1に等しい長方形が生じることはないであろう。

しかし，もし同じ直線 B が，条件として，その切片による長方形が Z plano (これは B の平方の4分の1より小さいと仮定される) に等しいように切断する —— そのとき，提示されたことを満足するであろう2つの点は，確かに，最大の長方形の点から離されている —— こと，が提示されるとしよう。

なぜならば。直線 B の何らかの切片を A とすると，

$$B \text{ in } A - A \text{ quad. が } Z \text{ plano に等しい}$$

となるであろうし，この方程式は不確かであり，直線 A は2つの辺について解くことができることを示している。それゆえ，相互に関連付けられた方程式は

$$B \text{ in } E - E \text{ quad. が } Z \text{ plano に等しい}$$

であり，ヴィエートの方法によってこれら2つの方程式が比較されると，

$$B \text{ in } A - B \text{ in } E \text{ が } A \text{ quad. } - E \text{ quad. に等しくされる}$$

であろうし，すべて［の項］が $A - E$ で割られたものは

$$B \text{ が } A + E \text{ に等しい}$$

となるであろうし，それらの A および E は等しくないであろう。

もし，Z plani の代わりに，Z planum よりは大きいが B の平方の4分の1よりは小さい，別の平面が仮定されるならば，そのとき，互いに異なるであろう直線 A および E は前のものより小さく，分割点は長方形の最大を構成する点にいっそう近づくので，つねに，分割［された切片によってつくられた］長方形の増大によって A および E そのものの差は，最後に最大の長方形［がつく
149 られる］分割によって消え去るまで，小さくされるであろう。その結果，2つの量が等しくなるであろう，すなわち A が E に等しくされるであろうとき，解は唯一の (μοναξή) またはただ1つの場合において生じるであろう。

それゆえ，相互に関連付けられた上の2つの方程式について，ヴィエートの方法によって，B は $A + E$ に等しくされるであろうから，もし E が A 自身に等しくされる (このことは極大あるいは極小を構成する点においてつねに起こることは明らかである) ならば，ゆえに，提示された場合において，

$$B \text{ が } A \text{ bis に等しくされる}$$

であろう，すなわち，もし直線 B が半分に切断されるならば，その切片によ［ってつくられ］る長方形が最大であろう。

別の例は［次のようで］あろう。直線 B が，切片のうちの1つのものの平方にもう一方［の切

片］が掛けられたことによる立体が最大になるように，切断されるであろうこと。

1 つの切片が A であると提示されるとしよう。ゆえに，

B in A quad. $-$ A cub. が最大であろう。

相互に関連付けられた同等であり類似している方程式は

B in E quad. $-$ E cub.

である。ヴィエートの方法に従って比較されると，ゆえに，

B in A quad. $-$ B in E quad. が A cub. $-$ E cub. に等しくされる

であろうし，すべてが $A - E$ で割られたものは，相互に関連付けられた方程式の性質である，

B in A $+$ B in E が A quad. $+$ A in E $+$ E quad. に等しくされる

であろう。

最大が探し求められるように，E が A 自身に等しいとすると，ゆえに，

B in A bis が A quad. ter に等しくされる，

すなわち

B bis が A ter に等しくされる

であろう。命題は成り立つ。

しかし，2 項式による実際の除法は非常に面倒でありたいていは複雑であるから，相互に関連付 150
けられた方程式の辺［根］は互いにそれらの差によって，その計算においてその差に関する単独の除法によって全体の作業が仕上げられるために，比較されるされるようにするのが好ましい。

［例えば，］

B $q.$ in A $-$ A $c.$ が最大の立体に等しくされるであろう

とせよ。

上の方法の規則に従って，相互に関連付けられた方程式は

B $q.$ in E $-$ E $c.$

と仮定されなければならない。

しかし，E は (ちょうど A と同様に) 不定な量であるから，$A + E$ と名付けられることを妨げない。それゆえ，1 つの辺は

B $q.$ in A $+$ B $q.$ in E $-$ A $c.$ $-$ E $c.$ $-$ A $q.$ in E ter $-$ E $q.$ in A ter

であろうし，もう一方は

B $q.$ in A $-$ A $c.$

であろう。

等しいものが取り除かれると，方程式の両側に A が見出されるのだから，方程式の全体が E によって作用された同次のものに陥ることは明らかである。確かに，

B $q.$ in E が E $c.$ $+$ A $q.$ in E ter $+$ E $q.$ in A ter に等しくされる

であろうし，すべてが E 自身によって割られると，

B $q.$ が E $q.$ $+$ A $q.$ ter $+$ A in E ter に等しくされる

であろうし，これはこのような種類の 2 つの相互に関連付けられた方程式の性質である。

最大を見出すために，後のこの［方法］が遂行されるであろう仕方や理由をそこから見つけ出した，前述の方法の規則が満足させられるように 2 つの方程式の辺は互いに等しくされなければならない。

それゆえ，A および $A+E$ が互いに等しくされると，ゆえに，E には零を与えるであろう。それゆえ，今見出された相互に関連付けられた方程式の性質により，$B\ q.$ が

$$E\ q. + A\ q.\ \mathrm{ter} + A\ \mathrm{in}\ E\ \mathrm{ter}$$

に等しくされるとき，ゆえに，E によって作用されたすべての同次のものが，それは零を表しているのだから，追い出されなければならない。そして，

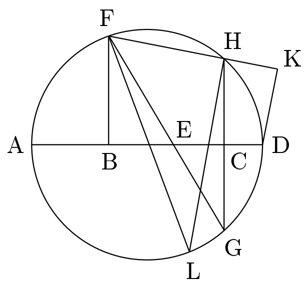
$$B\ q.\ \text{が}\ A\ q.\ \mathrm{ter}\ \text{に等しい}$$

が残るであろうし，その方程式［の解］は探し求められていた立体の最大を与えるであろう。

フェルマは極大・極小決定法として 2 つの方法を提示している。
「前の方法」は，提示された方程式 $f(A)=0$ に対して，「相互に関連付けられた方程式」$f(E)=0$ をつくり，$f(A)=f(E)$ とおいてから両辺を $A-E$ で割り，最後に $A=E$ とする。
「後の方法」は，方程式 $f(A)=0$ に対して，$f(A+E)=0$ をつくり，$f(A)\simeq f(A+E)$ を整理してから E の累乗で割り，最後に $E=0$ とする。
そして，「前の方法」は 2 項式 $A-E$ による除法が絡むため，「非常に面倒でありたいていは複雑である」といっている。

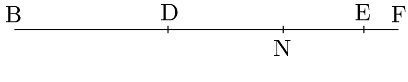
151 さらに，このような私たちの，そしてそれぞれの，方法の使用法が一般的であることをより完全に知られるようにするために，私たちは，アポロニウスの『定量切断』(パッポスの著作における第 7 巻の命題 61) から，パッポス自身がその境界［の決定］を厄介であると認めて公言していた，ヴィエートが述べていない相互に関連付けられた方程式の新しい型について考察しよう。

パッポス『数学集成』第 7 巻命題 61 は「［極大・極小を求めるための］同じ方法について」でも，それとは明記されていないが，取り上げられている。



命題 61 は次のような命題。
与えられた 3 つの直線 AB，BC，CD について，長方形 ABD が長方形 ACD に対して BE の平方が EC の平方に対するならば，長方形 AED の長方形 BEC に対する比は単一のものであり，最小のものである。それゆえ，私は，これは AD の平方が，AC，BD から長方形を得ることができる直線が AB，CD から［長方形を］得ることができる［直線］を超える超過分の平方に対する比と同じである，と言う (*Pappi Alexadrini Mathematicae Collectiones a Federico Commandino Urbinate in Latinum conversae, & Commantarijs illustratae*，1660 年，p.295)。
なお，後段は，$\mathrm{AE}\cdot\mathrm{ED}:\mathrm{BE}\cdot\mathrm{EC}=\mathrm{AD}^2:\left(\sqrt{\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BD}}-\sqrt{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CD}}\right)^2$ ということ。

その上に与えられた点 B，D，E，F がある，直線 BDEF があるとしよう。点 D および E の間に点 N が，長方形 BNF が長方形 DNE に対して最小の比をもつように，とられるであろうこと。



直線 DE が B と呼ばれ，DF が Z と呼ばれ，BD が D と呼ばれるとしよう。DN が A であると提示されるとすると，ゆえに，

$$D\ \mathrm{in}\ Z - D\ \mathrm{in}\ A + Z\ \mathrm{in}\ A - A\ q.\ \text{の}\ B\ \mathrm{in}\ A - A\ q.\ \text{に対する比が最小}$$

である。

類似していて同等な，相互に関連付けられた比は，前の方法に従って，

$$D \text{ in } Z - D \text{ in } E + Z \text{ in } E - E\,q. \text{ の } B \text{ in } E - E\,q. \text{ に対する［比］}$$

であるとせよ。それゆえ，中項による積は外項による積に等しくされるであろう。すなわち，一方の側は

$$D \text{ in } Z \text{ in } B \text{ in } E - D \text{ in } Z \text{ in } E\,q. - D \text{ in } A \text{ in } B \text{ in } E + D \text{ in } A \text{ in } E\,q.$$
$$+ Z \text{ in } A \text{ in } B \text{ in } E - Z \text{ in } A \text{ in } E\,q. - A\,q. \text{ in } B \text{ in } E + A\,q. \text{ in } E\,q.$$

で，他方の側は

$$D \text{ in } Z \text{ in } B \text{ in } A - D \text{ in } Z \text{ in } A\,q. - D \text{ in } E \text{ in } B \text{ in } A + D \text{ in } E \text{ in } A\,q.$$
$$+ Z \text{ in } E \text{ in } B \text{ in } A - Z \text{ in } E \text{ in } A\,q. - E\,q. \text{ in } B \text{ in } A + E\,q. \text{ in } A\,q.$$

である。

共通なものが取り除かれ，適当な移項 (metathesis) がなされると，

$$D \text{ in } Z \text{ in } B \text{ in } A - D \text{ in } Z \text{ in } B \text{ in } E + D \text{ in } E \text{ in } A\,q. - D \text{ in } A \text{ in } E\,q.$$
$$- Z \text{ in } E \text{ in } A\,q. + Z \text{ in } A \text{ in } E\,q. + A\,q. \text{ in } B \text{ in } E - E\,q. \text{ in } B \text{ in } A \text{ が}$$
$$D \text{ in } Z \text{ in } A\,q. - D \text{ in } Z \text{ in } E\,q. \text{ に等しくされる}$$

であろう。

方程式の各々の側が $A - E$ で割られると，(このことは，確かに，相互に関連付けられた同次の 152
ものの中の 2 つずつがそれぞれ互いに集められると，互いに関連付けられた同次のものは十分容易にこのような除法を許すであろうから，

$D \text{ in } Z \text{ in } B \text{ in } A - D \text{ in } Z \text{ in } B \text{ in } E$ が $A - E$ で割られたものは $D \text{ in } Z \text{ in } B$ を与え，

同様に，

$D \text{ in } E \text{ in } A\,q. - D \text{ in } A \text{ in } E\,q.$ が $A - E$ で割られたものは $D \text{ in } A \text{ in } E$ を与え，

その他についてもそうであると考えると，非常に容易である。) それゆえ，除法の後では，

$$D \text{ in } Z \text{ in } B + D \text{ in } A \text{ in } E - Z \text{ in } A \text{ in } E + B \text{ in } A \text{ in } E \text{ が}$$
$$D \text{ in } Z \text{ in } A + D \text{ in } Z \text{ in } E \text{ に等しい}$$

となるであろうし，ついに，この方程式は相互に関連付けられた方程式の性質を示すであろう。

しかし，もしこのような性質から最小が探し求められるならば，［前の］方法に従って，E は A に等しくなければならない。それゆえ，

$$D \text{ in } Z \text{ in } B + D \text{ in } A\,q. - Z \text{ in } A\,q. + B \text{ in } A\,q. \text{ が } D \text{ in } Z \text{ in } A \text{ bis に等しくされる}$$

であろう。この方程式の解は A の値を与えるであろうし，それから探し求めてられていた比が最小であることがすぐに明らかになるであろう。

この最後の方程式の［根の］二重性が解析を留まらせることはないであろう。なぜなら，好都合な，あるいはいやいやながらの，辺［根］がそれ自身を明らかにするであろうからである。それどころか，2 つより多くの辺をもつあいまいな方程式において，明敏な解析学者は，しばらくは，この私たちの方法の 2 つのうちのどちらかからの助力を常にすることをおろそかにはしないであろう。

前述した探求の過程から，前のその方法は，2 項式によるその除法の頻繁な繰り返しのために，たいていは，非常に厄介なものになることは明らかである。ゆえに，既に述べたように前［の方法］から導くことができるけれども，熟練した解析学者にために確かに驚くべき容易さや無数の近道が十分に用意されているであろう，後の［方法］が頼りにされるであろうし，それどころか，接線，重心，漸近線，そしてそのような種類の別のものの発見のために，その第 2 のものが大して厄介ではない，そして洗練されたものになるであろう。

153 それゆえ，以前のように自信をもって，近頃私たちはいつでも適切に，しかし (何らかのものによって見られるように) 偶然にではなく，この唯一のしかも一般的な極大および極小の探求法は問題に含まれていると述べるのである。

･･･ と定められるとする (133 ページ 7 行目から 134 ページ 6 行目までを見よ。133 ページ注 1 と比較せよ。) と，･･･ 知られるようになるであろう。

「133 ページ 7 行目から 134 ページ 6 行目までを見よ。133 ページ注 1 と比較せよ。」は『全集』編集者の記述か。
「極大および極小を探求するための方法［および］曲線の接線について［の方法］」の該当ページを参照のこと。ただし，この訳では「注 1」は割愛した。

もし運命によって定められているこの私たちの方法を述べている人が今なお残っているならば，私は試されるであろう同様の運命をつくり出すことを切望するであろう。

この方法を是認しない人にはこれが提示される。

与えられた 3 つの点について，もしそこから与えられた点に 3 つの直線が引かれるならば，それらの 3 つの直線［の長さ］の和が最小の大きさになる，第 4［の点］を見出すこと。

偏導関数が連続である関数 $f(x,\ y)$ が点 $(a,\ b)$ で極値になるならば，$f_x(a,\ b)=0$，$f_y(a,\ b)=0$ が成り立つ。さらに，点 $(a,\ b)$ で $f(x,\ y)$ の第 2 次偏導関数が連続ならば，

$$J(x,\ y)=f_{xx}(x,\ y)\times f_{yy}(x,\ y)-\{f_{xy}(x,\ y)\}^2$$

とするとき，

(i) $J(a,\ b)>0$ のときは，$f_{xx}(a,\ b)>0$ ならば，$f(x,\ y)$ は点 $(a,\ b)$ で極小になり，
$f_{yy}(a,\ b)<0$ ならば，$f(x,\ y)$ は点 $(a,\ b)$ で極大になる。

(ii) $J(a,\ b)<0$ のときは，$f(x,\ y)$ は点 $(a,\ b)$ で極値にならない。

(iii) $J(a,\ b)=0$ のときは，これだけでは決定できず，さらに調べる必要がある。

さて，与えられた 3 つの点を $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{C}(c_1,\ c_2)$ とし，求める第 4 の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とするとき，$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}+\mathrm{CP}$ が最小になるようにしたいのだから，

$$f(x,\ y)=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}+\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2}+\sqrt{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2}$$

とすると，

$$f_x(x,\ y)=\frac{x-a_1}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}}+\frac{x-b_1}{\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2}}+\frac{x-c_1}{\sqrt{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2}}$$

$$f_y(x,\ y)=\frac{y-a_2}{\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}}+\frac{y-b_2}{\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2}}+\frac{y-c_2}{\sqrt{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2}}$$

となり，点 P で最小になるのならば，$f_x(x,\ y)=0$，$f_y(x,\ y)=0$ となる。

ここで，$(x-a_1,\ y-a_2)$ を極座標で表わして $(r_1,\ \theta_1)$ とすると，

$$\begin{cases} r_1=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2} \\ x-a_1=r_1\cos\theta_1 \\ y-a_2=r_1\sin\theta_1 \end{cases}$$

となる。同様に，$(x-b_1,\ y-b_2)$ を $(r_2,\ \theta_2)$，$(x-c_1,\ y-c_2)$ を $(r_3,\ \theta_3)$ と表わすと，

$$\begin{cases} r_2=\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2} \\ x-b_1=r_2\cos\theta_2 \\ y-b_2=r_2\sin\theta_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} r_3=\sqrt{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2} \\ x-c_1=r_3\cos\theta_3 \\ y-c_2=r_3\sin\theta_3 \end{cases}$$

となる。

従って，$f(x,\ y)=r_1+r_2+r_3$ で，

$$\begin{cases} f_x(x,\ y)=\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3 \\ f_y(x,\ y)=\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3 \end{cases}$$

となる。それゆえ，$f(x,\ y)$ が最小となるときの条件は

$$\begin{cases} \cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=0 \\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0 \end{cases}$$

となり，これら 2 式から θ_3 を消去すると，

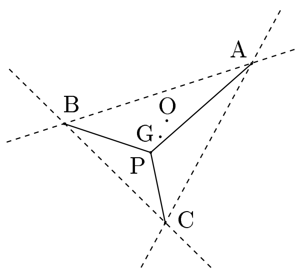
$$(\cos\theta_1+\cos\theta_2)^2+(\sin\theta_1+\sin\theta_2)^2=1$$

が得られる。

この式を展開して整理すると，$\cos(\theta_1-\theta_2)=-\dfrac{1}{2}$ となるから，$\theta_1-\theta_2=2n_1\pi\pm\dfrac{2}{3}\pi$ となる。

同様に，$\theta_2-\theta_3=2n_2\pi\pm\dfrac{2}{3}\pi$，$\theta_3-\theta_1=2n_3\pi\pm\dfrac{2}{3}\pi$ となるから，PA，PB，PC が互いに $\dfrac{2}{3}\pi$ となるような点 P が求める点である。ただし，三角形 ABC の最大角が $\dfrac{2}{3}\pi$ を超えるときは，その角の頂点が求める点である（［16］pp.256–257)。

フェルマが最後に言及した問題の解は上のようになるのだそうだが ……。この［3 点からの距離の和が最小になる点］はフェルマ点 (Fermat point) といわれるそうである。



因みに，いま，A(270，138)，B(140，180)，C(210，249) とするとき，P(200，200) とすると，PA，PB，PC のなす角がそれぞれほぼ 120° になる。このとき，

$$\begin{aligned} \mathrm{PA}+\mathrm{PB}+\mathrm{PC} &= 2\sqrt{2186}+20\sqrt{10}+\sqrt{2501} \\ &\fallingdotseq 206.7649 \end{aligned}$$

である。

また，重心は G(620/3，189) であり，

$$\begin{aligned} \mathrm{GA}+\mathrm{GB}+\mathrm{GC} &= \left(\sqrt{59509}+13\sqrt{241}+50\sqrt{13}\right)/3 \\ &\fallingdotseq 208.6788 \end{aligned}$$

となる。

さらに，外心は O(838063/3970，141235/794) で外接円の半径は $r=\sqrt{39871690897}/1985\sqrt{2}$ となるから，

$$\mathrm{OA}+\mathrm{OB}+\mathrm{OC}=3\times\sqrt{39871690897}/1985\sqrt{2}\fallingdotseq 213.392$$

となる。

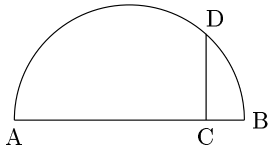
なお，$\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$ を最小にする点 P は三角形 ABC の重心である。

極大および極小についての方法への補遺

［問題の］探求の過程において根号 (asymmetria) がしばしば現れるのだから，解析学者は 3 番目［の未知数］を，またはさらに，もし望むならば，最高の階級の位置を利用することをためらってはいけない。確かに，それらの助けによって何重もの，そしてたいていは複雑な，［階級の］上昇が避けられるであろう。この技法の方法は下に書かれた例が示すであろうように進行する。

その直径が AB である半円，およびその中に垂線 DC があるとしよう。直線 AC および CD が加えられたものの最大が探し求められる。

直径が B と呼ばれるとしよう。直線 AC が A であるとおかれるとしよう。ゆえに，



CD は $(B \text{ in } A - A \text{ quad.})$ の辺［平方根］であろう。

154 それゆえ，問題は

$$A + lat.(B \text{ in } A - A \text{ quad.})$$

が最大の大きさである，というように還元される。

lat.，*latus* または *lateri* は平方根 (latus)，すなわち根号 $\sqrt{}$，を表す記号。

この方法の規則により，過度に向相等されるであろう方程式は上昇するであろうから，その最大の大きさが O であるとおかれるとしよう。なぜならば，ヴィエートにおける母音による未知量の表現を私たちはどうして拒否できようか？

ヴィエートは『解析法序説』(*In Artem Analyticen Isagoge*：1591 年) において，「求められている大きさが字母 A，その他の母音 E，I，O，U，Y によって，与えられたものが字母 B，G，D，その他の子音によって表されるように」「変わることのない永続的な，そして非常に明白な記号によって」未知数と既知数を区別しようと提言している。

ここに出てきた O が，A および E に次ぐ，「3 番目」の未知数である。

ゆえに，

$$A + lat.(B \text{ in } A - A \text{ quad.}) \text{ が } O \text{ に等しくされる}$$

であろう。それゆえ，

$$O - A \text{ が } lateri(B \text{ in } A - A \text{ quad.}) \text{ に等しくされる}$$

であろうし，それぞれ［の辺］が平方に導かれると，

$$O \text{ quad.} + A \text{ quad.} - O \text{ in } A \text{ bis が } B \text{ in } A - A \text{ quad. に等しくされる}$$

であろう。

これがなし遂げられたら，O による最大の階級が方程式の 1 つの側だけに現れるように，もちろんそのことによって，この技法が向かうところである，最大の決定ができるように，移項が行われなければならない。このような移項によって，

$$B \text{ in } A - A \text{ quad. bis} + O \text{ in } A \text{ bis が } O \text{ quad. に等しくされる}$$

であろう。

それゆえ，仮定により，O は最大の大きさであるのだから，ゆえに，O の平方は最大の大きさの平方，それゆえ最大，であろう。ゆえに，

$$B \text{ in } A - A \text{ quad. bis} + O \text{ in } A \text{ bis (全体が } O \text{ の平方に等しくされる)}$$

は最大の大きさである。この方程式は，根号から自由であるのだから，あたかも O が知られている量であるかのように方法に従って解かれるはずである。ゆえに，

$$B \text{ in } A - A \text{ quad. bis} + O \text{ in } A \text{ bis}$$

が

$$B \text{ in } A + B \text{ in } E - A \text{ quad. bis} - E \text{ quad. bis}$$
$$- A \text{ in } E \text{ quater} + O \text{ in } A \text{ bis} + O \text{ in } E \text{ bis}$$

にほぼ等しくされるであろう。

共通なものが取り去られ，残りが E 自身で割られると， 155

$$B + O \text{ bis が } E \text{ bis} + A \text{ quater にほぼ等しくされる}$$

であろう。方法に従って，E bis が消されると，ゆえに，

$$B + O \text{ bis が } A \text{ quater に等しくされる}$$

であろう。それゆえ，

$$A \text{ quater} - B \text{ が } O \text{ bis に等しくされる}$$

であろうし，

$$A \text{ bis} - \text{dimid. } B \text{ が } O \text{ に等しくされる}$$

であろう。

dimid. は半分 (dimidium) を表す記号。

方法に従ってこの方程式が確立されたら，前に戻ることになる。そこでは，私たちは

$$A + lat.(B \text{ in } A - A \text{ quad.}) \text{ が } O \text{ に等しい}$$

とおいていた。

それゆえ，

$$O \text{ が } A \text{ bis} - \text{dimid. } B \text{ に等しい}$$

と見出されたのだから，ゆえに，

$$A \text{ bis} - \text{dimid. } B \text{ が } A + lat.(B \text{ in } A - A \text{ quad.}) \text{ に等しくされる}$$

であろう。それゆえ，

$$A - \text{dimid. } B \text{ が } lat.(B \text{ in } A - A \text{ quad.}) \text{ に等しくされる}$$

であろう。そして，それぞれ［の辺］が平方に導かれると，

$$A \text{ quad.} + B \text{ quad. } \frac{1}{4} - B \text{ in } A \text{ が } B \text{ in } A - A \text{ quad. に等しくされる}$$

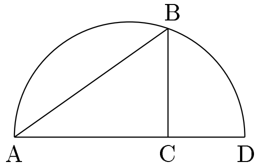
であろうし，ついには

$$B \text{ in } A - A \text{ quad. が } B \text{ quad. } \frac{1}{8} \text{ に等しくされる}$$

であろう。最後の方程式は境界が探し求められていた A の値を与えるであろう。

この方法は［与えられた］球［の中］に描かれた最大の周の円錐の発見に用いることができる。

与えられた球の直径を AD としとう。探し求められている円錐は高さ AC，辺［母線］AB，底面の半径 BC をもつとしよう。アルキメデスによれば，長方形 AB in BC は BC の平方と合わせ 156
て最大の空間を囲むであろう。



直径が B と，直線 AC が A と呼ばれるとしよう。ゆえに，

$$\text{AB は } latus(B \text{ in } A) \text{ であろうし，}$$

$$\text{BC は } latus(B \text{ in } A - A \text{ quad.}) \text{ であろう。}$$

長方形 AB in BC は BC の平方と合わせて

$$latus(B \text{ quad. in } A \text{ quad.} - B \text{ in } A \text{ cub.})$$
$$+ B \text{ in } A - A \text{ quad.}$$

であろう。これらの全体は最大の空間に等しくされる。それを O plano としよう。ゆえに，

$$O \text{ pl.} + A \text{ quad.} - B \text{ in } A \text{ が } lateri(B \text{ quad. in } A \text{ quad.} - B \text{ in } A \text{ cub.}) \text{ に等しくされる}$$

であろう。

それぞれ［の辺］が平方に導かれると，……。ついには，上の方法に従って，O plani の方程式に行き着くはずで，その助けによって既に与えられている方程式が解かれるであろう。

しかし，この例において，3 番目の未知数を除いた方法による解はおろそかにされないであろう。なぜならば，問題は，CB の平方が一緒になった三角形 CBA の AD の平方に対する最大の比が探し求められるというように，三角形 CBA における与えられた直線 AB［に関する問題］に還元することができ，この場合は普通の方法で十分だからである。

与えられた直線 AB が B と呼ばれるとしよう。CB が A であるとおかれるとしよう。ゆえに，AC のベキは B quad. $-$ A quad. であろう。しかし，

AC の平方が AB の平方に対するように，AB の平方が AD の平方に対する。

ゆえに，

$$\text{AD quad. は } \frac{B \text{ quad. quad.}}{B \text{ quad.} - A \text{ quad.}} \text{ であろう。}$$

この結果，長方形 B in A + A quadrato は最大の比をもたなければならない。確かに，私たちはこれを探し求めている。

157 それぞれに

$$B \text{ quad.} - A \text{ quad.}$$

が掛けられると，ゆえに，

$$B \text{ quad. quad. の}$$

$$B \text{ cub. in } A + B \text{ quad. in } A \text{ quad.} - B \text{ in } A \text{ cub.} - A \text{ quad. quad. に対する}$$

比が最小である。しかし，B quad. quad. は与えられた大きさである。なぜならば，与えられた直線 B のベキだからである。ゆえに，

$$B \text{ cub. in } A + B \text{ quad. in } A \text{ quad.} - B \text{ in } A \text{ cub.} - A \text{ quad. quad.}$$

は最大の大きさである。

方法に従って，

$$B \text{ cub.} + B \text{ quad. in } A \text{ bis が } B \text{ in } A \text{ quad. ter} + A \text{ cub. quater に等しくされる}$$

であろうし，この方程式は次のようにすぐに［次数が］下げられる，［すなわち，］

$$A \text{ quad. quater} - B \text{ in } A \text{ が } B \text{ quad. に等しい。}$$

それゆえ，問題の解は明らかであろう。

> $(ba+a^2)(b^2-a^2) = b^3a + b^2a^2 - ba^3 - a^4$ の最大値を求めることになるのだが，
> $$b^3a + b^2a^2 - ba^3 - a^4 \simeq b^3(a+e) + b^2(a+e)^2 - b(a+e)^3 - (a+e)^4$$
> として，整理すると，$b^3 + 2b^2a - 3ba^3 - 4a^3 = 0$ が得られる。
> ここで，$b^3 + 2b^2a - 3ba^3 - 4a^3 = (b+a)(b^2+ba-4a^2)$ であるから，$b^2+ba-4a^2 = 0$ である。
> これから，$a = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}b$ となる $(b > a > 0)$。

私たちはこれ以上自明なことに留まることはしない。確かに，3 番目または 4 番目［の未知数］によって，さらに，もし望むならば，最後のそしてより高度の，拡張された内容が根号および，もし別のものが解析を妨げるならば，その障害を完全に消し去ることは明らかである。

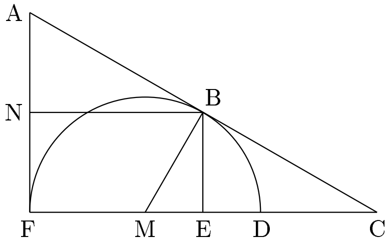
しかし，より洗練されてそしておそらくはより幾何学的に (γεωμετρικῶς)，接線［について］の独

特の極大および極小についての問題は，接線自身は一般的な方法によって導かれるとしても，［この方法の］助けによって解かれる。

このことの 1 つが，多くのものが同等であろうから，例として提示されるとしよう。

垂線 BE が引かれている半円 FBD において，FE および EB による長方形の最大［値］が探し求められる。

もし，私たちの方法に従って，与えられたものに等しい長方形 FEB が探し求められるならば，角 AFC の間に双曲線が類似の長方形 FEB が与えられたものに等しいという条件で探し求められることになり，そして，双曲線および半円の交点が問題を満たしている。しかし，私たちは長方形
FEB の最大［値］を探し求めるのであるから，角 AFC (漸近線 AF，FC) の間の，半円をまだ切 158
断しないが，例えば B において，接する，双曲線が探し求められる。なぜならば，接する点は最大および最小の大きさを決定するのであるから。



それがなされたとしよう。それゆえ，双曲線が点 B において半円に接するとき，ゆえに，点 B において半円に接する，直線は双曲線にも接するであろう。その直線を ABC としよう。双曲線について B を通って引かれた接線が漸近線と点 A および C において交わるとき，アポロニウスに従えば，直線 AB，BC は等しく，それゆえ，直線 FE，EC は等しく，そして，AF は BE あるいは AN の 2 倍である。さらに，円［の接線］であることから，BA は AF に等しく，ゆえに，BA は AN の 2 倍であり，相似の三角形において，中心 M がおかれると，半径 MB は ME の 2 倍である。さらに，半径は与えられている。ゆえに，点 E も［与えられる］。

> アポロニウス『円錐曲線論』(Κωνικων： *Conica*) 第 2 巻命題 3
> 「もし直線が双曲線に接するならば，それは両方の漸近線と出会い，接する点において半分に切断されるであろう。さらに，そのそれぞれの部分の平方は接する点を通って引かれた直径に関して定められた図形［通径 × 直径］の 4 分の 1 であろう。」

そして，極大および極小の幾何学的な発見に関して，接線に関する調査への退却が一般的である。それゆえ，極大や極小や接線自身についてその助けが必要であるとき，普遍的な方法がより小さく評価されることはないであろう。

［接線についての］同じ方法について

極大および極小の発見についての方法はずっと以前から伝えられてきた接線［の決定］の原理に
まさり，その助けによってすべての経路の (dioristicae) 問題が解かれ，そして，パッポスの著作に 159
おける第 7 巻の前文において決定が難しいといわれている，それらのうちの有名な問題が容易に決定される。

> διορύσσω： *dig through* or *across*; *worm out*; *undermine*, *ruin*; Pass., *to be shut up in a funeral vault*

dioryx : *canal*, *trench*, *channel*; 運河, 水路

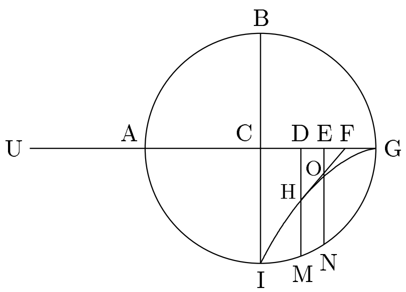
それについての接線を私たちが探し求めている曲線それ自身の特有の性質は多くの直線によってあるいは曲線によって，または，望むなら，何らかの方法で結び付けられている別の曲線によって，語られる。

最初の場合において，あまりに簡潔であるために確かに難しいものは，規則によって直ちに満足させられなければならないが，しかし，ついには適切に見出される。

確かに，私たちは平面において位置において与えられた 2 つの曲線を考察するが，もし望むならば，それらの一方は直径，他方は縦線と呼ばれることになる。それから，接線や曲線の特有の性質を，その曲線における他［の点］ではなく，その曲線における与えられた点に関して既に見出されたものと仮定するが，見出されるであろう接線について，私たちは向相等性によって，そして追い出された (極大および極小についての規則を思い出す) 同次のものによって，考察して，やっと，接線の直径と出会う点，それゆえ接線そのもの，を決定する方程式になる。

以前に私たちがさまざまに与えた例に，もし構わなければ，ディオクレス (Διοκλῆς (Diocles) : 前 240?–前 180?) が発見したといわれている，シッソイドの接線を付け加えよう。

2 つの直径 AG，BI が［互いに］直角に切断している円があるとし，そして，IHG を，その上に任意にとられた点，例えば H，において，点 H からシッソイドの接線が引かれるであろうシッソイドとしよう。



それがなされたとし，引かれた接線 HF が直線 CG を F において切断するとしよう。直線 DF が A であるとおかれるとし，D および F の間の任意の点，例えば E，がとられ，直線 DE が E であるとおかれるとしよう。

160 それゆえ，シッソイドの特有の性質から，直線

MD は DG に対して DG が DH に対する

ようであるから, 向相等性による解析の終わりには, 直ちに,

NE が EG に対するように EG が直線 EN の部分に対する

ようになり，点 E および接線の間で切り取られる［EN の部分］は EO である。

与えられた AD が Z，与えられた DG が N，与えられた DH が R,

私たちが言っていたように，求められている DF が A，任意に仮定された DE が E

と呼ばれるとしよう。ゆえに，

EG は $N - E$ と呼ばれるであろう

EO は $\dfrac{R \text{ in } A - R \text{ in } E}{A}$ と呼ばれるであろう。

EN は $latus(Z \text{ in } N - Z \text{ in } E + N \text{ in } E - E\ q.)$ と呼ばれるであろう。

それゆえ，規則によって，その曲線における他［の直線］ではなく，接線について，特有の性質が考察されなければならないとき，それゆえ，

NE が EG に対するように EG が EO (これは接線の縦線) に対する

ものとされるであろうとき，ゆえに，解析の終わりには，

$$latus(Z \text{ in } N - Z \text{ in } E + N \text{ in } E - E\ q.) \text{ が } N - E \text{ に対するように}$$

$$N - E \text{ が } \frac{R \text{ in } A - R \text{ in } E}{A} \text{ に対する}$$

とされるであろうし，根号を避けるために，それぞれの項が平方されると， 161

$$Z \text{ in } N - Z \text{ in } E + N \text{ in } E - E\ q. \text{ が } N\ q. + E\ q. - N \text{ in } E \text{ bis に対するように}$$

$$N\ q. + E\ q. - N \text{ in } E \text{ bis が } \frac{R\ q. \text{ in } A\ q. + R\ q. \text{ in } E\ q. - R\ q. \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis}}{A\ q.} \text{ に対する}$$

となるであろう。

それぞれの同次のものに A quadratum が掛けられ，次いで，技法の規則に従って，外項によってつくられるものが内項からつくられるものにほぼ等しくされるとしよう。それから，方法が忠告するように，余分なものが追い出されると，ついに

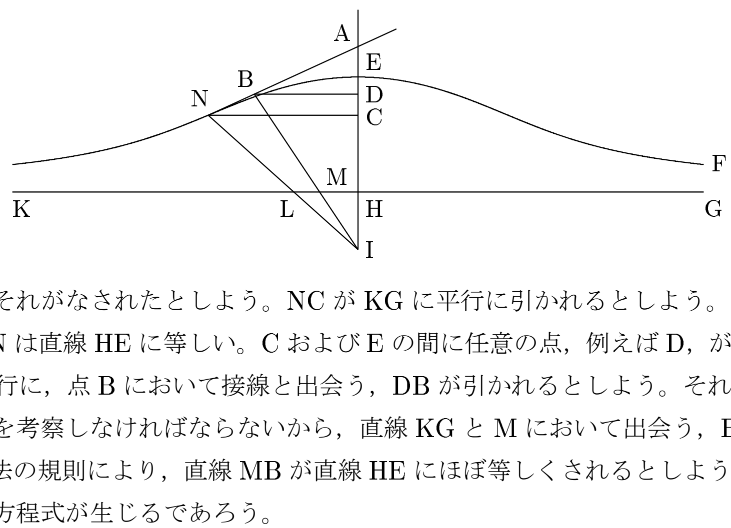
一方が Z in A ter + N in A であり，他方が Z in N bis である

ものの間の方程式が生じるであろう。

それゆえ，この方法によって接線がつくられるであろう。［すなわち，］円の与えられた半径 CA が点 U まで延長され，直線 AU が AC に等しくなるとしよう。長方形 ADG が直線 UD で割られると，幅 DF になる。結ばれた FH がシッソイドに接するであろう。

さらに，ニコメデス (Νικομήδης (Nicomedes)：前 2 世紀?) のコンコイドにおいて［接線が］もたらされるであろう方法を示すことにするが，冗長な話にならないように示そう。

パッポスおよびエウトキウス (Εὐτόκιος (Eutocius)：480?–540?) の著作においてつくられる，次の図のような，ニコメデスのコンコイドがあるとしよう。極は点 I であり，直線 KG は曲線の漸近線であり，直線 IHE は漸近線に垂直であり，曲線の上に与えられた点 N は，その点から引かれた接線が NBA であり，それが IE と点 A において出会う，点である。



上のように，それがなされたとしよう。NC が KG に平行に引かれるとしよう。曲線の特有の性質から，直線 LN は直線 HE に等しい。C および E の間に任意の点，例えば D，がとられ，そこか 162
ら直線 CN に平行に，点 B において接線と出会う，DB が引かれるとしよう。それゆえ，接線について特有の性質を考察しなければならないから，直線 KG と M において出会う，BI が結ばれるとし，そして，技法の規則により，直線 MB が直線 HE にほぼ等しくされるとしよう。ついに，探し求められていた方程式が生じるであろう。

前に進めるために，

CA が，上のように，A と呼ばれ，直線 CD が E と呼ばれ，

与えられた直線 EH が Z と呼ばれる

とし，残りの与えられたものはそれらの記号で表されるとしよう。

解析の終わりに直線 MB は非常に容易に見出されるであろうし，述べられたように，それがもし直線 HE にほぼ等しくされるならば，問題は解かれるであろう。

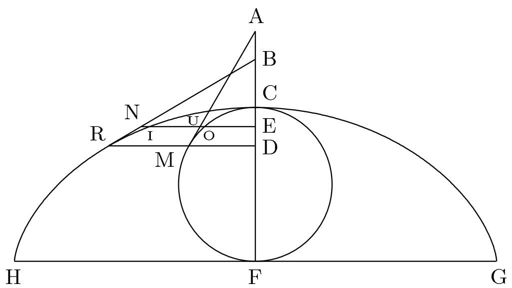
最初の場合についてはこれで十分であると思われる。なぜならば，冗長さを避けるが，しかし，それらから面倒は導くことができない，無限の［仕方］が実際に役に立つからである。

デカルト (René Descartes : 1596–1650) 氏が難しいと判断していた，第 2 の場合については，全く難しくない，洗練された，そして，巧妙でなくはない方法によって満足させられる。

多くの直線によって同次のものが結合されるであろう間，前述の法則によってそれら自身が探し求められ，表示されるはずである。それどころか，不均整な場合［無理数］を避けるために，もし望んでいるのならば，曲線自身への縦線の代わりに上の方法によって見出された接線への縦線がとられることがある。そして，ついに (これは骨折りがいがある)，曲線自身の下にある部分の代わりに今見出された接線の部分がとられ，そして，私たちが先に予告していた向相等性に進む。命題は苦もなく満足させられるであろう。

私たちは［次の］曲線の例をロベルヴァル氏に帰する。

曲線を HRIC とし，その頂点を C，軸を CF としよう。そして，半円 COMF が描かれ，曲線の上に任意の点，例えば R，がとられ，そこから接線 RB が引かれるとしよう。

163 

点 R から直線 RMD が CDF に垂直に引かれ，半円を M において切断するとしよう。それゆえ，その曲線の特有の性質は，直線 RD が円の部分 CM および縦線 DM［の和］に等しくなる，である。点 M において，前述の方法により，円に対する接線 MA が引かれるとしよう。確かに，もし曲線 COM が別の性質であったとしても，同じことが起こるはずである。

探し求められていることがなされたとされるとしよう。そして，

探し求められている直線 DB が A に等しい，
つくり方から見出された，DA が B に等しい，
同様に見出された，MA が D と呼ばれる，
与えられた MD が R と呼ばれる，与えられた RD が Z と呼ばれる，
与えられた円周の部分 CM が N と呼ばれる，
どのようにであれ仮定された直線 DE が E と呼ばれる

とし，そして，点 E から EOUIN が直線 RMD に平行に引かれるとしよう。

［そうすると，］

$$A \text{ が } A - E \text{ に対するように } Z \text{ が } \frac{Z \text{ in } A - Z \text{ in } E}{A} \text{ に対する}$$

ようになり，それゆえ，それは直線 NIUOE に等しくされるであろう。

それゆえ，直線 $\dfrac{Z \text{ in } A - Z \text{ in } E}{A}$ は (接線について考察されるであろう曲線の特有の性質のために) 曲線 CO が合わされた直線 OE にほぼ等しくされなければならない。さらに，曲線 CO は曲線 CM 引く曲線 MO に等しくされる。ゆえに，直線 $\dfrac{Z \text{ in } A - Z \text{ in } E}{A}$ は直線 OE および曲線 CM 引く曲線 MO にほぼ等しくされなければならない。さらに，解析の終わりに，これら 3 つの項が還元されるために，直線 OE の代わりに，上の場合に従って根号を避けるために，接線の縦線である直線 EU がとられなければならず，曲線 MO の代わりに，MO 自身に隣接している，接線

の部分 MU がとられなければならない。

さらに，解析の終わりに，EU が見出されるために， 164

$$B \text{ が } B-E \text{ に対するように } R \text{ が } \frac{R \text{ in } B - R \text{ in } E}{B} \text{ に対する}$$

ようになるであろうし，それゆえ，それは EU 自身に等しくされるであろう。

次いで，MU が見出されるために，

$$B \text{ が } D \text{ に対するように } E \text{ が } \frac{D \text{ in } E}{B} \text{ に対する}$$

ようになるであろうし，それゆえ，それは，三角形の相似のために，上のように，MU 自身に等しくされるであろう。

さらに，曲線 CM が N であると呼ばれる。それゆえ，解析の終わりには

$$\text{一方が } \frac{Z \text{ in } A - Z \text{ in } E}{A} \text{ で，他方が } \frac{R \text{ in } B - R \text{ in } E}{B} + N - \frac{D \text{ in } E}{B} \text{ である}$$

ものの間の向相等性になるであろう。

それぞれに B in A が掛けられると，

$$Z \text{ in } B \text{ in } A - Z \text{ in } B \text{ in } E \text{ および}$$

$$R \text{ in } B \text{ in } A - R \text{ in } A \text{ in } E + B \text{ in } N \text{ in } A - D \text{ in } A \text{ in } E$$

の間の向相等性になるであろう。

さらに，曲線の性質により，

$$Z \text{ は } R+N \text{ に等しくされる。}$$

ゆえに，

$$\text{一方の } Z \text{ in } B \text{ in } A \text{ が他方の } R \text{ in } B \text{ in } A + B \text{ in } N \text{ in } A \text{ に等しくされる。}$$

それゆえ，共通のものが取り去られると，残りのもの，

$$\text{確かに，} Z \text{ in } B \text{ in } E \text{ と } R \text{ in } A \text{ in } E + D \text{ in } A \text{ in } E,$$

が比較されるであろう。

E による除法が行われると，この場合は余分な同次のものがないから，省略が起こることはない。それゆえ，

$$Z \text{ in } B \text{ と } R \text{ in } A + D \text{ in } A$$

が等しくされ，それゆえ，

$$R+D \text{ が } R \text{ に対するように } Z \text{ が } A \text{ に対する}$$

ようになるであろう。

作図。それゆえ，問題が構築されるために，もし

直線 MA，MD の和が直線 DA に対するように RD が DB に対する

ようになるならば，結ばれた BR は曲線 CR に接するであろう。

一方， 165

直線 MA，MD の和が DA に対するように MD が DC に対する

から，証明することは容易であり，それゆえ，なされるであろうことは

MD が DC に対するように RD が BD に対する

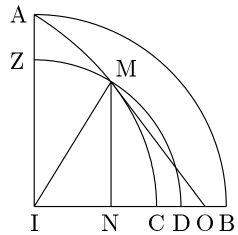
であろう，あるいは，作図がより洗練されたものになるように，結ばれた直線 MC に平行に RB が引かれるであろう。

同じ方法によって，この種類のすべての曲線の接線が得られるであろう。私たちは以前から一般

的な作図を与えてきた。

さらに，探し求められていたことはデイノストラトス (Δεινόστρατος (Dinostratus)：前 350 頃) の円積線の接線についてであるから，私たちは前述の規則に従って［それを］構成する。

AIB を四分円とし，AMC をその中の，与えられた点 M における，接線が引かれなければならない円積線としよう。



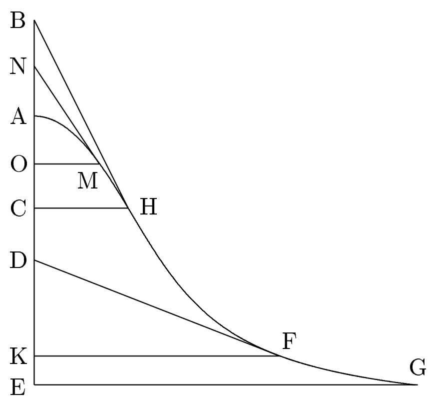
MI が結ばれて，中心 I，距離 IM で四分円 ZMD が描かれ，そして，垂線 MN が引かれ，

MN が IM に対するように
円積線の部分 MD が直線 IO に対する

ようになるとすると，結ばれた MO が円積線に接するであろう。［円積線については］これで十分であろう。

166 しかし，曲率は，ニコメデスのコンコイドにおけるように，これは第 1 の場合に関係する，そして，すべての種類 (最初のものを除いて) のロベルヴァル氏の曲線におけるように，これは第 2 の場合に関係する，しばしば変化させられるから，曲線が描き出されることがなし遂げられるように，技法によって，そこにおいて曲率が凸状から凹状になる，あるいはその逆である，変曲点が調べられなければならない。これが，厄介ごとがあることによって極大および極小の法則に洗練さが加わった，先に述べられていた一般的な補題である。

次の図において，曲線 AHFG はその曲率が，例えば，点 H において変えられるとしよう。接線 HB，縦線 HC が引かれるとしよう。容易に証明されるように，角 HBC は接線 —— ［その接点が］点 H の下方であってもあるいは上方であっても —— と軸 ACD とがつくるすべて［の角］より小さいであろう。



なぜならば。点 H の上方に点 M がとられるとしよう。接線は軸と A および B の間，例えば N，において出会うであろう。それゆえ，N における角は B における角より大きいであろう。同様に，もし点 H の下方に点 D がとられるならば，このときは接線 FD と軸が出会うのは点 B より下であろうし，接線 DF は接線 BH と F および H［の間］の部分で出会うであろう。それゆえ，D における角は B における角より大きいであろう。

私たちはすべての場合を探求するのではないが，しかし，曲線の性質が無限の形を示すのだから，［それらが］調査されるであろう方法を示すだけである。

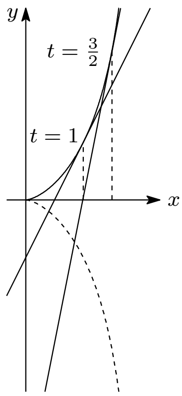
167 それゆえ，例えば，提示された図において，点 H が見出されるために，上の方法に従って，最初にどのような仕方にせよ任意にとられた曲線の点に関して接線の性質が探し求められるのである。これが見出されたら，極大および極小の法則によって，そこから垂線 HC および接線 HB が引かれるであろう点 H が探し求められ，直線 HC は CB に対して最小の比をもつことになる。このことから，確かに，B における角は最小であろう。私は，そのように見出された，点 H が曲率における変化の出発点［変曲点］である，と言う。

前に述べた極大および極小についての方法から，私がロベルヴァル氏に示したように，普通の技法によって重心の発見が導かれる。

しかもそのうえ，末尾の位置にさらに，与えられた曲線についてそれ自身の漸近線を見出すこと［を加えること］ができ，それは無限の曲線において驚くべき性質を見せる。しかし，もし望むのであれば，これらを私たちはいつの日か十分に解決し，そして証明するであろう。

この論文では，超越曲線の接線について述べられている。微分法を用いて，現代風に接線を示してみると ……

1 番目はシッソイド。



シッソイドは

$$\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1+t^2} \\ y = \dfrac{at^3}{1+t^2} \end{cases}$$

と表すことができる (左図は $a=2$) から，

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2at}{(1+t^2)^2} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{at^2(3+t^2)}{(1+t^2)^2} \end{cases}$$

となり，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}\,t(3+t^2)$ となる。

よって，接線の方程式は

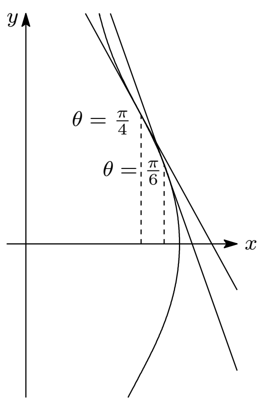
$$y = \frac{1}{2}\,t(3+t^2)\left(x - \frac{at^2}{1+t^2}\right) + \frac{at^3}{1+t^2}$$

すなわち，$y = \dfrac{1}{2}\,t(3+t^2)x - \dfrac{1}{2}\,at^3$ となる。

$a=2$ とすると，$t=1$ のとき，接点は $(1,\ 1)$ で，接線の方程式は $y=2x-1$ となる。

$a=2$，$t=\dfrac{3}{2}$ とすると，接点は $\left(\dfrac{18}{13},\ \dfrac{27}{13}\right)$ で，接線の方程式は $y = \dfrac{63}{16}\,x - \dfrac{27}{8}$ である。

2 番目はコンコイド。



コンコイドは

$$\begin{cases} x = a + b\cos\theta \\ y = a\tan\theta + b\sin\theta \end{cases}$$

と表すことができる (左図は $a=1$，$b=3$) から，

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = -b\sin\theta \\ \dfrac{dy}{d\theta} = a\sec^2\theta + b\cos\theta \end{cases}$$

となり，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{a\sec^2\theta + b\cos\theta}{b\sin\theta}$ となる。

よって，接線の方程式は

$$y = -\frac{a\sec^2\theta + b\cos\theta}{b\sin\theta}\,\{x - (a + b\cos\theta)\} + (a\tan\theta + b\sin\theta)$$

すなわち，

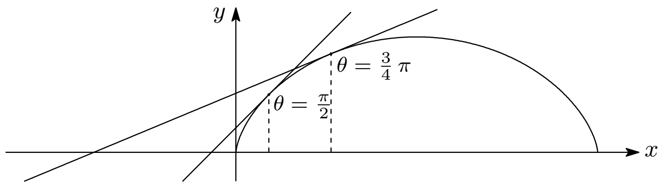
$$y = -\frac{a\sec^2\theta + b\cos\theta}{b\sin\theta}\,x + \frac{1}{b\sin\theta}(a\sec^2\theta + b\cos\theta)(a + b\cos\theta) + a\tan\theta + b\sin\theta$$

となる。

$a=1$，$b=3$ とすると，$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，接点は $\left(1 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ 1 + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ で，接線の方程式は $y = -\dfrac{2\sqrt{2}+3}{3}\,x + \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)^2}{3}$ となる。

$a = 1$，$b = 3$，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ とすると，接点は $\left(1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}, \ \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{3}{2}\right)$ で，接線の方程式は $y = -\dfrac{9\sqrt{3}+8}{9}\,x + \dfrac{2(2\sqrt{3}+9)(3\sqrt{3}+2)}{9\sqrt{3}}$ である。

3 番目はサイクロイド。



サイクロイドは $\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases}$ と表すことができる (上図は $r = 1$) から，

$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) \\ \dfrac{dy}{d\theta} = r\sin\theta \end{cases}$ となり，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$ となる。

よって，接線の方程式は

$$y = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\{x - r(\theta - \sin\theta)\} + r(1 - \cos\theta)$$

すなわち，

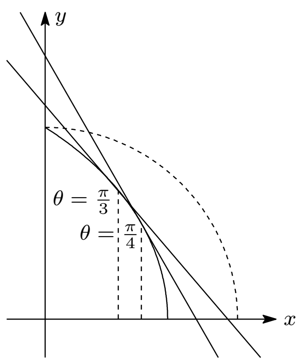
$$y = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\,x - \frac{r\sin\theta(\theta - \sin\theta)}{1 - \cos\theta} + r(1 - \cos\theta)$$

となる。

$r = 1$ とすると，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，接点は $\left(\dfrac{\pi}{2} - 1, \ 1\right)$ で，接線の方程式は $y = x - \dfrac{\pi}{2} + 2$ となる。

$r = 1$，$\theta = \dfrac{3}{4}\pi$ とすると，接点は $\left(\dfrac{3}{4}\pi - \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \ 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で，接線の方程式は $y = (\sqrt{2} - 1)x - \dfrac{3}{4}\pi(\sqrt{2} - 1) + 2$ である。

4 番目は円積線。



円積線は

$$\begin{cases} x = \dfrac{2a\theta\cos\theta}{\pi\sin\theta} \\ y = \dfrac{2a\theta}{\pi} \end{cases}$$

と表すことができる (左図は $a = 4$) から，

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{2a(\sin\theta\cos\theta - \theta)}{\pi\,\sin^2\theta} \\ \dfrac{dy}{d\theta} = \dfrac{2a}{\pi} \end{cases}$$

となり，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta - \theta}$ となる。

よって，接線の方程式は

$$y = \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta - \theta}\left(x - \frac{2a\theta\cos\theta}{\pi\sin\theta}\right) + \frac{2a\theta}{\pi}$$

すなわち，

$$y = \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta - \theta}\,x - \frac{2a\theta\sin\theta\cos\theta}{\pi(\sin\theta\cos\theta - \theta)} + \frac{2a\theta}{\pi}$$

となる。

$a=4$ とすると，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，接点は $(2,\ 2)$ で，接線の方程式は $y=\dfrac{2}{2-\pi}x-\dfrac{4}{2-\pi}+2$ となる。

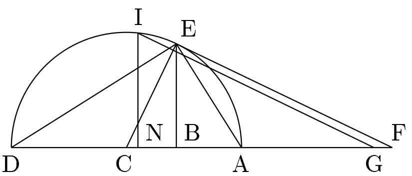
$a=4$，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ とすると，接点は $\left(\dfrac{8}{3\sqrt{3}},\ \dfrac{8}{3}\right)$ で，接線の方程式は $y=\dfrac{9}{3\sqrt{3}-4\pi}x-\dfrac{8\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-4\pi}+\dfrac{8}{3}$ である。

最後に変曲点について触れられている。曲線上の点における接線と軸がなす角が最小になるとき，その接点が変曲点であると言う。

1642 年 11 月 10 日に 尊敬すべき父メルセンヌに書き送られた問題

与えられた球の中に周囲［表面積］が最大の円柱を見出すこと。

その直径が AD，中心が C の球が与えられるとしよう。その中に書き入れられる周囲が最大の円柱が探し求められる。



それがなされたとし，探し求められた円柱の底線が DE，辺が EA である (なぜならば，半円における角は直角だから，円柱をこの位置に適合させることができるからである) としよう。円柱の周囲は DE の平方および長方形 DEA の 2 倍［の和］である。それゆえ，DE の平方および長方形 DEA の 2 倍の和の最大が探し求められるであろう。 168

円柱の底面の直径が DE，高さが EA であるとすると，この円柱の表面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\pi\left(\frac{\mathrm{DE}}{2}\right)^2\times 2+2\pi\frac{\mathrm{DE}}{2}\times\mathrm{EA}=\frac{\pi}{2}\left(\mathrm{DE}^2+2\,\mathrm{DE}\times\mathrm{EA}\right)\\&=\frac{\pi}{2}\left\{\left(\mathrm{DB}^2+\mathrm{BE}^2\right)+4\,\triangle\mathrm{EDA}\right\}=\frac{\pi}{2}\left\{\left(\mathrm{DB}^2+\mathrm{DB}\times\mathrm{BA}\right)+2\,\mathrm{BE}\times\mathrm{AD}\right\}\\&=\frac{\pi}{2}\left\{\mathrm{DB}\times\mathrm{AD}+2\,\mathrm{BE}\times\mathrm{AD}\right\}=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{AD}\left(\mathrm{DB}+2\,\mathrm{BE}\right)\end{aligned}$$

である。

ここで，$\dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{AD}$ は定数だから，$\mathrm{DB}+2\,\mathrm{BE}$ について調べればよいことになる。

DE の平方は (下ろされた垂線 EB によって) 長方形 ADB に等しくされ，そして，長方形 DEA は BE が掛けられた AD による長方形に等しくされる。それゆえ，私たちは長方形 ADB および BE が掛けられた AD による長方形の 2 倍の和の最大を探し求めるが，それぞれを与えられた直線 AD で割って，直線 DB および BE の 2 倍の和の最大が探し求められる。

しかし，これは簡単である。確かに，CB が BE の半分になる，または，同じことだが，BC のベキを与えられた CE の平方の 5 分の 1 とすると，点 E は命題を満足させるであろう。

確かに，延長された直径と点 F で出会う接線 EF が引かれるとすると，私は，直線 DB，BE の 2 倍の和は最大である，と断言する。

なぜならば。CB を BE の半分とするとき，ゆえに，BE は BF の半分であろう。ゆえに，BF は BE の 2 倍に等しいであろう。それゆえ，DF 全体は直線 DB および BE の 2 倍［の和］に等しいであろう。しかもそのうえ，直線 DB，BE の 2 倍の和は最大であることは明らかである。

なぜならば。半円の上に任意の点，例えばI，がとられ，そこから垂線INが下ろされるとしよう。

さらに，点Iから接線に平行に，直径と点Gで出会う，IGが引かれるとしよう。点Gは点FおよびDの間にあるであろう。そうでなければ，平行なGIは半円と出会わないであろう。

平行関係のために，

FBがBEに対するようにGNがNIに対する。

しかし，FBはBEの2倍である。ゆえに，GNはNIの2倍であり，それゆえ，GNはNI bisに等しく，GD全体は直線DNおよびNIの2倍の和に［等しい］。それゆえ，GD (これはDN，NIの2倍の和に等しくされる) が直線DF (これは直線DB，BEの2倍の和に等しくされる) より小さいから，ゆえに，直線DB，BEの2倍の和は最大であり，そして，求められていた円柱は底線DEおよび辺EAをもつ。

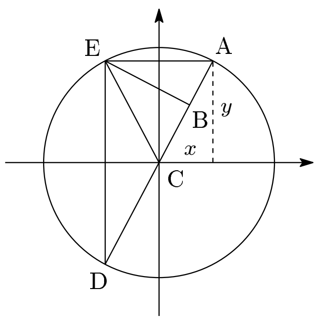
169 上で述べられたことから，直線DEはEAに対して，外中比に分割された直線の大きい方の切片が小さい方［の切片］に対することが証明されるであろう。

しかもそのうえ，同じ方法によって，与えられた周囲をもつ円柱を見出し，作図することができる。

確かに，直ちに，問題は与えられた直線に等しい直線DN，NIの2倍の和を探し求めることに還元される。与えられた直線をDG (確かに，上の解法から，これは直線DFより大きくはできない) としよう。直線FEを直線GIに平行になるとしよう。点Iは問題を満足させるであろうし，満足させられる条件によって，ときには2つの円柱を，ときには1つだけをもたらすであろう。

確かに，点GはFおよびAの間にあるとき，2つの円柱が命題を保証するであろう。しかし，もし点GがAまたはより遠く［Dに向かう方］にあるならば，ただ1つの円柱だけが問題を保証するであろう。

微分法で解くなら，こんな感じ …… かな。



与えられた球の半径を r とし，内接させる円柱の底面の半径を y (すなわち，$\mathrm{DE}=2y$)，高さを $2x$ (すなわち，$\mathrm{EA}=2x$) とすると，$y^2=r^2-x^2$ であり，円柱の表面積 S は

$$S=\pi y^2\times 2+2\pi y\times 2x=2\pi\left(y^2+2xy\right)$$

となる。

さて，$y^2=r^2-x^2$ より $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dx}&=2\pi\left(2y\frac{dy}{dx}+2y+2x\frac{dy}{dx}\right)\\&=4\pi\left(\frac{-xy+y^2-x^2}{y}\right)\\&=4\pi\times\frac{x\sqrt{r^2-x^2}-2x^2+r^2}{\sqrt{r^2-x^2}}\end{aligned}$$

となる。

いま，$x\leqq y$ とすると，$\dfrac{dS}{dx}=0$ より $x=\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}r$ が得られる。そして，このとき，S は最大となる。

$y^2=r^2-x^2$ だから，$x=\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}r$ のとき，$y=\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}}r$ となる。

そして，$\triangle\mathrm{AED}=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{AE}\times\mathrm{DE}=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{AD}\times\mathrm{BE}$ であるから，$\mathrm{BE}=\dfrac{2xy}{r}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}r$ となり，

さらに，$BC^2 = CE^2 - BE^2 = r^2 - \dfrac{20}{25} r^2 = \dfrac{1}{5} r^2$ となるから，$BC = \dfrac{1}{\sqrt{5}} r$ となる。

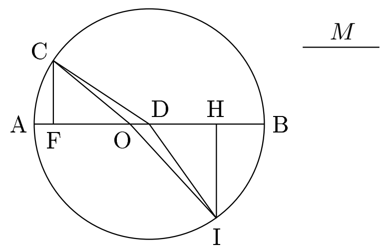
すなわち，$BC^2 = \dfrac{1}{5} CE^2$，$BC = \dfrac{1}{2} BE$ である。

なお，$DE = \dfrac{2\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\sqrt{10}} r$，$EA = \dfrac{2\sqrt{5-\sqrt{5}}}{\sqrt{10}} r$ であるから，$\dfrac{DE}{EA} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ である。
すなわち，DE と EA は黄金比 (外中比) をなす。

外中比とは『原論』(Στοιχείωσις) 第 6 巻定義 3 によれば，
「線分は，不等な部分に分けられ，全体が大きい部分に対するように，大きい部分が小さい部分に対するとき，外中比に分けられたといわれる。」(［8］p.117)

屈折に関する解析 170

ACBI を円とし，その直径 AFDB が異なる性質の 2 つの媒質に分け，それら［2 つの媒質のうち］のより希薄な［媒質］が ACB の側で，より濃密な［媒質］が AIB の側であるとしよう。円の中心が点 D におかれるとし，そこに向かって与えられた点 C から光線 CD が落ちるものとしよう。屈折された光線 DI，すなわち屈折された光線がそこに向かって傾けられる点 I，が探し求められる。



直径に垂直な直線 CF，IH が引かれるとしよう。点 C および直径 AB が，そしてさらに中心 D も，与えられるとき，同様に，点 F および直線 FD が与えられる。［2 つの］媒質の比，あるいはより濃密な媒質の抵抗のより希薄な媒質の抵抗に対する比，は与えられた直線 DF が別に与えられた直線 M —— これは，より希薄な媒質の抵抗がより濃密な媒質の抵抗より小さいとき，当然というより公理によって，確かに，直線 DF より小さいであろう —— に対するようであるとしよう。

それゆえ，測定されるべき運動は，直線 M および DF の助けによって，直線 CD および DI に 171
沿って起こるそれである。すなわち，2 つの直線に沿って起こる運動は 2 つの長方形，それらの 1 つは CD および直線 M によってつくられるもので，もう 1 つは DI および直線 DF によるものである，の和によって比較的に表される。

それゆえ，問題は，そこから垂線 HI が引かれ，DI が結ばれると，CD および M による，および DI および DF による 2 つの長方形の和が最小の空間を囲むことになるように，点 H において直径 AB が切断されることに還元されるであろう。

既に幾何学者の著作において頻繁に使われており，そして，エリゴーヌ (Pierre Hérigone : 1580–1643) によって彼の『数学教程』(*Cursus Mathematicus* : 1634–1637 年) において 20 年前後前に言及されている，私たちの第 2 の方法のように，これを捜し出すために与えられた半径 CD が N と呼ばれるとしよう。半径 DI も同様に N であろう。直線 DF が B と呼ばれ，そして，直線 DH が A であるとおかれるとしよう。それゆえ，N in M + N in B が最小の大きさでなければならない。

エリゴーヌ (または，エリゴーン，エリゴンヌ) はフランスの数学者，天文学者。パリで数学を教えていたということ以外はほとんど知られていない。6 巻からなる初等数学の概説書『数学教程』

において，多くの数学記号や論理記号を考案したが，こんにちではそれらは使われていない。数学における記号の使用によって多くの定理やその証明が簡潔に表現できることを示したことは大きな功績である。

どのようなものであれ，自由に仮定されたものとして，直線 DO が未知数 E に等しいと理解され，そして，直線 CO，OI が結ばれるとしよう。

解析の終わりには，直線 CO の平方は

$$N\ q. + E\ q. - B \text{ in } E \text{ bis}$$

172 であろう。さらに，直線 OI の平方は

$$N\ q. + E\ q. + A \text{ in } E \text{ bis}$$

であろう。ゆえに，M が掛けられた CO による長方形は，同じ終わりには，

$$\textit{latus quad.}(M\ q. \text{ in } N\ q. + M\ q. \text{ in } E\ q. - M\ q. \text{ in } B \text{ in } E \text{ bis})$$

であろう。さらに，B が掛けられた IO による長方形は

$$\textit{latus quad.}(B\ q. \text{ in } N\ q. + B\ q. \text{ in } E\ q. + B\ q. \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis})$$

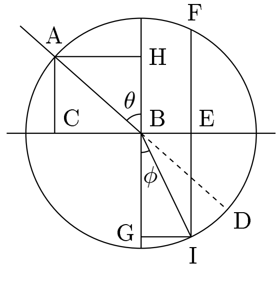
であろう。これら 2 つの長方形［の和］は，技法の規則により，2 つの長方形 M in N および B in N［の和］にほぼ等しくされなければならない。

根号が取り除かれるように，すべてが平方されるとしよう。それから，共通のものが取り去られ，そして，根号のある項が一方の側におかれて，新たに導かれたものが平方される。これがなされたら，共通のものが取り去られ，残りが E で割られ，そしてついには，ずっと以前からすべての人に知られるようになっている方法の規則に従って，E によって作用された同次のものが省略され，そして，比較によって，ついには A および M の間の最も単純な方程式になる。すなわち，全体からすべての根号の障害がもぎ取られると，図における直線 DH が直線 M に等しくなる。

そのことから，屈折点は，直線 CD および CF が引かれるとき，もしより濃密な媒質の抵抗がより希薄な媒質の抵抗に対するあるいは

B が M に対するように直線 FD が直線 DH に対する

ようになるならば，点 H から直径に垂直で円と，そこで屈折［された光線］が向かわせられる，点 I で出会う直線 HI が立てられるように見出されることは明らかである。それゆえ，希薄な媒質から濃密［な媒質］に達する光線は垂直な方向に向かわせられるであろう。このことはデカルトによって見出された定理に完全に，そして一般に一致する。その非常に厳密な証明を私たちの原理から導かれている上の解析は示している。



屈折の法則は 1615 年頃にスネル (Willebrord Snell van Roijen :1591–1629) によって発見されているらしい。ただし，史上初めて正確に述べたのはイブン・サフル (Abu Sa‘d al-‘Ala’ ibn Sahl : 940?–1000?) であるという。

こんにちスネルの法則と呼ばれている事実は，入射角を θ，屈折角を ϕ (左図参照) とするとき，入射側，屈折側の媒質における波 (光) の速度をそれぞれ v_i，v_d とし，入射側，屈折側の媒質の屈折率をそれぞれ n_i，n_d とするとき，$\dfrac{\sin\theta}{\sin\phi} = \dfrac{v_i}{v_d} = \dfrac{n_d}{n_i}$ が成り立つということである。

この関係は，上図で，CB : BE $= B : M$［フェルマの図なら，FD : DH $= B : M$］であること

に相当する。すなわち，フェルマは彼の極大・極小発見法に基づいてスネルの法則を示したのである。

ケプラー (Johannes Kepler : 1571–1630) も屈折の法則を研究しており,『屈折光学』(*Dioptrice* : 1611 年) で述べられている。ただし，彼は $\sin\theta$ ではなく $\tan\theta$ に注目してしまったため，θ が小さいときに近似的に正しいというものであった。

なお，デカルトも屈折の法則を導いているが，彼は『屈折光学』(*La Dioptrique* : 1637 年) において次のように述べている (上図参照)。

「球が A で打たれて B の方に進み，点 B において，こんどは地面ではなく，布 CBE にぶつかるものとする。しかもこの布は非常に弱くて薄いため，球はそれを破って突きぬける力をもつが，ただその速さの一部，すなわちたとえばその半分を失うものとする」とき，「A から直線に沿って B まできた球は，点 B において向きを変えて，そこから I の方に向かう経路をとるのであるから，球が物体 CBEI のなかに入りこんでいく力あるいは容易さと，球が物体 ACBE から離れる力あるいは容易さとの比は，AC と HB 間の距離と，HB と FI 間の距離との比に等しく，つまり線 CB と BE との比であるということができる。」(［11］p.124，127)

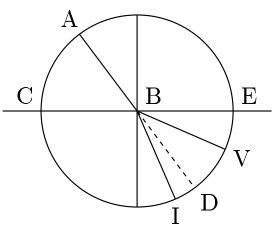
また，次のように言う。

「ただ注意しなければならないのは，この傾斜は CB あるいは AH とか，EB あるいは IG とか，互いに比較されるこのような直線によって測られねばならず，ABH や GBI といった角度，ましてや屈折角［こんにちの定義とは異なることに注意］と呼ばれる DBI に似たような角度で測られてはならないことである。というのは，これらの角度の間の比あるいは比例は，光線の傾斜によってすべて変わるからである。これに反して線 AH と IG などの間の比例は，屈折が同一物質によってひき起こされる場合には必ず，同一のままである。」(［11］p.127)

屈折に関する総合 173

学識のあるデカルトによって，言うならば，経験に適合する屈折の法則が提示されている。しかし，それを証明するために，彼は光の運動は濃密な媒質を通る方が希薄［な媒質］を通るより容易であり機敏であることを，自然の光においては反対のように思われるけれども，要請したし，それを完全に必然的なものと認めなければならなかった。

デカルトは『屈折光学』において次のように述べている。



「光線の場合なら，屈折が行われる表面においては，水より空気での方がより多く傾斜し，またガラスよりも水での方がより多く傾斜するのに，これとちょうど正反対に，球の場合は，空気より水においてより多く傾斜し，ガラスのなかへはまったく進入しないということである。というのは，球であれば空中において A から B に向かって打たれれば，点 B で水面 CBE とぶつかり，B から V の方向に向きを変えるであろう。ところが光線だと，正反対に B から I の方向に進むのである。しかしこのことは，光というものは他の物体の孔を満たしているきわめて微細な物質が受けとるある種の運動または作用にほかならないと述べたときに，私が光に帰した性質のことを思い出せば，なんら奇妙なことではなくなるであろう。」(［11］pp.128–129)

それゆえ，私たちは反対の公理 —— すなわち，光の運動は希薄な媒質を通る方が濃密［な媒質］を通るより容易にそして機敏に進むこと —— から正しい屈折の法則，それはデカルトによる比そ

のものになるけれども，が導かれることを調べてみる。しかし，完全に反対の道が同じ正しさに，裏切られることなく (ἀπαραλογίστως)，到達することができるかどうかを，鋭敏で厳格な幾何学者は注視し，探求するべきである。なぜならば，私たちは，不必要で無益な論争や口論により長く執着していることより，専門的な巧妙さが捨てられた，真実そのものを所有することの方が疑う余地もなく望ましいと思うからである。

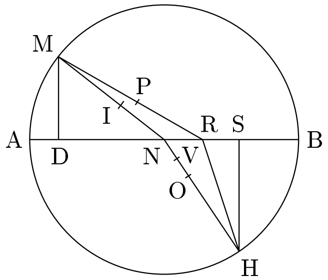
私たちの証明はただ 1 つの要請に基づいている。［すなわち,］自然は最も容易で最も機敏な方法および経路によってもたらされる。確かに，要請 (αἴτημα) はそのように表現されるであろうが，たいていはそう［いう表現］ではなく，私たちは，自然はつねに最も短い線によってもたらされる，と言う。

ここで述べられている「要請」がいわゆるフェルマの原理。

確かに，ガリレオ (Galileo Galilei : 1564–1642) が，重いものの自然な運動を観察しているとき，その法則そのものを空間においてというよりはむしろ時間において測定したように，同様に，私たちは，最も短い空間または線においてではなく，適切なより短い時間において，より機敏に素早く通り過ぎることができる［経路を］詳しく調べる。

ガリレオは次のような自由落下の法則を発見している。
第 1 法則 : 真空中では，すべての物体は，その質，量，形態のいかんにかかわらず，同じ速さで落下する。
第 2 法則 : 自由落下は等加速度運動であり，落下速度は落下時間に比例し (速度・時間比例法則)，落下距離は落下時間の自乗に比例する (時間自乗法則)。
これらのうち，時間自乗法則は遅くとも 1604 年までに，速度・時間比例法則は 1610 年までには発見されている。第 1 法則は遅くとも 1631 年までには確立されていたようである。
これらについては大著『新科学論議』(*Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali* (機械学と位置運動に関する 2 つの新科学についての論議と数学的証明) : 1638 年) において議論が展開されている。

174 これが仮定されたら，最初の図において性質の異なる 2 つの媒質が仮定されるとし，円 AHBM において，その直径 ANB がそれら 2 つの媒質を分離し，それらのうちの一方の M の側がより希薄で，他方の H の側がより濃密であるとしよう。そして，点 M から H に向かう任意の直線 MNH，MRH が直径と出会う点 N および R で曲げられるとしよう。



希薄な媒質の中にある MN に沿った運動体の速度が，公理または要請により，NH に沿った同じ運動体の速度より大きく，そして，運動はどのような媒質においても明らかに一様であると仮定されるとき，MN に沿った運動の時間の NH に沿った運動の時間に対する比は，すべての人によく知られているように，MN の NH に対する比および NH に沿った速度の MN に沿った速度に対する逆比から合成される。

それゆえ，もし

MN に沿った速度が NH に沿った速度に対するように直線 MN が NI に対する

とするならば，

MN に沿った運動の時間は NH に沿った運動の時間に対して IN が NH に対する

ようであろう。

同様の理由によって，もし

より希薄な媒質を通る速度がより濃密な媒質を通る速度に対するように

MR が RP に対する

とするならば，

MR に沿った運動の時間は RH に沿った運動の時間に対して PR が RH に対する

ようであることが証明されるであろう。

そのことから，

2 つの MN，NH に沿った運動の時間は 2 つの MR，RH に沿った運動の時間に対して

2 つの IN，NH の和が 2 つの PR，RH の和に対する

ようであることが従う。

それゆえ，自然光が点 M から点 H の方向に発せられるとき，曲折または屈折によって最も短い
時間で点 M から点 H に達するべく，それが通る点，例えば N，が見出されなければならない。と 175
いうのも，できる限り素早くその働きを駆り立てる性質が自発的にそこに向かわせるであろうということは容認できるものだからである。それゆえ，もし，曲げられた［線］MNH に沿った運動［の時間］を測定したものである，直線 IN，NH の和が最小の大きさであるならば，命題は成り立つであろう。

しかし，このことはデカルトの定理から見せかけではない真実を導き，幾何学は［それを］しっかりと証明するであろう。確かに，デカルトは［次のように］述べた。

もし点 M から半径 MN が引かれ，そして，同じ点 M から垂線 MD が下ろされ，さらに，

より大きい速度がより小さい［速度］に対するように DN が NS に対する

とし，さらに，点 S から垂線 SH が立てられ，そして，半径 NH が結ばれるならば，希薄な媒質からの光は点 N において，濃密な媒質の中を点 H に向かって垂直な方向に曲げられることになる。

さらに，この定理に私たちの幾何学は，次の純粋に幾何学的な命題から明らかなように，異議を唱えることはない。

その直径が ANB，中心が N である円 AHBM があるとし，その周の上に任意の点 M が仮定され，半径 MN が結ばれ，そして，直径に垂線 MD が下ろされるとしよう。同様に，DN の NS に対する比が与えられ，DN は NS より大きいとしよう。点 S から直径に向かって円周と点 H で出会う垂線 SH が立てられ，そこから中心 N に半径 HN が結ばれるとしよう。

DN が NS に対するように半径 MN が直線 NI に対する

としよう。私は，直線 IN，NH の和が最小である，と断言する。すなわち，もし，例えば，半径 NB の側に任意に点 R がとられ，直線 MR，RH が結ばれ，さらに，

DN が NS に対するように MR が RP に対する

とするならば，直線 PR，RH の和は直線 IN，NH の和より大きい。

このことを証明するために，

半径 MN が直線 DN に対するように直線 RN が直線 NO に対する

とし， 176

DN が NS に対するように NO が NV に対する

としよう。つくり方から，直線 DN は半径 MN より小さいから，直線 NO は直線 NR より小さいことは明らかである。さらに，直線 NS は直線 ND より小さいので，直線 NV は直線 NO より小さいことも明らかである。

これが主張されると，ユークリッド (Εὐκλείδης (Eukleides, Euclid)：前 300 頃活躍?)［による三平方の定理］によって，直線 MR の平方は半径 MN の平方，直線 NR の平方および NR が掛けられた DN による長方形の 2 倍［の和］に等しくされる。しかし，つくり方から，

MN が DN に対するように NR が NO に対する

とするとき，ゆえに，NO が掛けられた MN による長方形は NR が掛けられた DN による長方形に等しくされ，それゆえ，NO が掛けられた MN による長方形の 2 倍は NR が掛けられた DN による長方形の 2 倍に等しくされる。それゆえ，直線 MR の平方は MN および NR の平方と NO が掛けられた MN による長方形の 2 倍［の和］に等しくされる。

さらに，直線 NR は直線 NO より大きいから，直線 NR の平方は直線 NO の平方より大きい。ゆえに，直線 MR の平方は直線 MN，NO の平方と NO が掛けられた MN による長方形の 2 倍［の和］より大きい。しかし，これら 2 つの MN，NO の平方［の和］は，NO が掛けられた MN による長方形の 2 倍といっしょになって，あたかも 1 つの直線によるように，MN，NO によってつくられるものの平方に等しい。ゆえに，直線 MR は 2 つの直線 MN および NO の和より大きい。

しかし，つくり方から，

DN が NS に対するように MN が NI に対し，さらに，NO が NV に対する

とするとき，ゆえに，

DN が NS に対するように直線 MN，NO の和が直線 IN，NV の和に対する

であろう。

さらに，

DN が NS に対するように MR が RP に対する。

ゆえに，

直線 MN，NO の和が直線 IN，NV の和に対するように直線 MR が RP に対する。

さらに，直線 MR は直線 MN，NO の和より大きい。ゆえに，直線 PR は直線 IN，NV の和より大きい。

177 直線 RH が直線 HV より大きいことが証明されることが残っている。これがなし遂げられると，直線 PR，RH の和が直線 IN，NH の和より大きいことが成り立つであろう。

三角形 NHR において，RH の平方は，ユークリッドにより，NR が掛けられた SN の長方形の 2 倍が罰せられた HN，NR の平方［の和］に等しくされる。さらに，つくり方から，

半径 MN (あるいはそれに等しい NH) が DN に対するように NR が NO に対する

さらに，DN が NS に対するように NO が NV に対する

とするとき，ゆえに，同じく，

HN が NS に対するように NR が NV に対する

であろう。ゆえに，NV が掛けられた HN による長方形は NR が掛けられた NS による長方形に等しい。それゆえ，NV が掛けられた HN による長方形の 2 倍は NR が掛けられた SN による長方形の 2 倍に等しくされる。それゆえ，HR の平方は NV が掛けられた HN による長方形の 2 倍が罰せ

られた HN，NR の平方［の和］に等しくされる。

しかし，NR の平方が NV の平方より大きいことは証明されている。ゆえに，HR の平方は NV が掛けられた HN による長方形の 2 倍が罰せられた HN，NV の平方［の和］より大きい。しかし，NV が掛けられた HN による長方形の 2 倍が罰せられた HN，NV の平方［の和］は，ユークリッドにより，直線 HV の平方に等しい。ゆえに，HR の平方は HV の平方より大きく，それゆえ，直線 HR は直線 HV より大きい。これは次に証明されるであろうことであった。

しかし，もし，第 2 の図におけるように，点 R が半径 AN の側にとられ，直線 MR，RH はまっすぐであり，［そこに］直線をおくことが許されるならば，—— 確かに，証明は任意の場合において共通である —— 同じことが起きるであろう。すなわち，直線 PR，RH の和は直線 IN，NH の和より大きいであろう。

上のように，

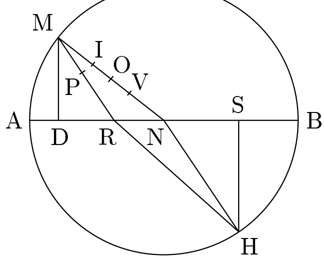
半径 MN が DN に対するように RN が NO に対する

および

DN が NS に対するように NO が NV に対する

としよう。直線 RN が直線 NO より大きいこと，さらに，直線 NO が直線 NV より大きいことは明らかである。

MR の平方は長方形 DNR の 2 倍，あるいは，上の計算により，長方形 MNO の 2 倍が罰せられ 178
た MN，NR の平方［の和］に等しくされる。さらに，NR の平方は NO の平方より大きいから，ゆえに，MR の平方は長方形 MNO が罰せられた MN，NO の平方［の和］より大きいであろう。しかし，長方形 MNO が罰せられた MN，NO の平方［の和］は直線 MO の平方に等しくされる。ゆえに，直線 MR の平方は直線 MO の平方より大きいであろうし，それゆえ，直線 MR もまた直線 MO より大きいであろう。



さらに，つくり方から，

DN が NS に対するように MN が IN に対し，

そして，NO が NV に対する

とするとき，ゆえに，

MN が IN に対するように NO が NV に対する

であろうし，入れ換えて，

MN が NO に対するように NI が NV に対する

であろうし，分割される［MN = MO + NO，IN = IV + VN］と，

MO が ON に対するように IV が VN に対するし，

入れ換えて，

MO が IV に対するように ON が NV に対する，

あるいは DN が NS に対する，あるいは MR が RP に対する。

しかし，MR が MO より大きいことは証明されている。ゆえに，PR は直線 IV より大きいであろう。ゆえに，命題が完全に成り立つためには，直線 RH が 2 つの直線 HN および NV の和より大きいことが証明されることが残っている。これは，前述のことから，非常に容易である。

なぜならば。RH の平方は HN，NR の平方［の和］と NR が掛けられた SN による長方形の 2 倍，あるいは，先の証明から，NV が掛けられた HN による長方形の 2 倍，がいっしょになったも

179 のに等しくされる。さらに，NR の平方は NV の平方より大きい。ゆえに，HR の平方は HN，NV の平方［の和］と NV が掛けられた HN による長方形の 2 倍がいっしょになったものより大きい。このことから，直線 RH が，上の証明により，直線 HN，NV の和より大きいことが従う。

それゆえ，直線 PR，RH［の和］(あるいは，いつかそれが 1 つの直線 PRH になる［としても］) が 2 つの直線 IN，NH［の和］よりつねに大きいことは明らかである。これが証明すべきことであった。

求積論

『全集』pp.255–285

原題は *De Æquationum Localium Transmutatione et Emendatione ad Multimodam Curvilineorum inter se vel cum Rectilineis Comparationem, cui Annectitur Proportionis Geometricæ in Quadrandis Infinitis Parabolis et Hyperbolis Usus*。「無限の放物線および双曲線の求積において幾何学的な比の使用に関係づけられる，さまざまな曲線的な［広がり］相互のあるいは直線的な［広がり］も合わせた比較のための，軌跡の方程式の変換および改良について」

執筆されたのは 1658 年ないし 1659 年。
前半は放物線および双曲線の求積が，後半は変数変換に基づく求積 (の還元) が述べられている。

アルキメデス (Ἀρχιμήδης (Archimēdēs) : 前 287?–前 212) は放物線における求積にだけ幾何学的な比例［等比数列］を用いた。その他のさまざまな量の比較においては彼は自分自身に算術的な比例［等差数列］を強いた。それは，彼が等比数列は求積 (τετραγωνίζουσαν) には不向きであると経験したからであろうか？それとも，その比例［数列］による，第 1 種の放物線の求積に関して，必要とされた特有の技法をそれ以外［のものの求積］に転化することが全くできなかったからであろうか？いずれにしても，私たちはこのような種類の数列を求積には非常に実り豊かなものであると認識もし，経験もした。そして，完全に同じ方法によって放物線も双曲線も求積する［ことができる］という，私たちの発見を私たちは最近の幾何学者に喜んで伝えるのである。 255

アルキメデス『放物線の求積』(Τετραγωνισμὸς παραβολῆς，Quadratura parabolae) 命題 23
「もし 4 倍比で漸減する諸量の系列が与えられるならば，それらの量の総体と最小の量の 3 分の 1 との結合されたものは，最大の量の 3 分の 4 になる。」(［12］p.418)

τετραγωνίζω : *make square*, *square*; *to be in quartile aspect*

等比数列に帰されるこの全体の方法は最もよく知られていること，すなわち［次の］定理，だけに依存している。

その項が無限に減少する，任意に与えられた等比数列について，その数列を定める［隣り合う 2 つの］項の差が［その 2 つの項の］より小さい方の項に対するようにその数列の最大の項が残りのすべて［の項］の無限の和に対する。 256

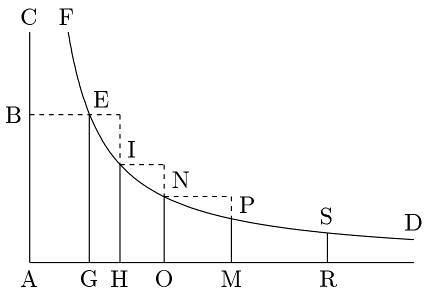
単調減少な無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ $(a>0,\ r<1)$ について，最大の項は初項 a であり，残りの項の和 ($r<1$ だから収束する) は $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = \frac{ar}{1-r}$ である。
従って，任意の m に対して，

$$(ar^m - ar^{m+1}) : ar^{m+1} = ar^m(1-r) : ar^{m+1} = a(1-r) : ar = a : \frac{ar}{1-r}$$

となる。

これがおかれたら，第 1 種の双曲線の求積が企てられるのである。

そこで，私たちは無限に異なっている種類の曲線として，その性質が，与えられた任意の角 RAC の中に，もし望むならば，その曲線そのものと同じように無限に延長される，それらの漸近線 AR，AC がおかれ，1 つの漸近線に平行に任意の直線 GE，HI，ON，MP，RS などが引かれると，直線



AH の何らかのベキが直線 AG の同様のベキに対するように直線 GE の，前のものと同じあるいは異なる，ベキが直線 HI の同次のベキに対することになるという，DSEF のような，双曲線を定義する。さらに，私たちはベキをただ，それらの指数が 2，3，4 などである，平方，立方，平方の平方などだけでなく，その指数が単位である，［すなわち］単純な辺でもある，と理解する。

それゆえ，私は，このような無限の種類の双曲線においては，アポロニウス (Ἀπολλώνιος (Apollonius)：前 262–前 200?) によるものあるいは第 1 種のものだけを除いて，等比数列の助けによって同一でしかも永続的な方法によって求積できる，と断言する。

もし望むなら，その性質が，つねに，

直線 HA の平方が直線 AG の平方に対するように

直線 GE が直線 HI に対する，

257 そして，

OA の平方が AH の平方に対するように直線 HI が直線 ON に対する

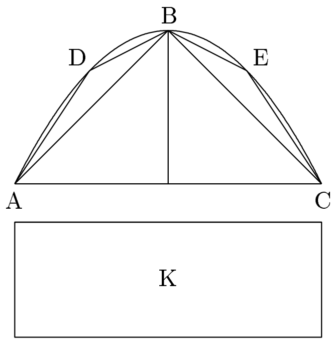
などであるような，双曲線が提示されるとしよう。私は，その底線が GE で，一方の辺が曲線 ES であり，さらに他方が無限の漸近線 GOR である，無限の広がりは直線的な与えられた広がりに等しい，と断言する。

等比数列の項が，その最初が AG であり，2 番目が AH，3 番目が AO などと，無限に延長され，近似によって，アルキメデスの方法に倣って，GE in GH による直線的な平行四辺形が曲線が交ざった四辺形 GHIE に，ディオファントス (Διόφαντος (Diophantos)：250 頃活躍) が言うように，ほぼ等しくされる (adæquetur) またはほとんど等しくされる (fere æquetur) ために，お互いに十分なだけ近づくと想像されるとしよう。さらに，以前のように，比例する直線の間隔 GH，HO，OM などは，外接および内接に関して，不可能なことへの転化 (ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον) によって証明されるであろうアルキメデスの方法が適切に遂行されるために，互いにほとんど等しいとしよう。このことは一度気づかされるだけで十分であり，幾何学者に既に十分に知られている技法を何度も押し付けられることはないし，繰り返すことを私たちが強要されることもない。

ἀπαγωγή：*leading away*, *dragging away*, *rape*, *leading into captivity*, *separation*, *withdrawal*; *payment*; *a summary process by which a person* caught in the act, *written complaint* handed in to the magistrates; *shifting* of the basis of argument, *reduction* of a disputant
εἰς：*into*, *to*
ἀδύνατος：*unable* to do a thing, *without strength*, *powerless*, *weakly*; *impossible*, *unrealizable*; *without power* or *skill*, *feebly*

「アルキメデスの方法」というのはこんにち取り尽くしの方法 (method of exhaustion) と呼んでいる手法のこと。この手法はギリシア数学独特の背理法による証明法で，積分法の先駆けと見ることができる。エウドクソス (Εὔδοξος (Eudoxos)：前 408?–前 355?) によって基礎づけられたものであるが，取り尽くす (exhaurio) という言葉が初めて用いられたのはグレゴワール・ドゥ・サン・ヴァンサン (Grégoire de Saint-Vincent：1584–1667) の『円および円錐曲線の求積の幾何学的著作』(*Opus Geometricum Quadraturae Circuli et Sectionum Coni*，1647 年；p.52) においてであるという。

その骨子は，求めるべき量を Q，その真の値を T とするとき，$Q > T$ としても，$Q < T$ としても「不可能なこと」が起き，結果として $Q = T$ であることが証明される，というものである。



アルキメデスは『放物線の求積』命題 24 などの証明において取り尽くしの方法を活用して，多くの結果を得ている。『放物線の求積』命題 24 命題とは，

「直線と放物線によって囲まれる任意の切片は，この切片と同じ底辺，等しい高さをもつ三角形の 3 分の 4 になる。」(［12］p.419)

左図で，ADBEC は直線と放物線によって囲まれる切片，ABC はこの切片と同底等高の三角形，(面 K) $= \dfrac{4}{3}\triangle$ABC とするとき，(面 K) = (切片 ADBEC) を示したい。

このとき，(切片 ADBEC) > (面 K) としても，(切片 ADBEC) < (面 K) としても,「不可能なこと」が起こることになり, その結果, (切片 ADBEC) = (面 K) $= \dfrac{4}{3}\triangle$ABC がいえる。(詳しくは［12］pp.419–420 などを参照)

これが提示されると，

AG が AH に対するように AH が AO に対し，そして，AO が AM に対する

とするとき，同時に，

AG が AH に対するように間隔 GH が HO に対し，そして，間隔 HO が OM に対する

などであろう。さらに，

EG in GH による平行四辺形は
HI in HO による平行四辺形に対して
HI in HO による平行四辺形が
NO in OM による平行四辺形に対する

ようであろう。確かに，GE in GH による平行四辺形の HI in HO による平行四辺形に対する比は直線 GE の直線 HI に対する比および直線 GH の直線 HO に対する比から合成され，さらに，

GH が HO に対するように AG が AH に対する

とすると，ゆえに，私たちが前に言ったように，EG in GH による平行四辺形の HI in HO による平行四辺形に対する比は GE の HI に対する比および AG の AH に対する比から合成される。しか 258
し，つくり方から，

GE が HI に対するように HA の平方が GA の平方に対する，

あるいは，比例している結果として，

直線 AO が直線 GA に対する。

ゆえに，EG in GH による平行四辺形の HI in HO による平行四辺形に対する比は AO の AG に対する比および AG の AH に対する比から合成される。しかし，AO の AH に対する比はそれら 2 つのものから合成される。ゆえに，GE in GH による平行四辺形は HI in HO による平行四辺形に対して OA が HA に対する，あるいは，HA が AG に対するようである。

同様に，HI in HO による平行四辺形は ON in OM による平行四辺形に対して AO が HA に対するようであることが証明されるであろう。

しかし，平行四辺形の比を構成する直線，すなわち直線 AO，HA，GA，はつくり方から比例し

ている。ゆえに，GE in GH による，HI in HO による，ON in OM によるなどの無限にとられた平行四辺形はつねに直線 HA が GA に対する比に連続的に比例するであろう。それゆえ，このような方法を規定する［前出の］定理により，

比［例する 2 つ］の項の差 GH が最小の項 GA に対するように
進行する平行四辺形の最初の項，すなわち EG in GH による平行四辺形が
残りの無限［個］の平行四辺形［の和］に対する，

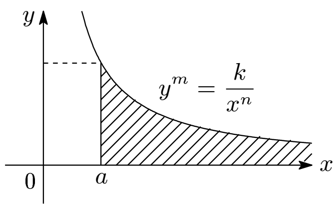
すなわち，アルキメデスの向相等性により，HI，漸近線 HR および無限に延長された曲線 IND によって囲まれた図形に対する。

しかし，HG が GA に対するように，共通な幅としての直線 GE が掛けられると，GE in GH による平行四辺形が GE in GA による平行四辺形に対する。それゆえ，

GE in GH による平行四辺形が底線を HI とするその無限の図形に対するように
GE in GH による同じ平行四辺形が GE in GA による平行四辺形に対する。

259 ゆえに，直線的な与えられた広がりである，GE in GA による平行四辺形は前述の図形にほぼ等しくされる。もしこれ［の両辺］に GE in GH による平行四辺形が付け加えられるならば，それは薄く切った (τεμαχισμοὺς) 小片のゆえに消え去り，そして，無に向かって消滅して，真実が残り，そして，それはアルキメデスの証明によって (長ったらしいとしても) 非常に容易に立証されるであろう。この種類の双曲線において，平行四辺形 AE は底線 GE，漸近線 GR および無限に延長された曲線 ED によって囲まれた図形に等しい。

τεμαχισμός : *cutting up*, *slicing*



$n > m \geqq 1$ を自然数とするとき，左図の斜線部の面積は

$$S = \int_a^\infty \frac{k^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{n}{m}}}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{k^{\frac{1}{m}}}{x^{\frac{n}{m}}}\,dx$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{k^{\frac{1}{m}}}{-\frac{n}{m}+1}\,x^{-\frac{n}{m}+1}\right]_a^b$$
$$= \lim_{b\to\infty}\frac{k^{\frac{1}{m}}}{\frac{-(n-m)}{m}}\,b^{-\frac{n}{m}+1} - \frac{k^{\frac{1}{m}}}{\frac{-(n-m)}{m}}\,a^{-\frac{n}{m}+1}$$
$$= \frac{m}{n-m}\,k^{\frac{1}{m}}\,a^{-\frac{n}{m}+1}$$

となる。

一方，$n = m = 1$ のときは，

$$S = \int_a^\infty \frac{k}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{k}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\,[k\log x]_a^b = \lim_{b\to\infty} k\log b - k\log a$$

となり，発散する。

ところで，平行四辺形 AE は $\mathrm{AE} = a \times \dfrac{k^{\frac{1}{m}}}{a^{\frac{n}{m}}} = k^{\frac{1}{m}}\,a^{-\frac{n}{m}+1}$ であるから，$n > m \geqq 1$ のとき，

$$\mathrm{AE} : S = 1 : \frac{m}{n-m} = (n-m) : m \qquad (\text{だから，} n = 2,\ m = 1 \text{ なら } \mathrm{AE} = S)$$

となる。

このような種類の双曲線についての発見を，私たちが述べたように，1 つ［の場合］を除いて，すべて［の種類の双曲線］に拡張することは全く面倒なことではない。確かに，もし望むなら，異なった双曲線の性質が

GE が HI に対するように直線 HA の立方が直線 GA の立方に対する

や，その他についてであるとしても，同じである。

習慣に従って，上のように，比例する無限の系列が提示されたら，上のように，平行四辺形 EH，IO，MN［など］は無限に比例することになるであろう。さらに，この場合では，最初の平行四辺形は第 2 に対して，第 2 は第 3 に対して，などは直線 AO が GA に対するようであろう。このことは比の合成が直ちに明らかにするであろう。それゆえ，

平方四辺形 EH が図形に対するように直線 OG が GA に対する

であろうし，共通な幅 GE が掛けられると，

OG in GE による平行四辺形が GE in GA による平行四辺形に対する

であろう。それゆえ，

OG in GE による平行四辺形が GE in GA による平行四辺形に対するように

GE in GH による平行四辺形が図形に対するし，

入れ換えて，

OG in GE による平行四辺形が GE in GH による平行四辺形に対するように

GE in GA による平行四辺形が図形に対する。

さらに，向相等性により，

OG in GE による平行四辺形が HG in GE による平行四辺形に対するように

OG が GH に対する，あるいは，2 が 1 に対する。

なぜならば，つくられた隣り合う底線の間隔は，つくり方から，互いにほとんど等しいからであ 260
る。ゆえに，この双曲線においては，直線的な与えられた広がりに等しい，平行四辺形 EGA は底線 GE，漸近線 GR，無限に延長された曲線 ESD によって囲まれた図形の 2 倍である。

その他の任意の場合においても，第 1 種の (あるいは，アポロニウスの，また，単純な) 双曲線 —— その双曲線では平行四辺形 EH，IO，NM［など］はつねに互いに等しく，そして，それゆえ，系列を構成する項が互いに等しいから，それらの間の差は存在せず，この手続きの全体が不可思議なものになってしまうから，同じ比の方法は不適当である —— においてだけを除いて，同様の証明が位置を占めるであろう。

私たちは，共通の双曲線において，求められた平行四辺形はつねに互いに等しいことの証明は付け加えない。というのも，このことは自分自身によって直ちに明らかにされるし，同じ種類［の双曲線］において

GE が HI に対するように HA が GA に対する

という，この性質だけから容易に導かれるからである。

同じ方法によって，双曲線において起きたように，私たちの方法の技法に関して防備を固めなければならないあるものを除いて，すべての放物線が完全に求積される。

もし望むなら，私たちは放物線において第 1 種の，アポロニウスの［ものの］例だけを付け加えよう。この例によって，残りのすべて［のもの］の，無限［の種類］の任意の放物線における，証明が与えられるであろう。

AGRC を第 1 種の半放物線 (semiparabole) とし，その直径を CB，半底線を AB としよう。さらに，そこにとられた縦線 IE，ON，GM などはつねに

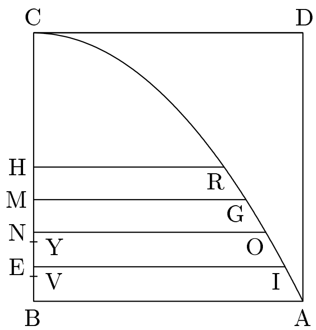
AB の平方が IE の平方に対するように直線 BC が CE に対する，

および

IE の平方が ON の平方に対するように直線 CE が CN に対する

とし，アポロニウスの放物線の特有の性質により無限にそうであるとしよう。

この方法の習慣に従って，直線 BC，EC，NC，MC，HC などは無限に連続して比例するものと理解されるとしよう。さらに，上で証明されたように，平行四辺形 AE，IN，OM，GH などは無限に比例するであろう。平行四辺形 AE の平行四辺形 IN に対する比が知られるようになるために，方法に従って，比の合成に戻らなければならないであろう。



261 ところで，

平行四辺形 AE の平方四辺形 IN に対する比は

AB の IE に対する比および BE の EN に対する比から

合成される。さらに，

AB の平方が IE の平方に対するように

BC が CE に対する

とするから，もし BC および CE の間に比例中項 CV が，さらに，EC および NC の間に比例中項 YC がとられるならば，直線 BC，VC，EC，YC，NC は連続的に比例し，

BC が EC に対するように BC の平方が VC の平方に対する

であろう。しかし，

BC が EC に対するように AB の平方が EI の平方に対する。

ゆえに，

AB の平方が EI の平方に対するように BC の平方が VC の平方に対する

であろうし，

AB が IE に対するように BC が VC に対する

であろう。それゆえ，平方四辺形 AE の平方四辺形 IN に対する比は

BC の VC に対する，あるいは VC の CE に対する，あるいは EC の YC に対する比，

および，BE の EN に対する，あるいは上で証明されたように，BC の CE に対する比から

262 合成されるであろう。さらに，これら 2 つの比，

すなわち，BC の CE に対する，および，CE の CY に対する比，

によって合成される比は BC の CY に対する比と同じである。それゆえ，

平行四辺形 AE は平行四辺形 IN に対して BC が YC に対する

ようであり，それゆえ，方法を規定する定理により，

平行四辺形 AE は図形 IRCHE に対して直線 BY が直線 YC に対する

であろうし，それゆえ，

同じ平行四辺形 AE が図形全体 AIGRCB に対するように

直線 BY が直径全体 BC に対する。

さらに，BY が直径全体 BC に対するように，共通の幅 AB が掛けられると，

AB in BY による平行四辺形が AB in BC による平行四辺形に対する，

あるいは，(直径に平行に，接線 CD と D において出会う，AD が引かれると) 平行四辺形 BD に対する。ゆえに，

平行四辺形 AE が半放物線の図形全体 ARCB に対するように

AB in BY による平行四辺形が平行四辺形 BD に対する，

そして，入れ換えて，

平行四辺形 AE が AB in BY による平行四辺形に対するように

図形が平行四辺形 BD に対する。

さらに，

平行四辺形 AE が AB in BY による平行四辺形に対するように，

共通の幅［AB］によって，

直線 BE が BY に対する。

ゆえに，

BE が BY に対するように図形が平行四辺形 BD に対する，

そして，逆にされると，

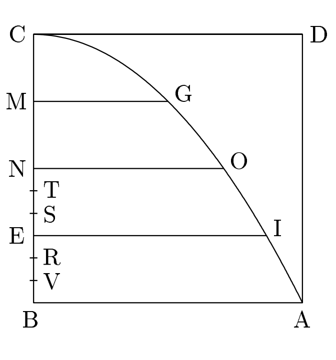
BY が BE に対するように平行四辺形 BD が図形 ARCB に対する。

さらに，(比例する［項の］間隔を表している直線 BV，VE，EY は互いにほとんど等しいと仮定 263
するという，向相等性および微小な［切片への］切断のために)［BY はほとんど等しい間隔が 3 つ，BE は 2 つだから］BY は BE に対して 3 が 2 に対するようである。ゆえに，

平行四辺形 BD は図形に対して 3 が 2 に対する

ようであり，この比はアルキメデスによる放物線の求積と，彼は等比数列を別の仕方で利用したけれども，一致する。さらに，等比数列を無限［の種類］の別の放物線の求積に結び付けることは実りのないものであることに，人類の偉大な足跡をたどることによって，気づかされたということを私たちは疑わないから，私たちには方法を変化させることやアルキメデスとは異なる道を追求することが必要であった。

さらに，証明および私たちの方法における一般的な規則がすべての放物線について直ちに完全に語られることは明らかである。例えば，疑われるであろう状況が多く残されない［ようにする］ために，曲線と直線との比較についての私たちの議論が言及された同じ放物線が曲線 AIGC で，その底線が AB，直径が BC であるとし，



縦線 AB の立方が縦線 IE の立方に対するように

直線 BC の平方が直線 EC の平方に対する

とし，残りは上のようにおかれる，すなわち，直線 BC，EC，NC，MC などは無限に比例する系列であり，同様に，平行四辺形 AE，IN，OM などは［無限に］比例する系列である，としよう。

BC および EC の間に 2 つの比例中項 VC，RC がとられ， 264
同様に，EC および CN の間に 2 つの比例中項 SC，TC が，再び，とられるとしよう。

つくり方から，

直線 BC は CE に対して EC が NC に対するのと同じ比にある

から，直線 BC，VC，RC，EC，SC，TC も同様に連続的に比例するようになることは明らかである。さらに，

AB の立方が IE の立方に対するように BC の平方が EC の平方に対する，

あるいは，直線 BC が直線 NC に対する。

さらに，私たちが上で証明したように，BC，VC，RC，EC，SC，TC，NC が連続的に比例する 7 つ［の直線］であるから，ゆえに，第 1 のもの，第 3 のもの，第 5 のものおよび第 7 のものもまた連続的に比例するであろう。それゆえ，

BC は RC に対して，RC が SC に対するようであるし，SC が NC に対するようであろう。

それゆえ，

第 1 の BC が第 4 の NC に対するように第 1 の BC の立方が第 2 の RC の立方に対する。

しかし，

BC が NC に対するように AB の立方が IE に立方に対する

ことは私たちが証明した。ゆえに，

AB の立方が IE に立方に対するように BC の立方が RC の立方に対する。

それゆえ，

AB が IE に対するように BC が RC に対する。

それゆえ，平行四辺形 AE の平行四辺形 IN に対する比は

AB の IE に対する比，および，BE の EN に対する比，あるいは BC の EC に対する比

によって合成されるから，ゆえに，同じ平行四辺形の比は

BC の RC に対する比，および，BC の EC に対する比

から合成されるであろう。さらに，

比例する第 1 の BC が第 4 の EC に対するように第 3 の RC が第 6 の TC に対する。

265 ゆえに，平行四辺形 AE の平行四辺形 IN に対する比は

BC の RC に対する比，および，RC の TC に対する比

から合成される。すなわち，

平行四辺形 AE は平行四辺形 IN に対して BC が TC に対するようである。

それゆえ，前に証明されたことから，平行四辺形 AE は図形 IGCE に対して

直線 BT が TC に対する

ようであり，それゆえ，

平行四辺形 AE が図形全体 AICB に対するように直線 BT が直線 BC に対する

あるいは，共通の幅 AB が掛けられると，

AB in BT による平行四辺形が AB in BC による平行四辺形に対する。

そして，入れ換えて逆にされると，

平行四辺形 BD は図形 AICB に対して

AB in BT による平行四辺形が AB in BE による平行四辺形に対する

ようであり，あるいは共通の幅 AB［による除法］によって，

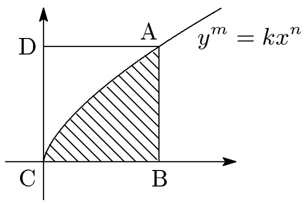
直線 BT が直線 BE に対する

ようである。

さらに，BT は 5 つの間隔を含んでいる。TS，SE，ER，RV，VB は，私たちの対数の方法のために，互いに等しいとみなされる。しかし，直線 BE はそれらの 3 つの間隔，すなわち ER，RV，VB，を含んでいる。ゆえに，

平行四辺形 BD は図形全体に対して，この場合は，5 が 3 に対する
ようである。

このことから，一般的な規範が苦もなく引き出されるであろう。確かに，平行四辺形 BD は図形 AICB に対してつねに縦線および直径のベキの指数の和が縦線のベキの指数に対するようであろうことは明らかである。この例において見られるように，縦線 AB のベキは立方で，その指数は 3 である。さらに，直径のベキは平方で，その指数は 2 である。ゆえに，いま私たちが証明したし，永久に成り立つであろうことの結果として，3 および 2 の和，すなわち 5，が縦線の指数 3 に対する 266
ようでなければならない。



m，n を自然数とし，点 B を $(a,\ 0)$，点 C を $(0,\ 0)$ とするとき，左図の斜線部の面積は

$$S = \int_0^a k^{\frac{1}{m}} x^{\frac{n}{m}} dx = \left[k^{\frac{1}{m}} \frac{1}{\frac{n}{m}+1} x^{\frac{n}{m}+1} \right]_0^a$$
$$= \frac{m}{n+m} k^{\frac{1}{m}} a^{\frac{n}{m}+1}$$

となる。

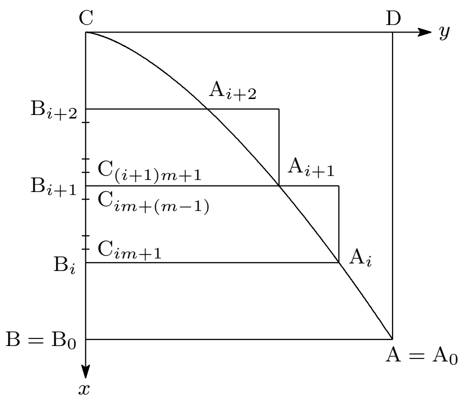
一方，平行四辺形 ABCD の面積 T は $T = a \times k^{\frac{1}{m}} a^{\frac{n}{m}} = k^{\frac{1}{m}} a^{\frac{n}{m}+1}$ である。

従って，

$$T : S = 1 : \frac{m}{n+m} = (n+m) : m \qquad (\text{だから，} m = 3,\ n = 2 \text{ なら } T : S = 5 : 3)$$

となる。

このことをフェルマは $y^3 = kx^2$ について示したのである。



$m > n$ として，$y^m = kx^n$ についてフェルマの方法をたどってみると ……

まず，直径［x 軸］上に点列 $\{\mathrm{B}_i\}$ を，

$$\mathrm{CB}_0,\ \cdots,\ \mathrm{CB}_i,\ \mathrm{CB}_{i+1},\ \cdots$$

が等比数列 —— 初項が $\mathrm{CB}_0 = a$，公比が $r\ (< 1)$ —— になるように，とる。だから，$\mathrm{CB}_i = ar^i$。

次に，B_i と B_{i+1} の間に $(m-1)$ 個の点列 $\{\mathrm{C}_{im+j}\}$ を，B_i を C_{im} とみなして，

$$\cdots,\ \mathrm{CB}_i = \mathrm{CC}_{im},\ \mathrm{CC}_{im+1},\ \cdots,$$
$$\mathrm{CC}_{im+j},\ \cdots,\ \mathrm{CC}_{im+(m-1)},$$
$$\mathrm{CB}_{i+1} = \mathrm{CC}_{(i+1)m},\ \cdots$$

も等比数列 —— 公比は $r^{\frac{1}{m}}$ —— になるように，とる。だから，$\mathrm{CC}_{im} = c_i$ とすると，$\mathrm{CC}_{im+j} = c_i r^{\frac{j}{m}} = ar^{i+\frac{j}{m}}$。なお，$m > n$ は $\mathrm{C}_{im}\mathrm{C}_{im+n}$ が $\mathrm{B}_i\mathrm{B}_{i+1}$ を超えないようにするため。

さて，曲線の方程式から，任意の i について $(\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i)^m : (\mathrm{CB}_i)^n = k : 1$ であるから，

$$(\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i)^m : (\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{B}_{i+1})^m = (\mathrm{CB}_i)^n : (\mathrm{CB}_{i+1})^n = a^n r^{in} : a^n r^{(i+1)n} = 1 : r^n$$
$$= \mathrm{CB}_0 : \mathrm{CB}_n$$

がいえる。

ところで，$(\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i)^m = k\,(\mathrm{CB}_i)^n$ であるから，$\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i = k^{\frac{1}{m}}\,(\mathrm{CB}_i)^{\frac{n}{m}} = k^{\frac{1}{m}} a^{\frac{n}{m}} r^{i\frac{n}{m}}$ となり，

$$\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i : \mathrm{A}_{i+1}\mathrm{B}_{i+1} = k^{\frac{1}{m}} a^{\frac{n}{m}} r^{i\frac{n}{m}} : k^{\frac{1}{m}} a^{\frac{n}{m}} r^{(i+1)\frac{n}{m}} = 1 : r^{\frac{n}{m}} = c_0 : c_0 r^{\frac{n}{m}}$$
$$= \mathrm{CC}_0 : \mathrm{CC}_n$$

となる。

また，$\mathrm{B}_i\mathrm{B}_{i+1} = \mathrm{CB}_i - \mathrm{CB}_{i+1} = ar^i - ar^{i+1} = ar^i(1-r)$ であるから，

$$\mathrm{B}_i\mathrm{B}_{i+1} : \mathrm{B}_{i+1}\mathrm{B}_{i+2} = ar^i(1-r) : ar^{i+1}(1-r) = 1 : r = \mathrm{CC}_0 : \mathrm{CC}_m$$

$$= \mathrm{CC}_n : \mathrm{CC}_{m+n}$$

となる。

従って，

$$\begin{aligned}&\text{平行四辺形 } \mathrm{A}_i\mathrm{B}_{i+1} : \text{平行四辺形 } \mathrm{A}_{i+1}\mathrm{B}_{i+2}\\ &\quad = \mathrm{A}_i\mathrm{B}_i \times \mathrm{B}_i\mathrm{B}_{i+1} : \mathrm{A}_{i+1}\mathrm{B}_{i+1} \times \mathrm{B}_{i+1}\mathrm{B}_{i+2} = \mathrm{CC}_0 \times \mathrm{CC}_n : \mathrm{CC}_n \times \mathrm{CC}_{m+n}\\ &\quad = \mathrm{CC}_0 : \mathrm{CC}_{m+n}\end{aligned}$$

となる。

この平行四辺形の列 $\{\mathrm{A}_i\mathrm{B}_{i+1}\}$ は等比数列になるから，この論文の冒頭の定理が適用できて，

$$\mathrm{A}_0\mathrm{B}_1 : \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{A}_i\mathrm{B}_{i+1} = (\mathrm{CC}_0 - \mathrm{CC}_{m+n}) : \mathrm{CC}_{m+n} = \mathrm{C}_0\mathrm{C}_{m+n} : \mathrm{CC}_{m+n}$$

となり，合比の理［$a : b = c : d$ ならば $a : (a+b) = c : (c+d)$］により，

$$\mathrm{A}_0\mathrm{B}_1 : \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}_i\mathrm{B}_{i+1} = \mathrm{C}_0\mathrm{C}_{m+n} : (\mathrm{C}_0\mathrm{C}_{m+n} + \mathrm{CC}_{m+n}) = \mathrm{C}_0\mathrm{C}_{m+n} : \mathrm{CC}_0$$

が成り立つ。それゆえ，

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0 \times \mathrm{B}_0\mathrm{B}_1 : \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}_i\mathrm{B}_{i+1} &= \mathrm{A}_0\mathrm{B}_0 \times \mathrm{C}_0\mathrm{C}_{m+n} : \mathrm{A}_0\mathrm{B}_0 \times \mathrm{CC}_0\\ &= \mathrm{A}_0\mathrm{B}_0 \times \mathrm{C}_0\mathrm{C}_{m+n} : \mathrm{ABCD}\end{aligned}$$

となるから，

$$\begin{aligned}\mathrm{ABCD} : \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}_i\mathrm{B}_{i+1} &= \mathrm{A}_0\mathrm{B}_0 \times \mathrm{C}_0\mathrm{C}_{m+n} : \mathrm{A}_0\mathrm{B}_0 \times \mathrm{B}_0\mathrm{B}_1 = \mathrm{C}_0\mathrm{C}_{m+n} : \mathrm{B}_0\mathrm{B}_1\\ &= \mathrm{C}_0\mathrm{C}_{m+n} : \mathrm{C}_0\mathrm{C}_m\end{aligned}$$

がいえる。

ここで，$r \to 1$ とすると，各小区間 $\mathrm{C}_j\mathrm{C}_{j+1}$ はほぼ等しくなり，$\mathrm{C}_0\mathrm{C}_{m+n}$ は $(m+n)$ 個の，$\mathrm{C}_0\mathrm{C}_m$ は m 個の小区間を含むことになる。また，点列 $\{\mathrm{B}_i\}$ の個数を無限個にすれば，$\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}_i\mathrm{B}_{i+1}$ は S に近づく。よって，$T : S = (n+m) : m$ となる，という訳。

因みに，直接計算によると $\cdots\cdots$

$\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i = k^{\frac{1}{m}} a^{\frac{n}{m}} r^{i\frac{n}{m}}$，$\mathrm{B}_i\mathrm{B}_{i+1} = a(1-r)r^i$ であるから，

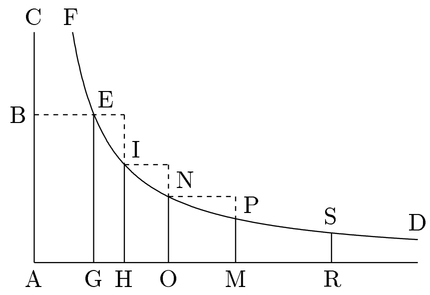
$$\text{平行四辺形 } \mathrm{A}_i\mathrm{B}_{i+1} = \mathrm{A}_i\mathrm{B}_i \times \mathrm{B}_i\mathrm{B}_{i+1} = k^{\frac{1}{m}} a^{\frac{n}{m}+1}(1-r) r^{i\left(\frac{n}{m}+1\right)}$$

となり，平行四辺形の列 $\{\mathrm{A}_i\mathrm{B}_{i+1}\}$ は初項が $k^{\frac{1}{m}} a^{\frac{n}{m}+1}(1-r)$ で，公比が $r^{\frac{n}{m}+1}$ の等比数列になる。

$$\begin{aligned}\text{従って，}S = \lim_{r\to1} \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{A}_i\mathrm{B}_{i+1} &= \lim_{r\to1} \frac{k^{\frac{1}{m}} a^{\frac{n}{m}+1}(1-r)}{1 - r^{\frac{n}{m}+1}}\\ &= k^{\frac{1}{m}} a^{\frac{n}{m}+1} \lim_{r\to1} \frac{1 - \left(r^{\frac{1}{m}}\right)^m}{1 - \left(r^{\frac{1}{m}}\right)^{n+m}}\\ &= k^{\frac{1}{m}} a^{\frac{n}{m}+1} \lim_{r\to1} \frac{1 + r^{\frac{1}{m}} + \left(r^{\frac{1}{m}}\right)^2 + \cdots + \left(r^{\frac{1}{m}}\right)^{m-1}}{1 + r^{\frac{1}{m}} + \left(r^{\frac{1}{m}}\right)^2 + \cdots + \left(r^{\frac{1}{m}}\right)^{n+m-1}}\\ &= k^{\frac{1}{m}} a^{\frac{n}{m}+1} \frac{m}{n+m}\end{aligned}$$

となり，目的の結果が得られる。

さらに，双曲線において，一般的な規範が小さくはない容易さで見出される。すなわち，どのようなものであろうと双曲線において，もし最初の図に戻るならば，つねに，平行四辺形 BG は無限に伸ばされた図形 RGED に対して縦線および直径のベキの指数の差が縦線のベキの指数に対するようであろう。



確かに，例えば，

HA の立方が GA の立方に対するように

GE の平方が HI の平方に対する

としよう。立方および平方の指数 (それらは 3 および 2 である) の差は 1 であろう。さらに，縦線のベキ，すなわち平方，の指数は 2 である。ゆえに，この場合においては，平行四辺形は図形に対して 1 が 2 に対するようであろう。

重心および放物線と同様に双曲線の接線に関係している，私たちの極大および極小の方法によって導かれた，発見は以前に，すなわち 20 年前後前に，最近の幾何学者に知られるようになった。ガリア全体でとても有名な数学者は外国人に知らせることをおそらく煩わしく感じないであろうから，このことについて将来にわたって疑うことはない。

> 以上で，双曲線 $y^m = \dfrac{k}{x^n}$ については AE : $S = (n - m) : m$［42 ページ］，放物線 $y^m = kx^n$ については $T : S = (n + m) : m$［47 ページ］が示された。
> いずれの場合も曲線下の面積は直線図形 —— 平方四辺形，というか長方形 —— と比較可能であるから，双曲線，放物線は求積可能であることになる。

先に述べたことによって近似が達成されるのにどれだけ多くの少量の求積が必要であるかは注目に値することである。なぜならば，そこから，古代にしても最近にしても幾何学者の心に浮かぶことのないような曲線によって囲まれた，無限［に多く］の図形を容易に求積することができるから 267
である。私たちはそれを何らかの規則に簡潔にまとめることになる。

その性質が次の方程式を与える曲線があるとしよう。

$$B\ q. - A\ q. \text{ が } E\ q. \text{ に等しい}$$

(この曲線が円であることは直ちに明らかである)。未知数のベキ $E\ q.$ を除法または分割 (parabolismum) によって辺に還元できることは確実である。

確かに，未知量 U に既知量 B が掛けられたものが再び未知量 E の平方に等しいとすることは自由であるから，私たちは

$$E\ q. \text{ が } B \text{ in } U \text{ に等しい}$$

と仮定することができる。

これがおかれると，

$$B\ q. - A\ q. \text{ が } B \text{ in } U \text{ に等しくされる}$$

であろう。さらに，同次のもの B in U は方程式のもう一方の側にあるのと同じ個数の同次のものから構成することができ，そして，そのような同次のものは同じ記号によって表さなければならない。それゆえ，

$$B \text{ in } U \text{ は } B \text{ in } I - B \text{ in } Y \text{ に等しい}$$

と仮定されるとしよう。なぜならば，ヴィエート (François Viète : 1540–1603) の習慣に従って，私たちは未知量に対してつねに母音を利用するからである。ゆえに，

$$B\ q. - A\ q. \text{ が } B \text{ in } I - B \text{ in } Y \text{ に等しくされる。}$$

一方の側のそれぞれの要素が他方の側のそれぞれの要素に等しくされるとしよう。確かに，

$$B\ q.\ \text{が}\ B \text{ in } I\ \text{に等しい}$$

とすると，ゆえに，

$$I\ \text{が}\ B\ \text{に等しい}$$

が与えられるであろう。次に，

$$-\ A\ q.\ \text{と}\ -\ B \text{ in } Y\ \text{が},$$

すなわち，

$$A\ q.\ \text{と}\ B \text{ in } Y\ \text{が}$$

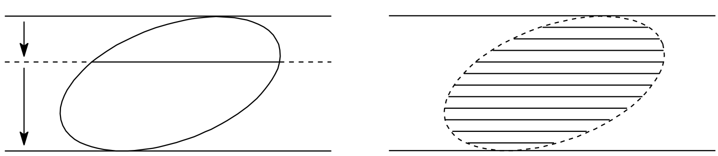
268 等しくされるとしよう。直線 Y の端点は第 1 種の放物線［の上］にあるであろう。それゆえ，この場合には，すべてのものは平方に変えることができる。それゆえ，もしすべての E quadrata を与えられた直線に結び付けるならば，［それらの和は］与えられたそして知られた直線的な立体になるであろう。

$b^2 - a^2 = e^2$，すなわち $e = \sqrt{b^2 - a^2}$，について，$\displaystyle\int_0^b e^2 da$ を求めたいとするとき ……

$e^2 = bu = bi - by$ として，$b^2 = bi$，$a^2 = by$ とするならば，(1) $b^2 = bi$ は $b = i$ で定値関数だから求積可能，(2) $a^2 = by$ は放物線だから，先の議論により，求積可能，であるから，全体として e^2 は求積可能となる，ということか。

なお，ここで「すべての (omnia) E quadrata」という表現が出てきたが，「すべての○○」に関して，カヴァリエリ (Bonaventura Francesco Cavalieri：1598–1647) は『ある新しい方法によって推進された不可分者による連続体の幾何学』(*Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione Promota*：1635 年) の第 2 巻の「定義」において次のように述べている。

定義 1「もし，与えられた平面図形の，向かい合わせにおかれた任意の接線の間に，互いに平行で両側に無際限に延長された 2 つの平面が，与えられた図形の平面に対して直立してあるいは傾けられて，引かれ，［そして，］それらの一方が他方に向かって，それらが一致するまで，つねに等距離のままで動かされるならば，運動全体において，動かされている平面および与えられた図形との共通の切断としてつくられる，それぞれの直線は，いっしょにまとめられると，これが与えられた図形に対して直立している平面であるとき，そのような図形の，それらの 1 つが基準 (regula) としてとられた，すべての線 (omnes lineae) といわれる。一方，それに対して傾けられているとき，与えられた同じ図形の，それらの 1 つが同様に基準である，斜めの横断によるすべての線 (omnes lineae obliqui transitus) といわれる。しかし，前述のことを再び説明するときには，一方は直立の横断による (recti transitus)，他方は斜めの横断によるというように呼ぶことが好ましく，確かに，与えられた図形に対して等距離にある平面の傾斜によってそのようなことになる。」



定義 2「もし，提示された立体に対して，向かい合わせにおかれた任意の接平面が，何らかの仕方で引かれ，両側に無際限に延長された［2 つの平面の］基準として，存在し，［そして，］それらの一方が他方に向かって，それらが一致するまで，つねに等距離のままで動かされるならば，運動全体において，提示された立体に含まれる，それぞれの平面は，いっしょにまとめられると，それらの 1 つが基準としてとられた，提示された立体のすべての平面 (omnia plana) といわれる。」

この定義に現れる「それぞれの直線」や「それぞれの平面」が不可分者 (indivisibilis) と呼ばれるものであり，その総和としての「すべての線」や「すべての平面」によって図形の面積や体積

> を捉えようとするものである。すなわち，「すべての○○」は「すべての○○の和」の意味に解されるのであるが，彼は「和」という言葉を使ってはいない。
>
> そして，同書の第 7 巻定理 1 命題 1 において，こんにちカヴァリエリの原理と呼ばれている命題が提示される。
>
> 「同じ平行線の間につくられた任意の［2 つの］平面図形は，同じ平行線と等距離に引かれた任意の直線によって切り取られたどのような直線の部分も等しければ，また互いに等しい。そして，同じ平行な平面の間につくられた任意の［2 つの］立体図形は，同じ平行な平面と等距離に引かれた任意の平面によって切り取られたその立体図形の平面の上につくられたどのような平面も等しければ，同様に，互いに等しい。さらに，これを説明する必要があるであろうとき，平面ばかりでなく立体もまた同様に，そしてまた，その間に［図形が］存在すると仮定される基準の線または平行な平面に従って，互いに同等とみなされた図形は類似している (analogus) といわれるとしよう。」

次に，その方程式が

$$A\ c. + B \text{ in } A\ q. \text{ が } E\ c. \text{ に等しい}$$

である曲線が提示されるとしよう。$E\ c.$ が与えられた平面に結び付けられ，例えば，$B\ q.$ in U に等しいとしよう。さらに，直線 U はいくつかの未知量から構成することができるから，

$$A\ c. + B \text{ in } A\ q. \text{ が } B\ q. \text{ in } I + B\ q. \text{ in } Y \text{ に等しい}$$

としよう。1 つ 1 つの要素が互いに等しくされる，すなわち，

$$A\ c. \text{ が } B\ q. \text{ in } I \text{ に等しくされる}$$

としよう。これから立方および辺による放物線が生じるであろう。

次に，

$$B \text{ in } A\ q. \text{ が第 2 の要素 } B\ q. \text{ in } Y \text{ に等しくされる}$$

としよう。これから平方および辺による，すなわち第 1 種の，放物線が生じるであろう。

ところで，それらの放物線のそれぞれは求積される。ゆえに，与えられた直線に結び付けられた E cuborum の和は同じ階級の直線的な量と適切に等しくされるであろう平面的平面をつくり出す。

もし方程式の中に多くの要素があるならば，それどころかそれぞれの未知量の非常に多くの階級が含まれているならば，それらは，非常に多くのもののように，同じ方法に従って適切な還元の助けによって適合させることができる。

これらのことから，もし，

$$B\ q. - A\ q. \text{ が } E\ q. \text{ に等しい}$$

とした，最初の方程式において，私たちが $E\ q.$ の位置に B in U をおくならば，私たちは与えら 269
れた直線に結び付けられたすべての U の和をあたかも平面として考察することができ，そして，求積することができる。確かに，すべての U は与えられた直線 B によって割られたすべての E quadrata にほかならない。

同様に，第 2 の方程式において，すべての U は与えられた B quadratum によって割られたすべての E cubi にほかならない。

それゆえ，第 2 の図形におけると同様に第 1 においても，すべての U は直線的な与えられた広がりに等しい図形になる。

さらに，この操作は融合 (synaeresis) によってなされ，そして，明らかなように，放物線によってなし遂げられる。しかし，単独のまたは放物線と合成された，双曲線によって同時に適切になし

遂げられるから，分解 (diaeresis) による求積の操作はあまり実り豊かでないということはない。

> synaeresis : 母音融合 (隣接する 2 母音が融合して 1 音節となること)，(母音の) 合音
> diaeresis : (音節の) 分切，音節分解，分音
> συνέρεισις : *setting firmly together*

もし望むなら，次の方程式，

$$\frac{B\ cc. + B\ qc. \text{ in } A + A\ cc.}{A\ qq.} \text{ が } E\ q. \text{ に等しい，}$$

によって生じるであろう曲線が提示されるとしよう。

いま仮定されたことから，$E\ q.$ は B in U と表現することができ，あるいは，方程式の両側における要素がどちらも 3 つになるように，

$$B \text{ in } U \text{ は } B \text{ in } O + B \text{ in } I + B \text{ in } Y \text{ に等しい}$$

とできる。

それがなし遂げられると，

$$\frac{B\ cc. + B\ qc. \text{ in } A + A\ cc.}{A\ qq.} \text{ が } B \text{ in } O + B \text{ in } I + B \text{ in } Y \text{ に等しくされる}$$

であろう。そして，1 つずつの要素が 1 つずつ等しくされると，

$$\frac{B\ cc.}{A\ qq.} \text{ が } B \text{ in } O \text{ に等しくされる}$$

であろうし，すべて［の項］に $A\ qq.$ が掛けられると，

$$B\ cc. \text{ が } A\ qq. \text{ in } B \text{ in } O \text{ に等しくされる}$$

であろうし，すべて［の項］が B で割られると，

$$B\ qc. \text{ が } A\ qq. \text{ in } O \text{ に等しくされる}$$

であろうし，これは，明らかに，ある双曲線の方程式である。確かに，双曲線を構成する方程式は，
270 一方の側には与えられた量を，そして他方［の側］には 2 つの未知量のベキによる［積］を含んでいる。

方程式の第 2 の要素は

$$\frac{B\ qc. \text{ in } A}{A\ qq.} \text{ あるいは } \frac{B\ qc.}{A\ c.} \text{ が } B \text{ in } I \text{ に等しい}$$

を与える。そして，すべて［の項］に $A\ c.$ が掛けられ，B で割られると，

$$B\ qq. \text{ が } A\ c. \text{ in } I \text{ に等しい}$$

となり，これは，前のとは異なる，もう 1 つの双曲線の方程式である。

最後に，第 3 の要素は

$$\frac{A\ cc.}{A\ qq.} \text{ すなわち } A\ q. \text{ が } B \text{ in } Y \text{ に等しい}$$

であり，これは放物線の方程式である。

それゆえ，前の方程式において，与えられた直線に結び付けられたすべての U は直線的な与えられた広がりに等しいことは明らかである。確かに，求積することができる 2 つの双曲線および 1 つの放物線の和は与えられた直線的なあるいは四角形状の［ものに］等しい広がりを与える。

さらに，私たちは，既にそうしたように，それぞれの要素の分子を別々に分母で割ることを拒否しない。確かに，私たちが 3 つの要素から合成された分子全体を同じ分母で一度割るならば，同じことが起きる。それゆえ，確かに，方程式［の一方の辺］のそれぞれの要素をもう一方［の辺］の

それぞれの同次のものと適切に比較することができる。

さらに，

$$\frac{B\ qc.\ \mathrm{in}\ A - B\ cc.}{A\ c.}\ \text{が}\ E\ c.\ \text{に等しい}$$

が提示されるとしよう。

$E\ c.$ が $B\ q.\ \mathrm{in}\ U$，あるいは，もう一方の［辺に合わせて］2 つ同次の要素を使って，

$$B\ q.\ \mathrm{in}\ I - B\ q.\ \mathrm{in}\ Y$$

に等しいと想像されるとしよう。

$$\frac{B\ qc.\ \mathrm{in}\ A}{A\ c.}\ \text{あるいは}\ \frac{B\ qc.}{A\ q.}\ \text{が}\ B\ q.\ \mathrm{in}\ I\ \text{に等しい}$$

となるであろうし，すべて［の項］に $A\ q.$ が掛けられ，$B\ q.$ で割られると， 271

$$B\ c.\ \text{が}\ A\ q.\ \mathrm{in}\ I\ \text{に等しい}$$

となるであろう。これは求積できるであろうある双曲線の方程式である。

次いで，第 2 の同次の要素［による］

$$\frac{B\ cc.}{A\ c.}\ \text{が}\ B\ q.\ \mathrm{in}\ Y\ \text{に等しい}$$

が提示されるとしよう。それゆえ，すべて［の項］に $A\ c.$ が掛けられ，$B\ q.$ で割られると，

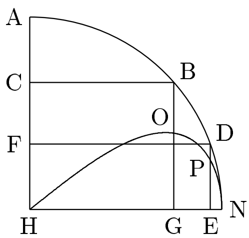
$$B\ qq.\ \text{が}\ A\ c.\ \mathrm{in}\ Y\ \text{に等しい}$$

となるであろうし，これは求積することができるある双曲線を構成する方程式である。

それゆえ，最初の方程式に戻るなら，この場合は，直線的な［広がり］に関してある与えられた直線に結び付けられたすべての E cuborum の和が与えられる。

しかもそのうえ，さらに話を前に進めることや少量の求積による操作を前進させることを妨げるものはない。

第 4 の図において，ABDN を任意の曲線とし，その底線を HN，直径を HA とし，直径に対する縦線を CB，FD，底線に対する縦線を BG，DE としよう。そして，それらは底線から頂点に向かって，HN は FD より大きく，FD は CB より大きく，そのようにずっと，というように，つねに減少するとしよう。



直線 AH に結び付けられた HN，FD，CB の平方によってつくられた図形 (すなわち，CB の平方 in CA による，および FD の平方 in FC による，および NH の平方 in HF による立体［の和］) は，つねに，長方形 BG in GH，DE in EH が 2 倍にとられたもの，および底線 HN に結び付けられた［直線］による図形 (すなわち，BG in GH の 2 倍 in GH による，および DE in EH の 2 倍 in EG による立体［の和］) に等しい，など［方程式の］両側について無限に［とられた項に対してそうである]。 272

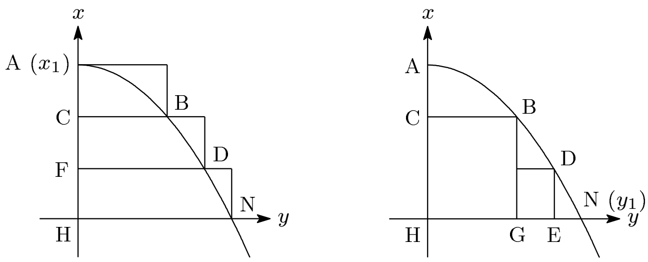
さらに，その他の無限のベキについて，直径に対する同次のものの底線に対する同次のものへの還元は同じ容易さでなされる。このことの観察は今まで知られていなかった無限の曲線の求積を明らかにする。

確かに，同様に直線 AH に結び付けられたすべての HN，FD，CB の立方［の和］は，上と同様に，BG in GH の平方による，および DE in EH の平方によるもの，および直線 HN に結び付けられたものによる積の和が 3 倍にとられたものに等しい。すなわち，CB の立方 in CA による，お

よび DF の立方 in FC による，および HN の立方 in HF による平面的平面は BG in GH の平方 in HG，および DE in EH の平方 in EG による平面的平面の和が 3 倍にとられたものに等しくされる。

さらに，直線 AH に結び付けられた HN，FD，CB の平方の平方の和は，上と同様に，直線 HN に結び付けられた BG in GH の立方による，および DE in EH の立方による平面的平面の和の 4 倍に等しくされる。

このことから，すぐに明らかになるように，求積の無限性が知られるようになる。



$0 \leqq x \leqq x_1$ の範囲で単調減少な関数 $y = f(x)$ のグラフを ABDN［$f(0) = y_1$，$f(x_1) = 0$］とするとき，

$$\begin{aligned} &\mathrm{CB}^2 \times \mathrm{CA} + \mathrm{FD}^2 \times \mathrm{FC} + \mathrm{HN}^2 \times \mathrm{HF} + \cdots \\ &\qquad = 2\,(\mathrm{BG} \times \mathrm{GH} \times \mathrm{GH} + \mathrm{DE} \times \mathrm{EH} \times \mathrm{EG} + \cdots) \end{aligned}$$

が，そして，一般には，

$$\begin{aligned} &\mathrm{CB}^n \cdot \mathrm{CA} + \mathrm{FD}^n \cdot \mathrm{FC} + \mathrm{HN}^n \cdot \mathrm{HF} + \cdots \\ &\qquad = n\left(\mathrm{BG} \cdot \mathrm{GH}^{n-1} \cdot \mathrm{GH} + \mathrm{DE} \cdot \mathrm{EH}^{n-1} \cdot \mathrm{EG} + \cdots\right) \end{aligned}$$

が成り立つという。

これは，$\displaystyle\int_0^{x_1} y^n dx = n\int_0^{y_1} xy^{n-1} dy$ という，積分変換公式と解することができる。

確かに，もし望むなら，底線 HN および直径 HA が与えられた，その曲線 ABDN が同じ性質をもつとし，与えられた直径 AH が解析的な項として B と呼ばれ，一方，与えられた底線 HN が D と呼ばれ，任意の縦線 FD が E と呼ばれ，任意の HF が A と呼ばれるとしよう。そして，例えば，曲線を構成する方程式を

B $q.$ $-$ A $q.$ が E $q.$ に等しい

としよう。これは円をもたらす。

ゆえに，前述の一般的な定理により，直線 B に結び付けられたすべての E quadrata は HG in GB が 2 倍にとられたもの，および底線 HN あるいは D に結び付けられたものによるすべての積
273［の和］に等しいから，さらに，B に結び付けられたすべての E quadrata は，上で証明されたように，直線的な与えられた広がりに等しいから，ゆえに，HG in GB が 2 倍にとられたもの，および底線 D に結び付けられたものによるすべての積［の和］は直線的な与えられた広がりを保っている。ゆえに，半分にされると，HG in GB，および底線 D に結び付けられたものによるすべての積［の和］は直線的な与えられた広がりに等しいであろう。

さらに，非常に容易に，そして不均整なものによって包まれることなく，前の曲線から新しい［曲線］への変換がなされるために，私たちの方法であるところの，不変の技法を遂行しなければならない。

底線に結び付けられた任意の積を HE in ED としよう。それゆえ，FD あるいは，それに平行な，HE が解析的に E と呼ばれ，FH あるいは，それに平行な，DE が A と呼ばれるとすると，ゆえに，HE in ED による積は E in A と呼ばれるであろう。2 つの未知量および不定の直線によって 1 つにまとめられた，その積 E in A が B in U，あるいは与えられた B に未知の U が掛けられた積，に等しいとおかれ，垂直におかれた DE において，EP が U に等しいと理解されるとしよう。ゆえに，

$$\frac{B \text{ in } U}{E} \text{ が } A \text{ に等しくされる}$$

であろう。

しかし，前の曲線の特有の性質により，$B\ q. - A\ q.$ は $E\ q.$ 自身に等しくされるから，ゆえに，A の位置にその新しい値

$$\frac{B \text{ in } U}{E}$$

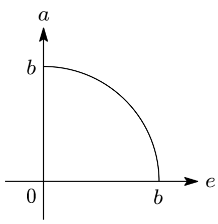
がその代わりとして用いられると，

$$B\ q. \text{ in } E\ q. - B\ q. \text{ in } U\ q. \text{ が } E\ qq. \text{ に等しい，}$$

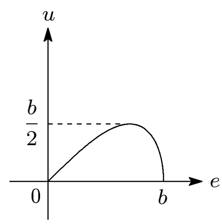
あるいは，移項の結果として，

$$B\ q. \text{ in } E\ q. - E\ qq. \text{ が } B\ q. \text{ in } U\ q. \text{ に等しい}$$

となるであろう。これは前の［曲線］から生じるであろう新しい曲線 HOPN を構成する方程式であり，そこでは，既に証明されたように，B in U によるすべての積［の和］が与えられるから，もしすべて［の項］が B で割られるならば，底線に結び付けられたすべての U の和が与えられるであろう。すなわち，平面 HOPN が直線的なものとして与えられるであろうし，それゆえ，それは求積されるであろう。



$$b^2 - a^2 = e^2 \quad \xrightarrow[a = \frac{bu}{e}]{ae = bu} \quad b^2e^2 - e^4 = b^2u^2$$



はじめの曲線 ABDN の方程式を $b^2 - a^2 = e^2$ とするとき，$ae = bu$ すなわち $a = \dfrac{bu}{e}$ とすると，新しい曲線 HOPN の方程式 $b^2e^2 - e^4 = b^2u^2$ が得られる。
このとき，$\displaystyle\int_0^b e^2 da \;=\; 2\int_0^b (ae)\, de \;=\; 2\int_0^b (bu)\, de \;=\; 2b\int_0^b u\, de \left[= \frac{2}{3}b^3\right]$ であるから，$\displaystyle\int_0^b e^2 da$ の求積の可能性を仮定すれば，$\displaystyle\int_0^b u\, de$，すなわち曲線 HOPN 下の面積，も求積できる，という訳 (そして，既述のとおり，e^2 は求積可能)。

第 2 の例として，前の曲線を構成する方程式が 274

$$B \text{ in } A\ q. - A\ c. \text{ が } E\ c. \text{ に等しい}$$

であるとしよう。直径 B に結び付けられたすべての E cuborum の和が，それゆえ，底線に結び付けられた HE の平方 in ED によるすべての積の和が，与えられるであろう。さらに，HE の平方 in ED による積は解析的な項として $E\ q.$ in A となり，これは $B\ q.$ in U に等しいと想像され，上のように，直線 EP は U に等しくされる。ゆえに，

$$\frac{B\ q.\ \text{in}\ U}{E\ q.}\ \text{が}\ A\ \text{に等しくされる}$$

であろう。それゆえ，もし私たちが A の位置に今認識された値

$$\frac{B\ q.\ \text{in}\ U}{E\ q.}$$

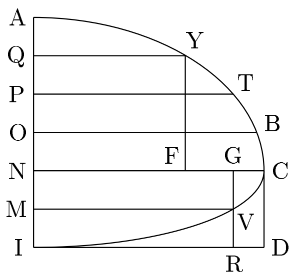
をその代わりとして用い，すべてが解析の規則に従って遂行されるならば，

$$B\ qc.\ \text{in}\ U\ q.\ \text{in}\ E\ q. - E\ ccc.\ \text{が}\ B\ cc.\ \text{in}\ U\ c.\ \text{に等しい}$$

となるであろうし，これは前の［曲線］から生じるであろう新しい曲線 HOPN を構成する方程式であり，そこでは，底線 D に結び付けられたすべての積 $B\ q.$ in U［の和］が与えられるから，すべて［の項］が $B\ q.$ によって割られると，底線 D に結び付けられたすべての U の和が与えられるであろうし，それゆえ，図形 HOPN が求積されるであろう。

そして，方法は一般的であり，完全にすべての場合に無限に拡張されるであろう。それは，直径に対するそれらの縦線が底線に向かって減少する，曲線の変換において，再び言及され，注意深く進められるであろうし，前のものとは異なる全く別の解析的な方法が始められるであろう。

例えば，第 5 の図において，はじめの曲線を IVCBTYA とし，その直径を AI，縦線を MV，NC，OB，PT，QY とし，その曲線のそれらは底線に到達するまでは底線に向かってつねに，MV が NC より小さいというように，減少するという性質であるとしよう。さらに，これに対して，曲線は，行路 CBYA の間中，A に向かって，CN が BO より大きく，BO が PT より大きく，PT が QY より大きくなどのように，曲げられる，それゆえ，すべての縦線の最大のものは CN である，としよう。



この場合において，もし私たちが MV，NC の平方の底線［に結び付けられたもの］への変換を捜し求めるならば，私たちは，
275 上と同様には，［それらを］IR in RV による積と比較しないであろう。というのも，最大の縦線 CN はその頂点が I である曲線に関係がある底線として考察することができるし，また，そうでなければならないから，一般的な定理によって，既に MV，NC のすべての平方［の和］は VG in GN による積［の和］に等しいと仮定されているからである。

それゆえ，その縦線が底線に向かって減少している曲線において，MV，NC の平方は，この場合においては，GV in GN による積と比較されるであろう。すなわち，この図において，方程式が解析的な［項による］ものに至るために，もし MI あるいは RV が A と呼ばれ，そして，MV あるいは RI が E と呼ばれ，さらに，CD あるいは GR (最大の縦線の端点を通って直径に平行に引かれたこれらは等しく，それゆえ，私たちの方法によって容易に見出される) が与えられた直線 Z に等しいと仮定されるならば，

$$\text{GV in GN による積が}\ Z\ \text{in}\ E - A\ \text{in}\ E\ \text{による積に等しい}$$

となるであろうし，それゆえ，すべての MV，NC の平方［の和］は，最大の縦線に至るまで，底線 ID に結び付けられた積

$$Z\ \text{in}\ E - A\ \text{in}\ E$$

［の和］と比較されるであろう。

さらに，残りの CN，BO，PT の平方［の和］は，解析的な項として

$$A \text{ in } E - Z \text{ in } E$$

と同等であろう，YF in FN の積［の和］と比較されるであろう。

そのように確立されたら，底線は前の曲線から新しい［曲線］に向かって容易に転じられるであろうし，同じことがその他のすべての縦線のベキについて観察されるであろう。

さらに，私たちのこの方法から，最近の人々がまだ誰もほとんど感づいてはいなかったものについての，求積が浮かび上がることを明らかにするために，その方程式が 276

$$\frac{B\ qc. \text{ in } A - B\ cc.}{A\ c.} \text{ が } E\ c. \text{ に等しい}$$

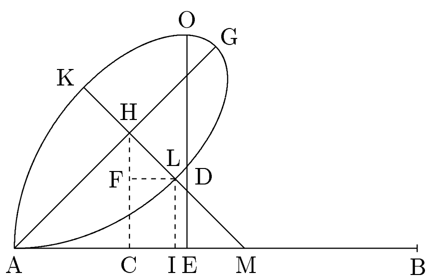
である，先の曲線が提示されるとしよう。

既に証明されたように，すべての E cubi は直線的なものとして与えられる。それらが底線に関して変換されたら，上の方法により，

$$\frac{B\ q. \text{ in } U}{E\ q.} \text{ が } A \text{ に等しい}$$

となるであろうし，技法に従ってすべてに A の新しい値が適用されると，ついに，底線の側の曲線を与えるであろう，新しい方程式に達するであろう。その方程式は

$$E\ c. + U\ c. \text{ が } B \text{ in } E \text{ in } U \text{ に等しい}$$



を与えるであろうし，それは，その作図が『雑録 30 章』(*Sectiones Miscellaneae Triginta*；『数学演習 5 巻』(*Exercitationum Mathematicarum Libri Quinque* : 1657 年) 所収) の第 25 章 (493 ページ) において与えられる，スホーテン (Frans van Schooten : 1615–1660) の曲線である。それゆえ，その著者の著作において描かれた，曲線図形 AKOGDLA は上の規則によりその求積が適切に獲得されるであろう。

さらに，そこにおいて縦線のベキの和が与えられる曲線から，底線に関して求積することができる曲線だけでなく，直径に関して容易に求積されるであろう別の曲線もつくられるということは注目に値する。

例えば，もし，第 4 の図において，曲線を構成する方程式が，私たちが上で述べたように， 277

$$B\ q. - A\ q. \text{ が } E\ q. \text{ に等しい}$$

であると仮定されるならば，その方程式が

$$B\ q. \text{ in } E\ q. - E\ qq. \text{ が } B\ q. \text{ in } U\ q. \text{ に等しい}$$

である，底線に関する新しい曲線だけでなく，縦線のベキ，すなわち $E\ q.$，が積 B in U に等しくされるであろうことによって，直径に関する新しい曲線も，それから導かれるであろう。

確かに，直径に結び付けられたすべての積 B in U［の和］が与えられるであろうし，すべて［の項］が B で割られると，直径に結び付けられたすべての U が，それゆえ，前の［曲線］から生じるであろう直径に関する新しい曲線の求積が，与えられるであろうし，その方程式は

$$B\ q. - A\ q. \text{ が } B \text{ in } U \text{ に等しい}$$

であろう。そのため，必然的に，直径に関するその新しい曲線が放物線であることは明らかである。

さらに，このような種類の変換のおかげで，前の曲線から新しい［曲線］が生じるだけでなく，苦もなく，放物線から双曲線が，そして双曲線から放物線が，試してみることによって明らかになるであろうように，生じる。

さらに，そこにおいて縦線のベキ［の和］が与えられる曲線から，前の解析的な操作によって，そこにおいて直線的なものの縦線の辺［の和］が与えられる曲線への変換が起きるように，そこにおいて縦線の辺［の和］が与えられる曲線から，そこにおいて縦線のベキ［の和］が与えられる曲線に容易に到達される。

このことの例として，その方程式が

$$B\ q.\ \mathrm{in}\ E\ q. - E\ qq.\ \text{が}\ B\ q.\ \mathrm{in}\ U\ q.\ \text{に等しい}$$

である曲線があるとしよう。確かに，この方程式において，既に証明したように，すべての U が与えられる。

$$U\ \text{が}\ \frac{A\ \mathrm{in}\ E}{B}\ \text{に等しい}$$

とおかれるとし，U そのものの位置に割り当てられた新しい値 $\dfrac{A\ \mathrm{in}\ E}{B}$ がその代わりとして用いられると，

$$B\ q.\ \mathrm{in}\ E\ q. - E\ qq.\ \text{が}\ A\ q.\ \mathrm{in}\ E\ q.\ \text{に等しい}$$

278 となるであろうし，すべて［の項］が $E\ q.$ で割られると，

$$B\ q. - E\ q.\ \text{が}\ A\ q.\ \text{に等しい,}$$

あるいは，

$$B\ q. - A\ q.\ \text{が}\ E\ q.\ \text{に等しい}$$

が残るであろう。

それゆえ，この新しい曲線において，これが円であることが明らかであるのと同様に，すべての E quadrata が与えられるであろう。

しかし，もし，そこにおいて縦線の辺［の和］が与えられる最初の曲線から，そこにおいて縦線の立方［の和］が与えられる新しい［曲線］が捜し求められるならば，私たちは未知量のベキを用いるというだけで，同じ方法が利用されるであろう。

例えば，私たちが上のように別の［曲線］から導いた曲線が提示されるとし，その方程式が

$$B\ qc.\ \mathrm{in}\ U\ q.\ \mathrm{in}\ E\ q. - E\ ccc.\ \text{が}\ B\ cc.\ \mathrm{in}\ U\ c.\ \text{に等しい}$$

であるとしよう。

そこではすべての U，すなわち縦線の辺，の和が与えられることは証明されている。それゆえ，それから，そこにおいてすべての縦線の立方［の和］が与えられる，新しい曲線が導かれるために，

$$U\ \text{が}\ \frac{E\ q.\ \mathrm{in}\ A}{B\ q.}\ \text{に等しい}$$

とおかれるとし，U の位置にそれに割り当てられた新しい値が代入されるとしよう。技法の規則に従って操作されると，ついには，そこにおいてすべての $E\ c.$，これは縦線の立方を表している，が与えられるであろう曲線を与える，

$$B\ \mathrm{in}\ A\ q. - A\ c.\ \text{および}\ E\ c.\ \text{の間の}$$

方程式ができるであろう。

さらに，この方法によって，まだ幾何学者に知られるようになっていない無限の求積が与えられ，そして見出されるだけでなく，円のような，双曲線のような，［そして］その他［の曲線］のような，単純な求積が仮定されることによって，その求積がなし遂げられる無限に多くの曲線もまた明るみに出される。

例えば，円の方程式

$$B\ q. - A\ q.\ \text{が}\ E\ q.\ \text{に等しい}$$

において，確かに，直線的に，それらの指数が，すべての平方，すべての平方の平方，すべての立方の立方のように，偶数を表しているすべての縦線のベキが与えられるが，しかし，円の求積が仮定されることによってだけ，それらの指数が，すべての E cubi，すべての E quadratocubi のように，奇数を表しているすべての縦線のベキが直線的に与えられる。これを証明すること，および，あたかも方法の規則の系であるかのように，習慣に変えることは面倒なことではない。 279

さらに，たいていは，提示された曲線の測定を調査するために，作業を 2 回あるいはさらにより多く繰り返して用いる必要がある。

例えば，次の方程式

$$B\ c.\ \text{が}\ A\ q.\ \text{in}\ E + B\ q.\ \text{in}\ E\ \text{に等しい}$$

がその形を決定する，曲線が提示されるとしよう。

もしすべての E が与えられるならば，ゆえに，すべての与えられた直線 (すなわち B) in E による長方形［の和］が与えられる。私たちがこの論文の最初で述べた方法を逆にすることによって，長方形 B in E は平方 $O\ q.$ に等しくされるはずである。ゆえに，

$$\frac{O\ q.}{B}\ \text{が}\ E\ \text{に等しくされる}$$

であろうし，E の位置に割り当てられたこの新しい値が代入されると，

$$B\ qq.\ \text{が}\ A\ q.\ \text{in}\ O\ q. + B\ q.\ \text{in}\ O\ q.\ \text{に等しい}$$

となるであろう。

そして，これが，私たちが先にこの論文のはじめで述べたことの逆であり，そこにおいてすべての $O\ q.$ が与えられるかどうかが調査されることが残っている，新しい曲線をもたらす，最初の操作である。それゆえ，そのおかげで縦線の平方［の和］から新しい曲線［の縦線］の辺［の和］が調査されるであろう，第 2 の方法に戻ることになる。

私たちが第 2 に示したことよりも上の方法に従って，$\dfrac{B\ \text{in}\ U}{O}$ が A に等しいとおかれるとすると，A の位置に私たちの方法によって今割り当てられた値が代入されると，

$$B\ qq. - B\ q.\ \text{in}\ O\ q.\ \text{が}\ B\ q.\ \text{in}\ U\ q.\ \text{に等しい}$$

となるであろうし，すべて［の項］が $B\ q.$ で割られると，ついには，円を与える方程式

$$B\ q. - O\ q.\ \text{が}\ U\ q.\ \text{に等しい}$$

となり，円の求積が仮定されると，そこにおいてすべての U が与えられる。

それゆえ，最初の曲線に戻ると，そこでは 280

$$B\ c.\ \text{が}\ A\ q.\ \text{in}\ E + B\ q.\ \text{in}\ E\ \text{に等しい}$$

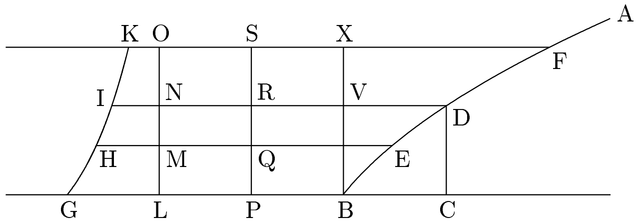
とおかれ，円の求積によってその曲線による広がりが求積できることは明らかであり，しかもそのうえ，前のとは異なる 2 つの曲線によって私たちの解析は簡潔にそして容易になし遂げられた。

さらに，これらすべてのことは，曲線に等しい直線の発見に関しても，今まで十分には確かめられなかった非常に多くの問題に関しても，明敏な (ἀγχίνους) 解析によって試してみることに注意が払われることにすぐに気づくであろう。

ἀγχίνοος : *ready of wit, sagacious, shrewd*

第 6 の図において，ADB を第 1 種の放物線とし，その軸を CB，軸 CB および通径 BV に等しい縦線を CD とし，そして，BP，PL，LG はそれぞれ軸 CB に等しく，それらは直線をなすとし

よう。曲線の上に任意の点，例えば F，がとられ，そして，CD に平行な与えられた無限の［直線］BX，PS，LO，［および］軸に平行で，直線 BX，PS，LO が X，S および O で出会う，［直線］FXSOK が引かれるとしよう。そして，直線 FX，XS の和あるいは



FS 全体が SO に対するように SO が OK に対する

とし，点 D，E が同様にとられるとき，

DR が RN に対するように RN が NI に対する

とし，

EQ が QM に対するように QM が MH に対する

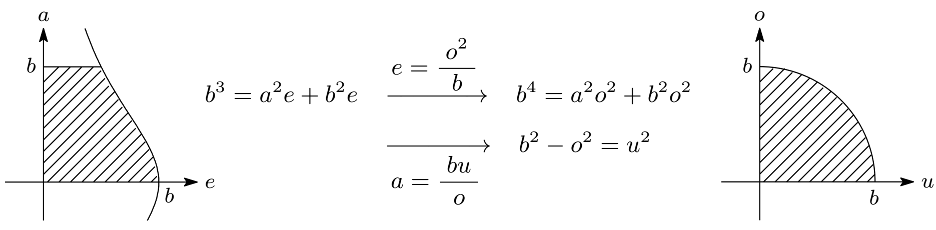
としよう。そして，その漸近線が無限の直線 LO である，無限の曲線が点 G，H，I，K などを通って進むと理解されるとしよう。

この曲線 GHIK はその形が上の方程式によって決定されるもので，そこでは

$B\ c.$ が $A\ q.$ in $E + B\ q.$ in E に等しくされる。

281 それゆえ，私は，既に述べられた解析的な作業の繰り返しによって，点 K，O の方向に無限に延長された，空間 KIHGLMNO はその直径が軸 BC である円が 2 倍にとられたものに等しい，と断言する。

さらに，私たちによって学識豊かな幾何学者に提示された，この問題を私たちはそのようにすぐになし遂げた。同じ方法によって，私たちはディオクレス (Διοκλῆς (Diocles)：前 240?–前 180?) によって知覚された空間［シッソイド］を求積した，あるいは円の求積に還元した。



上のように変換されるから，シッソイドの求積が円の求積に還元されるということ。

なお，$\displaystyle\int_0^b \frac{b^3}{a^2+b^2}\,da = \int_b^\infty \frac{b^3}{a^2+b^2}\,da = \frac{\pi}{4}\,b^2$ である。

しかし，解析そのものが縦線のより高いベキからより低い［ベキ］へ，あるいは逆に，より低い［ベキ］からより高い［ベキ］へ変わるとき，作業の繰り返しは特に洗練されたものになる。特に，この方法によって，任意に提示された曲線における縦線の和が，そして，多くの別の求積の問題が探求されなければならない。

例えば，その方程式が

$$B\ q. - A\ q. \text{ が } E\ q. \text{ に等しい}$$

である曲線，これが円であることはすぐに分かる，が提示されるとしよう。縦線の立方の和，すなわちすべての E cuborum，が捜し求められるとしよう。

もしすべての E cubi が与えられるならば，ゆえに，先の方法によって，ベキの条件に従ってその曲線から，そこにおいて縦線の和が与えられるであろう，その底線に関する別の［曲線］を導くことができる。それゆえ，方法に従って，

$$\frac{B\ q. \text{ in } O}{E\ q.} \text{ が } A \text{ に等しい}$$

とおかれるとすると，ゆえに，A の位置に今割り当てられた値自身を代入すると，方法によって，

$$B\ q. \text{ in } E\ qq. - E\ cc. \text{ が } B\ qq. \text{ in } O\ q. \text{ に等しい}$$

となるであろうし，これは，そこにおいて，最初の曲線においてすべての E cubus が与えられるという私たちが設定した仮定によって，すべての O が与えられる，曲線の方程式である。

それゆえ，この新しい曲線においてすべての O が与えられるから，それから，そこにおいて，最初の曲線において既に仮定されたような立方ではなく，縦線の平方が捜し求められる，第 3［の曲線］が導かれるはずである。それゆえ，私たちが既に上で述べたように，求積において利用される私たちの方法に従って， 282

$$\frac{E \text{ in } U}{B} \text{ が } O \text{ に等しい}$$

と想像されるとすると，ゆえに，

$$B\ q. \text{ in } E\ qq. - E\ cc. \text{ が } B\ q. \text{ in } E\ q. \text{ in } U\ q. \text{ に等しくされる}$$

であろうし，そして，すべて［の項］が $E\ q.$ で割られると，

$$B\ q. \text{ in } E\ q. - E\ qq. \text{ が } B\ q. \text{ in } U\ q. \text{ に等しい}$$

となるであろうし，この曲線においてすべての E quadrata が与えられる。

それゆえ，もしこの曲線から，そこにおいてすべての縦線が与えられる，別［の曲線］を私たちが捜し求めるならば，もし望むなら，

$$E\ q. \text{ が } B \text{ in } Y \text{ に等しい}$$

とおかれるとしよう。ゆえに，この最後の方程式において

$$B \text{ in } Y - Y\ q. \text{ が } U\ q. \text{ に等しくされる}$$

であろうし，上［の方程式］においてすべての E quadrata が与えられるから，この［方程式］においてすべての長方形 B in Y，それゆえすべての Y，が与えられるであろう。

ゆえに，この最後の曲線，これは明らかなように円である，において，すべての Y が与えられる (それゆえ，もし円の求積が与えられることを仮定するならば，多くの作業によってそれらは与えられる) から，そこにおいて私たちの解析が終わる，この最後の曲線から最初［の曲線］に戻ると，円の求積が仮定されると，円に関するすべての縦線の立方が与えられることは明らかである。

a と e の間に $b^2 - a^2 = e^2$ という関係があるとき，$\displaystyle\int_0^b e^3 da$ を求めたいのだが ……

いま，$\displaystyle\int_0^b e^3 da$ が求積可能であるとすると，積分変換公式により，$\displaystyle\int_0^b \left(e^2 a\right) de$ も求積可能である。

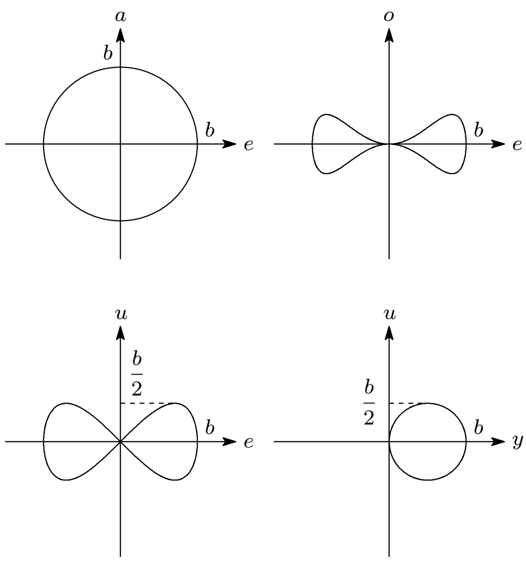
そこで，$e^2 a = b^2 o$ すなわち $a = \dfrac{b^2 o}{e^2}$ とおくと，$b^2 e^4 - e^6 = b^4 o^2$ となるが，このとき $\displaystyle\int_0^b (o)\, de$ も求積可能である。

次に，$bo = eu$ すなわち $o = \dfrac{eu}{b}$ とおくと，$b^2e^2 - e^4 = b^2u^2$ となる。

ところで，$\displaystyle\int_0^b e^2du = 2\int_0^b (eu)\,de = 2b\int_0^b (o)\,de$ となるから，$\displaystyle\int_0^b e^2du$ も求積可能である。

そこで，$e^2 = by$ とおくと，$by - y^2 = u^2$ となる。そして，$\displaystyle\int_0^{\frac{b}{2}} (by)\,du$ が求積可能になる。

しかし，$by - y^2 = u^2$ は円を表す方程式であり，このとき $\displaystyle\int_0^{\frac{b}{2}} (y)\,du$ は求積可能だから，上の議論を逆にたどれば，$\displaystyle\int_0^b e^3da$ が求積可能になる，という。



実際には，

$$
\begin{aligned}
\int_0^b e^3da &= 3\int_0^b \left(e^2a\right) de \\
&= 3\int_0^b \left(b^2o\right) de = 3b\int_0^b (bo)\,de \\
&= 3b\int_0^b (eu)\,de = \frac{3}{2}\,b\int_0^{\frac{b}{2}} e^2du \\
&\quad \left[= \frac{3}{2}\,b\left(\int_0^{\frac{b}{2}} \left(e^2\right)_+ du - \int_0^{\frac{b}{2}} \left(e^2\right)_- du\right)\right] \\
&= \frac{3}{2}\,b\int_0^{\frac{b}{2}} (by)\,du \\
&= \frac{3}{2}\,b^2\int_0^{\frac{b}{2}} (y)\,du \left[= \frac{3\pi}{16}\,b^4\right]
\end{aligned}
$$

となるが，$\displaystyle\int_0^{\frac{b}{2}} (y)\,du$ は，図のとおり，半径 $\dfrac{b}{2}$ の円の半分だから，その値は $\dfrac{1}{2} \times \pi \left(\dfrac{b}{2}\right)^2 = \dfrac{\pi}{8}\,b^2$ である。

あるいは，

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{b}{2}} (y)\,du &= \int_0^{\frac{b}{2}} (y)_+\,du - \int_0^{\frac{b}{2}} (y)_-\,du \\
&= \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{b + \sqrt{b^2 - 4u^2}}{2}\,du - \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{b - \sqrt{b^2 - 4u^2}}{2}\,du = \frac{\pi}{8}\,b^2
\end{aligned}
$$

とするか。

同様に，平方の立方について，平方の平方の立方について，そしてその他の無限の階級の奇数のベキについて容易に証明することができる。しかし，私たちが捜し求めているより高いベキに応じて，曲線の数が掛けられる。

解析から総合への，および求積されるであろう図形の真の計算への移行は困難なものではない。

さらに，提示された軌跡の方程式の単純な測定に到達するために，非常に多くの数の曲線によって解析が進められ，また長々と語られることが，不思議なことにしばしば，起きる。

283 例えば，

$$
\frac{B^7 \text{ in } A - B^8}{A^6} \text{ が } E\ q. \text{ に等しい}
$$

が提示されるとしよう。

この方程式から生じるであろう図形の求積が与えられることが仮定されるとき，すべての A が，ゆえに，すべての B in A が与えられるであろうし，それを未知量の平方 $O\ q.$ に等しくするならば，すべての $O\ q.$ が与えられるであろうし，

$$A \text{ が } \frac{O\ q.}{B} \text{ に等しくされる}$$

であろう。それゆえ，

$$\frac{B^{12} \text{ in } O\ q. - B^{14}}{O^{12}} \text{ および } E\ q. \text{ の間の}$$

方程式になるであろう。

この新しい曲線から，私たちがしばしば言及した別の方法によって，そこにおいては，すべての O quadrata が与えられるから，

$$\frac{B \text{ in } U}{O} \text{ が } E \text{ に等しい}$$

とおかれるとしよう。ゆえに，

$$\frac{B^{10} \text{ in } O\ q. - B^{12}}{O^{10}} \text{ および } U\ q. \text{ の間の}$$

方程式になるであろうし，そこから，そこにおいてすべての O，それゆえすべての U，が与えられるであろう，第 3 の曲線が導かれるであろう。

もしすべての U が与えられるならば，最初の方法によって B in U によるすべての長方形が与えられる。

$$B \text{ in } U \text{ が } Y\ q. \text{ に等しい}$$

としよう。それゆえ， 284

$$\frac{Y\ q.}{B} \text{ が } U \text{ に等しくされる}$$

であろうし，

$$\frac{B^{12} \text{ in } O\ q. - B^{14}}{O^{10}} \text{ と } Y^4 \text{ の間の}$$

方程式になるであろうし，そこから，そこにおいてすべての Y quadrata が与えられる，第 4 の曲線が生じるであろう。

それから，いつもの方法によって，別の曲線が導かれるとし，

$$\frac{B \text{ in } I}{Y} \text{ が } O \text{ に等しい}$$

としよう。すべてが解析の規則に従ってなし遂げられると，

$$B^4 \text{ in } Y^4 \text{ in } I\ q. - B^4 \text{ in } Y^6 \text{ が } I^{10} \text{ に等しい}$$

となるであろうし，それから，そこにおいてすべての Y，それゆえすべての I，が与えられるであろう，第 5 の曲線が生じるであろう。

それから，私たちが既にしばしば押し付けたのと反対の方法によって，そこにおいて縦線の平方が与えられるはずである，別の曲線が捜し求められるとし，

$$\frac{I \text{ in } A}{B} \text{ が } Y \text{ に等しい}$$

とする (なぜならば，母音の不足によって以前に使用した前のものに戻ることを妨げないものはないから) と，

$$B\ q. \text{ in } A^4 - A^6 \text{ が } B\ q. \text{ in } I^4 \text{ に等しい}$$

となるであろうし，それから，そこにおいてすべての I quadrata が与えられるであろう，第 6 の曲線が生じるであろう。

よく知られていてしばしば繰り返された上の方法によって，辺に還元されるとし，

$$I\ q.\text{ が }B\text{ in }E\text{ に等しい}$$

となるとしよう。ゆえに，すべての B in E が与えられるであろうし，それから，そこにおいて

$$B\ q.\text{ in }A^4 - A^6\text{ が }B^4\text{ in }E\ q.\text{ に等しくされる}$$

であろう，第 7 の曲線が導かれ，そこではすべての E，それゆえすべての A，が与えられるであろう。

それから，そこにおいて縦線の平方［の和］が与えられるはずである，別の曲線が導かれるとし，方法に従って，

$$\frac{A\text{ in }O}{B}\text{ が }E\text{ に等しい}$$

285 とおかれるとしよう。ゆえに，

$$B\ q.\text{ in }A^4 - A^6\text{ が }B\ q.\text{ in }A\ q.\text{ in }O\ q.\text{ に等しくされる}$$

であろうし，すべて［の項］が A $q.$ で割られると，そこにおいてすべての A quadrata が与えられるであろう，

$$B\ q.\text{ in }A\ q. - A^4\text{ および }B\ q.\text{ in }O\ q.\text{ の間の}$$

の方程式になるであろうし，それはその方程式によって決定された第 8 の曲線であろう。

それゆえ，そこにおいてすべての A quadrata が与えられ，それから，ついに，そこにおいて辺が与えられる，別の曲線が導かれるから，

$$A\ q.\text{ が }B\text{ in }U\text{ に等しい}$$

とすると，

$$B\text{ in }U - U\ q.\text{ が }O\ q.\text{ に等しい}$$

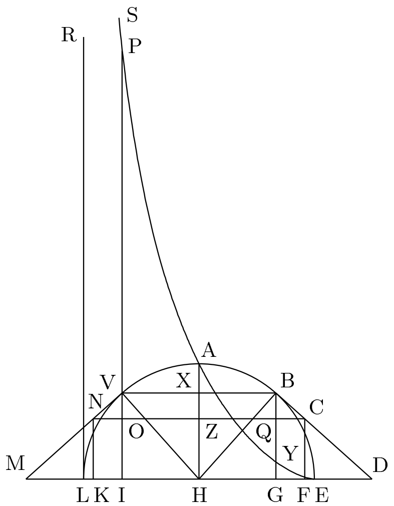
となり，これは，そこにおいてすべての U が与えられるであろう，第 9 の曲線を与えるであろう最後の方程式である。

しかし，明らかに，この最後の曲線は円であり，そこにおいては，円の求積が仮定されなければ，すべての U は与えられない。ゆえに，提示された最初の曲線の定義に戻ると，その最後の曲線自身の，あるいは円の，求積が仮定されると，その求積は与えられるであろう。それゆえ，互いに異なる 9 個の曲線の助けによって，私たちは最初［の曲線］の理解に到達する。

シッソイドの断片について

EAPS を，その中心が H，直径が LE で，直径に垂直な半径が HA である半円 LVABE における シッソイドとし，直径に垂直なシッソイドの無限の漸近線を直線 LR とせよ。 285

私は，EL，無限のシッソイド EAPS および無限の漸近線 LR による広がりは半円 LAE の 3 倍である，それゆえ，もしもう一方の側の同じ半円がつくられるならば，点 E において最高点となる両方の広がりは円全体の 3 倍である，と断言する。 286



証明は面倒なものではなく，それどころか十分に洗練されたものである。

直径の上に，中心からの距離が等しく，すなわち直線 HI，HG が［等しく］，それゆえ直線 LI，GE が等しく，なるように，任意に 2 つの点 I および G がとられるとしよう。点 I および G から，シッソイドと点 P，Y において，そして，円と点 V および B において出会う，垂線が立てられるとしよう。半径 HV，HB が結ばれるとし，そして，点 V および B から，直径と点 M および D において出会う，接線 VM，BD が引かれるとしよう。点 I の向こう側に非常に小さい直線 IK が，点 G の向こう側に［直線］IK に等しい［非常に小さい］直線 GF が，任意にとられるとし，そして，点 K および F から接線と点 N および C において出会う，直径に垂直な直線 KN，FC が立てられるとし，そこから直線 VI，BG に垂線 NO，CQ が下ろされるとしよう。

このようになされたら，シッソイドによる広がりは，底線が等しい KI，GF そのもので，直角をなす高さがシッソイドに関する縦線と同様である，任意にとられた，PI in IK による，および YG in GF によるすべての長方形に等しいことは明らかである。さらに，シッソイドの性質から， 287

VI が IE に対するように IE が IP に対する。

しかし，IE は直線 IH および HE，あるいは HV，［の和］に等しい。ゆえに，

IV が直線 IH，HV の和に対するように IE が IP に対する。

しかし，三角形 HVI，VMI，VNO の相似性によって，

IV が直線 HI，HN の和に対するように直線 NO が直線 NV，VO の和に対する。

ゆえに，

NO あるいは KI が NV 足す VO に対するように直線 IE は直線 IP に対する。

それゆえ，IP in IK による長方形は IE in NV による長方形足す IE in VO による長方形［の和］に等しくされる。

もう一方の部分において，シッソイドの性質から，

BG が GE に対するように GE が GY に対する。

しかし，GE は直線 HE あるいは HB 引く HG に等しい。ゆえに，

BG が BH 引く HG に対するように GE が GY に対する。

さらに，BG が BH 引く HG に対するように，三角形の相似性によって，今証明されたことから，

直線 QC あるいは GF は BC 引く BQ に対する。

それゆえ，YG in GF による長方形は GE in BC による長方形引く GE in BQ による長方形に等しくされるであろう。

さらに，つくり方から，直線 HI，HG は等しく，そのうえ，直線 KI，GF は等しいから，残りが等しいことは明らかであり，確かに VN は BC と，VO は BQ と［等しい］。そしてそのために，相関関係にある 2 つの長方形，PI in IK による，および YG in GF あるいは同じもの in IK によるもの，は IE in NV による長方形，足す GE in BC あるいは LI in NV［による長方形］，足す IE in VO［による長方形］，引く GE in BQ あるいは in VO［による長方形］に等しい。さらに，IE in NV による，および LI in NV による 2 つ［の長方形］は直径 LE in NV による長方形ただ 1 つに等しくされる。さらに，長方形 IE in VO 引く GE in VO は IG in VO による長方形あるい
288 は IH あるいは VX in VO による長方形の 2 倍に等しくされる。ゆえに，PI in IK による，および GY in 同じ IK による長方形の和は直径 EL in VN による長方形および VX in VO による長方形の 2 倍［の和］に等しくされる。

さらに，直径および 4 分円 LVA において引かれた接線の部分 VN によるすべての長方形は直径掛ける 4 分円 LVA による長方形，すなわち半円 LAE の 2 倍，を表している。さらに，VX in VO の 2 倍によるすべての長方形，あるいは，直径に平行に OZQ が引かれたとして，VX in XZ の 2 倍によるすべての長方形は半円 LAE 全体を表している。

ゆえに，それら 2 つの長方形の系列に等しくされる，シッソイドの広がりは，明らかに，半円の 3 倍に等しくされる。

シッソイドを表す方程式を $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{a-x}}$ とするとき，求めるべき SPAELR の面積 S は

$$S=\int_0^a\sqrt{\frac{x^3}{a-x}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{a^3\sin^6\theta}{a-a\sin^2\theta}}\;2a\sin\theta\cos\theta\,d\theta\qquad[x=a\sin^2\theta]$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta=2a^2\cdot\frac{3\cdot1}{4\cdot2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{8}\,a^2$$

である。

一方，半円 LAE の面積 C は $C=\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)^2\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{8}\,a^2$ である。

従って，$S=3C$ となる。

曲線の直線との比較についての幾何学的論考

『全集』pp.211–238

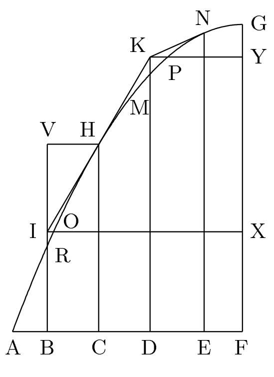
原題は *De Linearum Curvarum cum Lineis Rectis Comparatione Dissertatio Geometrica*。
執筆されたのは 1659 年。出版されたのは 1660 年。
曲線の弧長を求めるための一般的な方法について述べた論文で，このテーマに関する史上最初期のもの。

私が知る限り，幾何学者によって純粋に幾何学的な曲線が与えられた直線に等しくされたことは，まだない。確かに，イギリス人の鋭敏な数学者によって最近発見され証明されたことは，第 1 種のサイクロイドは確かにそれ自身を生成する円の直径の 4 倍である，ということであり，非常に博学な幾何学者たちの見解によれば，これはそれ自身の限界をもっているように思われる。なぜならば，彼らはこれを，はじめに一方の直線が他方の曲線に等しいと仮定することなしには，曲線と同等な直線が見出されることを許さないような，自然の法則であり秩序であると述べているからである。確かに，もう 1 つの曲線の直線との，すなわち，サイクロイドを生成する円の周の，サイクロイドそのものの底線である，直線との，同等性にとってはサイクロイドの構成が必要であることは明らかだから，彼ら自身によって提出されたサイクロイドの例においてそのようなことがあると彼らが気付くということを私たちは否定しない。しかし，真実が，［そして］それらが確立する，自然の法則がこれらであるとすることが，そして 1 つか 2 つの経験から直ちに公理へと急ぐことは危険であることが，以下で明らかになるであろう。確かに，私たちは，本当に幾何学的な曲線が，そしてその構成のためにそのような種類のもう 1 つの曲線の直線との同等性があらかじめ仮定されることなく，与えられた直線に同等であるということを証明するであろうし，可能な限り短く全体の問題を仕上げるであろう。 211 212

イギリス人のレン (Christopher Wren : 1632–1723) は 1658 年にサイクロイドの求長に成功しているが，そのことをいっているのであろうか。
一方で，フェルマは，この論考執筆時点では，ファン・ヘラート (Hendrik van Heuraet : 1634–1660?) による結果は知らなかったのであろうか。

命題 I

最初の図において，AHMG を同じ側にくぼんだ任意の曲線，例えばその接線が曲線の外部において底線 AF および軸 FG と出会う無限の放物線の 1 つ，であるとし，このような種類の直線の上に任意の点 H がとられ，そこを通って接線 IHK が引かれ，その両方の側の上にとられた点 K および I において，曲線を点 R および M で切断する，垂線 IB，KD が底線 AF に下ろされるとしよう。私は，接線の部分 HI は曲線の部分 RH より小さく，同じ接線の他方の部分 HK は曲線の部分 HM より大きい，と断言する。



確かに，仮定から，接線 KI は底線 AF と曲線の外部で出会うから，ゆえに，底線に対する垂線 HC および接線 HI の交線がつくる，角 CHI は直角より小さいであろうし，それゆえ，点 H から直線 BI に下ろされた垂線は点 B，R，I より上の点 V に落ちるであろう。それゆえ，直線 HV は直線 HI より小さいこと，さ 213

らに，直線 HI は点 H および R を結んでいる直線より小さいことは明らかであり，ゆえに，まして，直線 HI は，H から R に引かれた直線よりも下に伸びている，曲線の部分 HR より小さいであろう。これが第一に証明されるべきことであった。

私は，さらに，［接線の］部分 KH は曲線の部分 HM より大きいと断言する。

点 K から同じ曲線に接線 KN が引かれ，そして垂線 NE が下ろされるとしよう。先の証明から，直線 KN は曲線の部分 NM より小さいことが証明される。しかし，アルキメデス (Ἀρχιμήδης (Archimēdēs) : 前 287?–前 212) によれば，接線 HK，KN の和は曲線の部分全体 HN よりも大きい。ゆえに，接線の部分 HK は曲線の部分 HM より大きいであろう。これが第二に明らかにされるべきことであった。

> アルキメデス『球と円柱について』(*De Sphaera et Cylindro* (Περι Σφαιρας και Κυλινδρου))
> 第 1 巻要請 2
> 「一平面上にあって同じ限界をもつ［直線］以外の線のうち，次のようなものは不等である。すなわち，両曲線とも同じ向きに凹であって，一方の曲線全体が他方の曲線と，それと同じ限界をもつ直線との間に囲まれる場合，もしくはある部分は囲まれるけれども，他の部分は他方の曲線と共通であるといった場合である。そして，囲まれる方の曲線はより小さい。」(［12］p.450)

そして，点 K における接線が点 G の向こう側で曲線と出会うことがあるということが起きることはない。なぜならば，この場合は K および M の間の別の点をとることができるであろうし，すべてを前述の証明に適合させることができるからである。

それゆえ，もし点 K および I から軸に，曲線を点 O および P で切断する，垂線が引かれるならば，この場合は，接線 HI は曲線 HO より大きく，一方，接線 HK は曲線 HP より小さい，ということが従う。

確かに，もし私たちが軸が底線の位置に，底線が軸の位置にというように転用されて逆にされると想像するならば，この場合はただ似ているというだけでなく，証明は完全に同じであろう。

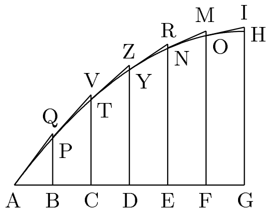
さらに，作図そのもののから，もし直線 BC および CD が等しいならば，接線の部分 HI および HK は同様に互いに等しいことは明らかであるが，しかし，それは十分に注目されることになるであろう。

命題 II

曲線の測定のために，私たちはアルキメデスの習慣である内接するおよび外接する［直線図形］
214 を用いないが，外接する［直線図形］は接線の部分との比較にだけは［用いる］。確かに，私たちは，そのうちの 1 つは曲線より大きく，もう 1 つは小さい，2 つの接線の系列を提示する。さらに，外接する［直線図形］だけによる証明は非常に容易で，しかも洗練されたものになるということを解析学者たちは経験するであろう。

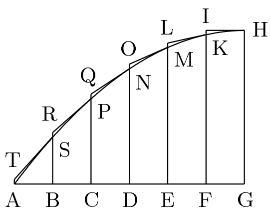
それゆえ，アルキメデスの方法が主張するように，私たちは，そのうちの 1 つは曲線を任意に与えられた間隔より小さいだけまさり，そしてもう 1 つは曲線によって同様に与えられた間隔より小さいだけ超えられる，直線からなる 2 つの図形を既に前もって述べられた任意の曲線に外接させることが可能であると宣言する。

前述の任意の曲線が第 2 の図において提示されるとしよう。底線 AG が任意個数の等しい部分 AB，BC，CD，DE，EF，FG に切断され，そして，点 B，C，D，E，F において垂線 BQ，CV， DZ，ER，FM が立てられ，それらは点 P，T，Y，N，O において曲線と出会うとしよう。さらに，接線 AQ，PV，TZ，YR，NM，OI が引かれるとしよう。



最初の命題から，接線 AQ は曲線の部分 AP より大きいことは明らかである。同様に，接線 PV は曲線の部分 PT より大きく，その他についてもそうであり，そして，ついには，最後の［接線］OI は曲線の部分 OH より大きい。ゆえに，それらの接線の部分 AQ，PV，TZ，YR，NM，OI のすべてからなる図形は曲線そのものより大きいであろう。

しかし，同じ曲線が第 3 の図において提示されるとして，その底線 AG が同じ個数の等しい部分に点 B，C，D，E，F において分割されるとし，点 B，C，D，E，F において，上のように，垂線 BR，CQ，DO，EL，FI が引かれ，それらは点 S，P，N，M，K において曲線と出会い，さらに
(この第 3 の図における) 点 S から，垂線 AT と出会う，接線 ST が引かれるとしよう。次いで，点 215
P，N，M，K，H から，垂線 BS，CP，DN，EM，FK と点 R，Q，O，L，I において出会う，接線 PR，NQ，MO，KL，HI が引かれるとしよう。



最初の命題から，接線 ST は曲線の部分 AS より小さいことは明らかである。同様に，接線 PR は曲線の部分 PS より小さく，以下もそうであり，そしてついには，最後の［接線］IH (これは底線に平行である) は曲線の部分 KH より小さい。ゆえに，それらの接線の部分 ST，PR，NQ，MO，KL，HI のすべてからなる図形は曲線そのものより小さいであろう。

さらに，最初の命題の系により，曲線の同じ点から両側に伸ばされた，そしてそこから等しい底線の部分に向かい合わせに置かれた，接線の部分は互いに等しいから，(第 2 および第 3 の図における曲線が等しいことまたはむしろ同じことが仮定されるなら，私たちが描いた 2 つの図が原因である混乱を避けることができるから) 第 3 の図における接線 ST は第 2 の図における接線 PV に等しい。確かに，第 3 の図における点 S が第 2 の図における点 P と完全に同じであるとし，両方の図における底線の部分 AB，BC が互いに等しいとするとき，両方の側に向かい合わせに置かれた接線の部分，すなわち第 3 の図における直線 ST および第 2［の図］における直線 PV，は互いに等しいであろう。

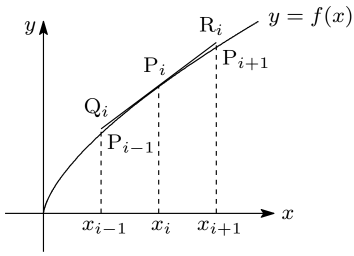
第 3 の図の接線 PR が第 2［の図］の接線 TZ に等しいことが同様に証明されるであろうし，その他についてもそうである。これがなされると，第 2 の図の最初のもの［AQ］および，図の反対の部分の，等しくない第 3［の図］の最後のもの［IH］だけが残るであろう。それゆえ，第 2 の図が第 3［の図］にまさる超過分は第 2 の図の接線 AQ が第 3 の図の接線 IH にまさるものと同じである。しかし，直線 IH は，［底線と］平行であるために，底線の部分 FG あるいは AB (なぜならば，両方の図においてすべての底線の部分は等しいと仮定されているから) に等しくされる。ゆえに，
第 2 の図，［すなわち］接線によって比較されたより大きな曲線，は第 3 の図，［すなわち］接線 216
によって比較されたより小さな曲線，にまさり，それは第 2 の図における接線 AQ が底線の部分 AB，反対側におかれた間隔そのもの，にまさるものと同じである。

それゆえ，もし私たちが，それぞれ任意に与えられた間隔より小さいだけまさる，一方は曲線より大きく，しかし他方は小さい，［直線図形が］外接している 2 つの曲線の図を望むならば，作図

は容易であろう。確かに，今確認された接線の方法によって，接線が点 A において与えられるとすると (第 2 の図)，角 QAB が与えられるであろう。ゆえに，形において三角形 QAB が与えられ，それゆえ，直線 AQ の AB に対する比が与えられる。それゆえ，直線 AQ および AB の差が任意に与えられた直線より小さくなるように底線の分割が定められることが保証されるであろう。もし私たちが，それぞれ与えられた直線にまさり，［その差が］与えられたものより小さい，与えられた比にある 2 つの直線を捜し求めるならば，私たちはそのようなことを達成するであろう。さらに，この問題は容易であり，次いで，底線の任意の部分，AB，が指定された問題を満足する 2 つのより小さいものより大きくないように配慮されるであろう。

それゆえ，この比から私たちは，一方は指定された曲線より大きく，他方は小さい，それぞれ任意に与えられた小さい間隔を超える，曲線に外接する 2 つの図形を見出したのであるから，ましてや，外接されたもののうちの大きいものはいっそう小さい間隔だけ曲線を超えるであろうし，外接されたもののうち小さいものはいっそう小さい間隔だけ曲線によって超えられるであろう。

従って，曲線の測定が行われるとき，2 つの外接［する直線図形］による私たちのこの方法からアルキメデスの方法への適切な接近が引き起こされることは明らかである。このことは一度気づかされ，証明されれば十分である。



$f(x)$ を区間［0，a］において単調増加で，上に凸な関数とし，$f(0)=0$，$f(a)=b$ とする ($a>0$，$b>0$)。区間［0，a］を n 等分し，その分点の x 座標を x_0，x_1，$\cdots$，x_i，$\cdots$，x_n として，それぞれの分点 x_i に対応する曲線 $y=f(x)$ 上の点を P_i とする ($i=0$，1，$\cdots$，n)。

さて，点 P_i における接線が分点 x_{i-1}，x_{i+1} において立てられた垂線と交わる点をそれぞれ Q_i，R_i とすると，命題 I により，

$$\mathrm{Q}_i\mathrm{P}_i < \mathrm{P}_{i-1}\mathrm{P}_i \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ \mathrm{P}_i\mathrm{R}_i > \mathrm{P}_i\mathrm{P}_{i+1} \ (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

となる。

従って，それぞれの総和を考えれば

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Q}_i\mathrm{P}_i < \text{曲線 } y=f(x) \text{ の弧長} < \sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{P}_i\mathrm{R}_i$$

ということになる。

ところで，点 P_i における接線の傾きは $f'(x_i)$ であり，分点間の幅は $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = \dfrac{a}{n}$ であるから，接線の部分 $\mathrm{Q}_i\mathrm{P}_i$，$\mathrm{P}_i\mathrm{R}_i$ の長さは

$$\mathrm{Q}_i\mathrm{P}_i = \mathrm{P}_i\mathrm{R}_i = \sqrt{\left(\frac{a}{n}\right)^2 + \left\{\frac{a}{n}\,f'(x_i)\right\}^2} = \frac{a}{n}\sqrt{1+\{f'(x_i)\}^2}$$

である。

そして，分割を細分化すれば ($n\to\infty$ とすれば)，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Q}_i\mathrm{P}_i$，$\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{P}_i\mathrm{R}_i$ は曲線 $y=f(x)$ の弧長に近づくから，

$$\begin{aligned}\text{曲線 } y=f(x) \text{ の弧長} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Q}_i\mathrm{P}_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{n}\sqrt{1+\{f'(x_i)\}^2}\\ &\left(= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{P}_i\mathrm{R}_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a}{n}\sqrt{1+\{f'(x_i)\}^2}\right)\\ &= \int_0^a \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx\end{aligned}$$

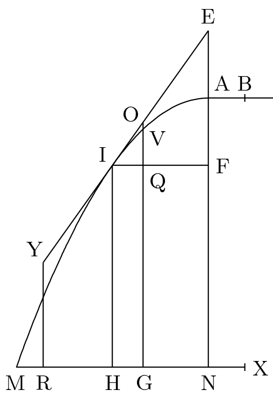
ということになろうか。

$f(x)$ が単調減少あるいは下に凸であるとしても，同様の議論が展開できる。

確立されたこのことによって，私は安心して与えられた直線と同等な本当に幾何学的な曲線を見出すことができると宣言する。実際，それは，私たちが以前から観察していた，無限の放物線の 1 つであり，確かに，それは軸に関する縦線の立方がそれぞれ［に対応する］軸の部分の平方に比例 217
している。それについて幾何学者たちが疑うことがないように，私は簡潔に証明する。

命題 III

第 4 の図において，私たちが既に宣言した，放物線を MIVA，その頂点を A，軸を AN，その上に任意にとられた点を I とし，そして，垂線または軸に関する縦線である直線 MN，IF が引かれたとして，直線 MN の立方は直線 IF の立方に対して直線 NA の平方が直線 FA の平方に対するようであり，そして，それがつねに起こるとしよう。曲線 MIA は与えられた直線に等しいことが証明されなければならない。



軸 AN の平方が縦線 NM の平方に対するように

直線 NM が AN に垂直である直線 AD に対する

としよう。

直線 AD が指定された放物線の通径であること，すなわち，

AD 掛ける直線 AN の平方による立体が

縦線 NM に立方に等しくされる

ことは明らかである。そのうえ，別の任意の点，例えば I，がとられると，

AD 掛ける AF の平方による立体が

縦線 IF の立方に等しくされ，

これは証明を必要としない。なぜならば，私たちは簡単なことにとどまるべきではないからである。

点 I において接線が引かれ，それを IOE とし，それは軸 AN と点 E において出会うとしよう。 218
接線の方法により，直線 FA は直線 AE の 2 倍となり，それゆえ，

直線 FE は　　直線 AF に対して　　3 が 2 に対するようであり，

さらに，直線 EF の平方は直線 AF の平方に対して 9 が 4 に対するようである。

直線 AD においてその部分 CD が 9 分の 1 に分離され，残りの CA が B において 2 等分されるとしよう。それゆえ，

DA は AB に対して 9 が 4 に対する，あるいは，EF の平方が AF の平方に対する

ようであろう。

従って，AD 掛ける AF の平方による立体は FE の平方掛ける直線 AB による立体に等しいであろう。しかし，AD 掛ける AF の平方による立体は直線 IF の立方に等しい。ゆえに，直線 AB 掛ける EF の平方による立体は同じ直線 IF の立方に等しい。ゆえに，

EF の平方が IF の平方に対するように直線 IF が直線 AB に対するし，

EF および FI の平方の和によって合成されると，すなわち，ただ 1 つの

接線 IE の平方は IF の平方に対して直線 IF および AB の和が AB に対する

ようである［合比の理］。

さらに，もし点Iから底線に対して垂線である直線IHが引かれ，そして，別の任意の垂線GQVOが縦線IFとQにおいて，曲線とVにおいて，そして接線とOにおいて出会うとするならば，三角形の相似性のために，

IOがIQあるいはそれに等しいHGに対するように接線IEが縦線IFに対する

であろうし，

IOの平方がHGの平方に対するようにIEの平方がIFの平方に対する

であろう。しかし，

IEの平方がIFの平方に対するように直線IFおよびABの和が直線ABに対する。

ゆえに，

IOの平方はHGの平方に対して，つねに，直線IFおよびABの和が直線ABに対する

であろう。これが証明すべきであったことである。

このことから，もし直線MNの方向に直線ABに等しい直線NXがとられるならば，つねに，

接線IOの平方が直線HGの平方に対するように，

あるいは，もう一方の側の接線IYの平方が向かい側におかれた直線RHの平方に対するように (なぜならば，どちらの場合も，平行性のために，比は同じであるから)，

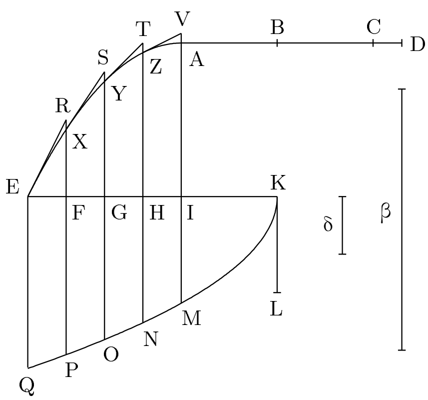
直線HXが直線NXに対する，

ということが従う。

確かに，直線HXは直線IFおよびABの和に等しく，そして，直線NXはABに等しい。さらに，つくり方から，確かに，直線HNは，平行性のために，直線IFに等しく，そして，つくられた残りのNXは直線ABに等しい，ことは明らかである。

命題 IV

第5の図において，その性質が，私たちが述べたように，縦線の立方がそれぞれ軸の部分の平方に比例しているという，この私たちの放物線AXEが提示されるとしよう。その軸をAI，底線または半底線 (semibasis) をEIとしよう。



与えられた軸AIおよび縦線IEから，私たちが上で述べたように，そこからその9分の1の部分CDが分離され，残りのACがBにおいて半分に分割される，通径ADが見出されて，底線EIが任意個数の等しい部分EF，FG，GH，HIに切断され，点F，G，Hにおいて，曲線と点X，Y，Zにおいて出会う，垂線FX，GY，HZが立てられるとしよう。
220 さらに，点E，X，Y，Zにおいて，延長された垂線FX，GY，HZ，IAと点R，S，T，Vにおいて出会う，接線ER，XS，YT，ZVが引かれるとしよう。直線EIの方向に直線ABに等しい直線IKがおかれるとしよう。

先ほどの命題およびその系により，

接線ZVの平方は直線HIの平方に対して直線HKが直線KIに対する

ようであることは明らかである。同様に，

接線 YT の平方が直線 GH の平方に対するように直線 GK が直線 KI に対し，

さらに，

接線 XS の平方は直線 FG の平方に対して直線 FK が直線 KI に対する

ようであり，最後に，

接線 ER の平方が直線 EF の平方に対するように直線 EK が直線 KI に対する。

確立されたこのことによって，点 K において直線 EK に垂直な KL が立てられ，直線 KL は直線 KI あるいは AB に等しくされるとしよう。いま，点 K によってそれがあたかも頂点であるかのように，さらに，KE が軸であるかのように，単純なあるいはアルキメデスの放物線が描かれると理解され，その通経を KL とし，その放物線を KMQ として，それに対して垂線 EQ，FP，GO，HN，IM が立てられ，それらは，明らかなように，放物線の縦線であり，垂線 FX，GY などが立てられた方向にあるとしよう。

既に私たちが述べたように，接線 ZV の平方は直線 HI の平方に対して

直線 HK が直線 KI に対する

ようである。しかし，直線 HK が直線 KI に対するように，それぞれに直線 KL が掛けられると，

HK in KL による長方形が IK in KL による長方形に対し，

さらに，HK in KL による長方形は，アルキメデスの放物線の性質から，縦線 HN の平方に等しくされ，そして，直線 IK，KL は等しくつくられたから，IK in KL による長方形は直線 KL の平方に等しくされる。それゆえ，

HN の平方が KL の平方に対するように接線 ZV の平方が直線 HI の平方に対する，

それゆえ， 221

直線 HN が KL に対するように接線 ZV が直線 HI に対する

であろう。

同様に，私たちは，

接線 YT が直線 GH に対するように縦線 GO が KL に対すること，

さらに，

接線 XS が直線 FG に対するように縦線 FP が KL に対すること，

最後に，

接線 ER が直線 EF に対するように縦線 EQ が KL に対すること

を証明するであろう。

それゆえ，

接線 ZV が直線 HI に対するように縦線 HN が KL に対する

とすると，外項による長方形は内項による長方形に等しくされるであろうし，それゆえに，

NH in HI による長方形は KL in 接線 ZV による長方形に等しくされる

であろう。同様に，

OG in GH による長方形は KL in 接線 YT による長方形に等しくされるであろうし，

さらに，

PF in FG による長方形は KL in 接線 XS による長方形に等しくされるであろうし，

最後に，

EQ in EF による長方形は KL in 接線 ER による長方形に等しくされるであろう。

しかし，私たちはどうして容易な，そして既に本質的にアルキメデスの方法に近づいていることにより長くとどまるのであろうか？確かに，放物線の切片において内接および外接する図形によって，すべての切片の長方形 QEF，PFG，OGH，NHI［の和］は放物線 EQMI そのものを表わすであろう。さらに，すべての接線 ER，XS，YT，ZV［の和］は，前述の私たちの第 2 の方法の外接を繰り返すことによって，再び，曲線 EXYZA そのものを表すであろう。ゆえに，放物線 EQMI の切片は曲線 EXA が掛けられた KL による長方形に等しくされる。さらに，放物線 EQMI の切
222 片は直線図形として与えられる (なぜならば，アルキメデスは放物線を，それゆえその切片を求積したのだから)。ゆえに，曲線 EXA が掛けられた KL による長方形もまた与えられる。さらに，直線 KL は与えられる。ゆえに，曲線 EXA およびそれと等しくつくることができる別の直線が与えられる。これが証明すべきことであった。

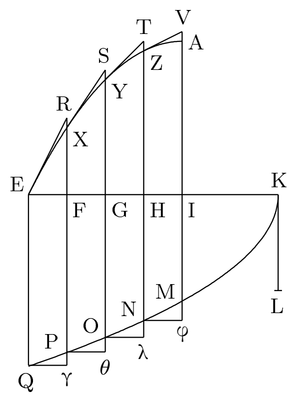
しかし，もし誰かによってこの証明が過度に簡潔に仕上がっていると思われるならば，私たちは，アルキメデスのたどった跡を追跡することによって，十分ではないと思われる上のものを読みそして吟味するために，その全体を［上の証明とは］別に与えることを煩わしく感じない。

放物線の切片 EQMI が曲線 EXA が掛けられた与えられた KL による長方形に等しいことが証明されなければならない。

アルキメデスに従って，その放物線の切片 EQMI が与えられた直線 β が掛けられた与えられた直線 KL による長方形に等しくなるとしよう。もし私たちが直線 β が曲線 EXA に等しいと証明したならば，命題は成り立つであろう。

それゆえ，私は，直線 β は曲線 EXA に等しい，と断言する。確かに，もし等しくないならば，それはより大きいかより小さいかであろう。

はじめに，直線 β が曲線 EXA より大きいとし，その超過分を，そうすることができるならば，直線 δ としよう。



この［論考の］第 2 の命題により，私たちは接線の部分によってつくられた，直線 δ より小さい間隔だけまさる，図形を曲線 EXA に外接させることができる。それゆえ，その外接［図形］をつくり，私たちが 5 番目のローマ数字で印をつけた［原論文ではこの図に「Fig.125 (V)」と番号を付してある。］，別に扱われた図において，その外接された［図形］は接線の部分 ER，XS，YT，ZV［の全体］からなるものとしよう。

その外接された［図形］は，前に証明されたことから，曲線 EXA より大きい。しかもそのうえ，直線 β は同じ曲線より大きい。ゆえに，外接された［図形］は，同じ曲線にまさっている，直線 β より小さい間隔だけ曲線にまさるから，外接された［図形］は直線 β より小さい。それゆえ，外接された［図形］が掛けられた直線 KL による長方形は直線 β が掛けられた KL による長方形より小さい。しかし，KL in β による長方形は放物線の切片 EQMI に等しくされなければならない。ゆえに，外接された［図形］が掛けられた KL による長方形は述べられている放物線の切片 EQMI より小さい。

223 さらに，私たちは，接線の部分 ER が掛けられた KL による長方形が QE in EF による長方形に等しいこと，また，KL in XS による長方形が PF in FG による長方形に等しいこと，また，KL

in YT による長方形が OG in GH による長方形に等しいこと，最後に，KL in ZV による長方形が NH in HI による長方形に等しいこと，を証明した。ゆえに，外接された［図形］の全体が掛けられた KL による長方形は QE in EF による，PF in FG による，OG in GH による，NH in HI による長方形の和に等しい。さらに，もし点 Q，P，O，N から直線 FP，GO，HN，IM (それらは放物線の頂点に近づくにつれて徐々に減少する) に垂直な (または底線に平行な) 直線 Qγ，Pθ，Oλ，Nφ が連続して下ろされるならば，

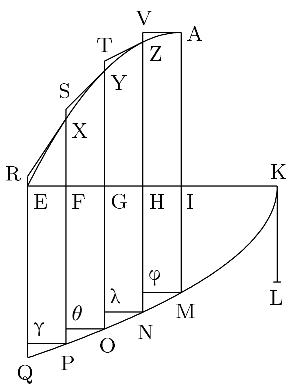
長方形 QEFγ は QE in EF による長方形に等しい，
また，長方形 θF は　PF in FG による長方形に等しい，
長方形 λG は　OG in GH による長方形に等しい，
最後に，長方形 φH は　NH in HI による長方形に等しい，

ことは明らかである。ゆえに，外接された［図形］が掛けられた KL による長方形は長方形 γE，θF，λG，φH［の和］に等しい。

しかし，私たちは外接された［図形］が掛けられた KL による長方形は放物線の切片 EQMI より小さいことを証明した。ゆえに，長方形 γE，θF，λG，φH の和は述べられている放物線の切片 EQMI より小さいであろう。これは不合理である。なぜならば，その長方形は［いくつかの］長方形によってつくられた，そして，明らかに，放物線の切片に外接された，図形からなり，それゆえ， 224
切片そのものより大きいからである。

それゆえ，直線 β は曲線 EXA より大きくはない。しかし，私たちは小さくもないことを証明しなければならない。

確かに，直線 β が曲線 EXA より小さいとし，そうすることができるならば，曲線は直線 β より間隔 δ だけまさるとしよう。



私たちが 5 番目のギリシア数字で印をつけた［原論文ではこの図に「Fig.126 (σχῆμα ε)」と番号を付してある。］，別に扱われた図において，接線の部分からなる，曲線 EXA より小さい，図形が外接されるとし，しかし，曲線自身は δ そのものより小さい間隔だけ［外接図形に］まさるとしよう。そして，その図形は接線の部分 XR，YS，ZT，AV［の全体］からなるとしよう。

それゆえ，曲線が β より間隔 δ だけ大きく，そして，同じ曲線が外接された［図形］より δ そのものより小さいだけまさるとするとき，ゆえに，外接［図形］は直線 β より大きいであろうし，それゆえ，外接された［図形］が掛けられた KL による長方形は放物線の切片 EQMI より大きいであろう。

しかし，外接された［図形］が掛けられた KL による長方形は，先に証明されたことから，PF in FE による，OG in GF による，NH in HG による，および MI in IH による長方形［の和］に等しくされる。確かに，

XR が FE に対するように FP が KL に対し，

それゆえ，

KL in XR による長方形は PF in FE による長方形に等しくされ，

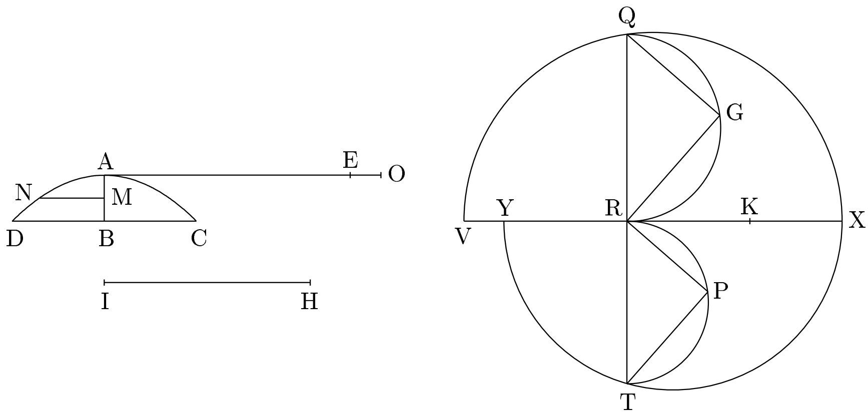
その他についてもそうである。

225 それゆえ，外接された［図形］が掛けられた KL による長方形は放物線の切片 EQMI より大きいから，ゆえに，PF in FE による，OG in GF による，NH in HG による，および MI in HI による長方形の和は述べられている放物線の切片より大きい。しかし，それらのそれぞれ長方形は，それぞれが放物線 (確かに，頂点からの距離が大きくなるに従ってそれはつねに大きくなる) の内側で縦線に落ちる，［縦線に］垂直な (または底線に平行な) 直線 $P\gamma$，$O\theta$，$N\lambda$，$M\varphi$ が引かれると，長方形 PE，OF，NG，MH に等しいであろう。ゆえに，それらのすべての長方形 PE，OF，NG，MH の和は放物線の切片より大きいであろう。これは不合理である。なぜならば，その長方形は［いくつかの］長方形 PE，OF，NG，MH によってつくられた，そして，放物線の切片に内接された，図形からなり，それゆえ，［切片］そのものより小さいからである。

それゆえ，直線 β は曲線 EXA より小さくはない。それゆえ，それは大きくもなく，小さくもないから，曲線そのものに等しいであろう。これが，すべての厄介事が取り除かれるために，詳細に証明されるべきことであった。

既に証明されたことから，放物線の任意の，前のものから分離された，切片 EQPF が曲線 EX が掛けられた与えられた KL による長方形に等しいことを同じように容易に証明することができることは明らかである。それゆえ，もし底線の上に任意の点，例えば F，が与えられるならば，アルキメデスによれば放物線の切片 EQPF が直線的に与えられるから，曲線の部分 EX が掛けられた与えられた KL による長方形もまた与えられ，さらに直線 KL が与えられ，ゆえに曲線 EX も［与えられる］。それゆえ，底線の上に任意の点，例えば F，が与えられたら，向かい合わせにおかれた曲線の部分が与えられ，そして，これに等しい直線を指定することができることは明らかである。

その曲線 EXA に等しい直線が見出されるために，単純な放物線がつくられる［ことが必要がある］ように思われ，問題はしっかりしたものになった。確かに，真実が捜し出され，証明が適切に遂行されるためにその放物線の図が仮定されるから，私たちが，その実在しない放物線の図が隠されている，直線および円による計算そのものをなし遂げ，提供することを妨げるものはない。さらに，その計算は，私が誤らされていなければ，次のようである。



第 6 の図において，放物線状の曲線を DAC とし，その性質を縦線 DB および NM の立方が互いに軸の部分 BA および AM の平方に比例するであるとしよう。さらに，高さ AB および半底線
226 BD あるいは［底線］全体 DBC が与えられるとしよう。私は，曲線 DAC に等しい直線が真に幾何学的な計算によって与えられる，と断言する。

その放物線の通径を直線 AO，上でいわれたことから，それは与えられた軸および縦線によって

与えられる，としよう。直線 AO からその 9 分の 1 の部分 EO が取り去られるとし，さらに，残りの AE が直線 YK に等しくされ，その方向に半底線 (または縦線) DB に等しい KX がおかれるとしよう。直線 YX の上にそれがあたかも直径であるかのように半円 YTX が描かれ，点 R において 2 等分された直線 YK に対して，半円を T において切断する，垂線 RT が立てられるとしよう。直線 RT に等しく直線 RV をつくり，そして，直線 VX の上にそれがあたかも直径であるかのように半円 VQX が描かれ，その円周に対して点 R から垂線 RQ が立てられるとしよう。直線 TR，RQ の上に半円 TPR，RGQ が描かれ，それら［の中］に，それぞれ RY そのものに等しい，直線 TP，RG が付け加えられるとしよう。さらに，直線 RP，QG が結ばれたら，私は，放物線状の曲線 DAC の底線 DBC に対する比は直線 QG の平方の 2 倍が直線 RP の平方の 3 倍に対するものと同じであり，それゆえ与えられる，と断言する。

それゆえ，直線 RP の平方の 3 倍が直線 QG の平方の 2 倍に対するように直線 DC が直線 IH に対するようになるとしよう。つくり方から与えられたものである，その直線 IH は放物線状の曲線 DAC に等しいであろう。

しかし，もし［この作図が］先の証明に適合しないならば，それ自身のために修正されなければならないであろう。

「放物線状の曲線」(curva parabolica) とは方程式 $y^m = kx^n$ で表される曲線を指すようであるが，放物線 (parabole) との区別は不明。
一方，単純な放物線，あるいはアルキメデスの放物線とは方程式 $y^2 = kx$ で表される放物線のこと。
さて，ここで提示された作図法を確認してみると ……
$\mathrm{AB} = x$，$\mathrm{DB} = y$ とするとき，曲線 DAC を表す方程式が $y^3 = kx^2$ であるとされているから，通径 $\mathrm{AO} = k$ である。
それゆえ，まず，$\mathrm{YK} = \mathrm{AE} = \dfrac{8}{9}\,k$，$\mathrm{YX} = \mathrm{YK} + \mathrm{KX} = \mathrm{YK} + \mathrm{DB} = \dfrac{8}{9}\,k + y$，$\mathrm{RY} = \mathrm{RK} = \mathrm{TP} = \mathrm{RG} = \dfrac{4}{9}\,k$，$\mathrm{RX} = \mathrm{RK} + \mathrm{KX} = \dfrac{4}{9}\,k + y$ である。
次に，半円 YTX について，$\mathrm{RT}^2 = \mathrm{RY} \times \mathrm{RX} = \dfrac{4}{9}\,k\left(\dfrac{4}{9}\,k + y\right)$ であるから，$\mathrm{RT} = \mathrm{RV} = \sqrt{\dfrac{4}{9}\,k\left(\dfrac{4}{9}\,k + y\right)}$ となる。
また，半円 VQX について，$\mathrm{RQ}^2 = \mathrm{RX} \times \mathrm{RV} = \left(\dfrac{4}{9}\,k + y\right)\sqrt{\dfrac{4}{9}\,k\left(\dfrac{4}{9}\,k + y\right)}$ である。
従って，半円 TPR，RGQ について，

$$\mathrm{RP}^2 = \mathrm{RT}^2 - \mathrm{TP}^2 = \frac{4}{9}\,k\left(\frac{4}{9}\,k + y\right) - \left(\frac{4}{9}\,k\right)^2 = \frac{4}{9}\,ky$$

$$\mathrm{QG}^2 = \mathrm{RQ}^2 - \mathrm{RG}^2 = \left(\frac{4}{9}\,k + y\right)\sqrt{\frac{4}{9}\,k\left(\frac{4}{9}\,k + y\right)} - \left(\frac{4}{9}\,k\right)^2$$

となる。
いま，弧 DAC : 底線 $\mathrm{DBC} = 2\mathrm{QG}^2 : 3\mathrm{RP}^2$ であるとすると，

$$\text{弧 DAC} = \frac{\text{底線 DBC} \times 2\mathrm{QG}^2}{3\mathrm{RP}^2} = \frac{2y \times 2\left\{\left(\frac{4}{9}\,k + y\right)\sqrt{\frac{4}{9}\,k\left(\frac{4}{9}\,k + y\right)} - \left(\frac{4}{9}\,k\right)^2\right\}}{3\left(\frac{4}{9}\,ky\right)}$$

$$= \frac{4}{3}\left\{\left(\frac{4}{9}\,k\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{9}\,k + y\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{9}\,k\right\}$$

$$= 2k^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{9}\,k+y\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{27}\,k$$

$$= \frac{2}{27}\left(9x^{\frac{2}{3}}+4k^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{27}\,k \qquad (y = k^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}\ \text{だから})$$

となる。

一方，$y = k^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$ であるから，$y' = \dfrac{2}{3}\,k^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}$ で，

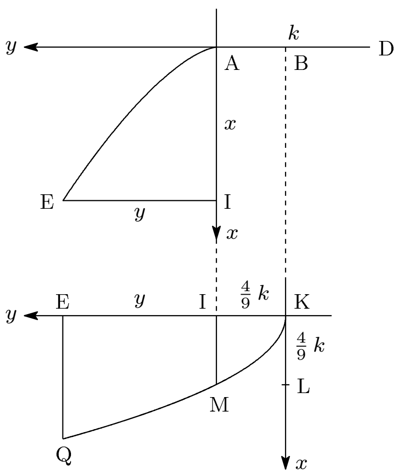
$$\text{弧 DAC} = 2\int_0^x \sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\,k^{\frac{1}{3}}t^{-\frac{1}{3}}\right)^2}\,dt = 2\int_0^x \frac{\sqrt{9t^{\frac{2}{3}}+4k^{\frac{2}{3}}}}{3t^{\frac{1}{3}}}\,dt$$

$$= \frac{2}{9}\int_0^{3x^{(1/3)}} u\sqrt{u^2+4k^{\frac{2}{3}}}\,du \qquad \left(u = 3t^{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{9}\int_{4k^{(2/3)}}^{9x^{(2/3)}+4k^{(2/3)}} v^{\frac{1}{2}}\,dv \qquad \left(v = u^2+4k^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{27}\left(9x^{\frac{2}{3}}+4k^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{16}{27}\,k$$

である。以上，検証終了。



ところで，放物線 $y^3 = kx^2$ に対して，放物線 $x^2 = \dfrac{4}{9}\,ky$ をつくると［左図］，

$$\text{切片 EQMI} = \int_{\frac{4}{9}k}^{\frac{4}{9}k+y} \frac{2}{3}\,k^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\,dy$$

$$= \frac{2}{3}\,k^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2}{3}\,y^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{4}{9}k}^{\frac{4}{9}k+y}$$

$$= \frac{4}{9}\,k^{\frac{1}{2}}\left\{\left(\frac{4}{9}\,k+y\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{4}{9}\,k\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$= \frac{4}{9}\,k\left\{k^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{9}\,k+y\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}\,k\right\}$$

となるから，「切片 EQMI = KL × 弧 AE」が成り立つことが分かる。

このことから，放物線 $y^3 = kx^2$ の弧 AE の長さを求めるには，単純な放物線 $x^2 = \dfrac{4}{9}\,ky$ における切片 EQMI を求めればよいことになる。ところが，これはアルキメデスにより直線的に求められるから，弧 AE も直線的に求められる，という訳。

そして，その方法を具現化したものが先の作図法である。

一般の放物線 $y^m = kx^n$ について上の議論を展開するのは大変。なので，省略。区間［0，t］に対応する部分の弧の長さ ℓ は

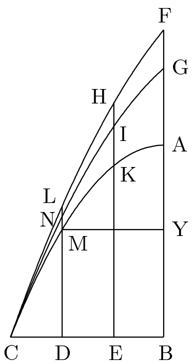
$$\ell = \frac{1}{m}\int_0^t \sqrt{m^2+\left\{n\,k^{\frac{1}{m}}x^{\left(\frac{n}{m}-1\right)}\right\}^2}\,dx$$

となる。

もしこれが，幾何学者たちによって私たちのこの放物線状の曲線が驚嘆すべき幾何学の中に据え
227 られることを達成するために，十分ではないならば，それはおそらくすぐに従うであろうことに
よって達成されるであろう。確かに，これ 1 つだけから，それ自身に関してだけでなくお互いに関

しても，異なった種類の，無限の数の別の曲線が派生させられ，形成されるということよりも驚くべきことに，どうしてそのそれぞれが与えられた直線に等しいことが証明されるのであろうか？一般的な命題はこれである。

第 7 の図において，私たちの放物線状の曲線を CMA とし，その高さを AB，半底線を CB としよう。そして，その曲線から，この方法によって，底線に対して垂直に引かれた，曲線を点 M，K



において切断する，任意の直線 DMNL，EKIH について，これによって形成されるであろう，新しい曲線 CNIG の性質が直線 DN がつねに，それ自身と関係している，前の曲線の部分，もちろん CM，に等しいようであり，同様に，直線 EI が前の曲線の部分 CMK に等しく，別の任意のすべての垂線についてそうである，ように無限に別の曲線が形成されるとしよう。この新しい曲線 CNIG は前のものとは異なる種類であろう。

同じように，それ自身から第 3 の曲線 CLHF が，それについては直線 DL，EH がつねに第 2 の曲線の部分 CN および CNI に等しくなるように，形成されるとし，そして，同様の方法によって，第 3［の曲線］から第 4［の曲線］が，第 4 から第 5 が，第 5 から第 6 が形成され，そして，それが無限に連続して続けられるとしよう。

私は，それらのすべての曲線 CNIG，CLHF および無限にあるその他のものは，ちょうど最初の放物線状の［曲線］CMKA のように，与えられた直線に等しい，と断言する。

さらに，無限にあるそれらすべての曲線は純粋に幾何学的であるが，それゆえ，それらについて 228
はこの論考のはじめに述べたことについての自然の法則や秩序に戻ることはないということが注目されることになろう。確かに，直線 DN および EI が曲線 CM および CMK に等しいと仮定されることは許されるが，しかし，そのことは仮定されるというよりはむしろ前述のことによって，直線に等しいということが，同じように証明されるということと同じである。なぜならば，任意に与えられた点 D において，前のことによって曲線の部分 CM に等しい直線が与えられるから，ゆえに，つくり方から曲線 CM に等しくおかれる，直線 DN は曲線に等しいものとしてではなく，本当に与えられた直線として考察されなければならず，そして，その他についてもそうだからである。それゆえ，上で描かれた曲線 CNIG は本当に幾何学的である。従って，私たちがそれが与えられた直線に等しいことを証明した後では，それから形成されるであろう第 3 の曲線，もちろん CLHF，もまた本当に幾何学的であり，無限にある別のすべてのものもそうであることが従うであろう。

もし私たちが，この作業に完全に奉仕する，一般的な命題を先に述べていたならば，証明は難しくないであろう。

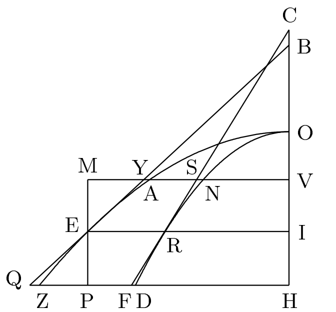
命題 VI

第 8 の図において，前のものと同じ性質を備えている，任意の曲線を ONR とし，その頂点を O，軸あるいは縦線 (なぜならば，証明は［どちらの場合も］つねに同じであるから) を OVI としよう。そして，それから別の曲線 OAE が，その性質が縦線が前の曲線から切り取られた部分に等しい —— 例えば，縦線 VA が曲線 ON に等しく，縦線 IE が曲線 OR に等しく，その他についてもそうである —— ように，形成されるとしよう。この新しい曲線における与えられた点において接線が次の仕方によって引かれるとしよう。［すなわち,］与えられた点を E とし，前の曲線を R

229 において切断する，縦線 EI が引かれるとして，直線 RC が定められた点 R において前の曲線に接し，軸と点 C において出会うように引かれるとしよう。

RC が CI に対するように直線 IE が直線 IB に対する

ものとし，EB が結ばれるとしよう。私は，直線 EB は点 E において新しい曲線 EAO に接する，と断言する。



確かに，軸の上に任意の点，例えば V，がとられ，前の曲線を N において，接線 RC を S において，第 2 の曲線を A において，さらに直線 EB を Y において切断する，縦線 VNA が引かれるとき，もし私たちが直線 VY がつねに縦線 VA より大きいことを証明したならば，直線 EB は新しい曲線を頂点の側において切断しないであろう。

そのうえ，私たちはこれを非常に容易に証明する。直線 VA は曲線 ON，あるいは曲線 OR，NR の間の差，に等しい。しかし，最初の命題の帰結により，直線 RS は曲線 RN より小さい。ゆえに，曲線 OR および直線 RS の間の差は同じ曲線 OR および曲線 RN の間の差より大きい。しかし，私たちがすぐに証明するであろうように，直線 VY は曲線 OR および直線 RS の間の差に等しい。ゆえに，直線 EB と出会う直線 VY は曲線 OAE と出会う直線 VA より大きいであろう。そしてそのため，頂点の方向への直線 EB のすべての点は曲線の外にあることは明らかであり，それゆえ，直線 EB はその側において曲線を切断しないであろう。

それどころか，以下のようでさえない。確かに，任意の点，例えば H，がとられ，そこから，前の曲線と D において，延長された接線 RC を F において，第 2 の曲線を Z において，そして延長された直線 EB を Q において切断する，縦線 HZ が引かれるとしよう。もし私たちが直線 HQ が，どのような場合においても，直線 HZ より大きいことを証明するならば，直線 EB のすべての点は，さらにその下にとられた［点］も，曲線の外に横たわっていることは明らかであろうし，そしてそのために，定められた直線 EB は定められた点 E において第 2 の曲線に接することは明らかであろう。

直線 HZ は，つくり方から，曲線 OD，すなわち曲線 OR，RD の和，に等しい。さらに，直線 RF を接線 RC の下にとられた部分とするとき，この最初［の命題］の帰結により，直線 RF は曲線 RD より大きいであろうし，それゆえ，曲線 OR および直線 RF の和は同じ曲線 OR および曲線 RD の和より大きいであろう。さらに，曲線 OR および直線 RF の和は，私たちがすぐに証明するであろうように，直線 HQ に等しい。一方，曲線 OR，RD の和は，つくり方から，直線 HZ に
230 等しい。ゆえに，直線 HQ は，つねにそしてすべての場合において，縦線 HZ より大きいであろうし，それゆえ，直線 EB は定められた点 E において第 2 の曲線に接するであろう。

ところで，私たちには曲線 OR および直線 RS の差が直線 VY に等しくされることを証明することが残された。

軸に平行で，延長された直線 VY と M において出会う，直線 EM が引かれるとしよう。

つくり方から，

EI が IB に対するように RC が CI に対する

が，しかし，

EI が IB に対するように YV が VB に対し，そして，YM が ME に対し，

さらに，RC が CI に対するように RS が VI に対する。

ゆえに，

YM が ME に対するように RS が VI に対する。

さらに，平行性のために，直線 ME，VI は等しい。ゆえに，直線 YM，RS は等しいであろう。さらに，直線 EI，VM もまた等しい。ゆえに，直線 EI および MY の間の差は直線 VY に等しいであろう。しかし，直線 EI は，つくり方から，曲線 OR に等しくされる。ゆえに，曲線 OR および直線 MY (あるいはそれと等しい RS) の間の差は直線 YV に等しくされるであろう。これが最初に証明されるべきことであった。

縦線 EI の下［におけることについて］の証明が異なった方法で進むであろうことはない。なぜならば，軸に平行な直線 EP が引かれたら，私たちは直線 QP が直線 RF に等しいことを証明するであろうから。

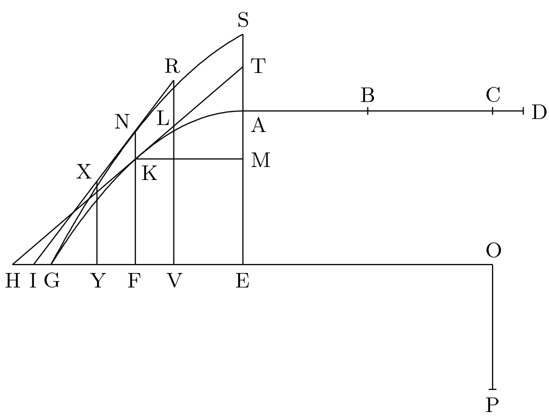
確かに，

EI が IB に，すなわち QH が HB に，すなわち QP が PE に対するように

直線 RC が CI に，すなわち RF が IH に対する。

しかし，PE，IH は等しい。ゆえに，直線 QP，RF も［等しい］。さらに，直線 HQ は HP，PQ［の和］—— それらのうちの前の HP は直線 IE あるいは曲線 OR に等しくされ，さらに，後の PQ は，証明されたことにより，直線 RF に等しくされる —— に等しくされる。ゆえに，曲線 OR および直線 RF の和は 直線 HQ に等しい。これが次に証明されるべきことであった。

それゆえ，直線 EB が点 E において第 2 の曲線に接することは明らかであり，これが証明すべきことであった。



第 9 の図において，いま，私たちの放物線状の曲線を GKA とし，その高さを AE，半底線を GE，通径を AD，上のように，その 9 分の 1 の部分を CD とし，直線 AC は B において半分に切断されるとしよう。この前の曲線から，点 G を通って，前［の曲線］の軸と S において出会う［曲線］を GNS とし，この新しい曲線の性質が，任意の点，例えば F，をとり，2 つの曲線と K および N で出会う垂線 FKN を立てると，直線 FN がつねに前の曲線の部分 GK に等しくなるというものであるような，別の曲線が形成されるとしよう。底線に平行に KM が引かれるとし，同じ点 K において前［の曲線］に接し，軸と T において，底線と H において出会う，直線 TKH が引かれるとしよう。さらに，第 2 の曲線において，点 N を通って，底線と I において出会う接線 RNXI が引かれ，その上の両側の部分にとられた，任意の点，例えば R および X，から底線に対して垂線 XY および RV が下ろされるとしよう。 231

前述のことから，前の曲線において，接線 KT の平方は FE の平方に対して，あるいは

KL の平方は FV の平方に対して，つねに，

直線 FE は，直線 AB とともに，AB 自身に対する

ようである。しかし，

KT の平方が FE の平方に，あるいは KM の平方に，対するように

KH の平方が (平行性のために) HF の平方に対する。

232 ゆえに，

KH の平方は HF の平方に対して直線 FE が，AB とともに，AB に対する

ようである。さらに，

KH の平方が HF の平方に対するように，

前の命題により，

直線 FN の平方が直線 FI の平方に対する。

なぜならば，辺が比例しているとすると，その命題のおかげで，平方もまた比例するであろうから。ゆえに，

NF の平方は FI の平方に対して直線 FE が，AB とともに，AB に対する

ようであるし，合成されると［合比の理］，NF および FI の 2 つの平方［の和］，あるいは 1 つの

NI の平方は FI の平方に対して FE が，AB の 2 倍とともに，AB に対する

ようであろう。しかし，

NI の平方が FI の平方に対するように

一方では，RN の平方が直線 FV の平方に対し，

そして，他方では，直線 NX の平方が直線 FY の平方に対する。

ゆえに，第 2 の曲線の上に任意の点，例えば N，がとられると，つねに，

その点においていずれか一方の側に引かれた接線の部分の平方が

向かい合わせにおかれた底線自身の部分の平方に対するように

直線 FE の，AB の 2 倍との，和が AB に対する

であろう。

それゆえ，もし底線 GE の方向に直線 AB の 2 倍の直線 EO がおかれ，そして，点 O において AB そのものに等しい垂線 OP が立てられるならば，つねに，この第 2 の曲線において，［接線の］部分 NR の平方が底線の部分 FV の平方に対するように，または，接線の部分 NX の平方が底線の部分 FY の平方に対するように直線 FO が直線 OP に対するであろう。

このようなことがなされると，上で私たちが示した方法によって表されるであろう，無限［の個数］の別の曲線はその性質が次のようであることは明らかである。

例えば，第 3［の曲線］において，接線の部分の平方は向かい合わせにおかれた底線自身の部分の平方に対して，接点から底線に下ろされた垂線がそこに落ちる，点 F から始まる底線の部分 FE は，3 倍にとられた直線 AB とともに，AB そのものに対する。

233 第 4 の曲線において，接線の部分の平方は向かい合わせにおかれた底線自身の部分の平方に対して直線 FE が，4 倍にとられた AB とともに，AB そのものに対するようであろう。

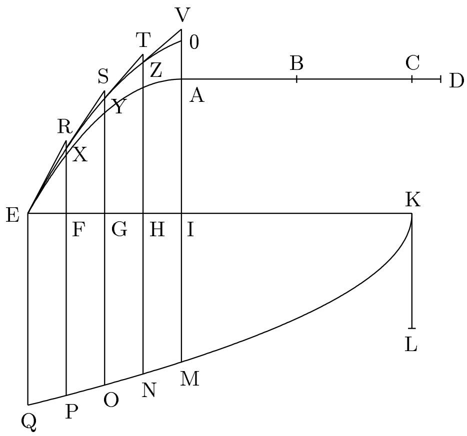
そして，その他［の曲線］についても無限にそうである。

確かに，明らかであるように，証明はすべての場合においてつねに同じである。

これがおかれると，一般的な定理への接近は困難ではないであろう。

命題 VII

第 10 の図において，私たちの放物線状の曲線を EA，その軸を AI，半底線を IE としよう。それ［EA］から，その性質が，上で私たちが述べたように，任意の縦線 FX がその縦線，またはあなたがそう呼ぶことを好むなら垂線，によって切り取られた前の曲線の部分［弧］に等しくなるというようなものである，第 2 の曲線 EXYZ0 が形成されるとしよう。底線が任意個数の等しい部分 EF，FG，GH，HI に分割され，点 F，G，H において，この新しい第 2 の曲線を点 X，Y，Z において切断する，垂線が引かれるとしよう。前の曲線の通径を AD とし，そこから 9 分の 1 の部分 CD が分離され，そして，残りの AC が B において 2 等分されるとしよう。底線の方向にある直線 IK が直線 AB が 2 倍にとられたものに等しくなるとし，点 K において直線 AB に等しい垂線 KL が立てられるとしよう。点 K を通り，KE を軸として，その通径が KL である，単純 234
な (あるいはアルキメデスの) 放物線が描かれると理解されるとし，その放物線を KMOQ としよう。点 E，F，G，H，I から軸に対して，この放物線と点 Q，P，O，N，M において出会う，垂線が引かれるとしよう。



先［の命題］の系によって，曲線 EX0 を前の［曲線］から私たちが既にしばしば説明したのと同じ方法によって導かれたまたは形成された第 2 の曲線とするとき，その上に任意の点，例えば Y，がとられ，接線の部分 YT が引かれると，

YT の平方が GH の平方に対するように直線 KG が直線 KL に対する

ということが従う。しかし，直線 GK が直線 KL に対するように，同一の直線 KL が掛けられると，

長方形 GKL が KL の平方に対する。

さらに，単純な放物線の性質によって，長方形 GKL は縦線 GO の平方に等しくされる。ゆえに，

YT の平方は GH の平方に対して GO の平方が KL の平方に対する

ようであり，それゆえ，

直線 YT が直線 GH に対するように直線 GO が直線 KL に対する。

それゆえ，外項による長方形は内項による長方形に等しくされるから，GO in GH による長方形は KL in YT による長方形に等しくされる。

それゆえ，もし，垂線と点 R，S，V で出会う，別の接線 ER，XS および ZV が引かれるならば，同様に，

QE in EF による長方形は KL in ER による長方形に等しい，

さらに，

PF in FG による長方形は KL in XS による長方形に等しい，

そして，その他についても無限にそうである，ことが証明されるであろう。

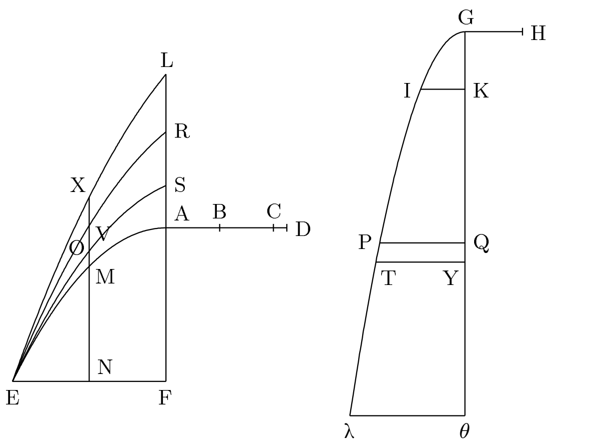
そしてそのため，ついに，私たちがこの［論考の］第 4 の命題においてその技巧を示したのと同様のアルキメデスの方法に関する三段論法によって，放物線の切片 EQMI は第 2 の曲線 EX0 が
掛けられた KL による長方形に等しいことが結論されるであろう。同様に，放物線のそれぞれの切 235

片，例えばEQPF，が曲線の部分EXが掛けられたKLによる長方形に［等しく］，切片EQOGが曲線の部分EXYが掛けられたKLによる長方形に［等しく］，そして，無限にそうである。

さらに，これらすべての放物線の切片は，アルキメデスによって証明された放物線の求積のおかげで，直線的に与えられ，そして，そのうえ，直線KLが与えられる。ゆえに，第2の曲線全体EX0が，与えられた点F，Gなどにおける垂直な線によって切り取られた，その［第2の曲線の］部分EX，EYなどと同様に，与えられる。

第3の曲線に関して，与えられた直線の同等性のために，つくり方は，直線IKが直線ABの3倍にとられることを除いて，同様になるであろう。第4の曲線においては，同様に，IKが直線ABの4倍にとられるであろう。そして，ついに，前の［曲線］から導かれるであろう無限の曲線において，それらすべての一般的な［曲線の］間にそのような比が定められるであろう。確かに，それぞれは，放物線の頂点から互いに比較されるであろう曲線の階級の回数分とられた通径の分だけ離れているであろう，同じ放物線の，そして同じ高さの放物線状の切片に互いに比例するであろう。

例えば，第11の図において，私たちの放物線状の曲線をEMA，その軸をAF，半底線をEF，通径をAD，そこから取り去られた9分の1の部分をCDとし，残りのACがBにおいて2等分されるとしよう。そして，その最初の曲線から，その性質が，底線において任意の点Nがとられる
236 と，底線に垂直で曲線とMおよびOで出会う，直線NOが前の曲線の部分EMに等しくなる，であるような第2の［曲線］EOSが形成されるとしよう。第2［の曲線］から，そこにおける直線NVが第2の曲線の部分EOに等しくなる，第3の［曲線］EVRが形成されるとしよう。さらに，第3の［曲線］EVRから，そこにおける直線NXが第3の曲線の部分EVに等しくなる，第4の［曲線］EXLが形成されるとしよう。［それらとは］別に，単純なあるいはアルキメデスの放物線が提示されるとし，その無限の軸をGKQY，頂点をG，通径を，直線ABに等しい，GHとしよう。例えば，第4の曲線EXLが最初の［曲線］EMAに対する比が捜し求められる。



まず，それらの間には4つの段階があるから，軸から切り取られたGYは通径GHの4倍であり，それから，その方向に半底線EFに等しい直線Yθがおかれ，縦線YT，$\theta\lambda$が引かれるであろう。さらに，次に，比較されるであろう2つの間には1つの段階があるから，軸から切り取られた直線GKはただ1つだけの通径に等しく，それから，その方向に再び半底線EFに等しい直線KQがおかれ，縦線KI，QPが引かれるであろう。

証明されたことおよびそれらから導かれた一般的な原則により，放物線状の切片YT$\lambda\theta$が放物線状の切片KIPQに対するように第4の曲線EXLが最初の［曲線］EMAに対するであろう。しかし，放物線状の切片同士の比は，アルキメデスに従えば，与えられる。ゆえに，曲線同士の比も与えられるであろう。さらに，証明されたことにより，最初［の曲線］は与えられる。それゆえ，第4［の曲線］も与えられるし，与えられた直線そのものは等しく割り当てることができる。そして，放物線から遠ざけられた普遍的なその方法は，もし望むならば，幾何学的な言い回しに関してただ

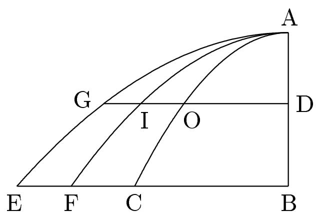
法則やコンパスの助けだけによって利用することができる。

さらに，既に証明されたすべてについて，また［それらから］導かれた原則においてのことは，向かい合わせにおかれた曲線の部分の高さとして半底線の部分を持っている放物線の切片のおかげで，互いに比較されるであろうそれらの曲線の部分について起こることと同じである，と思えないだろうか？

さらに，指示された曲線から無限につくられるであろう立体についても，それらの曲線における表面についても，それらの直線の，または指示された立体の，または曲線の表面の重心についても，私たちが付け加えることは何もない。というのも，偉大で有名な幾何学者たちによって既にそれらすべてに普及された，このことについての一般的な方法は，与えられた曲線の特有の性質が知られ 237
るようになった後では，私たちが多くの固有の場合においてそれぞれの作業に勤勉さが付け加えられることは無用であると思うとしても，［それらを］知られないままにしておくことを許さないからである。

しかし，私が止めと声を上げる前に，吟味されるであろう次の命題が思い浮かぶ。

第 12 の図において，私たちの放物線状の曲線を COA，その頂点を A，軸を AB，半底線を CB としよう。それから別の無限の曲線が，私たちが既に説明した方法によって，上のように底線の側からでなく，頂点の側から，形成されるとしよう。最初の［曲線］から，その条件が，軸の上に任意の点 D がとられ，曲線と点 O，I，G で出会う，軸に垂直な［直線］DOIG が引かれると，第 2 の曲線について直線 DI がつねに最初の曲線の部分 AO に等しく，同様に，第 3 の曲線について直線 DG がつねに第 2 の曲線の部分 AI に等しく，無限にそうである，ように，無限に形づくられるであろう，それらの曲線を AIF，AGE などとしよう。このような種類のすべての曲線はただ互いにそして最初の［曲線］AOC に関してだけでなく，上で私たちが形成した底線の側からのものに関しても種類が異なるであろう。ゆえに，ひょっとして，そのように無限に形づくられるであろうそれらすべての曲線 AIF，AGE などが与えられた直線に，あるいはその他の曲線に等しいかどうかが問われる。



幾何学者たちはそれを探求し，驚嘆すべきことが豊富になるように努力するであろう。確かに，もし曲線の測定のために利用される方法が一般的であり十分なものであるならば，私があえて疑問 238
を呈することがないと断言することは，一瞥しただけでなされたことを認知させるであろうし，既にうんざりさせられた幾何学者を不必要な骨折りから解き放つであろう。

さらに，もし誰かが上の証明においてあまりにも簡潔なものを見出したならば，私はそれを補完するかまたは大目に見るかを要求する。

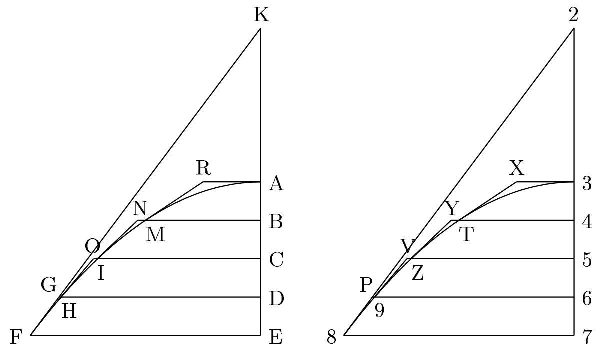
曲線の直線との比較についての論考への補遺

『全集』pp.238–254

「論考」において私たちが提示した最後の問題を満足させるために，以下の命題が前もって述べられる［のがよい］であろうと思われる。

命題 I

最初の図において，それらの軸 AE，37 が互いに等しい，2 つの曲線 AIF，3Z8 があるとしよう。さらに，両方の図において，軸に関して，頂点から等しい距離だけ離れている任意個数の縦線が引かれるとしよう。



例えば，前の［図における］縦線 BM, CI, DH, EF が，一方，後の［図における］縦線 4T，5Z，69，78 があるとし，そして，頂点から縦線 BM までの距離を表す直線 AB は頂点から縦線 4T までの距離を表す直線 43
239 に等しいとしよう。同様に，CA は 53 に等しく，さらに，DA は 63 に等しく，最後に，私たちが今仮定した，EA は 73 に等しいとしよう。

もしそれぞれの縦線が接線によって軸から切り取られた［直線］に対してつねに対応する比にあるならば，

すなわち，もし，一方では点 F，H，I，M において，他方では点 8，9，Z，T において，接線が引かれたとき，つねに，例えば，縦線 FE が，接線 FK が軸から切り取る，直線 KE に対して，縦線 87 が，同様に接線 82 が軸から切り取る，直線 72 に対するのと同じ比にあり，同様に，縦線 DH が，点 H において引かれる接線によって軸から切り取られた［直線］に対して，縦線 69 が，点 9 における接線によって軸から切り取られた［直線］に対するようであり，そして，その他についてもそうである，ならば，

私は，それらの 2 つの曲線 AIF，3X8 は互いに等しく，それどころか相似であり，それゆえ同じである，そして，一方の図における縦線は，頂点から等しく離れている，他方の［図における］縦線と，同時に，等しい，と断言する。

なぜならば。第 1 の図において，点 H，I，M において，縦線と点 O，N，R において出会う，接線の部分 HO，IN，MR が引かれ，同様に，第 2 の図において，縦線と点 V，Y，X で出会う，接線の部分 9V，ZY，TX が引かれると，仮定から，

FE が EK に対する (第 1 の図) ように 87 が 72 に対する (第 2 の図)。

しかし，点 E および 7 における角は直角である。ゆえに，三角形 FEK，872 は相似である。ゆえに，

FK が KE に対するように 82 が 72 に対する。

しかし，

FK が KE に対するように

(縦線 DH が点 G まで延長されると) 直線 FG が直線 DE に対し，

そして，

82 が 72 に対するように

(縦線 69 が点 P まで延長されると) 直線 8P が直線 67 に対する。

ゆえに，

直線 FG が直線 DE に対するように直線 8P が直線 67 に対する。

さらに，直線 DE，67 は，直線 EA および 73 が，さらに直線 DA および 63 が互いに等しいから，等しい。ゆえにまた，接線の部分 FG，8P も互いに等しいであろう。 240

同様に，私たちは接線の部分 HO が接線の部分 9V に等しいことを証明するであろう。さらに，接線の部分 IN が接線の部分 ZY に等しいことを証明するであろう。最後に，接線の部分 MR が接線の部分 TX に等しいことを［証明するであろう］。

ゆえに，第 1 の図における接線の系列が第 2［の図］における接線の系列に等しいから，不可能性に関するアルキメデス (Ἀρχιμήδης (Archimēdēs)：前 287?–前 212) の方法についての三段論法によって曲線 AIF が曲線 3Z8 に等しいことが容易に結論される。これが第 1 に証明されるべきことであった。それどころか，同時に，曲線の対応する部分が互いに等しいことが結論される。確かに，［曲線の］部分 FH は［曲線の］部分 89 に，曲線の部分 HI は［曲線の］部分 9Z に［等しく］，そして，その他についてもそうである。

一方の図の縦線が，同時に，他方の縦線に等しいことが証明されることが残っている。

仮定から，縦線は接線によって軸から切り取られた［直線］に対して，どちらの場合でも，つねに同じ比にあるから，ゆえに，接線および縦線の交線がつくる，角 GFE，P87 は互いに等しいであろう。同様に，角 OHD および V96，さらに，角 NIC および YZ5，最後に，角 RMB および XT4［は互いに等しい］。ゆえに，前の曲線のすべての部分 FH，HI，IM，MA は後［の曲線］の部分 89，9Z，ZT，T3 にそれぞれがそれぞれに等しいから，それどころかそれらの部分の傾きはどちらの場合も同じである (なぜならば，私たちが証明したように，それぞれの図においてつねに等しい角をつくっている，曲線の接線が傾きを測定するのだから。) から，ゆえに，曲線 AMIHF，3TZ98 は互いに等しいだけではなく相似でもある。そしてそのため，もし一方が他方の上におかれると理解されるならば，それらは完全に一致するであろう。それゆえ，それらは軸だけでなく縦線も等しい，またはむしろ同じである，であろう。これが第 2 に証明されるべきことであった。

命題 II

第 2 の図において，それらの軸が AC，XF であり，半底線が DC，GF である，同じ性質の 2 つの放物線 AOD，XIG があるとし，例えば，

DC の立方が縦線 BO の立方に対するように CA の平方が BA の平方に対する，

そして，同様に， 241

GF の立方が縦線 IY の立方に対するように FX の平方が YX の平方に対する

としよう (なぜならば，命題が一般的であるとしても，私たちは私たちの放物線から離れることはないから)。さらに，一方の軸が半底線に対するように他方の軸もまた半底線に対する，確かに，

軸 CA が半底線 DC に対するように軸 XF が半底線 GF に対する，

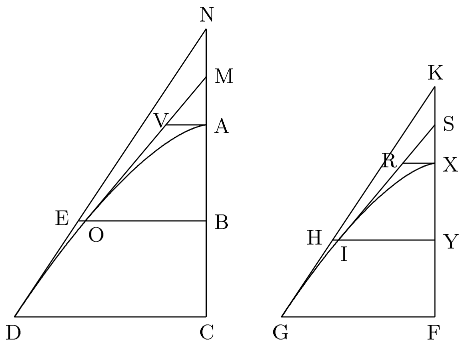
としよう。私は，これら 2 つの放物線は互いに軸の，あるいは半底線の，比にある，すなわち，

曲線 AOD は曲線 XIG に対して軸 AC が軸 XF に対するようである，

あるいは，半底線 CD が半底線 GF に対するようである，

—— なぜなら，これら 2 つの比は，仮定により，同じであるから —— と断言する。

証明は容易である。



なぜならば。両方の軸とも任意個数の等しい部分に切り分けられるとしよう。混乱や冗長さを避けるために，私たちはただ 2 つ［に分けられた場合］だけを利用するであろう。ゆえに，軸 AC が B において，そして，軸 FX が Y において半分に切り分けられ，縦線 BO，YI が引かれたら，点 D，O において接線 DN，OM が引かれ，それらの前のものは縦線 BO と点 E において，さらに，後のものは，縦線に平行な，直線 AV と点 V において出会い，同様に，他方の図において，点 G，I において，縦線 YI およびそれに平行な［直線］XR と点 H，R において出会う，接線 GK，IS が引かれるとしよう。

242 仮定から，

DC が CA に対するように GF が FX に対する。

しかし，その放物線の性質から，

直線 CA は接線によって切り取られた CN に対して 2 が 3 に対する

ようであり，同様に，

直線 FX もまた接線によって切り取られた直線 FK に対して 2 が 3 に対する

ようであり，ゆえに，同等性により，

DC が CN に対するように GF が FK に対する。

ゆえに，三角形 DNC，GKF は相似であり，ゆえに，

DN が NC に対するように GK が KF に対する。

しかし，

DN が NC に対するように DE が CB に対する，

そして，

GK が KF に対するように GH が FY に対する。

ゆえに，

DE が CB に対するように GH が FY に対する。

同様に，

OV が BA に対するように IR が XY に対する

ことが証明されるであろう。

ゆえに，軸の部分，一方では AB，BC および他方では XY，YF，は互いに等しいから，ゆえに，

すべての接線の部分 DE，OV［の和］が軸全体 AC に対するように

すべての接線の部分 GH，IR［の和］が軸全体 XF に対する。

さらに，すべての接線の部分 DE および OV など［の和］は，もし必要ならば，既にしばしば示され証明もされた，不可能性に関する三段論法のおかげで，曲線全体 DOA を表す。同様に，すべての接線の部分 GH，IR など［の和］は，もし必要ならば，曲線全体 GIX を表す。ゆえに，

曲線 DOA が軸 AC に対するように曲線 GIX が軸 XF に対し，

そして，交換して逆にされると， 243

軸 AC は軸 XF に対して，あるいは (仮定から) 底線 DC は底線 GF に対して

曲線 DOA が曲線 GIX に対する

ようであろう。これが証明されるべきことであった。

命題 III

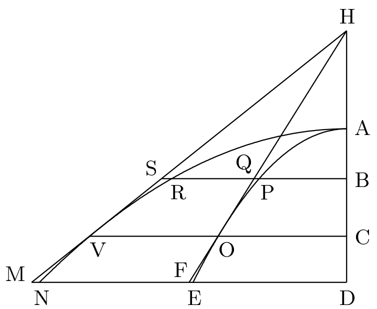
第 3 の図において，AO をその軸が AC，底線が CO である曲線とし，それを基に，そこにおける縦線がつねに前の曲線の縦線に比例している，同じ軸および頂点の，別の曲線が形成されると理解されるとしよう。すなわち，

底線 CO が底線 CV に対するように

前の曲線の縦線 BP が後の曲線の縦線 BR に対し，

縦線 DE が　　　　縦線 DN に対し，

そして，無限にそうであるとしよう。もし前の曲線の任意の点，例えば O，において，軸と点 H において一致する，接線 OH が引かれ，そして，第 2 の曲線と点 V において出会うまで CO が延長されるならば，私は，点 V および H を結ぶ直線は第 2 の曲線に接し，そして，両方の曲線における対応する接線は同じ点で軸と出会うことがつねに起きる，と断言する。



なぜならば。曲線と点 P，R，E，N において，そして延長された直線 OH，VH と点 Q，S，F，M において出会う，縦線 BPR，DEN が引かれるとしよう。

もし私たちが，直線 CV の上方に引かれた直線 BS がつねに直線 BR より大きいこと，さらに，[直線 CV の] 下方に引かれた直線 DM もまたつねに縦線 DN より大きいことを証明したならば，直線 MVSH が第 2 の曲線に点 V において接することは明らかであろう。

つくり方から， 244

CO が CV に対するように縦線 BP は縦線 BR に対する。

しかし，COV，BQS の平行性のために，同じ点から下に向かている 3 つの直線 CH，OH，VH によって切り取られるものもまた，

CO が CV に対するように直線 BQ が直線 BS に対する。

ゆえに，

直線 BP が直線 BR に対するように直線 BQ は直線 BS に対し，

そして，交換すると，

直線 BP が直線 BQ に対するように直線 BR は直線 BS に対する。

さらに，直線 OQH は点 O において前の曲線に接するから，直線 BQ は直線 BP より大きいであろう。ゆえにまた，直線 BS は直線 BR より大きいであろう。これが第 1 に証明されるべきことであった。

下方にとられた縦線についても証明は異ならないであろう。なぜならば。仮定から，

CO が CV に対するように DE が DN に対し，

そして，平行性のために，

CO が CV に対するように DF が DM に対する。

ゆえに,

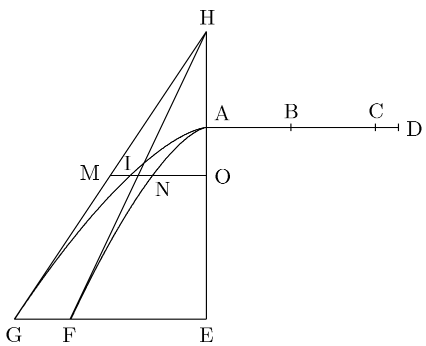
DE が DN に対するように DF は DM に対する。

さらに，DE は DF より小さい。ゆえに，DN 自身は DM より小さいであろう。

それゆえ，直線 MVSH は点 V において第 2 の曲線に接する。

次［の命題］のための補題

第 4 の図において，私たちの放物線を GIA，その軸を AE，半底線を EFG，接線を GH としよう。同じ軸 AE に関して，その性質が，その半底線 EF のベキが前の半底線 EG［のベキ］の 2 分の 1 であり，そして，任意の縦線，例えば NO,［のベキ］がつねに前の曲線に関する縦線 OI のベキの 2 分の 1 であるという，別の放物線 FNA がつくられるとしよう。前の放物線 GIA の通径を
245 直線 AD とし，その 9 分の 1 の部分を CD とし，そして，残りの AC が B において 2 等分されるとしよう。第 2 の放物線に対して，同じ点 H において軸と一致し，前述の命題の力によるだけでなく，放物線自身の性質によっても，いずれの場合でも，上で証明されたことから，直線 EA は直線 EH に対して 2 が 3 に対するようであるような，点 F において接する直線 FH が引かれるとしよう。



私は,

FE の平方は EH の平方に対して
直線 AB の半分が直線 EG に対する

ようである，と断言する。

なぜならば。既に,「論考」の命題 III において,

GE の平方は EH の平方に対して
直線 AB が直線 EG に対する

ようであることは証明されている。ゆえに，前項の半分がとられると，私たちが GE の平方の半分であると仮定した,

EF の平方が EH の平方に対するように直線 AB の半分が直線 GE に対する

であろう。

同様に，私たちは，もし直線 FE［のベキ］が直線 GE のベキの 3 分の 1 であるとするならば，すなわち，もし FE の平方が GE の平方の 3 分の 1 であるとするならば,

FE の平方が EH の平方に対するように直線 AB の 3 分の 1 が直線 GE に対する

ことを証明するであろうし，そして，4 分の 1，5 分の 1 についても，その他についても無限にそうである。

さらに，私たちは，2 分の 1 の比について,

FE の平方が EH の平方に対するように AB の半分が直線 GE に対する

246 ことを証明したから，ゆえに，合成されると，FE，EH の平方の和，あるいは単独の

FH の平方が EH の平方に対するように AB の半分が，GE とともに，GE 自身に対する

であろう。

さらに，もし直線 EF［のベキ］が直線 GE のベキの 3 分の 1 ならば,

FH の平方が EH の平方に対するように

AB の 3 分の 1 が，GE とともに，GE 自身に対する

であろう。

もし直線 EF［のベキ］が直線 GE のベキの 4 分の 1 ならば，

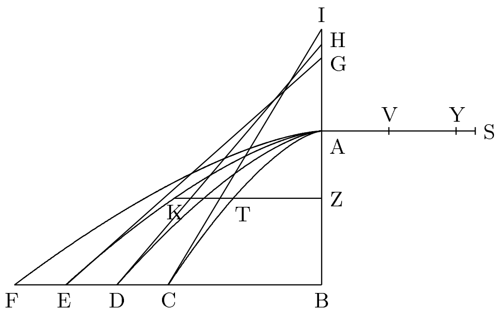
FH の平方が EH の平方に対するように

AB の 4 分の 1 が，EG とともに，EG 自身に対する

であろうし，そして，無限にそうであり，任意の縦線について同じことが起きるであろう。

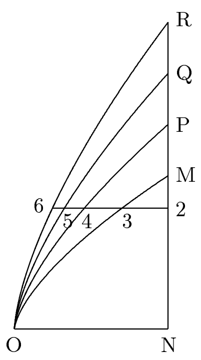
命題 IV

これが先に述べられることによって，私たちは一般的な定理を苦もなくあらわにする。



第 5 の図において，私たちの放物線を AC，その軸を AB，半底線を BC とし，これを基に，その性質が，任意の縦線 BCDEF が引かれたら，つねに，直線 BD が前の曲線 CA に等しく，直線 BE が第 2 の曲線 AD に等しく，直線 BF が第 3 の曲線 AE に等しく，そして，すべて［の曲線］について縦線がつねにそれらの曲線に一致するようである，別の曲線 AD，AE，AF［など］が無限に形成されるとしよう。私は，それらすべての無限にある曲線 AD，AE，AF などのそれぞれは，ちょうど私たちが「論考」において，底線の側から別の異なった方法によって，構成した曲線のように，つねに与えられた直線に等しい，と断言する。

一般的な定理はこうである。 247



AC そのものと完全に等しく，相似であり，それゆえ，その軸 MN が軸 AB に，そして，半底線 ON が半底線 BC に等しい，同じ放物線 O3M が別に提示される (なぜならば，私たちは混乱を避けるために図が別に構成されると考えたから。) としよう。直線 NP［のベキ］が直線 NM のベキの 2 倍，同様に，直線 NQ［のベキ］が直線 NM のベキの 3 倍，同様に，直線 NR［のベキ］が NM のベキの 4 倍であり，そして，無限にそうであるとしよう。さらに，半底線 ON をそのままにして，放物線 O3M あるいは AC と同じ性質である，頂点 P，Q，R を通る放物線がつくられるとし，それらを O4P，O5Q，O6R などとしよう。私は，放物線 O4P は曲線 AD に等しく，さらに，放物線 O5Q は曲線 AE に等しく，最後に，放物線 O6R は曲線 AF に等しく，そして無限にそうである，と断言する。

私たちの放物線 O4P，O5Q，O6R において，縦線 23456 が引かれると，言及された放物線の性質から，つねに，

直線 ON の立方が直線 42 の立方に対するように

直線あるいは軸 NP の平方が P2 の平方に対し，

さらに，

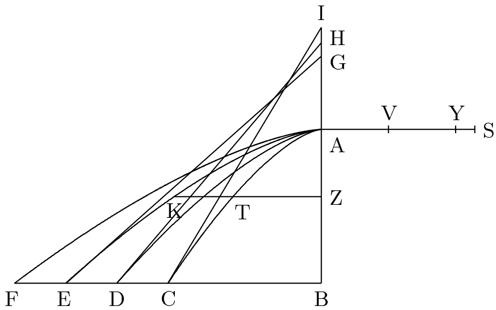
ON の立方が 52 の立方に対するように NQ の平方が Q2 の平方に対し，

最後に，

ON の立方が 62 に立方に対するように NR の平方が R2 の平方に対する

から，「論考」において前に証明されたことにより，それらの放物線のそれぞれは与えられた直線
248 に等しい。ゆえに，私たちの一般的な定理の証明の後では，同様に，曲線 AD，AE，AF のそれぞれが与えられた直線に等しいことは明らかであろう。

さらに，一般的な定理の証明はこうである。



その放物線の通径を直線 AS とし，そこからもし 9 分の 1 の部分 SY を取り去るならば，残りを点 V において 2 等分し，そして，点 C，D，E において，軸と点 I，H，G において出会う，新しい曲線に対する接線 CI，DH，EG が引かれるとしよう。

「論考」における第 3 の命題の証明によって，

BC の平方は BI の平方に対して

直線 AV が直線 BC に対する

ようであり，合成される［合比の理］と，

CI の平方は BI の平方に対して直線 AV が，BC とともに，BC に対する

ようである。しかし，「論考」の命題 VI により，

接線 CI の平方が BI の平方に対するように

直線 BD の平方は (接線 DH が［軸から］切り取る) 直線 BH の平方に対する。

ゆえに，

BD の平方が BH の平方に対するように直線 AV が，BC とともに，BC に対し，

そして，合成されると，

接線 DH の平方が BH の平方に対するように

直線 AV が，BC が 2 倍にとられたものとともに，BC 自身に対する。

しかし，

接線 DH の平方が HB の平方に対するように，

249 「論考」の同じ命題により，

BE の平方は接線 EG によって［軸から］切り取られた直線 BG の平方に対する。

ゆえに，

直線 BE の平方が直線 BG の平方に対するように

直線 AV は，BC が 2 倍にとられたものとともに，BC 自身に対する。

同様に，もし曲線 EA に対して，曲線 AC を T において切断する，縦線 ZTK が引かれ，点 K において曲線 AKE に対する接線が引かれると理解されるとすると，同様に，

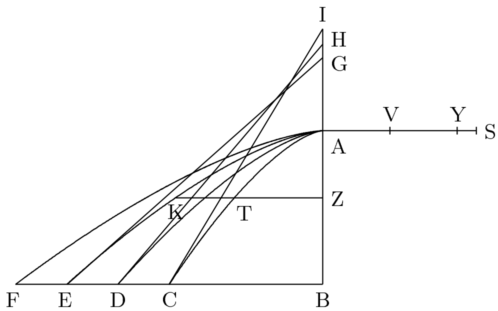
KZ の平方が，点 K を通って引かれた接線が軸から切り取る，直線の平方に対するように

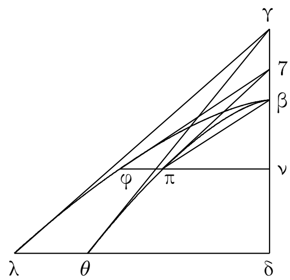
直線 AV が，ZT が 2 倍にとられたものとともに，ZT 自身に対し，

そして，つねにそれが起きるであろうことが証明されるであろう。

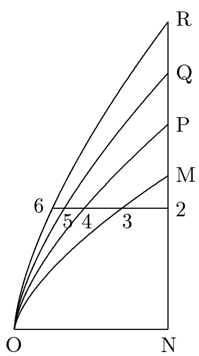
混乱を避けるために，同じ曲線 AKE が，別の図における βφλ として，別に提示されるとしよう。それゆえ，底線 λδ は底線 EB に，接線 λγ は接線 EG に，軸 δβ は軸 BA に，接線によって軸

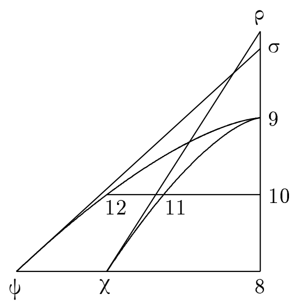
$\delta\gamma$ から切り取られたものは BG から切り取られたものに，縦線 $\nu\varphi$ は縦線 ZK に，等しいとしよう。この曲線 $\lambda\varphi\beta$ からそれより小さい別の［曲線］$\theta\pi\beta$ が形成されるとし，その条件は，その新しい曲線の縦線はベキについてつねに前の縦線の 2 分の 1 である，例えば，直線 $\delta\theta$ はベキについて直線 $\delta\lambda$ の 2 分の 1 であり，さらに，縦線 $\nu\pi$ はベキについて直線 $\nu\varphi$ の 2 分の 1 であり，そして，その他についてもそうである，としよう。この新しい曲線に点 θ，π において接する直線 $\theta\gamma$，$\pi 7$ が引かれるとしよう。





前述の第 3 の命題により，接線 $\theta\gamma$，$\lambda\gamma$ が同じ点 γ において軸と出会うこと，さらに，点 φ，π において引かれた接線が，どちらの図の縦線もつねに互いに同じ比にあるから，同じ点，例えば 7，において軸と出会うこと，は明らかである。 250





さらに，放物線 OM，OP などと同じ性質の放物線が別に提示されるとし，その軸 98 は軸 MN あるいは AB あるいは $\beta\delta$ に等しく，さらに，半底線 8χ はベキについて半底線 NO あるいは BC の 2 分の 1 であるとし，そして，それが χ 11 9 であるとし，それを基にその軸が同じ 98 であり，さらに，縦線 8ψ が曲線 χ 11 9 に等しく，同様に，縦線 10 11 12 が曲線 11 9 に等しく，そして，その他についてもそうである，別の［曲線］9 12 ψ が形成されるとしよう。

最初に，曲線 $\theta\pi\beta$ および ψ 12 9 が同じである，すなわち，完全に等しくて相似である，ことが証明されなければならない。これは次のように証明されるであろう。

私たちは，

BE の平方は BG の平方に対して，あるいは $\lambda\delta$ の平方は $\delta\gamma$ の平方に対して，

直線 AV が，CB が 2 倍にとられたものとともに，直線 CB に対する

ことを証明した。ゆえに，前項の半分がとられると，直線 $\theta\delta$ のベキは直線 $\delta\lambda$ のベキの 2 分の 1 であるから，直線 $\theta\delta$ の平方は $\lambda\delta$ の平方の半分であろうし，それゆえ，

$\theta\delta$ の平方が $\delta\gamma$ の平方に対するように

CB と一緒になった AV の半分は CB 自身に対する

であろう。

同様に，私たちは，別の任意の縦線，例えば $\pi\nu$，について，

$\pi\nu$ の平方が $\nu 7$ の平方に対するように

ZT と一緒になった AV の半分が ZT 自身に対する

こと，そしてその他についてもそうであることを証明するであろう。

251 さて，同じ性質が曲線 $\psi 12\,9$ に適合するかどうかが調査されなければならない。これは次のようになるであろう。

曲線 $\chi\,11\,9$ において，その半底線 $\chi 8$ はベキについて半底線 BC の 2 分の 1 であり，そして，軸 89 は軸 AB に等しく，上の補題により，点 χ，ψ において接する直線 $\chi\rho$，$\psi\sigma$ が引かれると，

$\chi 8$ の平方は 8ρ に対して直線 AV の半分が直線 CB に対する

ようである。なぜならば，直線 $\chi 8$ はベキについて直線 CB の 2 分の 1 だからである。ゆえに，合成されると，

$\chi\rho$ の平方は 8ρ の平方に対して AV の半分が，CB とともに，CB 自身に対する

ようである。

同様に，もし直線 $9\,10$ が直線 AZ に等しければ，すなわち，もし点 10 および Z が頂点から等しく離れているならば，

点 11 において引かれた接線の平方は軸から切り取られた［直線の］平方に対して

AV の半分が，直線 ZT とともに，ZT 自身に対する

ようであろう。

しかし，

$\chi\rho$ の平方が 8ρ の平方に対するように，

「論考」の命題 VI により，

縦線 $\psi 8$ の平方が接線によって切り取られた 8σ の平方に対する，

(そして，同様に，

点 11 において引かれた接線の平方が軸から切り取られた［直線の］平方に対するように

縦線 $12\,10$ の平方が

点 12 において引かれた接線によって切り取られた［直線の］平方に対する。)

ゆえに，

$\psi 8$ の平方が 8σ の平方に対するように AV の半分が，BC とともに，BC に対する。

252 しかし，別の図において，私たちは，

縦線 $\theta\delta$ の平方は接線によって切り取られた $\delta\gamma$ の平方に対して

AV の半分が，BC とともに，CB に対する

ようであることを証明した。ゆえに，2 つの曲線 $\psi 12\,9$，$\theta\pi\beta$ について，

$\psi 8$ が切り取られた 8σ に対するように縦線 $\theta\delta$ が切り取られた $\delta\gamma$ に対する

であろうし，そして，別のすべての点についてつねに同じことが起きるであろうし，さらに，私たちは，同じ方法によって，例えば，

縦線 $10\,12$ は点 12 において引かれた接線によって切り取られた［直線］に対して

$\pi\nu$ が $\pi 7$ に対する

ようであるし，その他についてもそうであることを証明するであろう。

それゆえ，この「補遺」の最初の命題によって，曲線 $9\,12\,\psi$，$\theta\pi\beta$ は同じ軸をもち，そして，縦線は，どちらの場合でも，接線によって軸から切り取られた［直線］に対して対応する同じ比にあ

るから，それらの曲線は互いに等しく，それらの半底線もまた［互いに等しく］，そして，同様に，
すべての縦線は頂点から等距離にあるであろう。さらに，つくり方から，半底線 ψ8 は曲線 χ11 9
に等しい。ゆえに，曲線 χ11 9 は直線 $\theta\delta$ に等しい。さらに，つくり方から，直線 $\theta\delta$ はベキについ
て直線 $\delta\lambda$ の 2 分の 1 である。ゆえに，放物線状の曲線 χ11 9 はベキについて直線 $\delta\lambda$ の 2 分の 1
である。さらに，直線 $\delta\lambda$ は直線 BE に等しく，そして，直線 BE は，最初の［曲線］AC から導か
れた曲線のつくり方において，曲線 AD に等しいことが仮定されなければならない。ゆえに，放物
線 χ11 9 はベキについて曲線 AD の 2 分の 1 である。しかし，同じ曲線 χ11 9 はベキについて放
物線 O4P の 2 分の 1 である。なぜならば。底線 χ8 はベキについて底線 BC あるいは NO の 2 分
の 1 に，そして，同様に，軸 89 あるいは AB あるいは NM はベキについて軸 NP の 2 分の 1 にさ
れなければならない。ゆえに，放物線 O4P，χ11 9 は同じ性質であり，放物線 χ11 9 の軸も底線も 253
ともにベキについて放物線 O4P の軸および底線の 2 分の 1 であるから，ゆえに，放物線 χ11 9 自
身は，この「補遺」の命題 II によって，［ベキについて］放物線 O4P の 2 分の 1 であろう。ゆえ
に，私たちが既に証明したように，同じ放物線 χ11 9 は［ベキについて］放物線 O4P の，同様に
曲線 AD の，2 分の 1 であるから，曲線 AD および放物線 O4P 自身は互いに等しいであろう。こ
れが証明されるべきことであった。

曲線 AE が放物線 O5Q に等しいことが証明されることに関して，全く異ならない技法が使われる。

なぜならば。

BE の平方は BG の平方に対して

直線 AV が，BC が 2 倍にとられたものとともに，BC 自身に対する

ようであることが証明されているから，ゆえに，合成され，より大きくされると，

接線 EG の平方は直線 BG の平方に対して

直線 AV が，BC が 3 倍にとられたものとともに，BC 自身に対する

ようであろう。さらに，「論考」の第 6 の命題において先に証明されたことから，

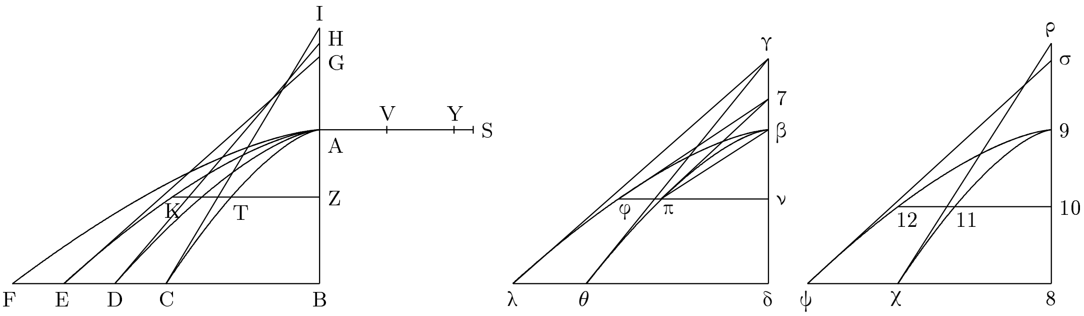
EG の平方が BG の平方に対するように

BF の平方が点 F において引かれた接線によって軸から切り取られた［直線の］平方に対する。
ゆえに，

BF の平方はその切り取られた［直線の］平方に対して

直線 AV が，3 倍の BC とともに，BC に対する

ようであろう。



その他ついても完全に模倣されるであろうし，前述の定理の段階が手本とされるであろう。［た

254 だし,] 別にされた図において，$\lambda\delta$ が BF 自身に等しくされた後で，直線 $\delta\theta$ がベキについて BF あるいは $\delta\lambda$ 自身の 3 分の 1 になり，曲線 $\lambda\varphi\beta$ が曲線 FA に等しくなり，曲線 $\theta\pi\beta$ はその性質が，すべての縦線は底線 $\lambda\delta$，$\theta\delta$ の比に従うようである，であろう，ということを除いては。さらに，そこに曲線 $9\,11\,\chi$ および $9\,12\,\psi$ がある，別にされたもう 1 つの図において，直線 98 は，上のように，直線 MN あるいは AB あるいは $\beta\delta$ に等しいであろうし，さらに，底線 8χ はベキについて底線 ON あるいは CB の 3 分の 1 になり，そして，放物線 $\chi\,11\,9$ は放物線 CTA あるいは O3M と同じ性質になるであろう。それを基に曲線 $\psi\,12\,9$ が形成されるであろうから，その縦線 8ψ，$10\,12$ は，上のように，曲線 $\chi 9$，$11\,9$ に等しく，私たちは，上のように，曲線 $\beta\pi\theta$ および曲線 $9\,11\,\chi$ は互いに等しくて，相似である，すなわち同じである，ことを証明するであろう。

そしてそのために，底線 $\theta\delta$ および $\psi 8$ が等しいこと，それゆえ，底線 $\psi 8$ あるいは曲線 $9\,11\,\chi$ がベキについて直線 $\delta\lambda$ あるいは BF あるいは曲線 AE の 3 分の 1 であることが結論される。さらにまた，前に証明されたことから，放物線 $\chi\,11\,9$ はベキについて放物線 O5Q の 3 分の 1 である。ゆえに，曲線 AE および放物線 O5Q は互いに等しいであろう。

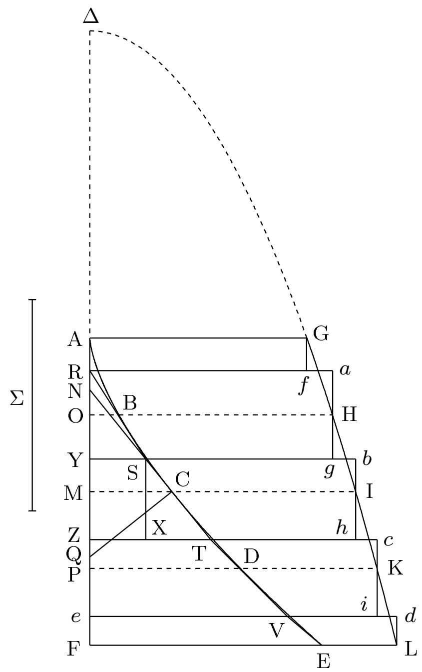
それ以外の場合においても私たちは同じ計算を利用するであろうし，私たちは私たちの一般的な定理の真実性を克服するであろう。

さらに，先の「論考」およびこの「補遺」そのものをより注意深く読んだ人は，私たちの方法の優れた基礎をしっかりと認知するであろうし，それによって曲線の測定が非常に容易に導かれることに気づくであろう。

1659 年 1 月 13 日の日付をもつ，ファン・ヘラート (Hendrik van Heuraet : 1634–1660?) からスホーテン (Frans van Schooten : 1615–1660) にあてて送られた書簡。
スホーテンによるデカルト (René Descartes : 1596–1650) の『幾何学』のラテン語版の 1659 年版に掲載された。
Geometria à Renato Des Cartes Anno 1637 Gallicè edita; postea autem Unà cum Notis Florimondi De Beavne, ..., Operâ atque studio Francisci à Schooten, ... Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios，1659， pp.517–520
表題は *Epistola De Transmutatione Curvarum Linearum in Rectas*。

〔前略〕

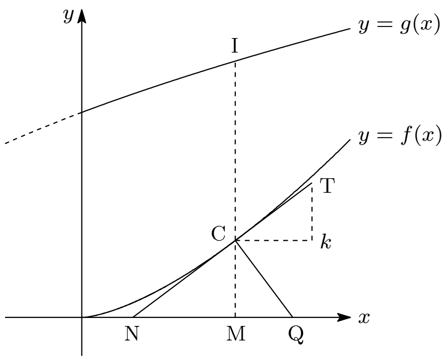
もし 2 つの曲線，例えば ABCDE，GHIKL，および直線 AF が与えられ，その性質が，(直線 518
AF の上に任意にとられた点 M から，与えられた曲線を C および I において切断し，そして，CQ が曲線 ABCDE に対して垂直であるように，垂線 MI が引かれたら) MC は CQ に対してちょうど与えられた別の直線 Σ が MI に対するようになる，であるならば，表面 AGHIKLF は与えられた直線 Σ および曲線 ABCDE に等しい別の直線によって囲まれる長方形に等しいであろう。



直線 AF が任意個数の部分に分割され，例えば，点 O，M および P において，曲線 ABCDE を点 B，C および D において，しかし，曲線 GHIKL を点 H，I および K において切断する，垂線 OH，MI，PK が引かれるとしよう。そして，点 A，B，C，D および E を通って，それらが互いに R，S，T および V において出会う，接線が引かれるとしよう。そして，それらの点を通って，AF 自身に垂直な直線 Ra，Yb，Zc，ed が引かれるとしよう。そして，点 G，H，I，K および L を通って，Ra を f および a において，Yb を g および b において，Zc を h および c において，ed を i および d において切断す 519
る，AF 自身に平行な直線が引かれるとしよう。最後に，S から直線 AF に平行な SX が引かれ，そして，接線 TS が N まで延長されるとしよう。

角 NCQ が直角であるために，CM は CQ に対して MN が NC に対するようであろう。しかし，MN は NC に対して SX が ST に対するようである。それゆえ，SX は ST に対して CM が CQ に対するようであろう。そして，CM は CQ に対して Σ が MI に対するようであるから，SX は ST に対して Σ が MI に対するようであろうし，そして，それゆえに，SX あるいは YZ および MI あるいは Yb による長方形は ST および Σ による長方形に等しいであろう。同じ方法によって，長方形 ce が TV および Σ による長方形に等しいこと，そして，長方形 dF が VE，Σ による長方形に等しいこと，そして，長方形 aY が RS および Σ による長方形に等しいことが証明されるであろう。そのために，それらの長方形がすべて同時にとられたものは Σ およびすべての接線が同時にとられたものに等しい別の直線による長方形に等しいであろう。そしてそのために，任意個数の長方形

と接線および平行線からなる図形についてそれは真実であるから，もしそれらの個数が無限に増やされるならば，その結果は表面 AGHIKLF と曲線 ABCDE の接線についても同様であり，表面 AGHIKLF が Σ および曲線 ABCDE に等しい直線による長方形に等しいことは明らかであることになる。これが証明されるべきことであった。



求長されるべき曲線 $y=f(x)$ に対して，別に定めた定数 Σ について，つねに，$\mathrm{MC}:\mathrm{CQ}=\Sigma:\mathrm{MI}$ が成り立つような，求積可能な曲線 $y=g(x)$ を定めれば，その見出された曲線を基にして最初の曲線の弧長が求められるという。

左図において，点 C における接線 NT，法線 CQ について，$\Sigma:\mathrm{MI}=\mathrm{MC}:\mathrm{CQ}=\mathrm{MN}:\mathrm{NC}=\mathrm{C}k:\mathrm{CT}$ であるから，

$$\Sigma\times\mathrm{CT}=\mathrm{MI}\times\mathrm{C}k$$

がいえる。

いま，$\mathrm{M}(x,\ 0)$ とし，Ck，CT をそれぞれ微小な dx，ds とすると，$\mathrm{MI}=g(x)$ で，接線 CT の傾きは $f'(x)$ だから，

$$\Sigma\times ds=g(x)\times dx,\ ds^2=dx^2+\{f'(x)\}^2dx^2=\left(1+\{f'(x)\}^2\right)dx^2$$

となる。

これから，$\Sigma\int_0^a\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^a g(x)dx$ がいえて，これによって弧長が求められるという訳。

これが曲線の求長についての現代の積分公式へとつながる，おそらくは史上初の，言及。

次に，曲線 $y^2=\dfrac{1}{a}x^3$ についての場合が述べられる。

さらに，このことから与えられた曲線の長さを探求することができるはずであり，それは次の例によって明らかであろう。

最初の曲線を ABCDE とし，その性質が，直線 AF の上に任意の点 M がとられ，垂線 MC が引かれたら，もし AM が x と呼ばれ，そして MC が y と呼ばれるならば，つねに yy が $=\dfrac{x^3}{a}$ になる，のようであるとしよう。次いで，$\mathrm{AQ}=s$，$\mathrm{CQ}=u$ および $\mathrm{MI}=z$ とおかれると，$\mathrm{QM}=s-x$ であろうし，その平方は $=ss-2sx+xx$ であろう。もし MC の平方，すなわち yy あるいは $\dfrac{x^3}{a}$，が加えられるならば，$ss-2sx+xx+\dfrac{x^3}{a}=uu$ であると知られるであろう。

2 つの等しい根に関して，その大きさはフッデ (Johann van Waveren Hudde : 1628–1704) の方法に従って，［等差数列］0，1，2，3［と］0 によって，$-2sx+2xx+\dfrac{3x^3}{a}=0$ から見出されるであろう。

フッデの方法あるいは規則とは，
多項式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ が重根 $x=\alpha$ をもつならば，その各項に等差数列 p, $p+b$, $p+2b$, $\cdots$, $p+nb$ が掛けられた，多項式 $pa_0+(p+b)a_1x+(p+2b)a_2x^2+\cdots+(p+nb)a_nx^n$ もまた根 $x=\alpha$ をもつ，
というもの。
ただし，フッデはほとんどの場合について $p=0$，$b=1$ としたものを用いたということである。

そしてそのため，AQ あるいは s は $= x + \dfrac{3xx}{2a}$ であり，もしこれから AM $= x$ が取り去られるならば，MQ $= \dfrac{3xx}{2a}$ が残るであろうし，その平方は $\dfrac{9x^4}{4aa}$ であり，これに CM の平方または $\dfrac{x^3}{a}$ を加えれば，CQ の平方は $= \dfrac{9x^4}{4aa} + \dfrac{x^3}{a}$ になるであろう。さらに，CM $= \sqrt{\dfrac{x^3}{a}}$ が CQ $= \sqrt{\dfrac{9x^4}{4aa} + \dfrac{x^3}{a}}$ に対するように，何らかの方法によって直線［Σ］が $\dfrac{1}{3}\,a$ と仮定された (なぜならば，それを任意に仮定することが許されるから) と知られたら，それが MI $= z$ に対するで 520
あろうし，$z = \sqrt{\dfrac{1}{4}\,ax + \dfrac{1}{9}\,aa}$ であろう。このことが証明されたから，曲線 GHIKL は，その頂点が Δ にあり，AΔ $= \dfrac{4}{9}\,a$ で，通径が $= \dfrac{1}{4}\,a$ になる，放物線であり，そして，それゆえ，曲線 ABCDE の長さは，ΔF $= v$ として，$\sqrt{\dfrac{v^3}{a}} - \dfrac{8}{27}\,a$ である。

AM $= x$，MC $= y$，MI $= z$ とし，AQ $= s$，CQ $= u$ とするとき，
まず, 法線 CQ に関して, $(s-x)^2+y^2 = u^2$ は重根をもつはずだから, $(s^2-u^2)-2sx+x^2+\dfrac{1}{a}\,x^3$ にフッデの規則を適用すると，$-2sx + 2x^2 + \dfrac{3}{a}\,x^3$ も同じ根をもつはずである。その根をそのまま x と表すと，$s\ (=\mathrm{AQ}) = x + \dfrac{3}{2a}\,x^2$ となる。
従って，$\mathrm{CQ}^2 = (\mathrm{AQ}-\mathrm{AM})^2 + \mathrm{NC}^2$ であることから，$\mathrm{CQ}^2 = \dfrac{9}{4a^2}\,x^4 + \dfrac{1}{a}\,x^3$ となる。
さて，$\Sigma : \mathrm{MI} = \mathrm{MC} : \mathrm{CQ}$ であるから，$\Sigma = \dfrac{1}{3}\,a$ とおけば，

$$z = \left(\frac{1}{3}\,a \times \sqrt{\frac{9}{4a^2}\,x^4 + \frac{1}{a}\,x^3}\right) \div \sqrt{\frac{1}{a}\,x^3}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4}\,ax + \frac{1}{9}\,a^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\,a\left(x + \frac{4}{9}\,a\right)}$$

が得られる。
以上のことから，曲線 ABCDE の長さ ℓ は，AF $= v$ とすると，

$$\ell = \int_0^v \sqrt{\frac{1}{4}\,ax + \frac{1}{9}\,a^2}\,dx \div \frac{1}{3}\,a$$
$$= \frac{8}{3a}\left\{\left(\frac{1}{4}\,av + \frac{1}{9}\,a^2\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{27}\,a^3\right\} \div \frac{1}{3}\,a$$
$$= a\left(\frac{v}{a} + \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27}\,a$$

となる。

同様に，もし $yy = \dfrac{x^3}{a}$ の代わりにこの方程式 $y^4 = \dfrac{x^5}{a}$，または $y^6 = \dfrac{x^7}{a}$，または $y^8 = \dfrac{x^9}{a}$ が，そして無限に前へ［続く］ものがおかれるならば，同じ性質の表面 AGHIKLF がつねに求積できることが見出されるであろうし，そのことから，これらすべての曲線は直線に変換されることになる。

さらに，もし ABCDE が，その軸が AG で，通径が $= a$ である，放物線ならば，MQ $= \dfrac{2x^3}{aa}$ が見出されるであろうし，その平方は $= \dfrac{4x^6}{a^4}$ であり，これに CM の平方を加えると，CQ の平

方として $\dfrac{4x^6}{a^4}+\dfrac{x^4}{aa}$ が得られるであろう。このため，$\mathrm{CM}=\dfrac{xx}{a}$ が $\mathrm{CQ}=\sqrt{\dfrac{4x^6}{a^4}+\dfrac{x^4}{aa}}$ に対するように，何らかの方法によって直線が a と仮定されたと知られたら，それが $\mathrm{MI}=z$ に対し，$z=\sqrt{4xx+aa}$ であろう。そして，曲線 GHIKL は，その軸が直線 AG，中心が A，通径が $=\dfrac{1}{2}a$，横断辺が $=2a$ である，双曲線であろう。

このことは，放物線状の曲線の長さは，双曲線を求積することが同時に見出されることなく，見出すことはできないし，逆もそうであることを示している。

ペルガのアポロニウスの平面軌跡論2巻の復元

『全集』pp.3–51

原題は *Apollonii Pergaei Libri Duo de Locis Planis Restituti*。
発表されたのは1629年。
アポロニウスの「平面軌跡論」(Τόπων ἐπιπέδων δύο : *Locorum Planorum Libri Duo*, *De Locis Planis*) の復元を試みたもので，フェルマの解析幾何学の出発点ともいえるもの。
なお,「平面軌跡論」の復元はスホーテン (Frans van Schooten : 1615–1660)，シムソン (Robert Simson : 1687–1768) らによっても試みられている。

第1巻 3

「平面軌跡」というものは十二分に知られている。そのことについての2巻をアポロニウス
(Ἀπολλώνιος (Apollonius)：前262–前200?) が書いたことがパッポス (Πάππος (Pappos，Pappus)：
4世紀前半) によって証言されており，彼はそれらのそれぞれの命題を［『数学集成』(Συναγωγη :
Synagoge，*Collectio*) の］第7巻の初めで伝えているが，しかし，その言葉は翻訳者にとって分か
りにくいものであったり，見通しのあまりよくないものであったりした (なぜならば，ギリシア語
の本を見ることは自由にはできなかったからである)。我々は，［次に］見られるように，幾何学全
体の中で最も美しいこの知識を忘却の淵から救い出し，この作業において，他の方法では示せない
揺るぎない確実性を大いに輝くものにし，［そして］幾何学の驚異が光り輝くことになるように， 4
アポロニウスが論じている「平面軌跡論」をガリアの，バタウィアの，そしてイッリュリアの人に
よるアポロニウスのものと大胆にも対比する。あなたが直ちに認めることができるように，私はこ
のことを始める。

ガリア (Gallia) は古代ローマ人がケルト人の居住地につけた名称で，ライン川，アルプス，地中海，ピレネー山脈，大西洋に囲まれた地域を指す。ここではフランスのことをいっていて，『全集』によれば，ガリアの人とはヴィエート (François Viète，ラテン名は Franciscus Vieta : 1540–1603) のことである。
バタウィア (Batavia) はネーデルランド北部に定住していたバタウィー族の人々の国。『全集』によると，バタウィアの人は光の屈折に関するスネルの法則で知られるオランダの数学者・天文学者スネル (Willebrord Snell van Roijen : 1580–1626) のこと。
イッリュリア (Illyria : Illyricum) はバルカン半島西部の古代国家で，イッリュリア人によって建国され，前168年にローマ人に滅ぼされた。『全集』では，イッリュリアの人とはゲタルディー (Marino Ghetaldi : 1568–1626) を指す。
『全集』で挙げられているのは，

Viète : *Apllonius Gallus seu exsuscitate Apollonii Pergaei* περὶ ἐπαφῶν *Geometria*，1600
Snell : περὶ λόγου ἀποτομῆς καὶ περὶ χωρίου ἀποτομῆς *resuscitate Geometria*，1607
Snell : *Apollonius Batavus seu exsuscitate Apollonii Pergaei* περὶ διωρισμένης τομῆς *Geromtria*，1608
Ghetaldi : *Apollonius redivivus seu restituta Apollonii Pergaei inclinationum Geometria*，1607
Ghetaldi : *Suppulmentum Apollonii Galli seu exsuscitate Apollonii Pergaei tactionum Geometriae pars reliqua*，1607

さらに，アンダーソン (Alexander Anderson : 1582?–1620?) の著作も挙げられている。

Anderson : *Supplementum Apollonii redivivi*，1612

第 1 巻の命題は次のとおりである。

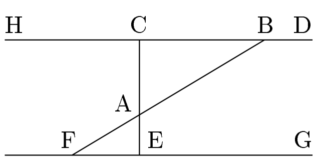
命題 I

もし，与えられた 1 つの点あるいは 2 つ［の点］から，2 つの線が引かれ，そして，［それらが］ 1 つのまっすぐな線であるかあるいは平行であるかあるいは与えられた角度を保っているかのいずれかであり，［また,］互いに与えられた比をもっているかあるいは与えられた広さを囲んでいる［与えられた積に等しい］かのいずれかであれば，さらに，1 つの端点が位置において与えられた平面軌跡に触れるならば，もう 1 つの端点は，確かにときには同じ種類の，そしてときには異なった［種類の］，また，ときには直線と同様の位置に，ときには反対の仕方によって，位置において与えられた平面軌跡に触れるであろう。

> ギリシア数学において，直線と円は平面上に作図されることが要請されていた (ユークリッド (Εὐκλείδης (Eukleides, Euclid)：前 300 頃活躍?) の『原論』(Στοιχείωσις) 第 1 巻公準 1，3) ので平面軌跡 (τόποι ἐπίπεδοι：loci plani) といわれ，円以外の円錐曲線［楕円，放物線，双曲線］は作図するのに円柱や円錐の切断が必要であったために立体軌跡 (τόποι στερεοί：loci solidi) といわれる。
> また，それら以外の曲線は曲線的 (γραμμικόι：grammikoi) 軌跡といわれる。
>
> この命題は，$\left\{\begin{array}{l}\text{1 つの点}\\\text{2 つの点}\end{array}\right.$ から引かれた 2 本の直線が，$\left\{\begin{array}{l}\text{1 つの直線になる}\\\text{平行である}\\\text{ある角度をもっている}\end{array}\right.$ のいずれか
> であり，$\left\{\begin{array}{l}\text{与えられた比をもつ}\\\text{与えられた積に等しい}\end{array}\right.$ のであるから，次の 8 つの場合に分けられる。
>
> (1) 1 つの点，1 つの直線，与えられた比
> (2) 1 つの点，1 つの直線，与えられた積
> (3) 1 つの点，角度，与えられた比
> (4) 1 つの点，角度，与えられた積
> (5) 2 つの点，平行，与えられた比
> (6) 2 つの点，平行，与えられた積
> (7) 2 つの点，角度，与えられた比
> (8) 2 つの点，角度，与えられた積

この命題は適切に 8 つの命題に，そしてそれらからさまざまな場合に，分けることができる。句読法の不足が翻訳者に不明瞭さを示したように思われる。そして，それどころか，パッポス自身がこの軌跡において極端な簡潔さの結果として不明瞭さをなくすことがなかったように思われる。私は，8 つ［の場合］に分けて，それぞれを示す。

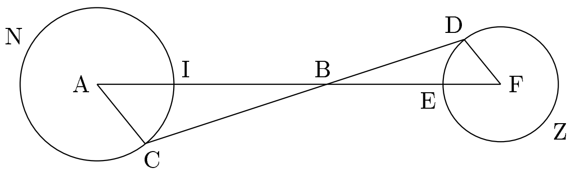
1. 命題 —— もし直線上の与えられた点から，与えられた比をもち，1 つの端点が位置において与えられた平面軌跡 (すなわち，位置において与えられた直線かあるいは円の周のいずれか) に接する，2 つの線が引かれるならば，もう 1 つの端点は位置において与えられた直線かあるいは円の周のいずれかに接するであろう。



与えられた点を A とし，そこを通ってまっすぐに与えられた比で AB，AF が引かれ，例えば点 B が位置において与えられた直線 HCBD 上にあるとしよう。私は，点 F もまた位置において与えられた直線上にある，と断言する。

点 A から直線 HD に下ろされた垂線 AC によって点 C が与えられるであろう。CA を E まで延長し，CA の AE に対する比が与えられた［比］に等しくなるとしよう。それゆえ，直線 AE および点 E が与えられるであろう。点 E を通って，直線 HD に

平行に［直線］GEF が引かれるとしよう。与えられた点を通って平行に切断しているすべての直線は同じ比に分割されるから，その位置が与えられるであろうし，点 F はその上にあるであろう。ゆえに，点 A を通っていて，しかも位置において与えられた平行［な直線］によって制限された，どのような直線も［点 A によって］与えられた比に分割されることは明らかである。



次に，与えられた点を B，位置において［与えられた］円を ICN，その中心を A としよう。BA が結ばれ，点 I において円を切断するとし，そして，IB が BE まで，IB の BE に対する比が与えられた［比］に等しくなるように延長されるとしよう。［直線 BE が］F と結ばれるとし，AI が EF に対して IB が BE に対するようになるとし，そして，中心 F，距離［半径］FE で円の周 EDZ が描かれるとすると，そのつくり方から［その円は］位置において与えられることは明らかである。私は，与えられた点 B を通っていて，しかも位置において与えられた円の周によって両側から制限された，すべての直線は［点 B によって］与えられた比に切断される，と断言する。

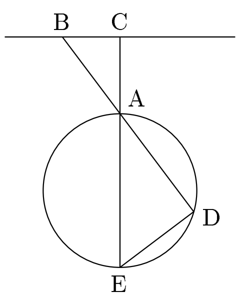
なぜならば。例えば CBD が引かれ，CA，DF が結ばれるとすると，IB が BE に対するように AI が EF に対し，ゆえに，BA 全体が BF［全体］に対するように AI または AC が EF または FD 6
に対する。そして，頂点における角 ABC，FBD は等しい。それゆえ，三角形［ABC，FBD］は相似であり，そしてそれゆえ，CB が BD に対するように BA が BF に対する，すなわち与えられた比にある，ことは明らかである。

それゆえ，与えられた点 B からまっすぐに 2 つの線，例えば BC，BD，が与えられた比に引かれ，それらのうちの BC が位置において与えられた円周に接するとすると，他方の BD もまた位置において与えられた円周に接するであろう。

もし直線が円の周のへこんだ部分に達するまで延長されるとしても，同じことが起きるであろう。

ところで，私たちは，私たちが証明においてすぐに明らかになるはずのおのおのの最も些細なことは示すことをしない，そしてそれどころか，私たちが簡潔で最も些細な事柄から誘導することができるさまざまな場合を論ずることはしない，と警告する。

2. 命題 —— もし与えられた点からまっすぐに，与えられた広さを囲んでいる，2 つの線が引かれ，さらに，1 つの端点が位置において与えられた平面軌跡に触れるならば，もう 1 つの端点も同様に接するであろう。

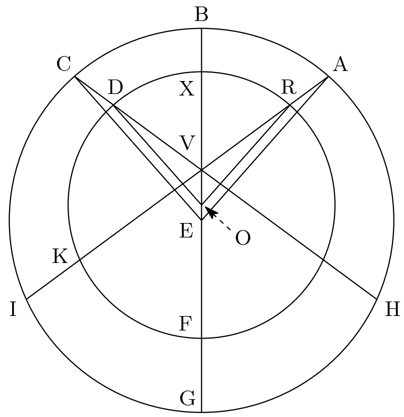


与えられた点を A，はじめに位置において与えられた直線を BC とし，それに対して垂線 AC が下ろされるとすると，ゆえに，点 C が与えられるであろう。それが延長されて，長方形 CAE［CA × AE］が与えられた広さに等しくなるとしよう。直径 AE の上に描かれた円 ADE において，私は，点 A を通って引かれ，直線のそちら側から円の周 (それが位置において与えられることは明らかである) のこちら側に制限された，すべての直線を点 A において切断している部分による長方形［積］は与えられた広さに等しくされる，と断言する。

なぜならば。例えば，直線を DAB としよう。DE が結ばれると，半円の角 ADE は直角であり，頂点における角 BAC，DAE は等しいから，三角形 DAE，ACB は相似であり，そしてそれゆえ， 7

長方形 BAD［BA × AD］は長方形 CAE に等しい。

それゆえ，点 A を通って 2 つの直線 AB，AD がまっすぐに引かれ，そして，1 つの端点，もちろん AB，が位置において与えられた直線 BC に接するとき，もう 1 つの端点は位置において与えられた平面軌跡，すなわち円 ADE，に接するであろう。



しかし，点 V および位置における円 BIGH，その中心が E，が与えられるとしよう。EV が結ばれ，B まで延長されると，VB が与えられるであろう。［VB が,］長方形 BVF が与えられた［積］に等しくなるように，F まで延長され，さらに，長方形 GVX に等しくされるとしよう。直径 XF の上に円 XKF が描かれると，それが確かに位置において与えられ
8 ることは明らかである。私は，点 V を通っていて，2 つの円によって制限されている，直線は V において切断されている切片による長方形が与えられた［積］に等しいようになる，と断言する。

すなわち，例えば AVKI が引かれるとすると，私は，長方形 AVK が与えられた［積］に等しい，と断言する。

より小さい円の中心が O であると，さらに，直線 AVKI が同じ円を R で切断すると仮定され，直線 RO，AE が結ばれるとしよう。私たちは長方形 GVX が BVF に等しいとおいた。ゆえに，GV は VB に対して FV が VX に対するようであろうし，上述のものの半分が集められ，それが利用されると，比の反転により，

> 仮定から BV×VF = GV×VX であるから, GV : VF = BV : VX = (GV+BV) : (VF+VX) = GB : FX = $\frac{1}{2}$ GB : $\frac{1}{2}$ FX = EB : OX であり, さらにこれから, EB : BV = OX : VX となるから, EB : OX = BV : VX = (EB−BV) : (OX−VX) = EV : OV となり, EB : EV = OX : OV がいえるから,
> ［$a : b = c : d$ ならば，$(a+b) : (c+d) = (a-b) : (c-d) = b : d$ (合比の理，除比の理)，$(a+c) : (b+d) = a : b$ (加比の理) である。］

EB あるいは EA が EV に対するように OX あるいは OR が OV に対する

であろう。そして，2 つの三角形 OVR，VEA は共通の角 EVA をもつ。ゆえに，それらは相似であり，

AV が RV に対するように AE が RO に対する，あるいは EB が OX に対する，
そして VE が VO に対する

であろう。ゆえに，

EB が OX に対するように VE が VO に対し，

ゆえに，

EB が OX に対するように残り VB が残り VX に対し，

そしてそれゆえ，

AV が RV に対するように BV が XV に対する。

同様に，私たちは

GV が VF に対するように IV が KV に対する

ことを証明するであろう。それゆえ，入れ換えて，

GV が VI に対するように FV が VK に対する

であろう。さらに，

FV が VK に対するように VR が VX に対し

(円の中の長方形 KVR，FVX は等しいから)，そして

VR が VX に対するように VA が VB に対する

ことを証明するであろう。それゆえ，一方では， 9

FV が VK に対するように VA が VB に対する

であろう。それゆえ，長方形 KVA は与えられた長方形 FVB に等しい。

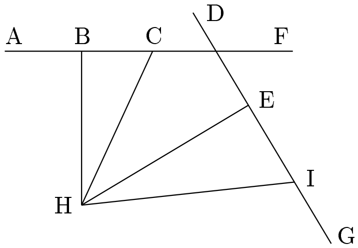
さらに，他方では，

GV が IV に対するように VR が VX に対する

であろう。そしてそれゆえ，長方形 IVR は与えられた長方形 GVX に等しい。

それゆえ，点 V を通って，与えられた広さを囲んでいる，2 つの直線 AV および VK がまっすぐに引かれ，1 つの端点，すなわち VA，が位置において与えられた円に触れるとき，もう 1 つの端点は位置において与えられた平面軌跡，すなわち円 XKF，に接するであろう。

3. 命題 —— もし与えられた点から 2 つの線が，与えられた角度を保って，しかも与えられた比をもつように，引かれ，さらに，1 つの端点が位置において与えられた平面軌跡に触れるならば，もう 1 つの端点も触れるであろう。



はじめに，与えられた点を H，そして位置において［与えられた］直線を AF とすると，それに対して下ろされた垂線 HB が与えられるであろう。角 BHE が与えられた角に等しくなり，BH が HE に対して与えられた比にあるとしよう。位置において直線 HE が，そして点 E が与えられるであろう。点 E から直線 HE に対して立てられた無限の垂線 DEG が位置において与えられるであろう。直線 AF 上に任意の点，例えば C，がとられ，HC が結ばれて，角 CHI が与えられた角に等しくなるとしよう。私は，直線 HC は HI に対して与えられた比にある，と断言する。

なぜならば。角 BHE，CHI は等しいから，共通の CHE が取り去られた，角 BHC，EHI は等し
いであろう。そして，B および E における角は直角である。それゆえ，三角形 HBC，HEI は相似 10
であり，

HB が HC に対するように HE が HI に対し，

入れ換えて，

HB が HE に対するように HC が HI に対する

ことになり，［これらは］与えられた比をもつ。

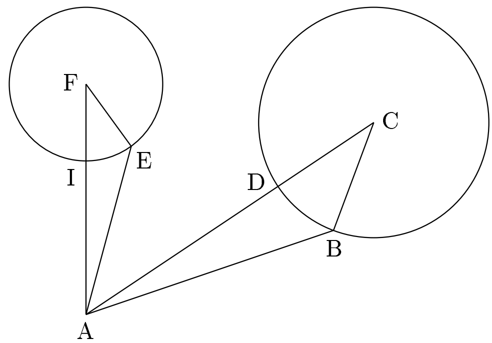
それゆえ，与えられた点 H から引かれた 2 つの線 HC，HI が与えられた角 CHI をもち，さらに与えられた比にあって，一方，例えば HC，が点 C において位置において与えられた直線に触れるとき，他方の端点も，位置において与えられることが証明された，平面軌跡，例えば直線 DG，に

触れるであろう。

しかし，円が接せられるとしよう。［与えられた］点を A，位置において与えられた円を IE，その中心を F としよう。FA が結ばれ，［それが］I において円を切断するとし，そして，角 IAD が与えられた［角］に，IA の AD に対する比が与えられた［比］に等しくなるとすると，AD が位置において［与えられ］，そして点 D が与えられるであろう。［AD が］延長されて，

IA が AD に対するように IF が DC に対する

ようになるとしよう。C を中心として，円 DB が描かれると，それが位置において与えられることは明らかであり，前の円において任意の点，例えば E，がとられ，EA が結ばれて，第 2 の円上の点を B として，［角］EAB が与えられた角に等しくなるとしよう。私は，AE の BA に対する比が与えられた比にある，と断言する。



FE，BC が結ばれるとしよう。私たちは，上のように，角 FAE，CAB の同等性，および
11 三角形 FAE，CAB の相似性を —— 既に前の命題において，そしてその第 2 の図によって示されたのと同じ方法によって —— 証明するであろう。すると，

AF が EA に対して

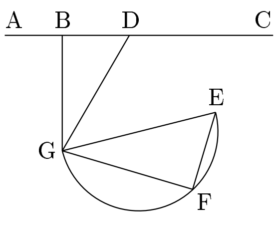
AC が AB に対するように

なるであろうし，入れ換えて，

AF が AC に対するように，すなわち AI が AD に対するように，AE が AB に対する

であろう。ゆえに，AE の AB に対する比が与えられるであろうし，命題の意味ばかりでなく帰結も明らかである。

4. 命題 —— もし与えられた点から 2 つの線が，与えられた角度を保って，しかも与えられた広さを囲むように，引かれ，さらに，1 つの端点が位置において与えられた平面軌跡に触れるならば，もう 1 つの端点も触れるであろう。



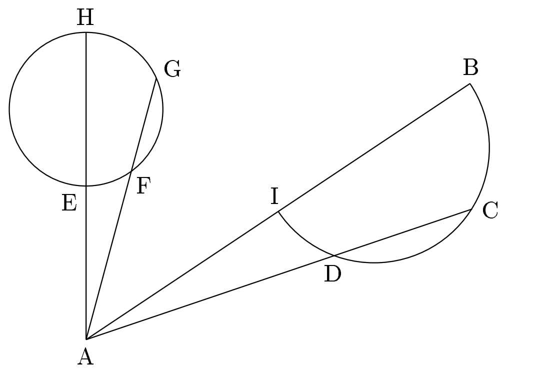
与えられた点を G，位置において与えられた直線を AC とし，それに対して垂線 GB が下ろされるとしよう。［角］BGE が与えられた角，GE が掛けられた BG による［積］が与えられた広さであるとしよう。GE の上に半円 GEF が描かれ，位置において与えられた直線上にとられた任意の点，例えば D，によって，DG が結ばれ，［角］DGF が与えられた角と等しくなるとしよう。私は，GF が掛けられた DG による長方形が与えられた［積］に等しい，と断言する。

FE が結ばれるとしよう。私たちは，前述の命題におけるように，角 BGD，EGF の同等性を証明するであろう。しかし，B および F における直角は等しい。それゆえ，三角形 BGD，EGF の相似性が見過ごされることはなく，長方形 BG 掛ける GE および GD 掛ける GF の同等性も命題の真実性も［見過ごされることはない］。

それゆえ，もし ⋯⋯。

しかし，与えられた点を A，位置において与えられた円を HGE としよう。それ自身の中心を
12 通って，円周を点 E，H で切断している［直線］AEH が引かれるとしよう。与えられた角を HAB，

与えられた広さを AI が掛けられた HA による，あるいは AB が掛けられた EA による，長方形としよう。直線 IB の上に描かれた半円 —— それが位置において与えられることは明らかである —— は問題を満足する。確かに，例えば，GFA が引かれ，角 GADC が与えられた［角］に等しくなるとすると，私は，長方形 GAD あるいは FAC は与えられた［積］に等しい，と断言する。



なぜならば。長方形 HAI，EAB が等しくされるとき，

HA が AE に対するように
AB が AI に対する

であろう。さらに，より上の方の命題の推論により，角 HAG，BAC の同等性は明らかであり，前の命題により，容易に

HA が GA に対するように
BA が AC に対する

ことが導かれるであろう。しかし，

HA が GA に対するように FA が AE に対し，

ゆえに，

FA が AE に対するように BA が AC に対し，

長方形 FAC は与えられた長方形 BAE に等しい。

次いで，

BA が AC に対するように AD が AI に対し，

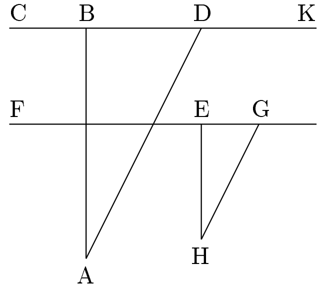
長方形 GAD は与えられた長方形 HAI に等しい。それゆえ，提示されたそれぞれの部分から［命題は］成り立つ。

それゆえ，もし ……。

この場合において，私たちは点 A を位置において与えられた円の外にとったが，一方，第 2 の命題の第 2 の場合においては［与えられた点を］円の内部に置いた。 13

前の 4 つの命題は 1 つの与えられた点を要求するが，以下［の命題］では 2 つ［の与えられた点を要求する］。

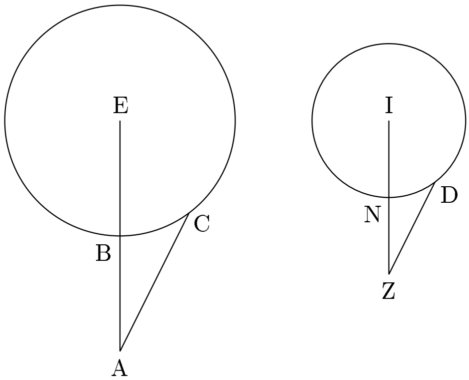
5. 命題 —— もし与えられた 2 つの点から 2 つの線が平行に引かれ，それらが与えられた比をもち，さらに，1 つの端点が位置において与えられた平面軌跡に触れるならば，もう 1 つの端点も触れるであろう。



与えられた 2 つの点を A および H，位置において与えられた直線を CBDK とし，それに対して垂線 AB が下ろされ，それに平行な HE が引かれ，AB の HE に対する比が与えられた［比］にあるとしよう。点 E，［および］そこを通って HE に垂直に，しかも位置において与えられた直線に平行に引かれた［直線］FEG が与えられるであろう。私は，点 A，H から引かれ，そして，位置において与えられた直線 CD，FG によって制限された，すべての平行な［直線］は AB が HE に対する与えられた比にある，と断言する。

なぜならば，角 BAD，EHG，および B および E における直角は［それぞれ］等しく，ゆえに，三角形 BAD，EHG は相似であり，残り［の部分の証明］は容易だからである。

それゆえ，与えられた 2 つの点 A および H から，与えられた比にあるように，平行な AD，HG が引かれたとき，それらのうちの AD は位置において与えられた直線に［制限され］，HG は位置において与えられた直線に，そしてぞれゆえ平面軌跡に［，制限される］であろう。

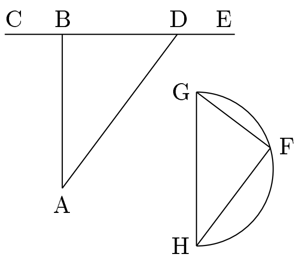


この図［左図］において，与えられた点は A および Z で，位置において［与えられた］円は BC であり，その中心は E であるとしよう。B において円と出会っている，AE が結ばれ，それに平行な ZN が引かれ，AB の ZN に対する比が与えられた［比］に等しくなるとしよう。ZN が I まで延長され，BE の NI に対する比もまた与えられた［比］に等しくなるとしよう。中心を I，距離を IN として描かれた円は位置において与えられるであろうし，そして，問題を満足するであろう。

14 なぜならば。平行な AC，ZD が引かれ，点 C，D で円に出会うとすると，AC の ZD に対する比は与えられた［比］に等しいであろう。なぜならば，既にこの命題の最初の場合で証明されたように，角 BAC，NZD は等しく，残りは第 3 の命題の第 2 の場合 (epitagma) が保証するだろうからである。

ἐπίταγμα : *injunction*, *command*, the *orders* or *demands* of a courtesan; *condition of a treaty*; (Math.) satisfy the *required conditions*, *problem*; *tribute*; *reserve* or *subsidiary force*; *detachment of*

6. 命題 —— もし与えられた 2 つの点から，与えられた広さを囲んでいる，2 つの平行な［直線］が引かれ，さらに，1 つの端点が位置において与えられた平面軌跡に触れるならば，もう 1 つの端点も触れるであろう。



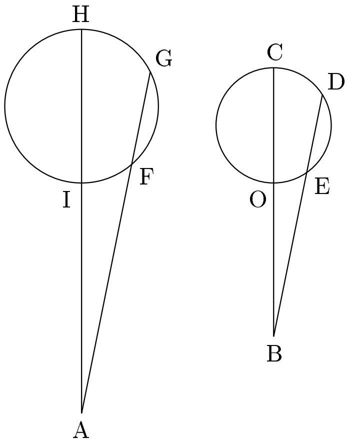
与えられた 2 つの点を A および H，位置において与えられた直線を CE とし，それに対して垂線 AB が下ろされ，それに平行な HG が引かれ，そして，AB および HG による長方形が与えられた長方形に等しいとすると，直線 HG が与えられ，その上に描かれた半円 HFG は問題をなし遂げるであろう。

15 なぜならば。平行な AD，HF が任意に引かれ，GF が結ばれると，より上の証明から，直角三角形 BAD，GHF が相似であることは明らかであり，それゆえ，HF が掛けられた AD による長方形は HG が掛けられた BA による与えられた［積］に等しいことが結論づけられるであろう。

それゆえ，2 つの点から ……。

第 2 の場合において，与えられた点を A および B，そして，位置において［与えられた］円を IFGH とし，その中心を通って AIH が通過し，それに平行な BC が引かれ，BC が掛けられた AI

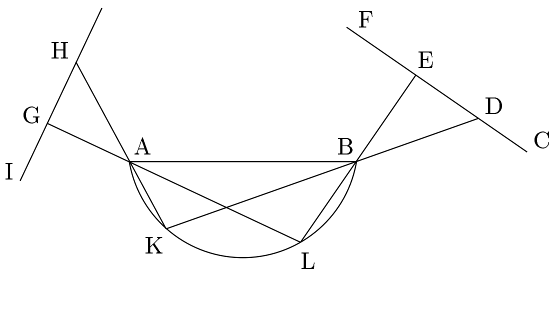
による長方形が与えられた［積］に等しい，そして同様に BO が掛けられた AH による長方形が［与えられた積に］等しいとしよう。直線 OC の上に描かれた半円が命題を明らかにする。



なぜならば。平行な AFG, BED が引かれると, 角 HAG, CBD は等しいであろうし，BE が掛けられた AG による長方形は与えられた［積］に等しく，そして同様に BD が掛けられた AF による長方形は［与えられた積に］等しいであろう。それらが異なっていないことは，第 4 の命題の第 2 の場合において明らかにされたように，証明される。

第 4 の命題より，$AG \times BE = AH \times BO$ であるから，$AH : AG = BE : BO$
同じく，$AF \times BD = BC \times AI$ であるから，$AF : AI = BC : BD$
一方，方べきの定理から，$AH \times AI = AG \times AF$ より，$AH : AG = AF : AI$
従って，$BE : BO = AH : AG = AF : AI = BC : BD$ となる。
ところで, 仮定から, $AI \times BC = AH \times BO$ は与えられた積であるから, $AG \times BE = AH \times BO = AI \times BC = AF \times BD$ はすべて与えられた積になる。

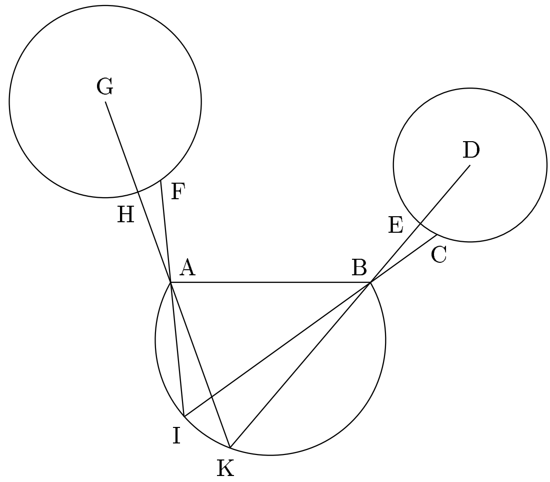
7. 命題 —— もし 2 つの線が与えられた 2 つの点から，与えられた角度を保って，しかも与えられた比をもつように，引かれ，さらに，1 つの端点が位置において与えられた平面軌跡に触れるならば，もう 1 つの端点も触れるであろう。



与えられた 2 つの点を A および B，位置において［与えられた］直線を IGH としよう。BA の上に，与えられた［角］に 16
等しい角を含んでいる，円の一部 ALB が描かれるとしよう。点 A から直線 IH に垂線 AG —— それは円周まで延長されると L において［円と］出会う —— が引かれ，LBE が延長され，AG が BE に対して与えられた比になるとしよう。BE に垂直に FEDC が引かれ，円周の一部における任意の点，例えば K，がとられ，そこから点 A および B を通って直線 KAH，KBD が引かれ，直線 IH，FC と点 H および D において出会うとしよう。私は，AH は BD に対して AG が BE に対する与えられた比にある，と断言する。

なぜならば。そのような状態であるとき，三角形 AGH，BED は相似であろうし，それゆえ，角 GAH，EBD，そして頂点における［角］KAL，KBL も，等しいであろう。そして，同じ円の一部に固執するとき同じ状態であり，そして，解析から総合に戻ることは容易である。

それゆえ，与えられた 2 つの点 A および B から，与えられた角度を保っていて，しかも［与えられた］比をもつように，引かれた 2 つの直線 AH，BD があり，AH 自身の端点が位置において与えられた直線 IH に触れるとき，BD の端点も，位置において与えられることが証明された，直線 FC に触れるであろう。

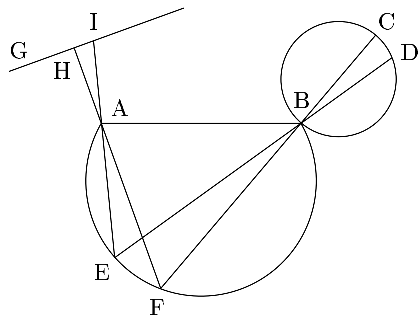


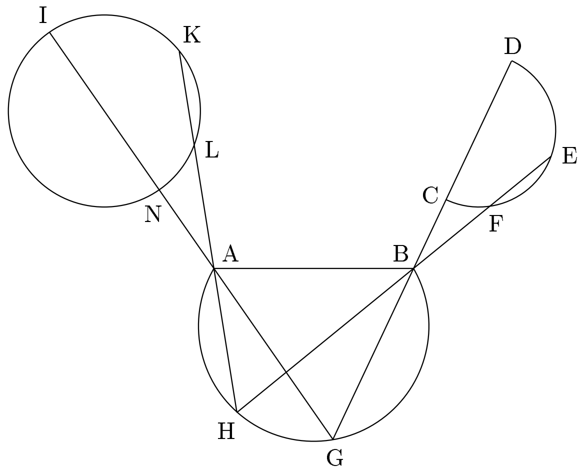
しかし，与えられた点を A，B，位置において［与えられた］円を HF としよう。直線 AB の上に，与えられた［角］に等しい角を含んでいる，円の一部 AKB が描かれるとしよう。円 HF の中心を G としよう。AHG が結ばれ，［円の］一部と K において出会うまで延長され，そして，KBE が引かれ，AH の BE に対する比が与えられた［比］であるとしよう。BE が，HG の DE に対する比が同様に与えられた比にあるまで，延長されるとしよう。中心を D として描かれた円は位置において与えられるであろうし，［それは］問題の解を与えるであろう。

なぜならば。IAF，IBC が引かれると，A および B における角は等しいであろうし，命題の残
17 りは骨の折れるものではない。そして，必然的に，AF の BC に対する比が与えられた比にあること，そしてそれどころか，円周のへこんだ［部分］まで延長されたとしても同じことが成り立つこと，は明らかである。

それゆえ，……。

8. 命題 —— もし与えられた 2 つの点から 2 つの線が，与えられた角度を保って，しかも与えられた広さを囲むように，引かれ，さらに，1 つの端点が位置において与えられた平面軌跡に触れるならば，もう 1 つの端点も触れるであろう。





与えられた 2 つの点を A および B，位置において［与えられた］直線を GI としよう。AB の上に，与えられた角を含む，円の一部が描かれるとしよう［上左図］。GI に対して引かれた垂線 AH が F に結合され，結ばれた FB が　C まで延長され，そして，BC が掛けられた AH が与えられた広さであるとしよう。直線 BC の上に描かれた円が［命題に］提示されるものになるであろう。

なぜならば。［円の］一部に任意の点 E がとられ，EAI，EBD が結ばれると，BD が掛けられた
18 AI による長方形は与えられた［積］に等しいであろう。証明は［既に］述べられた他の場合と異ならない。

しかし，与えられた 2 つの点を A，B，位置において与えられた円を IKL とし，AB の上に，与えられた［角］に等しい角を含む，円の一部が描かれるとしよう［上右図］。［円 IKL の］中心を通って直線 ANI が引かれ，［それが］G まで延長され，そして，結ばれた GB が延長されて，BC が掛けられた AI による長方形が与えられた［積］に等しくなるとすると，BD が掛けられた AN による長方形も同様に［与えられた積に］等しくなる。CD の上に描かれた半円が命題を満足するであろう。

すなわち，［円の一部において］任意の点，例えば H，がとられ，残りは，上の作図のように，図にあるとおりとすると，BF が掛けられた AK による長方形は与えられた［積］に等しく，そして，BE が掛けられた AL による長方形も同様に［与えられた積に等しい］であろう。証明は前述のことと異ならない。

それゆえ，命題は成り立ち，そして，このことによって，アポロニウスまたはパッポスの元の命題が再現されることは明らかである。

さらに，私たちがただ半円に関してだけ表現した場合が全体の円に関してその位置をもつこと，しかもそのうえ，与えられたさまざまな状況から，先行する容易な仕事に悩まされることなく，そして簡単な計算によって導かれるであろう，多くの場合が起こること，が観察されるであろう。

パッポスは［次のことを］付け加える。［すなわち,］直線の中の第 2 の［端点］が触れる平面軌跡は「ときには同じ種類のもの，そしてときには異なる［種類の］もの」である。このことは例えば最初の命題においては同じ種類のものであることから明らかである。なぜならば。もし前のものが直線に［触れる］ならば後のものも同様に直線に［触れるの］であり，もし円ならば同じく円で 19
ある。さらに，第 2［の命題］の前の部分および他のいくつかの場合では，それは異なる種類のものである。

次いで，彼はときどき「同様に直線に対して，ときには反対の方法によって」が置かれることを付け加える。軌跡において，感情を入れることを許さない，「直線に対して」という言葉は消し去られるであろうと私は思うし，それゆえ，私は軌跡を，ときには第 2 の軌跡ははじめのものと反対の方法によって主張されるべきである，と理解する。例えば，もしはじめのものが円の凸部に対するものならば第 2 のものは凹部に対するものである，など，このことの例は前の方の命題が与えるであろう。

命題 II

もし位置において与えられた直線の 1 つの端点が与えられるならば，もう 1 つ［の端点］は位置において与えられた円周のへこんだ部分に触れるであろう。

これらの言葉がもしそのままに読まれるとするならば，命題は偽である。それゆえ，軌跡においては，例えば「位置において与えられた」は「大きさにおいて与えられた」に，置き換えられるであろう。そして，その意味は「円の直径および中心が与えられたとすると，直径の端点は位置において与えられた円［の上］にあるはずである」であろう。このことの真実性はそれだけで明らかなのだから，私たちはどうしてより長くここに留まるべきであろうか？

命題 III

もし与えられた 2 つの点から，与えられた角度を保って，［引かれた 2 つの］直線が結び付けら

れるならば，それら自身の共通な点は位置において与えられた円周のへこんだ部分に触れるであろう。

この命題はそれだけで明らかである。なぜならば，2 つの点が結んでいる直線の上に，位置において与えられる円が与えられた角度を含むことはユークリッドが『原論』の中で示していたからである。

『原論』第 3 巻命題 21
「円において同じ切片内の角は互いに等しい。」(［8］p.65)

命題 IV

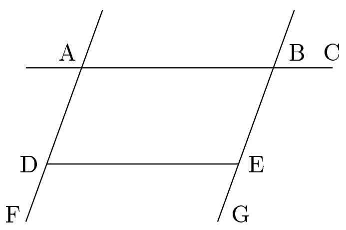
もし大きさにおいて与えられた広さの三角形の，位置および大きさにおいて与えられた底線があるならば，その頂点は位置において与えられた直線に触れるであろう。

確かに，与えられた底線に平行な［直線］を，［そして証明の残りの］すべてを，『原論』第 1 巻における発見によって，あなたは容易に導くであろう。

『原論』第 1 巻命題 37
「同じ底辺の上にありかつ同じ平行線の間にある三角形は互いに等しい。」(［8］p.26)
『原論』第 1 巻命題 38
「等しい底辺の上にありかつ同じ平行線の間にある三角形は互いに等しい。」(［8］p.27)
『原論』第 1 巻命題 39
「同じ底辺の上にありかつ同じ側にある等しい三角形は同じ平行線の間にある。」(［8］p.28)
『原論』第 1 巻命題 40
「等しい底辺の上にありかつ同じ側にある等しい三角形は同じ平行線の間にある。」(［8］p.28)

命題 V

もし，大きさにおいて与えられた，および何らかの等しい距離に置かれた位置において与えられた，［2 つの］直線があり，1 つの端点が位置において与えられた直線に触れるならば，もう 1 つの端点も位置において与えられた直線に触れるであろう。

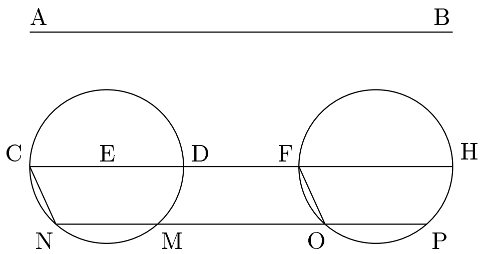


大きさにおいて与えられた直線を DE，そして等しい距離に置かれた位置において与えられた直線を AC とし，1 つの端点，例えば D，が位置において与えられた直線 AF に触れるとしよう。もし点 E を通って AF そのものに平行な［直線］BEG が引かれたならば，命題は成り立つであろう。

なぜならば，これら 2 つの平行［な直線］および位置において与えられた等しい距離に置かれた直線 AC の間に切り離されたすべての直線は互いに等しいだろうからである。作図自体は明らかである。

それゆえ，もしどのようなものであれ一方の端点が直線 AF にあるならば，命題が望むように，他方は BG にあるであろう。さらに，円にまで拡張することは軽微な苦労によって許される。

すなわち，位置において与えられた［直線］を AB とし，それが大きさにおいて与えられた直線 NO と等しい距離に置かれ，その［上の］点 N が位置において与えられた円の周 CNM［の上］にあるとしよう。私は，点 O が位置において与えられた円［の上］にある，と断言する。



円 CNM の中心を E とし，NO 自身に平行に引かれた直径が直線 CF が与えられた NO に等しくされるまで伸ばされるとすると，位置においてそして大きさにおいて直線 CF が与えられるであろう。FH が CD に等しくなるように延長されるとしよう。FH の上に描かれた円が命題を明らかにするであろう。

なぜならば。点 O はその円周自身［の上］にあるであろう。なぜならば，点 O が円 FOP［の
上］にあるとすると，等しくしかも平行な CF，NO を結ぶとすると，直線 CN，FO は等しくしか 21
も平行だからである。それゆえ，角 NCD，OFH は等しいであろう。確かに，直線 CD，FH は等しく，そして直線 NM，OP から均等に離れているのだから，そのようになる。

それゆえ，より一般的なパッポスの命題は次のように表現することができるであろう。

もし，大きさにおいて与えられた，および何らかの等しい距離に置かれた位置において与えられた，［2 つの］直線があり，1 つの端点が位置において与えられた平面軌跡に触れるならば，もう 1 つの端点も位置において与えられた平面軌跡に触れるであろう。

命題 VI

もし任意の点から，位置において与えられた平行なあるいは互いに出会う，2 つの直線に対して，与えられた角度でもって，あるいは与えられた比をもっている，［2 つの］直線が引かれ，あるいはそれらの 1 つが，それと同時にもう 1 つの与えられた比をもつものに関して，与えられたならば，その点は位置において与えられた直線に触れるであろう。

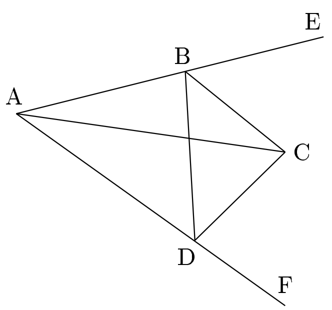
フェルマは次の 3 つの場合を挙げている。

(1-a) 互いに出会う，位置において与えられた 2 直線に，与えられた角度でもって，与えられた比をもつ 2 直線が引かれる場合

(1-b) 平行な，位置において与えられた 2 直線に，与えられた角度でもって，与えられた比をもつ 2 直線が引かれる場合

(2) 互いに出会う，位置において与えられた 2 直線に，与えられた角度でもって 2 直線が引かれ，一方が与えられた比に関して与えられる場合

この命題には 2 つの部分があり，それらの前［の部分］はこれである。

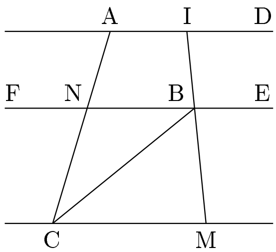


位置において与えられた，点 A において出会っている，2 つの直線を AE，AF とし，そして，点 C から直線 CB，CD が，［それぞれ］与えられた角 CBA，CDA でもって，下ろされ，そして，直線 BC，CD が与えられた比にあるとしよう。私は，点 C が位置において与えられた直線［の上］にある，と断言する。

AC，BD が結ばれるとしよう。四角形 ABCD の中に 3 つの三角形 ABC，ADC，BAD が与えられる。それゆえ，角 BCD が与えられる。さらに，仮定から，BC の CD に対する比が与えられる。ゆえに，三角形 BDC が形において，および角 CBD，CDB が与えられる。

それゆえ，残りの［角］ABD，ADB が，そしてそれゆえ，三角形 ABD が形において与えられ 22

る。それゆえ，AB の BD に対する比が与えられる。しかし，証明から BD の BC に対する比が与えられる (三角形 BDC が形において与えられることが証明されたのだから)。ゆえに，AB の BC に対する比が与えられる。さらに，BA が位置において，および点 A が与えられる。それゆえ，直線 AC が位置において与えられ，その上に任意の点がとられ，そこから，［それぞれ］与えられた角度でもって，直線が与えられた直線に対して下ろされると，下ろされた［直線］はつねに与えられた比にあることが証明されるであろう。



もう 1 つの場合は，与えられた直線が平行である場合である。直線 CA，CB が，［それぞれ］与えられた角 CAD，CBF でもって，与えられた比にあるとしよう。角 CNB が与えられる。確かに，［直線 AD，NB が］平行なために，それは与えられた［角］CAD に等しい。それゆえ，三角形 CNB が形において，および CN の CB に対する比が与えられる。さらに，仮定から，CB の CA に対する比が与えられる。ゆえに，CN の CA に対する比が与えられ，そしてそれゆえ，点 C が位置において与えられた直線［の上］にあることは容易に証明される。

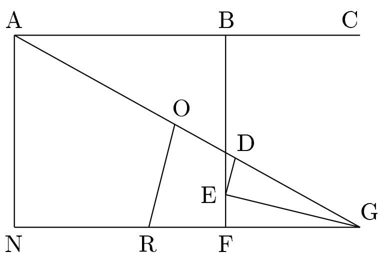
23 「作図」—— 任意の点，例えば B，を通って，垂線 IBM が貫かれると，IB が与えられるであろう。

AN が NC に対するように IB が BM に対する

としよう。点 M を通って引かれた与えられた 2 つの平行な［線］は問題を満足させるであろうし，証明は面倒なものではない。

それゆえ，もし任意の点から，位置において与えられた，平行なあるいは互いに出会う，2 つの直線に対して，与えられた角度でもって，与えられた比をもつ，［2 つの］直線が引かれるならば，その点は位置において与えられた直線に触れるであろう。

「第 2 の」部分は次のようである。



点 A において出会っている，直線 AC，AG が与えられるとしよう。直線 AC の上に与えられた角度 CAN でもって AN が置かれるとしよう。AN が与えられた［直線］に等しくなるとし，そして，AC そのものに平行な NG が引かれるとしよう。もう 1 つの与えられた角を ROG としよう。この［命題の］最初の部分によって，直線 GE が引かれ，その上に任意の点，例えば E，がとられ，RO，AN 自身に平行な直線 ED，EF が与えられた比にあるとしよう。上の証明により，GE が位置において与えられるであろう。FE が B まで延長されるとしよう。FB が大きさにおいて与えられるであろうし，さらに，平行であることから，［それは］与えられた AN に等しい。

それゆえ，直線 GE［の上］に任意の点，例えば E，をとり，そこから直線 AC，AG に与えられた角度でもって直線 ED，EB を下ろしたとすると，直線 BE は，ED に対して与えられた比をもつ，EF とともに与えられるであろう。これが命題が望むことである。

それゆえ，もし任意の点から，位置において与えられ，互いに出会う，2 つの直線に対して，与えられた角度でもって，2 つの直線が引かれ，［そして］それらの 1 つが，それと同時にもう 1 つの

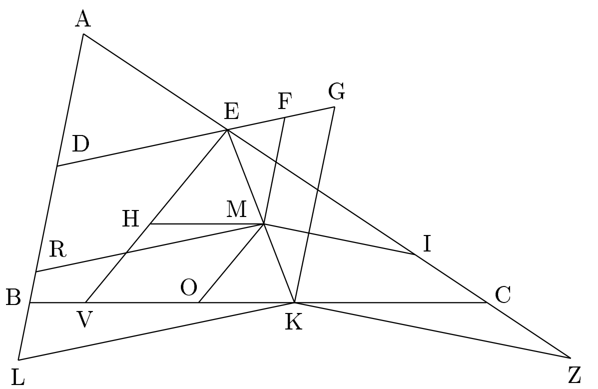
与えられた比をもつものに関して，与えられたならば，その点は位置において与えられた直線に触 24
れるであろう。

命題 VII

もし位置において与えられた任意個数の直線があるとし，そして，それらに対して任意の点から与えられた角度でもって直線が引かれ，さらに，与えられた線および引かれた［線との積］が結合された 1 つの与えられた線およびもう 1 つの引かれた［線の積］とともに結合される［2 つのものの和］が，与えられた［線］および別の引かれた［線との積］それにそれ以外［の積］が結合される［和］に等しければ，その点は位置において与えられた直線に触れるであろう。

この命題は前［の命題］の拡張であり，2 つの線について先に命題 VI の最初の部分において証明されたことがここでは任意個数の［平面］軌跡におけるものとして提示されている。

位置において与えられた 3 つの直線 AB，BC，CA およびそれらからつくられる三角形が与えられるとしよう。［その三角形 ABC の中に］見出されるであろう直線が，例えば，EK であり，その上に任意の点，例えば M，がとられ，そこから直線 MR，MO，MI が与えられた角 MRA，MOB，MIA でもって引かれ，それら［のうち］の OM および MI の和が MR に対して与えられた比にあるとしよう。



前の命題の最初の部分によって，その上に任意の点がとられ，そこから直線 AB，BC に対して，与えられた比にあるように，引かれるであろ 25
う，直線［MR，MO］が見出されるとすると，求められていた直線［EK］が位置において与えられるであろう。それゆえ，そこにおいて AC と出会う点が与えられるであろう。それを E とし，そこから EV，ED が MO，MR に平行に引かれるとしよう。ゆえに，そのつくり方から，VE は ED に対して与えられた比をもつであろう。同じ方法によって，直線 AB，AC がとられると，そこから与えられた角度でもって，確かに MR，MI に平行に，引かれた KL，KZ は与えられた比にあるであろう。それゆえ，同様に，KZ は KL に対して与えられた比にあるであろう。EK が結ばれるとしよう。その上にとられた任意の点は命題を明らかなものにするであろう。

今つくられたものの中に，例えば，M がとられるとしよう。MF は BA に平行，MH は BC に平行であるとしよう。2 つの OM，MI の和は MR に対して VE が ED に対するように本当に与えられた比にあることが証明されるであろう。

そのうえ，KG が BA に平行であるとしよう。私たちが証明することを意図したことが正しいと仮定されるとしよう。ゆえに，今度は，

MR が ED に対するように 2 つの MI，MO の和が EV に対する

であろう。そして，引かれると［除比の理，交換の理 ($a : b = c : d$ ならば $a : c = b : d$) によって］，

MR および DE の差が DE に対するように，

2 つの OM，MI によるものが EV を超える差が EV に対する

であろう。さらに，MF は BA に平行であるから，EF は直線 MR および DE の差であろうし，MH は BC に平行であるから，EH は直線 VE，MO の差であろう。そしてそれゆえ，直線 IM および EH の差は 2 つの MO，MI によるものが直線 VE を超える超過分に等しくされるであろう。それゆえ，推論によって，

EF が DE に対して直線 IM，EH の差が EV に対する

26 ようであろうし，今度は，

EF は直線 IM，EH の差に対して ED が EV に対する

ようであろう。それゆえ，逆にされると，

直線 IM，EH の差は EF に対して EV が ED に対する与えられた比にある

であろう。

さらに，つくり方から，与えられた 3 つの［直線］EH，EF，MI について，

KE が EM に対するように VE が EH に対し，

そして，さらに，

KZ は MI に対して KE が EM に対する同じ比にあり，

そして，さらに，KG は BA に平行であるから，

GE は EF に対して KE が EM に対する同じ比にある。

それゆえ，3 つの直線 VE，KZ，EG は 3 つの HE，MI，EF の比にある。それゆえ，

2 つの EV，KZ の差が EG に対するように 2 つの MI，EH の差が EF に対する。

しかし，私たちは，2 つの MI，EH の差は EF に対して EV が ED に対する与えられた比をもつことを証明した。それゆえ，2 つの EV，KZ の差は EG に対して EV が ED に対する与えられた比をもち，今度は，

2 つの EV，KZ の差は EV に対して EG が ED に対する

ようであろうし，いっしょに集められると，

KZ は EV に対して GD が ED に対する

ようであろう。しかし，(KG，BA は平行であるから) KL は DG に等しくされる。それゆえ，今度は，

KZ が KL に対するように EV が ED に対する

であろう。確かに，そのような状況であることは，直ちに，つくり方そのものから知られるようになるであろう。

三角形 ABC について, 任意の点 M からそれぞれの辺またはその延長に, ∠MRA, ∠MOB, ∠MIA がそれぞれ与えられた角度になるように，直線 MR，MO，MI が引かれるとき，(MO＋MI) : MR が与えられた比になるとする。
そのような任意の点が直線 AC 上では点 E であるとすると，MI に相当する直線がないことになるから，VE : DE が与えられた比にあることになる。
また，直線 BC 上では点 K であるとすると，KZ : KL が与えられた比にあることになる。
従って，直線 EK 上の任意の点 M について，(MO + MI) : MR = VE : DE = KZ : KL はすべて与えられた比になるから，求められるべき直線は EK である。
ということか。

それゆえ，最も美しい命題の真実性が確定するのであるが，より多くのそして任意個数の線の場

合に対する作図および証明は面倒でもなければ［ここでの場合と］異なってもいない。なぜならば，つねに，2 つの線に関する作図のおかげで 3 つの線に関する問題が解かれるであろうし，3 つの線に関する作図のおかげで 4 つの線に関する問題が解かれるであろうし，4 つ［の線］に関する作図のおかげで 5 つ［の線］に関する問題が解かれるであろうし，そして，まったく同様でありしかも 27
一様な方法によって［解かれるであろう］からである。

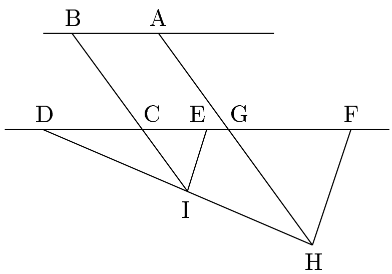
命題 VIII そして最後の［命題］

もし何らかの点から位置において与えられた平行な直線に与えられた角度でもって，その与えられた直線自身の上の点において止まり，［与えられた］比をもつかあるいは与えられた広さを囲むかのいずれかである，直線が引かれ，引かれた［線］自身による平方 (species)［の和］かあるいは平方の超過分［差］のいずれかが与えられた広さに等しいとするならば，その点は位置において与えられた直線に触れるであろう。

この命題には，もし正しければ，4 つの部分があるが，私たちはただ「与えられた比において」だけ正しいことを見出していた。それゆえ，残りは 2 つの［線］によって張られた広さについて，およびそれら自身による平方の和または差について，が相当するはずであり，そして，それらはあたかも虚偽のものであるかまたは他の場所からここに動かされたものであるかのように投げ返されるべきである。

それゆえ，次のように誤りを正された定理が提示されることになる。

もし何らかの点から位置において与えられた平行な［直線］に与えられた角度でもって，その与えられた直線自身の上の点において止まり，与えられた比をもっている，直線が引かれるならば，その点は位置において与えられた直線に触れるであろう。



「作図」は次のように進行するはずである。与えられた平行な［直線］を AB，GC とし，それらの上の与えられた点を A および F，与えられた角の 1 つを BAH，もう 1 つを GFH としよう。点 A および F，そしてそこにおける角が与えられているから，直線 AH，FH が位置において与えられ，それゆえ，それらが出会う点 H が与えられるであろう。さらに，そこにおいて AH が平行な［直線のうちの 1 つ］GC を切断する，点 G が与えられるであろう。直線 GF が点 28
D において，GD の DF に対する比が与えられた比にあるように，切断されるとすると，点 D が与えられるであろう。DH が結ばれると，それゆえ，DH は位置において与えられるであろう。私は，直線 DH が命題を明らかなものにする，と断言する。すなわち，その上に任意の点，例えば I，がとられ，そこから IB，IE が与えられた角度でもって引かれると，与えられた点 A で止められた AB は与えられた点 F で止められた EF に対して GD が DF に対する比にある。

BI が平行な［直線のうちの 1 つ］GF を C において切断するとしよう。つくり方から，［ともに］与えられた角度，すなわちそれらは HAB に等しい，でもって下ろされていたのだから，IB は HA と平行であろう。さらに，IE は HF に平行であろう。それゆえ，GC は，平行であることから，AB に等しくされる。

GC に対して EF が対するように GD が DF に対する，

そして，入れ換えて，

GC が GD に対するように EF が DF に対する

ことが証明されるであろうことが残っている。しかし，次のことは明らかである。すなわち，

HI が HD に対するように GC が GD に対する，

および，同じく，

HI が HD に対するように EF が FD に対する。

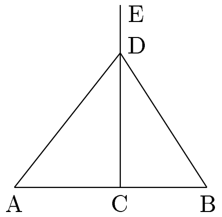
それゆえ，GC は EF に対して与えられた比にあることが明らかになる。

前の命題のようにこの［命題］にも多くの場合がある。それらを見出し，そして付け加えることは容易であるのだから，私たちはなぜここにより長く留まるべきであろうか？

第 2 巻 29

命題 I

もし与えられた［2 つの］点において直線が曲げられ，そして，それら自身による［平方の］差が与えられた広さになるとするならば，その点は位置において与えられた直線に触れるであろう。



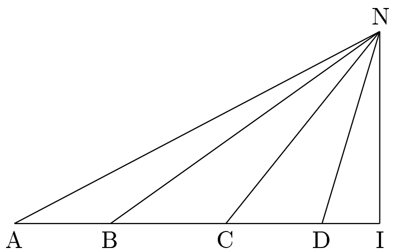
与えられた 2 つの点を A および B とし，そして，任意の与えられた広さは AB の平方より小さいとしよう。AB が C において分離され，AC の平方が CB の平方に与えられた広さだけまさるとし，そして，無限の垂線 CE が引き上げられ，その上に任意の点 D がとられ，
DA，BD が結ばれるとしよう。私は，AD の平方が DB の平方に与 30
えられた［広さだけ］まさる，と断言する。

確かに，AD の平方が DB の平方にまさる分は AC の平方が CB の平方にまさる分と同じであることは明らかである。

もし与えられた広さが AB の平方より大きければ，点 C は直線 AB の外部に落ちるであろう。

この命題は次の 2 つに拡張することができる。

直線上の与えられた 4 つの点を A，B，C，D とし，AB が CD に等しいとしよう。別の任意の点，例えば N，がとられ，4 つの直線 NA，NB，NC，ND が結ばれるとしよう。私は，AN，ND の 2 つの平方［の和］は BN，NC の 2 つの平方［の和］より BD が掛けられた AB による長方形の 2 倍だけまさる，と断言する。



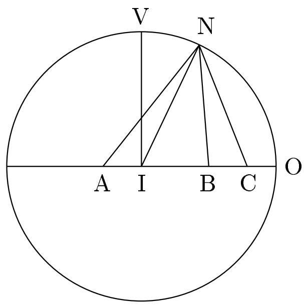
なぜならば。垂線 NI が引かれると，最初に，AD の外側の点 I に落ちるであろう。それゆえ，AN，ND の平方［の和］が BN，NC の 2 つの平方［の和］を超える超過分が，NI の平方はすべてに共通であるから，AI，ID の 2 つの平方［の和］が BI，CI の 2 つの平方［の和］を超えるものであることは明らかである。しかし，AI，DI の 2 つの平方［の和］は，［ユークリッド『原論』の］第 2 巻命題 4 により，DI の平方の 2 倍，AD の平方，および長方形 ADI の 2 倍［の和］に等しくされる。一方，BI，CI の平方［の和］は，同じ命題により，DI の平方の 2 倍，BD，CD の平方［の和］，および DI が掛けられた BD による長方形の 2 倍，および DI が掛けられた CD［による長方形］の 2 倍［の和］ —— あるいは，これら 2 つの長方形の代わりに，AB は CD
に等しいことにより，1 つの長方形 AD 掛ける DI の 2 倍 —— に等しくされる。それゆえ，AI， 31
ID の平方［の和］が BI，CI［の平方の和］を超える超過分は AD の平方が BD，CD —— または AB —— の平方［の和を超える超過分］と同じである。しかし，［『原論』の］第 2 巻命題 4 により，AD の平方は AB，BD2 つの平方［の和］を BD が掛けられた AB による長方形だけまさる。ゆえに，命題は成り立つ。

その他の場合は，この命題においても以下の諸命題においても，付け加えることはしない。なぜならば，それは容易なことではあるが，退屈なことだからである。

『原論』第 2 巻命題 4
「もし線分が任意に 2 分されるならば，全体の上の正方形は，二つの部分の上の正方形と，二つの

部分によってかこまれた矩形の 2 倍との和に等しい。」(［8］p.37)

もし定められた直線の上の 3 つの点において直線が曲げられ，そして，［それらのうちの］2 つのものの平方［の和］が第 3 のもの［の平方］より与えられた広さだけ大きければ，その点は位置において与えられた円周に触れるであろう。



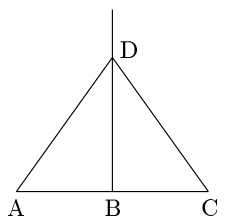
直線の上の与えられた 3 つの点を A，B，C とし，与えられた任意の広さが長方形 ABC［AB × BC］の 2 倍より大きいとしよう。AI が BC に等しくなり，与えられた広さが長方形 ABC の 2 倍および IV の平方［の和］に等しいとしよう。中心 I，距離 IV で円 VNO が描かれ，その円周の上に任意の点，例えば N，がとられ，与えられた点に対して NA，NB，NC が結ばれるとしよう。私は，2 つの AN，NC の平方［の和］が NB の平方より与えられた広さだけまさる，と断言する。

なぜならば。IN が結ばれるとしよう。ゆえに，先の命題から，AN，NC の 2 つの平方［の和］が IN，BN の 2 つの平方［の和］および長方形 ABC の 2 倍に等しいことは明らかである。ゆえに，AN，NC の 2 つの平方［の和］は NB の平方より IN の平方および長方形 ABC の 2 倍だけまさる。そして，命題が成り立つ。

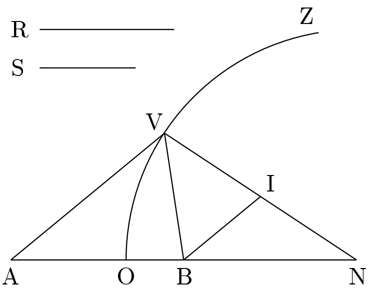
命題 II

もし 2 つの点において直線が曲げられ，そして，それらが与えられた比にあるならば，その点は直線あるいは円周のいずれかに触れるであろう。

32



与えられた 2 つの点を A および C とし，そして，はじめに与えられた比は均等なものであるとしよう。AC が B において半分に分離され，そして，垂線 BD が引き上げられるとしよう。その上に任意の点，例えば D，がとられると，直線 AD，DC が等しいことは明らかである。



しかし，与えられた比が不均等であるとし，そして，2 つの与えられた点を A，B とし，［与えられた］比を R が S に対する［比］としよう。

R の平方が S に平方に対するように

AN が NB に対する

ようになるとしよう。AN，NB の間に中項 NO がとられ，その距離で円 OVZ が描かれ，そして，その円周自身の上に任意の点，例えば V，がとられ，VA，VB が結ばれるとしよう。私は，それらは R が S に対する与えられた比にある，と断言する。

ここに得られる円 OVZ が，こんにち，アポロニウスの円と呼ばれているもの。

なぜならば。VN が結ばれ，VA に平行な［線］を BI とすると，

AN が NO または NV に対するように NV が NB に対し，

そして，角 ANV に関しては同じである。それゆえ，2 つの三角形 ANV，BVN は相似であり，角

VAB は角 BVI に等しい。しかもそのうえ，［AV，BI が］平行であるのだから，［角］AVB，VBI は等しい。ゆえに，三角形 AVB，VBI は相似であり，

VB が BI に対するように AV が VB に対し，

そして， 33

VB が BI に対するように NV が NB に対し，そして，AN が NV に対する。

それゆえ，

VB の平方が BI の平方に対するように，すなわち，AN が NB に対するように，

すなわち，R の平方が S の平方に対するように，AV の平方が VB の平方に対する。

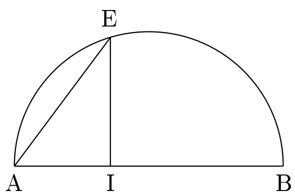
ゆえに，

R が S に対するように AV が VB に対し，

そして，命題は明らかである。

命題 III

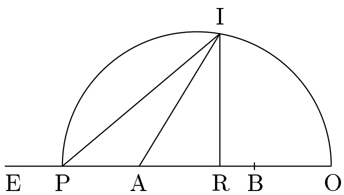
もし直線が位置において与えられ，そして，その上に点が与えられるとし，そこで終わらせられた直線が引かれ，さらに，その端点から位置において［与えられた直線］に［垂線が］引かれ，［はじめに］引かれたものによってつくられる［平方］が，与えられたものおよび，与えられた点あるいは位置において与えられた直線の上の与えられた別［の点］のいずれかで止められたものによって［つくられる長方形の和］に等しければ，その端点は位置において与えられた円周に触れるであろう。



位置において与えられた直線を AB とし，その上の与えられた点を A としよう。その上に任意の点，例えば E，がとられ，［そこから］垂線 EI が下ろされると，AE の平方が与えられた任意の直線および AI (私たちはこれによってこの命題における「与えられた点で止められた［直線］」と理解しなければならない) による長方形に等しくなるような，円の周を見出さなければならない。

与えられた直線を AB としよう。AB の上に半円が描かれるとしよう。つくり方から，AB 掛ける AI が AE の平方に等しいことは明らかである。

しかし，もう 1 つの場合，すなわち，次の例におけるように，直線が A とは別の点で止められるときは，より難しい。



与えられた 2 つの点を A，B とし，さらに，同じ直線の 34
上の点を E とし，一方，与えられた直線を AB としよう。その上に任意の点，例えば I，がとられ，［そこから］垂線 IR が下ろされると，AI の平方が与えられた直線 AB および直線 ER による長方形に等しくされるような，円の周，例えば PIO，を見出さなければならない。

長方形 BAE が直線 BA で割られると平方の姿を超えている幅 AP になり，これに BO が等しくなるとしよう。PO の上に描かれた半円が命題を明らかにするであろう。

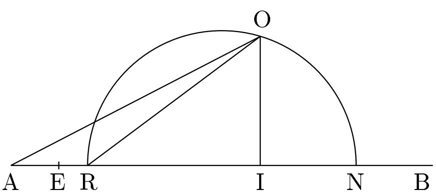
位置において与えられた直線を AB，その上の与えられた点を E とし，任意の点 I から AB に下ろした垂線の足を R とするとき，$\mathrm{AI}^2 = \mathrm{AB} \times \mathrm{ER}$ となるならば，点 I の軌跡は円になる，という命題。

［2］(p.31) によれば，$BA \times AE = BA \times AP + AP^2$，$AP = BO$ となるように点 P，O を定めれば，線分 PO を直径とする円が求める円になる，という。

なぜならば。AI の平方は AR の平方および RI の平方［の和］に等しくされる。一方,「すぐに証明されるであろうように」，RI の平方は長方形 PRO に，長方形 PRO は長方形 ARB，OAP —— すなわち BPA，すなわち BAE ——［の和］に等しくされる。ゆえに，AI の平方は AR の平方，長方形 ARB および長方形 BAE［の和］に等しくされる。あるいは，AI の平方は長方形 BAR (なぜならば，この長方形は AR の平方および長方形 ARB［の和］に等しくされるから) および長方形 BAE［の和］に等しくされる。そのうえ，これら 2 つの長方形は ER が掛けられた BA による 1 つの長方形になり，従って，AI の平方に等しい。

長方形 PRO が 2 つの長方形 ARB および PBO［の和］に等しいことが証明されるであろうことが残っている。—— なぜならば。それぞれの部分が考えられることによって，長方形 PRO は 1 つずつの長方形 PA 掛ける RB，PA 掛ける BO (すなわち，BO の平方)，AR 掛ける RB，AR 掛ける BO (すなわち，PA 掛ける AR)［の和］に等しい。しかし，2 つの PA 掛ける AR および PA 掛ける RB［の和］は PA 掛ける AB あるいは AB 掛ける BO に等しくされる。［AB 掛ける BO は］BO の平方とともになって AOB すなわち PBO に等しくされる。ゆえに，長方形 ARB は長方形 PBO とともになって長方形 PRO になる。これが証明されるべきことであった。

私は異なった場合をさらに続けることはしないが，しかし，それは今まで述べてきたことから非常に容易であろう。点 E が A の向こう側に，前のようには，見出されないことは明らかであるから，この命題のもう 1 つの場合が省略されずに考察される。



与えられた 2 つの点を A および E とし，与えられた直線を AB として，それ自身の上に任意の点，例えば O，がとられ，OI が垂直に下ろされると，AO の平方が EI が掛けられた BA による長方形に等しくなるような，円の周，例えば NOR，が見出されなければならない。

長方形 BAE が直線 BA で割られると R において平方の姿が不足している AR 自身になり，これに BN が等しくなるとしよう。RN の上に描かれた半円が命題を明らかにするであろう。

さらに，証明は前の場合において提出されたものと異ならない。

$BA \times AE = BA \times AR - AR^2$，$AR = BN$ とするということ (［2］p.32)。

このようにすると ……

$$
\begin{aligned}
OI^2 &= RI \times IN = (AI - AR) \times (BI - BN) \\
&= AI \times BI - AI \times BN - AR \times BI + AR \times BN \\
&= AI \times BI - AI \times AR - AR \times BI + AR \times AR \\
&= AI \times BI - AR \times (AI + BI) + BA \times AR - BA \times AE \\
&= AI \times BI - BA \times AE
\end{aligned}
$$

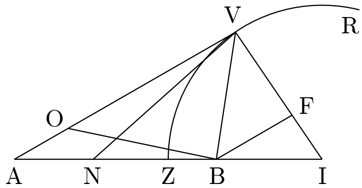
となるから，

$$
\begin{aligned}
AO^2 &= AI^2 + OI^2 = AI^2 + AI \times BI - BA \times AE = AI \times (AI + BI) - BA \times AE \\
&= AI \times BA - BA \times AE = BA \times (AI - AE) = BA \times EI
\end{aligned}
$$

となる。

命題 IV

もし与えられた 2 つの点において直線が曲げられ，そのうちの 1 つからつくられる［平方］がもう 1 つから［つくられる平方］に対して与えられた比にあるより大きければ，その［2 つの直線の交］点は位置において与えられた円周に触れるであろう。



与えられた 2 つの点を A および B とし，与えられた比を AI 対 BI，与えられた広さを BAN としよう。NI および IB の間の［比例］中項を IZ とし，この距離で円 ZVR が描かれ，その上に任意の点，例えば V，がとられ，VA，VB が結ばれるとしよう。私は，AV の平方が VB の平方に対して与えられた比，IA 対 BI，にあるより与えられた広さ BAN だけ大きい，と断言する。

なぜならば。［BAN］自身に VAO が等しくなるとし，OB，NV，VI が結ばれ，AV 自身に平 36
行に BF［が引かれる］としよう。証明されるであろうことは，長方形 AVO が VB の平方に対して AI が IB に対するようである，ということである。

［IZ が NI と IB の中項であるから,］

NI が IZ すなわち VI に対するように VI が IB に対し，

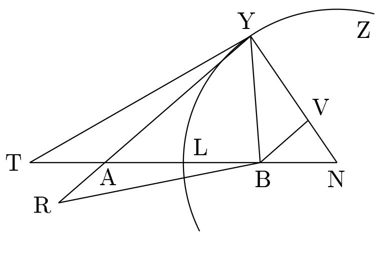
そして，これらは同じ角のまわり［の線］である。ゆえに，2 つの三角形 NIV，VBI は相似であり，角 VNB は角 BVF に等しい。しかし，長方形 BAN，VAO が等しいことの結果として，［方べきの定理により］4 つの点 N，B，V，O は［同一の］円の上にあるから，角 VNB は同じ切断［弧］における角 VOB に等しい。ゆえに，角 VOB は角 BVF に等しい。しかもそのうえ，［AV と BF が］平行であるから，角 OVB は角 VBF に等しい。ゆえに，2 つの三角形 OBV，BVF は相似であり，

OV が BV に対するように VB が BF に対する。

両方に共通の比 AV 対 VB が追加されると，AV 対 VB および VB 対 BF から合成された比，すなわち比 AV 対 BF，すなわち AI 対 IB は，AV 対 VB および OV 対 VB から合成された比，すなわち長方形 AVO 対 VB の平方と同じであろう。これが証明すべきことであった。

パッポスはここで次のようなこれに類似した命題を省略したように思われる。

もし与えられた 2 つの点において直線が曲げられ，そのうちの 1 つからつくられる［平方］がもう 1 つから［つくられる平方］に対して与えられた比にあるより小さければ，［その 2 つの直線の交］点は位置において与えられた円周に触れるであろう。

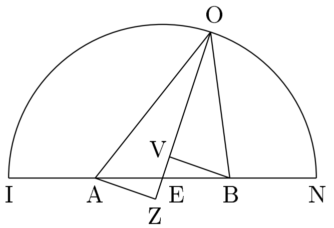


与えられた 2 つの点を A および B とし，［与えられた］比を AN 対 NB，［与えられた］広さを BAT としよう。TN，NB の間の［比例］中項を NJ とし，この距離で円の周 LYZ が描かれ，その上に任意の点 Y がとら 37
れ，YA，YB が結ばれるとしよう。私は，与えられた長方形 BAT といっしょの，YA の平方は YB の平方に対して AN が NB に対するようである，と断言する。

なぜならば。YAR が BAT に等しくなるとし，TY，RB，YN が結ばれ，AY 自身に BV が平行であるとしよう。BAT，YAR は等しい長方形であるから，角 YTB が角 YRB に等しいことが，そして，残りは前の証明におけるように，証明されるであろう。

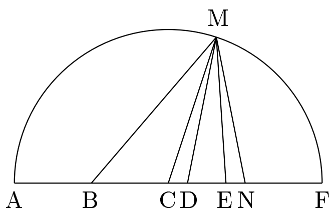
命題 V

もし任意個数の与えられた点から 1 つの点に向かって直線が曲げられ，それぞれのものからつくられる平方［の和］が与えられた広さに等しければ，その点は位置において与えられた円周に触れるであろう。



はじめに，与えられた 2 つの点を A，B とし，それらを通って直線 AB が結ばれるとしよう。それが E において半分に分離されるとし，中心 E，任意の距離，例えば EI，で円，例えば ION，が描かれるとしよう。私は，その円周の上に任意の点，例えば O，がとられたとすると，AO，OB の平方［の和］は IE，AE の平方がいっしょになったものの 2 倍であるという結果になる，と言う。

なぜならば。結ばれた直線 EO そのものに垂線 BV，AZ が下ろされるとしよう。三角形 AEO において，AO の平方は AE，EO の平方および長方形 OEZ の 2 倍［の和］に等しくされる。三角形 OEB において，OE，EB の平方［の和］は OB の平方および長方形 OEV の 2 倍，あるいは OEZ の 2 倍 (AE，EB が等しいから，EV は EZ に等しいため)，［の和］に等しくされる。ゆえに，等しいものに等しいものが加えられると，AO，OB の平方および長方形 OEZ の 2 倍［の和］は AE，EB の平方 (あるいは EA の平方の 2 倍) および EO の平方の 2 倍 (すなわち IE の平方の
38 2 倍) に長方形 OEZ の 2 倍がいっしょになったものに等しくされる。両方から OEZ の 2 倍が取り去られると，私たちが主張した事実が残り，はじめの場合における命題が成り立つ。

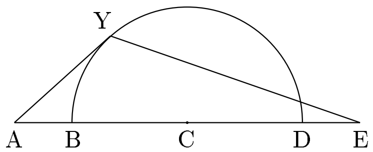


直線の上の与えられた 3 つの点を B，D，E とし，直線 BD が直線 DE より大きいとし，BD および DE の間の差の 3 分の 1 が CD であるとしよう。中心 C，任意の距離，例えば CA，で半円 AMF が描かれるとしよう。私は，その円周そのものの上に任意の点，例えば M，がとられたとすると，MB，MD，ME の 3 つの平方の和はつねに同じであろう，と断言する。

なぜならば。MB，MC，MD，ME が結ばれるとしよう。さらに，CD そのものに EN が等しくなるとし，MN が結ばれるとしよう。BD は DE より CD の 3 倍あるいは EN の 3 倍だけまさるから，ゆえに，DN は CD の 2 倍といっしょになって BD に等しくされるであろうし，CN は CD といっしょになって BD に等しくされるであろう。両方から CD が取り去られると，ゆえに，CN が BC に等しくされるであろう。CD が EN に等しいとされているから，この巻の第 2 の命題［命題 II ではなく，命題 I 中の 2 つ目の言明。p.119］により，同様に，つねに，CM，MN の平方［の和］は 2 つの DM，ME の平方［の和］を超えている。しかし，CM の平方はつねに同じである。ゆえに，2 つの DM，ME の平方［の和］は，つねに，MN の平方に等しいか，あるいは同じだけ超えているか，あるいは同じだけ不足しているかのいずれかである。両方に MB の平方が加えられると，ゆえに，3 つの MB，MD，ME の平方［の和］は，つねに，2 つの BM，MN の平方［の和］に等しいか，あるいは同じだけ超えているか，あるいは同じだけ不足しているかのいずれかである。しかし，BM，MN の平方［の和］は，直線 BC，CN の同等性の結果として，上の命題により，つねに，同じ広さをひき起こす。ゆえに，BM，DM，EM の平方［の和］は，つねに，同じ広さをもた

らす。これが証明すべきことであった。

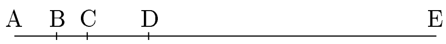
同じ命題の一般的な証明 —— はじめに，2 つの点 A および E が提示されるとし，AE が結ば 39
れ，そして，C において半分に分割されるとしよう。与えられた平面を Z とすると，明らかであるように，必然的にそれは 2 つの AC，CE の平方［の和］より小さくはないとしなければならない。



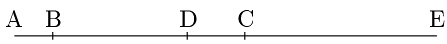
もし［Z が］それら 2 つの平方［の和］に等しいとするならば，点 C だけが問題を満足させるであろうし，点 A，E と結ばれたものからとられた平方がいっしょになって平面 Z に等しくされるような別の点はないであろう。

もし［Z が］2 つの AC，CE の平方［の和］より大きいとするならば，超過分の半分が CB の平方に等しくされるとしよう。中心 C，距離 CB で描かれた円が問題を満足させるであろう。パッポスやその他の人によって証明されたように，非常に容易であるこのことを，簡単なことにより長く留まることがないように，私たちは省略するであろう。

一般的な方法のための補題 —— 第 1，第 2 および第 3 図において，任意個数の与えられた点 A，B，C，E が提示されるとし，点の個数に応じて，点 A および与えられたその他［の点］によって制限された，直線の条件としての部分 (pars conditionaria) AD が —— もちろん，この例においては［直線の和の］4 分の 1 に —— とられるとしよう。それゆえ，AD が直線 AB，AC，AE［の和］の 4 分の 1 になるとしよう。点 D の位置はさまざまな場合に応じて異なっている。私は，［点 D より］点 A の側の与えられた点および点 D によって制限された直線［の和］は［点 D より］点
E の側の与えられた点および点 D によって制限された直線［の和］に等しい，と断言する。 40



第 1 図



第 2 図

第 3 図

確かに，第 1 図においては，直線 ED は直線 AD，BD，CD［の和］に等しくされる。

第 2 図においては，直線 ED，CD［の和］は直線 BD，AD［の和］に等しくされる。

そして，第 3 図においては，直線 ED，CD，BD［の和］は直線 AD に等しくされる。

第 3 図において，仮定から，AD の 4 倍が直線 AB，AC，AE［の和］に等しくされる。両方から AD の 3 倍が取り除かれると，前者［左辺］には単独の AD が残るであろう。しかし，AD の 3 倍を AB，AC，AE［の和］そのものから取り去ることは単独の AD を AB，AC，AE のそれぞれから取り去ることと同じであり，それがなし遂げられたことによって，AD に等しい，BD，CD，ED そのもの［の和］が残るであろう。これが証明すべきことであった。

任意の a_1，a_2，$\cdots$，a_n に対して，$d = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ とするとき，$a_k < d < a_{k+1}$ ならば，$\sum_{i=1}^{k}(d - a_i) = \sum_{i=k+1}^{n}(a_i - d)$ となる，ということ。

もし 5 つの点が与えられたとするならば，AD の 5 倍は，与えられた点および点 A によって制限された，4 つの直線がいっしょに寄せ集められるであろう。さらに，同一の方法によって無限に

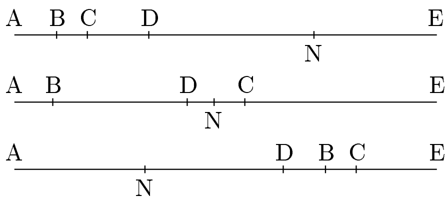
進められるはずである。

第 2 図において，AD の 4 倍は直線 AB，AC，AE［の和］に等しくされる。両方から AD の 3 倍が取り去られ，BD が加えられると，ED，CD［の和］に等しい，AD，BD［の和］が残るであろう。

第 1 図において，AD の 4 倍は直線 AB，AC，AE［の和］に等しくされる。両方に BD，CD［の和］が加えられ，AD の 3 倍が取り去られると，直線 DE に等しい，直線 AD，BD，CD［の和］が残るであろう。

任意個数の，無限の，点についても方法は異なることなく，どのようなものであれ同様の方法によってさまざまな場合が結論されるであろう。

別の補題 —— 第 1 図において，前の作図が提示されるとし，同じ直線の上に任意に点 N がとられるとしよう。私は，与えられた点および点 N によって制限された直線の平方［の和］は，与えられた点および点 D によって制限された直線の平方［の和］より与えられた点と同じ回数だけ取られた
41 DN の平方だけ —— 確かに，この例では 4 倍 —— まさる，と断言する。第 2 および第 3 図はさまざまな場合を出現させている。



第 1 図

第 2 図

第 3 図

第 1 図において，AN，BN，CN の平方［の和］は AD，BD，CD の平方［の和］より —— もしそれぞれのものをそれぞれのものと比較するならば —— DN の平方の 3 倍，および長方形 AD 掛ける DN の 2 倍，BD 掛ける DN の 2 倍，CD 掛ける DN の 2 倍［の和］だけまさる。それゆえ，AN，BN，CN の平方［の和］は AD，BD，CD の平方，DN の平方の 3 倍，および長方形 AD 掛ける DN の 2 倍，DB 掛ける DN の 2 倍，および CD 掛ける DN の 2 倍［の和］に等しくされる。しかし，これは肯定的に作用された 2 項根［根の 2 項式］からの平方の生成法により明らかである。さらに，［直線の］別の部分から，EN の平方は ED，ND の平方［の和］引く ED 掛ける DN の 2 倍に等しくされ，これは否定的に作用された 2 項根からの平方の生成法により明らかである。ゆえに，4 つの AN，BN，CN，EN の平方［の和］は 4 つの AD，BD，CD，ED の平方，DN の平方の 4 倍，長方形 AD 掛ける DN の 2 倍，BD 掛ける DN の 2 倍，CD 掛ける DN の 2 倍［の和］引く ED 掛ける DN の 2 倍に等しくされる。それゆえ，もし私たちが否定的な長方形［の和］が肯定的なもの［の和］と同値であることを証明したならば，確立された命題の真実性が残るであろう。確かに，AN，BN，CN，EN の平方［の和］は AD，BD，CD，ED の平方［の和］より DN の平方の 4 倍だけまさる。

この補題は，任意の a_1，a_2，$\cdots$，a_n，p に対して，$d = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ とすると，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(p-a_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(d-a_i)^2 + n\,(p-d)^2$ となる，ということ。

「2 項根からの平方の生成」はヴィエートの「記号計算についての前の注釈」(*Ad Logisticen Speciosam Notae Priores*，1631 年) 命題 XI 「2 項根から純粋なベキをつくること」を見よ (『全集』p.41)。

$\mathrm{AN}^2 = (\mathrm{AD}+\mathrm{DN})^2 = \mathrm{AD}^2 + \mathrm{DN}^2 + 2\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DN}$,

$$\mathrm{EN}^2 = (\mathrm{ED} - \mathrm{ND})^2 = \mathrm{ED}^2 + \mathrm{ND}^2 - 2 \cdot \mathrm{ED} \cdot \mathrm{ND}$$ ということ。

それゆえ，長方形 ED 掛ける DN の 2 倍が長方形 AD 掛ける DN の 2 倍，BD 掛ける DN の 2 倍，CD 掛ける DN の 2 倍［の和］に等しくされることが証明されるであろうし，すべて［の項］が DN の 2 倍で割られることによって，直線 ED は直線 AD，BD，CD［の和］に等しくされる。これは前の補題で証明したことと同じことである。

私たちはさまざまな場合に留まらない。—— もし 5 つの点があるならば，与えられた点および点 N によって制限された，［直線の］平方［の和］は与えられた点および点 D によって制限された，［直線の］平方［の和］より DN の平方の 5 倍だけまさるであろう。［この］紹介された場合における証明は上のものと異ならない。

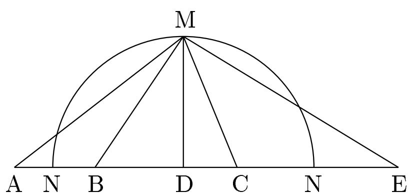
そのため，点 D によって制限された［直線の］平方の和が最も小さいことは明らかである。

私たちがあなたに話す限りは，私たちは非常に綿密な場合の観察を付け加えない。第 2 の補題の結論は，つねに，肯定的な部分によるすべての長方形［の和］が否定的な別の［部分による長方形の和］に等しくされることが証明されるであろうように，このことから導かれるであろうし，そして，それゆえ，このことから最初の補題が導かれるであろう。

最初の一般的な命題 —— 上の図が提示されるとし，直線 AE の上に 4 つの点 A，B，C，E が
あるとしよう。AD が直線 AB，AC，AE［の和］の 4 分の 1 の (もちろん，条件としての) 部分で 42
あるとし，Z を与えられた平面としよう。その［円の］上に任意の点がとられ，そこから与えられた点に直線が結ばれると，同時にとられた結ばれたもの［直線］の平方［の和］が与えられた広さに等しくされるような，円を見出すことが提示される。

命題がその位置をもつためには，上の証明から，平面 Z は 4 つの AD，BD，CD，ED の平方［の和］より大きくなければならない。

それゆえ，［Z が］それら 4 つの平方および，さらに，DN の平方の 4 倍［との和］に等しくされるとしよう。中心 D，距離 DN として描かれた円が命題を明らかなものにするであろう。



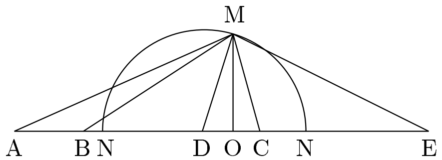
なぜならば。はじめに，どちらの部分にも点 N がとられるとしよう。第 2 の補題によって証明されたことは，AN，BN，CN，EN の平方［の和］が AD，BD，CD，ED の平方および，さらに，DN の平方の 4 倍［との和］に等しくされるということである。しかし，AD，BD，CD，ED の平方［の和］は，DN の平方の 4 倍といっしょになって，平面 Z に等しくされる。ゆえに，4 つの AN，BN，CN，EN の平方［の和］は平面 Z，すなわち与えられた広さ，に等しくされる。これが証明すべきことであった。

次に，垂線 DM が立てられ，AM，BM，CM，EM が結ばれるとしよう。私は，それら 4 つの平方［の和］は与えられた平面 Z に等しくされる，と断言する。

なぜならば。

AM の平方は AD の平方および DM の平方に等しくされ，
BM の平方は BD の平方および DM の平方に等しくされ，
CM の平方は CD の平方および DM の平方に等しくされ，
EM の平方は ED の平方および DM の平方に等しくされる。

ゆえに，4 つの AM，BM，CM，EM の平方［の和］は 4 つの AD，BD，CD，ED の平方［の和］と，DM (または DN) の平方の 4 倍がいっしょになったものに，等しくされる。しかし，AD，BD，CD，ED の平方［の和］は，DN の平方の 4 倍がいっしょになって，平面 Z または与えられた広さに等しくされる。ゆえに，4 つの AM，BM，CM，EM の平方［の和］は与えられた広さに等しくされる。これが証明すべきことであった。

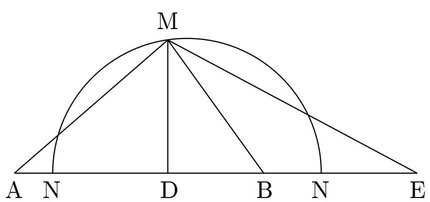


43 しかし，任意に点 M がとられ，そこから垂線 MO が下ろされるとしよう。—— 同様に，AM，BM，CM，EM の平方［の和］が OM の平方と，AO，BO，CO，EO の平方がいっしょになったものに，等しくされると証明されるであろうし，それは，第 2 の補題により，AD，BD，CD，ED の平方および，さらに，OD の平方の 4 倍［との和］に等しくされる。ゆえに，4 つの AM，BM，CM，EM の平方［の和］は AD，BD，CD，ED の平方［の和］と，OD の平方の 4 倍および，さらに，OM の平方の 4 倍がいっしょになったものに，等しくされる。しかし，OD の平方の 4 倍は，OM の平方の 4 倍といっしょになって，DM の平方の 4 倍，あるいは DN の平方の 4 倍に等しくされる。なぜならば，［円の］中心からの［距離］DM，DN は互いに等しいからである。それゆえ，AM，BM，CM，EM の平方［の和］は AD，BD，CD，ED の平方［の和］と，DN の平方の 4 倍がいっしょになったものに，等しくされ，そしてそれゆえ，それは与えられた広さ Z に等しい。これが証明すべきことであった。

もし円が完成させられるならば，別の半円におけるのと同じ証明がその位置をもつであろうし，そして，任意個数の点に対して同じ容易さでその証明に拡張されるであろう。なぜならば，つねに，DM，DN，DO の平方は点の個数と同じだけとられるであろうし，推論が誤らせられることはないだろうからである。

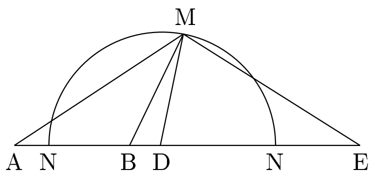
この命題は任意個数の与えられた点がすべて一直線上にある場合の命題である。
すぐ後で示される「別の命題」が一直線上にない点を含む場合の命題を与えている。そして，最後に一般の場合が述べられる。

そこから，続く命題において役立つ系が従う。



任意個数の与えられた点，例えば 3 つ［の点］A，B，E が提示されるとき，見出されるであろう円を NM とし，その上に任意の点，例えば M，がとられるとし，直線 AM，BM，EM が結ばれるとすると，(例えば) AM の平方の 2 倍は，BM，EM の平方［の和］といっしょになって，与えられた広さに等しくされるであろう。

44 その場合，作図において直線 AD は直線 AB，AE［の和］の 4 分の 1 にとられるであろう。なぜなら，この場合において，点 A は 2 つの点の役割を演じ，そして，もし，与えられた 4 つの点 A，A，B，E から，その［円の］上に任意の点，例えば M，がとられると，4 つの AM，AM，BM，EM の平方［の和］が与えられた広さに等しくされるであろう，円を見出すこと，と言われたならばそれは同じことだからである。

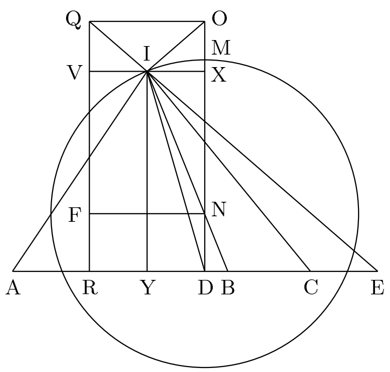


別の任意の点および別の任意のさまざまな比においても同様であると理解されなければならない。—— なぜならば，AD が直線 AB の 2 倍および AE［の和］の 4 分の 1 にとられると，AM の平方は，BM の平方の 2 倍および EM の平方といっしょになって，与えられた広さに等しくされることが提示されるからである。

これを認めることやこれに気づかせることが必要であったが，このことのより長い説明は必要としていない。

別の命題 —— 直線 AE の上に任意個数の，例えば，A，B，C，E 4 つの，与えられた点および直線 AE の外部に点 Q が提示されるとしよう。その［円の］上に任意の点，例えば I，がとられると，AI，BI，CI，EI，QI の平方［の和］が与えられた広さに等しくされるであろう，円が捜し求められる。

直線 AE に垂線 QR が下ろされ，そして，直線 AR，AB，AC，AE［の和］の条件 (もちろん，5 45
つの点が与えられるこの図［次の図］では 5 分の 1) としての部分 AD がとられ，そして，立てられた垂線 DO に垂線 QO が下ろされるとしよう。直線 QR に条件 (もちろん，5 分の 1) としての部分 RF あるいは DN がとられ，そして，与えられた広さは 5 つの AD，RD，BD，CD，ED の平方および，さらに，平面 Z［との和］に等しいとしよう。平面 Z は DN の平方の 4 倍 (もちろん，直線 AE の上に与えられた点の個数に応じて)，NO の平方および，さらに，NM の平方の 5 倍 (与えられたすべての点の個数に応じて)［の和］に等しくされるとしよう。私は，中心 N，距離 NM で描かれた円が命題を明らかのものにする，と断言する。



その［円の］上に任意の点，例えば I，がとられ，AI，BI，CI，EI，QI が結ばれて，AE に平行に VIX が，OD に平行に IY が引かれるとしよう。DI の平方の 4 倍と，OI の平方がいっしょになったものは，前の命題の系から，平面 Z に等しくされることは明らかである。なぜならば，点 D は 4 つの点の役割を演ずるからである。それゆえ，DN を OD の 5 分の 1 とするとき，DI の平方の 4 倍と，OI の平方がいっしょになったものは，DN の平方の 4 倍，ON の平方および NM の平方の 5 倍［の和］に等しくされることは明らかである。しかし，つくり方から，DN の平方の 4 倍と，ON の平方および NM の平方の 5 倍がいっしょになったものは平面 Z に等しくされる。ゆえに，DI の平方の 4 倍と，OI の平方がいっしょになったものは平面 Z に等しくされる。

しかし，DI の平方の 4 倍は DX の平方の 4 倍および XI の平方の 4 倍［の和］に等しくされ，OI の平方は OX の平方および XI の平方［の和］に等しくされる。ゆえに，平面 Z は DX (あるいは IY) の平方の 4 倍，単独の XO (あるいは VQ) の平方および XI の平方の 5 倍［の和］に等しくされる。両方に 5 つの AD，RD，BD，CD，ED の平方［の和］が加えられると，それゆえに，与えられた広さ，すなわちこの 5 つの平方と平面 Z がいっしょになったもの，は，仮定から，与えられた広さに等しくされる。それゆえに，さらに，5 つの AI，BI，CI，EI，QI の平方［の和］は与

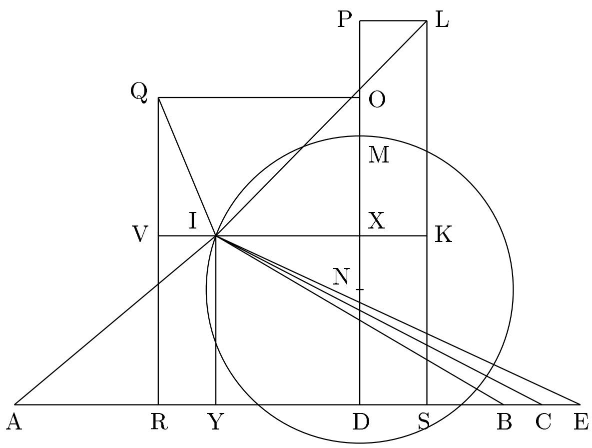
えられた広さに等しくされるであろう。

これは，第 2 の補題から，AD，BD，BD，CD，ED の平方と，DY の平方の 5 倍がいっしょになったものは AY，RY，BY，CY，EY の平方［の和］に等しくされるであろう，となる。それゆえ，IY の平方の 4 倍，単独の VQ［の平方］および DY［の平方］の 5 倍が加えられた，AD，RD，
46 BD，CD，ED の平方［の和］は AY，RY，BY，CY，EY の平方と，IY［の平方］の 4 倍および単独の VQ［の平方の和］がいっしょになったものに等しくされるであろう。AY，BY，CY，EY のそれぞれの平方に IY の平方が加えられると，AI，BI，CI，EI の平方［の和］が AY，BY，CY，EY の平方および，さらに，IY の平方の 4 倍［との和］に等しくなるであろう。それゆえ，IY の平方の 4 倍，単独の VQ［の平方］および DY［の平方］の 5 倍が加えられた，AD，RD，BD，CD，ED の平方［の和］は AI，BI，CI，IE の平方および，さらに，RY の平方および単独の VQ の平方［との和］に等しくされるであろう。しかし，RY あるいは VI の平方と，QV の平方がいっしょになったものは QI の平方に等しくされる。それゆえ，IY の平方の 4 倍，単独の VQ［の平方］および DY［の平方］の 5 倍が加えられた，AR，RD，BD，CD，ED の平方［の和］は AI，BI，CI，EI および QI の平方［の和］に等しくされるであろう。

しかし，それらの平方［の和］が与えられた広さに等しいことは証明されている。ゆえに，5 つの AI，BI，CI，EI および QI の平方［の和］は与えられた広さに等しくされる。これが証明すべきことであった。

そこから，与えられた広さが AN，BN，CN，EN，QN の平方および NM の平方の 5 倍［の和］に等しいことを導くのはとても容易であり，私たちは当然であるかのようにこれを省略する。

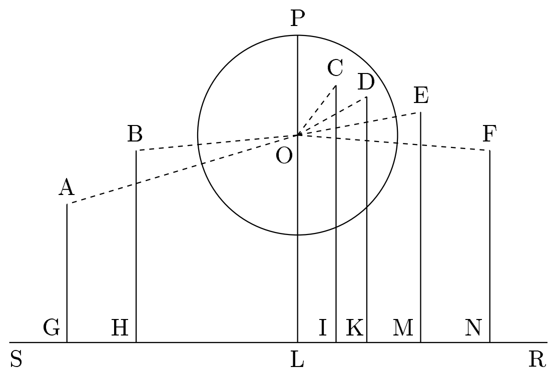
「そして，それどころか，任意［個数］の点に関して，巧妙な仕方は同じ方法によってつくり出されるであろう。」



すなわち，もし 2 つの点 Q および L が直線の外部に与えられ，［ここに］見られるように，完成させられた作図において，AD が直線 AR，AS，AB，AC，AE［の和］の 6 分の 1 にとられ，直線 QR および LS［の和］の 6 分の 1 に DN がとられるとしよう。与えられた広さは AD，
47 RD，SD，BD，CD，ED および，さらに，DN の平方の 4 倍，単独の NO［の平方］，単独の NP［の平方］および NM［の平方］の 6 倍［の和］に等しくなるであろう。そして，残りは同じ方法によってなし遂げられるであろう。そして，つねに，点 D が与えられた直線 AE の上のすべての点の役割を演じ，点 P，O が与えられた点 Q および L の役割を演じるであろう。そして，その他［の場合］は無限に統一的な方法が維持されるはずであろうし，［統一的な方法によって］証明されるであろう。

しかし，要求された個々の直線や触れている 2 つあるいはより多くの点の位置に従ってさまざまな場合が起こるのであるから，もしその他の個々の点が指定された任意の直線の部分に従ってその

位置が選ばれるならば，それらのそれぞれの場合に節約を得ようと努めることが許されているし，技法において「より一般的な模範例を見せることや組み立てること」が好ましい。



任意個数の点 A，B，C，D，E，F が同じ直線の上にあるいは別々に与えられるとしよう。同じ平面の上に任意の直線 SR が，すべての与えられた点が直線 SR の一方の側にあるように，とられるとしよう。垂線 AG, BH, CI, DK, EM, FN が下ろされ，GH，GI，GK，GM および GN［の和］の条件 —— もちろん，この場合は 6 分の 1 —— としての部分 GL がとられるとしよう。垂線 LO が立てられ，直線 AG，BH，CI，KD，EM，FN［の和］の条件，もちろん 6 分の 1，としての部分 LO が切り取られ，与えられた広さが AO，BO，CO，DO，EO，FO の平方および OP の平方［の和］の 6 倍に等しいとしよう。中心 O，距離 OP として描かれた円が命題を満足させるであろう。—— 上のことを認識した人には考察は難しくはない。

この命題についてはマホーニィ (Michael Sean Mahoney : 1939–) による解説がある (［1］pp.101–113) ので，そちらを参照のこと。
彼はキーワードとして proof by induction［帰納法による証明］および proof by instantiation［例示化による証明］を挙げている (［1］p.102)。

さて，すぐ上の図で，直線 SR は x 軸の，点 G は原点の役割を果たしており，すべての与えられた点が直線 SR の一方の側にあるようにするということはすべての点の y 座標を正の値にするということに相当する。ということは，フェルマはこのとき既に解析幾何学の着想を得ていたということであろうか。
現代的な記法を用いて表してみると ……
n 個の点 A_1，A_2，$\cdots$，A_n について，その座標を A_i $(a_i,\ b_i)$［ただし，$a_i > 0,\ b_i > 0$］とし，任意の点 P を $(x,\ y)$ とすると，$\mathrm{A}_i\mathrm{P}^2$ の和が与えられた「広さ」Z に等しいということから，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z} &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\mathrm{P}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left\{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2\right\} = \sum_{i=1}^{n} \left\{x^2 - 2a_i x + a_i^2 + y^2 - 2b_i y + b_i^2\right\} \\
&= nx^2 - 2x\sum_{i=1}^{n} a_i + ny^2 - 2y\sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2) \\
&= n\left\{\left(x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2\right\} \\
&\qquad\qquad + n\left\{\left(y - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2\right\} + \sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)
\end{aligned}$$

となる。これから，

$$\begin{aligned}
&\left(x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 \\
&\qquad\qquad = \frac{\mathrm{Z}}{n} + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2)
\end{aligned}$$

が得られるから，点 P の軌跡は中心が点 O $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i,\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$ の円ということになる。

このとき，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ が a_1，a_2，$\cdots$，a_n の，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i$ が b_1，b_2，$\cdots$，b_n の「条件としての部分」である。

ここで，$\mathrm{Z} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i\mathrm{O}^2 + n \cdot \mathrm{OP}^2$ とすると，

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Z}}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{\left(a_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2 + \left(b_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j\right)^2\right\} + \mathrm{OP}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{a_i^2 - \frac{2}{n}a_i\sum_{j=1}^{n} a_j + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2\right. \\
&\qquad\qquad \left. + b_i^2 - \frac{2}{n}b_i\sum_{j=1}^{n} b_j + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)^2\right\} + \mathrm{OP}^2 \\
&= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\sum_{j=1}^{n} a_j + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)^2\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\sum_{j=1}^{n} b_j + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)^2\right\} + \mathrm{OP}^2 \\
&= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{4}{n}\sum_{i,\,j=1}^{n}\sum_{i\neq j} a_ia_j + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{2}{n}\sum_{i,\,j=1}^{n}\sum_{i\neq j} a_ia_j\right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \frac{4}{n}\sum_{i,\,j=1}^{n}\sum_{i\neq j} b_ib_j + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + \frac{2}{n}\sum_{i,\,j=1}^{n}\sum_{i\neq j} b_ib_j\right\} + \mathrm{OP}^2 \\
&= \frac{1}{n}\left\{\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i,\,j=1}^{n}\sum_{i\neq j} a_ia_j\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \frac{2}{n}\sum_{i,\,j=1}^{n}\sum_{i\neq j} b_ib_j\right\} + \mathrm{OP}^2
\end{aligned}
$$

となるが，一方で,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2) \\
&\quad = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right\} \\
&\quad = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{2}{n}\sum_{i,\,j=1}^{n}\sum_{i\neq j} a_ia_j - \sum_{i=1}^{n} a_i^2\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + \frac{2}{n}\sum_{i,\,j=1}^{n}\sum_{i\neq j} b_ib_j - \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right\} \\
&\quad = \frac{1}{n}\left\{\frac{2}{n}\sum_{i,\,j=1}^{n}\sum_{i\neq j} a_ia_j - \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{2}{n}\sum_{i,\,j=1}^{n}\sum_{i\neq j} b_ib_j - \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right\}
\end{aligned}
$$

である。従って，点 P の軌跡を表す方程式は

$$
\left(x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2 = \mathrm{OP}^2
$$

となるから，この円の半径は OP である。

これで命題 V における最後の言明が確認できたことになる。

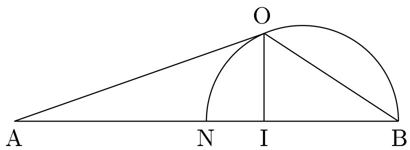
命題 VI 48

もし与えられた 2 つの点において直線が曲げられ，さらに，［それらの直線は］位置において引かれた直線に関する点から位置において与えられた直線に関する与えられた点までで止められ，そして，曲げられた［直線］による平方［の和］が与えられたものおよび止められたものが囲むものに等しいならば，曲げられた［直線］に関する［交］点は位置において与えられた円周に触れるであろう。

私は命題をフェデリコ・コマンディーノの翻訳によってパッポスの著作において見出されるように表現したが，しかし，ギリシアの原文においてかあるいは翻訳においてかのいずれかに誤りがあることを私は疑わない。私は命題の意味を説明することにする。

> コマンディーノ (Federico Commandino : 1509–1575) はイタリア・ウルビーノの人文主義者・数学者で，古代ギリシアの多くの —— アルキメデス (Ἀρχιμήδης (Archimēdēs) : 前 287?–前 212)，プトレマイオス (Κλαύδιος Πτολεμαῖος (Claudios Ptolemaios) : 2 世紀頃)，ユークリッド，アポロニウス，パッポスらの —— 数学的著作をラテン語訳した。
> コマンディーノの翻訳とは，*Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones*，Franciscum de Franciscis Senensem，1588 のことか。

2 つの点を A および B としよう。その上に任意の点，例えば O，がとられ，直線 OA，OB が結ばれ，そして，垂線 OI が下ろされるとすると，AI が掛けられた与えられた直線による長方形が 2 つの AO，OB の平方［の和］に等しくされるような，円，例えば NOB，を見出さなければならない。

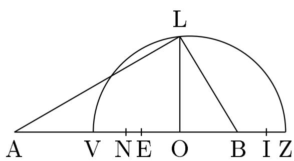


はじめに，AB を与えられた直線とすると，この場合は非常に容易である。

AB そのものの半分 BN がとられ，BN の上に半円が描かれるとしよう。私は，それが命題を満足させる，すなわち，例えば，点 O がとられると，長方形 BAI が 2 つの AO，OB の平方［の和］に等しい，と断言する。

なぜならば。AO の平方は AI の平方および IO の平方［の和］に等しくされる。もし長方形 BAI から AI の平方および IO の平方あるいは IN が掛けられた BI による長方形［の和］が取り去られると，AN あるいは NB が掛けられた BI による長方形が残り，これが BO の平方に等しいことが証明されるであろうし，つくり方から，そうであることは明らかである。 49

第 2 の場合は与えられた直線が直線 AB より大きいとき —— 私たちはこの作図を与えるであろう —— で，与えられた直線は AB の 2 倍より小さいとしよう。



与えられた 2 つの点を A および B とし，そして，直線 AI は，仮定から，AB の 2 倍より小さいとしよう。

直線 AB が N において 2 つに切断され，NE は BI の半分になるとしよう。これはつくり方から許されている。平方の形を超えている長方形 IBN が直線 BE で割られると，幅としての

直線 EV —— 直線 BZ に等しくなるとする —— を与える［$IB \times BN = BE \times EV + EV^2$，$EV = BZ$］とし，そして，VZ の上に半円 VLZ が描かれるとしよう。私は，これが命題を満足させる，と断言する。

なぜならば。LA，LB が結ばれ，垂線 LO が下ろされる —— 最初の場合は E および B の間にあるとしよう —— と，［この巻の］アポロニウスの命題 III に関する証明［p.122］から，長方形 EOB は，長方形 VEZ あるいは NBI といっしょになって，OL の平方に等しいことは明らかである［$OL^2 = VOZ = EOB + VEZ$］。両方に OB の平方が加えられると，長方形 EBO は，［長方形］NBI といっしょになって，LO の平方および OB の平方［の和］に等しくされるであろう。2 倍にされると，長方形 EBO の 2 倍は，長方形 NBI の 2 倍あるいは単独の［長方形］ABI といっしょになって，LO，OB の平方［の和］の 2 倍に等しくされるであろう。両方に OB が掛けられた NE による長方形が加えられると，つくり方から，長方形 EBO の 2 倍および NE 掛ける OB の 2 倍，あるいは単独の AB 掛ける BO，は，AB 掛ける BI がいっしょになって，LO，OB の平方［の和］の 2 倍と，OB が掛けられた NE による長方形の 2 倍あるいは単独の［長方形］IBO がいっしょになったものに等しくされるであろう。両方から OB の平方が取り去られると，LO の平方の 2 倍，単独の OB の平方および長方形 IBO［の和］に等しい，［長方形］ABI がいっしょになった［長方形］AOB が残るであろう。両方から，もちろん長方形 ABI から，IB 掛ける BO が取り去られると，LO の平方の 2 倍および単独の OB に平方に等しい，AO 掛ける OB と，AO 掛ける BI あるいは単独の長方形 IOA がいっしょになったものが残るであろう。両方に AO の平方が加えられると，長方形 IAO は AO，OB の平方［の和］に，LO の平方の 2 倍がいっしょになったもの，すなわち 2 つの AL および LB の平方［の和］，に等しいであろう。これがなされるべきことであった。

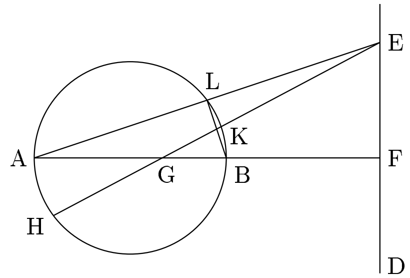
私は他の場合を省略する。

命題 VII

もし位置において与えられた円の中に与えられた点があるとし，そして，そこを通って何らかの直線が引かれ，その上に［円の］外部にある点がとられるとし，さらに，内部に与えられた点までずっと引かれた直線によるもの［平方］が［直線］全体および外部にとられた部分によって囲まれるもの［積］に —— 単独にあるいは円の内部にある 2 つのもの［の積］といっしょに —— 等しいとするならば，外部にとられた点は位置において与えられた直線に触れるであろう。

この命題は 2 つの部分をもっていて，それらのうちの最初［の部分］はパッポス自身の著作における第 7 巻の命題 159［Commandino，前掲書，p.260］であり，第 2［の部分］は同等性の付加によって最初のものから容易に導くことができる。それゆえ，私たちはパッポスの証明だけをもってくるであろう。

下の図で，直線 DE を $\angle AFE = \angle R$ であり，$\begin{cases} ① \ FG^2 = AF \times FB \\ ② \ FG^2 = AF \times FB + AG \times GB \end{cases}$ となるように定めると，直線 DE 上の任意の点 E に対して $\begin{cases} ① \ EG^2 = HE \times EK \\ ② \ EG^2 = HE \times EK + HG \times GK \end{cases}$ がいえる，というもの。
① が「パッポス自身の著作における」ものであり，その証明が次に示される。
② の証明は，FG^2 に関する条件を使うところで，方べきの定理による $AG \times GB = HG \times GK$ をあわせて用いればよい。



［位置において与えられた］円は直径 AB に関するものであるとし，そして，AB が延長され，それは任意の直線 DE に対して垂直であるとしよう。さらに，長方形 AFB が FG による平方に等しいとおかれるとしよう。私は，もし任意の点，例えば E，がとられ，そして，そこから点 G まで引かれた直線が H まで延長されるならば，長方形 HEK は EG による平方に等しいものである，と言う。

AE，BL が結ばれるとしよう。L における角は直角であろう。しかもそのうえ，F におけるそれ 51
も直角である。それゆえ，長方形 AEL は長方形 AFB および FE による平方［の和］に等しい。

なぜならば。角 ALB は直角 AFE に等しいから，「4 つの点 L，B，F，E は［同一の］円の上にあり，そして，それゆえ」，［方べきの定理により］長方形 FAB は長方形 EAL に等しい。さらに，AE による平方は 2 つの AF，FE による平方［の和］に等しいが，しかし，AE による平方は長方形 AEL，EAL の両方［の和］に等しく，同様に，AF による平方は長方形 AFB，FAB の両方［の和］に等しい。ゆえに，長方形 AEL，EAL は長方形 AFB，FAB および FE による平方［の和］に等しいものである。それら［のうち」の長方形 FAB は長方形 EAL に等しい。それゆえ，残りの長方形 AEL は長方形 AFB および FE による平方［の和］に等しいであろう。

さらに，長方形 AEL は長方形 HEK に等しく，そして，［仮定から］長方形 AFB は FG による平方［に等しい］。ゆえに，長方形 HEK は EF，FG による平方［の和］，すなわち EG による平方，に等しい。

命題 VIII そして最後の［命題］

そして，もし，確かに，この点が位置において与えられた直線に触れ，さらに，円が仮定されないならば，与えられた点のどちらの側にもある［点は］位置において与えられた同じ円周に触れるであろう。

この命題は前［の命題］の逆であり，もし反対の方法が使われるのであれば，この証明は容易に引き出すことができる。

作図や証明から十分に明らかであるから，私たちは結論も［それぞれの］場合も付け加えない。

平面および立体の軌跡論序説

『全集』pp.91–103

原題は *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge*。
発表されたのは 1637 年 (執筆は 1636 年)。
ギリシアの解析法を代数的に再構成・再現することの 1 つの到達点であり，フェルマの解析幾何学の原典といえるもの。円錐曲線が，直交座標系 A，E を用いて，代数的に表現されている。

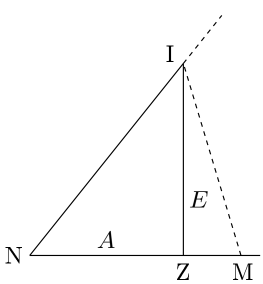
軌跡について古代の非常に多くの人々が著述していたことは全く疑いがない。その証拠に，パッ 91
ポス (Πάππος (Pappos，Pappus)：4 世紀前半) は [『数学集成』(Συναγωγη：*Synagoge*，*Collectio*) の] 第 7 巻の初めでアポロニウス (Ἀπολλώνιος (Apollonius)：前 262–前 200?) が平面軌跡について，アリスタイオス (Ἀρισταῖος (Aristaeus the Elder)：前 4 世紀) が立体軌跡について著述していたことを証言している。しかし，私たちは誤らされているか，あるいは軌跡の探究が十分に容易ではなかったかである。私たちはそのことを，以下で明らかになるであろうように，［古代の］非常に多くの人々が軌跡を十分に一般的にではなく叙述したことから推測する。

それゆえ，続いて軌跡［の探求］に関する一般的な道が開かれるように，私たちはこの理論を適当なそして独特の解析に服従させる。

最後の方程式の中に 2 つの未知量が見出されるときには，軌跡があるべき位置をもち，そして，一方の端点はそれら［の未知量］が規定する直線あるいは曲線のいずれかになる。直線は唯一の［種類の］そして単純なものであり，曲線は円，放物線，双曲線，楕円など無限［の種類のもの］である。

軌跡［を表す］の未知量の端点が直線あるいは円を描くとき，軌跡は平面的 (planus) になり，それに対して，放物線，双曲線あるいは楕円を描くとき，軌跡は立体的 (solidus) になる。もしそれ以
外の曲線を［描くときには］，軌跡は曲線的 (linearis) といわれる。私たちにはこの［最後の］こと 92
について付け加えることは何もない。というのは，曲線的な軌跡の調査は平面的なおよび立体的な［軌跡の］探究に，還元を間におくことによって，非常に容易に転化されるだろうからである。

さらに，もし私たちが 2 つの未知量を与えられた角 (私たちはたいていは直角として仮定するであろう) に関して定め，そして，位置において与えられたそれらの中の 1 つの端点は与えられたものであるとするならば，適切に方程式をつくることができる。しかし，どちらの未知量も平方を超えないとすると，［この後で］述べられるであろうことから明らかになるであろうように，軌跡は平面的あるいは立体的であろう。



位置において与えられた直線を NZM，その［上の］与えられた点を N としよう。NZ が未知量 A に等しくされ，そして，与えられた角 NZI に関して立てられた直線 ZI がもう一方の未知量 E に等しいとしよう。

D in A が B in E に等しくされる ［$dx = by$］

としよう。

点 I は位置において与えられた「直線」になるであろう。

なぜならば。

B が D に対するように A が E に対する

であろう。ゆえに，A が E に対する比は与えられており，Z における角が与えられるから，それゆえ，三角形 NIZ は［与えられた］形であり，角 INZ は［与えられた角である］。さらに，点 N および直線 NZ は位置において与えられている。ゆえに，NI は位置において与えられるであろうし，構成は容易である。

そこに含まれる同次のものの一部は与えられたものであり，また一部は，与えられたものが掛けられたかあるいは単純にとられたかのいずれかである，未知［量］A および E である［ような］，混ぜ合わされたすべて［の方程式］はこの方程式に還元されるであろう。

> 与えられたもの —— すなわち，既知量，定数 —— だけの項，および未知量に関して 1 次の項 —— すなわち，未知量単独の項あるいは未知量に既知量が掛けられた項 —— からなる方程式はすべて $dx = by$ の形に還元できる，ということ。
>
> なお，フェルマはヴィエート (François Viète，ラテン名は Franciscus Vieta : 1540–1603) の表記法に従っているため，
>
> ① 同次元の法則に従う
> ② 未知量は A，E などの母音で表わし，既知量は B，D などの子音で表わす
>
> ようになっている。
> さらに，等号記号 (=) はなく，等号は aequo (等しくする，等しい) あるいは aequalis (等しい) という言葉で表されている (活用のため語尾は変化している)。
> また，乗法は × ではなく，in が用いられている。
> フェルマたちの表記法は，このように多少の違いはあるが，現代のものとそう変わりはない。ここでは，できる限り彼らの表記法に従うことにする。また，特に必要と認められない限り，現代風の表記を付記しない。

$$Z\ pl. - D \text{ in } A \text{ が } B \text{ in } E \text{ に等しくされる}$$

としよう。

93 $$D \text{ in } R \text{ が } Z\ pl. \text{ に等しい}$$

とすると，

$$B \text{ が } D \text{ に対するように } R - A \text{ が } E \text{ に対する}$$

であろう。

> $z^2 - dx = by$ であるとき，$dr = z^2$ とすると，$dr - dx = by$ より $d(r - x) = by$ だから，$b : d = (r - x) : y$ になる，ということ。
> ここでは，*pl.* (planum) は「平方」を表す。以下では，quad. や *q.* (quadratum) も「平方」を表す。

MN が R に等しいとすると，点 M が与えられるであろうし，それゆえ，MZ が $R - A$ に等しくされるであろう。ゆえに，MZ が ZI に対する比が与えられるであろう。しかし，Z における角が与えられ，ゆえに，三角形 IZM は［与えられた］形であり，結ばれた直線 MI は位置において与えられることが結論されるであろう。そして，それゆえ，点 I は位置において与えられた直線になるであろう。そして，何らかの同次のもののが A あるいは E に関して与えられるであろう任意の方程式においても，面倒なこともなく同じことが結論されるであろう。

これは［最も］単純なそして最初の軌跡の方程式であり，このおかげで軌跡はすべて直線に関するものとして見出されるであろう。例えば，アポロニウス (Ἀπολλώνιος (Apollonius) : 前 262–前

200?) の「平面軌跡論」(*De Locis Planis*) 第 1 巻の第 7 の命題を直ちにより一般的に表現し，そして構築することができるであろう。

この方程式には，私たちがその助けによって明らかにした，次のような最も美しい命題がひそんでいる。

もし任意個数の位置において与えられた直線があり，そして，それら自身まで任意の点から与えられた角度にある直線が引かれ，さらに，引かれたものおよび与えられたものによってつくられるもの［の和］が与えられた広さに等しいとするならば，その点は位置において与えられた直線に触れるであろう。

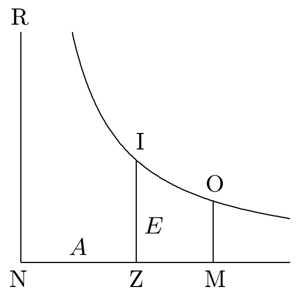
私たちは，アポロニウスのものと正当に対比させることができる，無限のものを省略する。

> フェルマによって復元された，アポロニウスの「平面軌跡論」の第 1 巻命題 7 は，
> もし位置において与えられた任意個数の直線があるとし，そして，それらに対して任意の点から与えられた角度でもって直線が引かれ，さらに，与えられた線および引かれた［線との積］が結合された 1 つの与えられた線およびもう 1 つの引かれた［線の積］とともに結合される［2 つのものの和］が，与えられた［線］および別の引かれた［線との積］それにそれ以外［の積］が結合される［和］に等しければ，その点は位置において与えられた直線に触れるであろう，
> である。

このような方程式の第 2 の種類のものは

$$A \text{ in } E \text{ が } Z\ pl. \text{ に等しい}$$

［という形］のときであり，この場合，点 I は「双曲線」なる。



NR が ZI に平行であるとし，NZ の上に任意の点，例えば M，がとられ，そこから ZI に平行に MO が引かれ，そして，長方形 NMO が $Z\ pl.$ に等しくなるとしよう。

点 O を通って，漸近線 NR，NM に関して，双曲線が描か
れるとしよう。［それは，］長方形 A in E，あるいは NZI，が 94
NMO に等しいとおかれるとするとき，位置において与えられるであろうし，点 I を通過するであろう。

その同次の部分［項］が与えられたもの，あるいは A または E または A in E によって作用されたものである，すべて［の方程式］はこの［ような形の］方程式に還元されるであろう。

$$D\ pl. + A \text{ in } E \text{ が } R \text{ in } A + S \text{ in } E \text{ に等しい}$$

とおかれるとしよう。それゆえ，技法の規則によって，

$$R \text{ in } A + S \text{ in } E - A \text{ in } E \text{ が } D\ pl. \text{ に等しく}$$

されるであろう。

2 つの辺による長方形がつくられるとすると，その中に同次のもの

$$R \text{ in } A + S \text{ in } E - A \text{ in } E$$

が見つけられるはずである。2 つの辺は

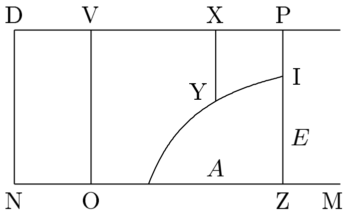
$$A - S \text{ および } R - E$$

であろうし，それらによる長方形は

$$R \text{ in } A + S \text{ in } E - A \text{ in } E - R \text{ in } S$$

に等しくされるであろう。

それゆえ，もし D *pl.* から R in S が取り去られるならば，$\overline{A-S}$ in $\overline{R-E}$ による長方形は D *pl.* $-$ R in S に等しくされるであろう。

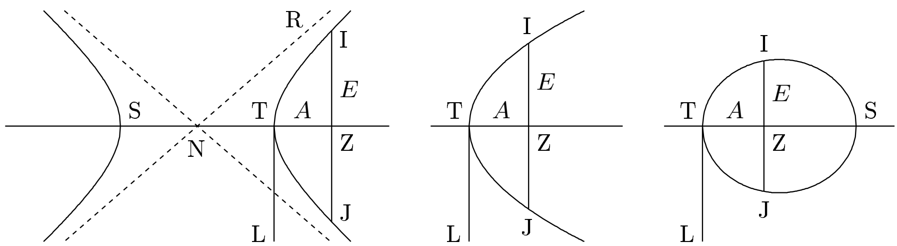


NO が S に等しくなり，ZI に平行な ND が R に等しくなるとしよう。点 D を通って NM に平行に DP が，点 O を通って ND に平行に OV が引かれ，そして，ZI が P まで延長されるとしよう。

NO が S に，NZ が A に等しくされるとき，ゆえに，$A-S$ は OZ あるいは VP に等しくされるであろう。同様に，ND あるいは ZP が R に，ZI が E に等しくされるとき，ゆえに，$R-E$ は PI に等しくされる
95 であろう。それゆえ，VP in PI による長方形は与えられた D *pl.* $-$ R in S に等しくされる。ゆえに，点 I は，その漸近線が PV，VO である，双曲線になるであろう。

なぜならば。任意の点 X，［ND に］平行に引かれた XY および長方形 VXY がとられると，長方形は D *pl.* $-$ R in S に等しくされるであろうし，点 Y を通って，漸近線 PV，VO に関して，双曲線が描かれるであろう。それは点 I を通過するであろうし，どのような場合においても解析あるいは作図は難しくはない。

アポロニウスによれば，双曲線 (ὑπερβολή)，放物線 (παλαβολή)，楕円 (ἐλλειψις) を表す方程式は —— 現代風の記法では —— それぞれ $y^2 = px + \dfrac{p}{d}x^2$，$y^2 = px$，$y^2 = px - \dfrac{p}{d}x^2$ となる。



このとき，p は図中の TL の長さで直立辺あるいは通径 (latus rectum) といわれる。この直立辺はアポロニウスの円錐曲線論を特徴づけている重要なパラメータである。また，d は図中の TS の長さで横断辺 (latus transversum) といわれる。放物線には横断辺はない。

円錐曲線において，曲線上の 2 点を結ぶ線分を弦といい，1 組の平行な弦をすべて 2 等分する直線を直径 (diametros，diameter) という。上の図では。TZ が (1 つの) 直径となる。

また，ZI のように，直径に対して定められた角度 (多くは直角) で引かれた線分は縦線 (ordinate : 指定されたもの) といわれる。そして，円錐曲線とその軸 —— 線対称の対称軸のこと —— との交点，図中では T，は頂点 (vertex) といわれ，TZ のような，円錐曲線とその直径との交点から縦線の端までの (直径上の) 線分は横線または切片 (abscissa : 切り取られたもの) といわれる。

因みに ……

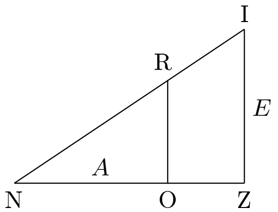
ὑπερβολή : *a throwing beyond* others, *an overshooting*, *superiority*; *excess*, *over-great degree* of a thing; *overstrained phrase*, *hyperbole*; *a crossing over* mountains; (from Mid.) *a deferring*, *delay*,「過剰にあてはめる」

παλαβολή : *juxta-position*, *comparison*; *a comparison*, *illustration*, *analogy*; *a parable*, i. e. *a fictitious narrative by which some religious* or *moral lesson is conveyed*; *a by-word*, *proverb*，「ちょうど等しくあてはめる」

ἔλλειψις : *falling short*, *defect*; *the conic section ellipse*; (Gramm.) *ellipse*，「不足にあてはめる」

軌跡の方程式の次の種類のものは，$A\ q.$ が $E\ q.$ に等しくされるか，あるいは $E\ q.$ に対して与えられた比にあるか，あるいは，また，$A\ q.\ +\ A$ in E が $E\ q.$ に対して与えられた比にあるかである。最後に，この場合は，すべての方程式が平方の限界の中に含まれており，それらの同次のものはすべて A の平方によって，あるいは E の平方によって，あるいは長方形 A in E によって作用されている。

これらのすべての場合において，点 I は「直線」になり，そのことの証明は非常に容易である。



NZ quad. + NZ in ZI が ZI quad. に対して与えられた比にあるとしよう。任意に［ZI に］平行な OR が引かれると，証明することは非常に容易であるように，NO の平方 + NO in OR は OR の平方に対して同じ比にあるであろう。それゆえ，点 I は位置において与えられた直線になるであろう。

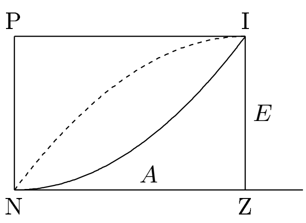
なぜならば。任意の点，例えば O，がとられ，NO の平方 + NO in OR が OR の平方に対して与えられた比になるとしよう。結ばれた NR は位置において与 96
えられるであろうし，命題を満足させるであろう。そして，そのすべての同次のものが未知量のベキあるいはそれらによる長方形によって作用されるであろう，任意の方程式において同じことが起きるであろう。個々の場合を綿密に概説することは無用である。

もし未知量のベキあるいはそれらによる長方形によって同次のものが混ぜ合わされる —— 一部は完全に与えられたものであり，また一部は別の未知量が掛けられた与えられた直線によるものである —— ならば，構成はより難しいものになるであろう。私たちは個々の場合を簡潔に構成し，そして，証明する。

もし

$A\ q.$ が D in E に等しくされる

ならば，点 I は「放物線」になる。



NP が ZI に平行になるとし，直径 NP に関して，その直立辺が与えられた直線 D であり，縦線 (applicatus) が NZ に平行なものである，放物線が描かれるとすると，点 I は位置において与えられたこの放物線になるであろう。

作図から，D in NP による長方形は PI の平方に等しくされるであろう。すなわち，D in IZ による長方形が NZ の平方に等しくされるであろう。それゆえ，

D in E が $A\ q.$ に等しくされる

であろう。

$A\ q.$ に与えられたもの掛ける E による同次のものが，あるいは $E\ q.$ に与えられたもの掛ける A による同次のものが混ぜ合わされている，すべて［の方程式］はこの［ような形の］方程式に非常に容易に還元されるであろう。そして，完全に与えられた［ものである］同次のものが方程式に混 97
ぜ合わされているとしても同じことが起きるであろう。

$$E\ q. \text{ が } D \text{ in } A \text{ に等しい}$$

としよう。

先ほどの図において，頂点 N，直径 NZ に関して放物線が描かれるとし，その直立辺を D とし，縦線が直線 NP に平行であるとすると，明らかなように，それは命題を明らかなものにするであろう。

$$B\ q. - A\ q. \text{ が } D \text{ in } E \text{ に等しい}$$

とおかれるとしよう。ゆえに，

$$B\ q. - D \text{ in } E \text{ が } A\ q. \text{ に等しくされる}$$

であろう。

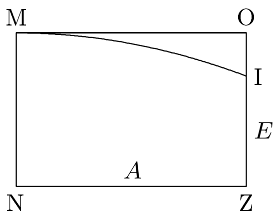
$B\ q.$ が D で割られるとし，そして，［$B\ q.$ が］D in R に等しいとしよう。ゆえに，

$$D \text{ in } R - D \text{ in } E \text{ が } A\ q. \text{ に等しくされる}$$

であろう。そして，それゆえ，

$$D \text{ in } (R - E) \text{ が } A\ q. \text{ に等しくされる}$$

であろう。そして，それゆえ，この方程式は先ほどの［形の］ものに還元されるであろう。なぜなら，直線 $R - E$ が E そのものの代わりになるからである。



なぜならば。NM が ZI に平行で，R に等しくなるとし，点 M を通って NZ に平行に MO が引かれるとしよう。点 M および直線 MO は位置において与えられるであろう。この作図において，OI は $R - E$ に等しくされる。ゆえに，D in OI は NZ quad. あるいは MO quad. に等しくされる。頂点 M，直径 MN に関して描かれた，その直立辺が D で，縦線は NZ に平行である，放物線が，作図から明らかなように，命題を明らかなものにするであろう。

もし

$$B\ q. + A\ q. \text{ が } D \text{ in } E \text{ に等しい}$$

ならば，上のように，

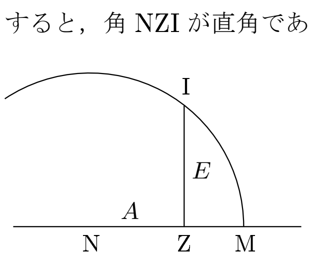
$$D \text{ in } E - B\ q. \text{ は } A\ q. \text{ に等しくされる}$$

98 などであろう。同様に，E および $A\ q.$ によって作用されたすべての方程式が構築されるであろう。

しかし，$A\ q.$ はしばしば $E\ q.$ および完全に与えられた同次のものによって混ぜ合わされる。

$$B\ q. - A\ q. \text{ が } E\ q. \text{ に等しくされる}$$

とすると，角 NZI が直角であるとき，点 I は位置において与えられた「円」になる。



NM が B に等しいとしよう。中心 N，距離 NM で描かれた円が命題を明らかなものにするであろう。すなわち，その円周自身の上に任意の点，例えば I，をとると，明らかなように，ZI の平方は NM の平方 (あるいは $B\ q.$) − NZ の平方 (あるいは $A\ q.$) に等しくされるであろう。

$A\ q.$ および $E\ q.$ によって，そして，A あるいは E に与えられた直線が掛けられたものによって，作用されたすべて［の方程式］は，角 NZI が直角であり，さらに，$A\ q.$ の係数が $E\ q.$ の係数に等しくされるならば，この［ような形の］方程式に還元されるであろう。

$$B\ q. - D \text{ in } A \text{ bis} - A\ q. \text{ が } E\ q. + R \text{ in } E \text{ bis に等しい}$$

としよう。

$E+R$ が E の代わりとして，両方に $R\ q.$ が加えられると，

$$R\ q. + B\ q. - D \text{ in } A \text{ bis} - A\ q. \text{ は } E\ q. + R\ q. + R \text{ in } E \text{ bis に等しく}$$

なるであろう。$D+A$ が A 自身の代わりとして，$R\ q.$ および $D\ q.$［の和］に $D\ q.$ が加えられ，そして，平方 $R\ q.$，$B\ q.$ および $D\ q.$ の和が $P\ q.$ に等しくされるとしよう。ゆえに，

$$P\ q. - D\ q. - D \text{ in } A \text{ bis} - A\ q. \text{ が } R\ q. + B\ q. - D \text{ in } A \text{ bis} - A\ q. \text{ に等しくされる}$$

であろう。なぜならば，つくり方から，

$$P\ q. - D\ q. \text{ が } R\ q. + B\ q. \text{ に等しくされる}$$

からである。

それゆえ，もし $A+D$ 自身の代わりに A をとり，$E+R$ の代わりに E をとるならば， 99

$$P\ q. - A\ q. \text{ が } E\ q. \text{ に等しく}$$

なるであろうし，方程式は先ほど［の形］のものに還元されるであろう。

> ここに出てきた bis は「2 倍」を表す。従って，念のため ……
> $b^2-2da-a^2=e^2+2re$ とするとき，両辺に r^2 を加えると，$r^2+b^2-2da-a^2=e^2+r^2+2re=(e+r)^2 \cdots (*)$ となる。
> いま，$r^2+b^2+d^2=p^2$ とすると，$p^2-d^2=r^2+b^2$ であるから，$p^2-d^2-2da-a^2=r^2+b^2-2da-a^2 \cdots (**)$ となる。
> 従って，$(*)$，$(**)$ から，$p^2-(d+a)^2=p^2-d^2-2da-a^2=r^2+b^2-2da-a^2=(e+r)^2$ となる。そこで，$d+a=A$，$e+r=E$ と置き換えれば，$p^2-A^2=E^2$ となる。

同様の論法によって同様の方程式が還元されるであろう。そして，この方法によって，私たちはアポロニウスの「平面軌跡論」の第 2 巻のすべての命題を構築した。そして，私たちは前の 6 つ［の命題］は任意の点について軌跡をもつことを証明した。確かに，それは驚くべきことであり，おそらくはアポロニウスには知られていなかったことである。

しかし，

$$B\ q. - A\ q. \text{ が } E\ q. \text{ に対して与えられた比をもつ}$$

とすると，点 I は「楕円」になるであろう。

MN が B に等しいとし，頂点 M を通って，直径 NM，中心 N として，楕円が描かれるとし，その縦線が直線 ZI に平行であり，縦線の平方が直径の切片による長方形に対して与えられた比をもつものとしよう。点 I はこのような種類の楕円になるであろう。そして実際，NM の平方 − NZ の平方は直径の切片による長方形に等しくされる。

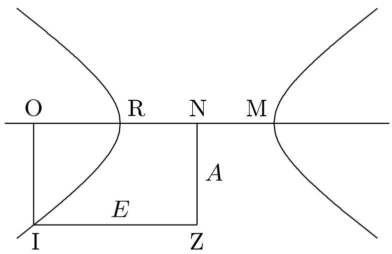
一方の側の中の $A\ q.$ が反対の符号によって，そして，異なった係数によって作用される $E\ q.$ と対比させられるであろう，同様［の方程式］はこの［ような形の方程式］に還元されるであろう。なぜならば。もし係数が同じであるとし，角が直角であるとするならば，軌跡は，既に述べたように，円になるであろう。それゆえ，係数が同じであるとしても，角が直角でないとすると，軌跡は楕円になるであろうし，そして，方程式において与えられたものおよび A あるいは E による同次のものが混ぜ合わされるとしても，還元は既に繰り返し言及した技法によるものになるであろう。

もし

$A\ q. + B\ q.$ が $E\ q.$ に対して与えられた比にある

ならば，点 I は「双曲線」になる。

NO が ZI に平行になるとし，与えられた比が $B\ q.$ が NR の平方に対するものと同じであるとす
100 ると，ゆえに，点 R は与えられるであろう。直径 RO に関して，頂点 R を通って，中心を N として，双曲線が描かれるとし，その縦線が NZ に平行であり，直径全体［横断辺 MR］および RO による長方形が RO の平方といっしょになって OI の平方に対して，NR の平方が $B\ q.$ に対する，与えられた比にあるとしよう。ゆえに，比較されることによって，MOR (MN は NR に等しくおかれている) による長方形は NR の平方といっしょになって $B\ q.$ がいっしょになった OI の平方に対して，NR の平方が $B\ q.$ に対する，与えられた比にあるであろう。しかし，長方形 MOR は NR に平方といっしょになって NO の平方，あるいは ZI の平方，あるいは $E\ q.$ に等しくされる。そして，OI の平方は $B\ q.$ といっしょになって $B\ q.$ がいっしょになった NZ の平方 (あるいは $A\ q.$) に等しくされる。ゆえに，



$E\ q.$ が $B\ q. + A\ q.$ に対するように NR の平方が $B\ q.$ に対する

し，そして，逆にされることによって，

$B\ q. + A\ q.$ は $E\ q.$ に対して与えられた比にある

ことになる。それゆえ，点 I は位置において与えられた双曲線になる。

私たちが既に使用したものと同じ技法によって，$A\ q.$ がもう一方の側の中に $E\ q.$ と同じ作用の符号をもつとするならば，与えられたものがいっしょになった $A\ q.$ および $E\ q.$ によって，あるいは単純にあるいは A または E に与えられたものが掛けられたものによる同次のものが混ぜ合わされて，作用される，すべて［の方程式］はこの［ような形の］方程式に還元されるであろう。なぜならば，もし反対［の符号］であるならば，命題は円あるいは楕円によって結論づけられるだろうからである。

ここまでのことをまとめてみると ……

(1) $dx = by \longrightarrow$ 直線
(2) $xy = z^2 \longrightarrow$ 双曲線
(3) $x^2 = y^2$，$x^2 : y^2$ が与えられた比，$(x^2 + xy) : y^2$ が与えられた比 $\longrightarrow$ 直線
(4) $x^2 = dy \longrightarrow$ 放物線
(5) $b^2 - x^2 = y^2 \longrightarrow$ 円
(6) $(b^2 - x^2) : y^2$ が与えられた比 $\longrightarrow$ 楕円
(7) $(x^2 + b^2) : y^2$ が与えられた比 $\longrightarrow$ 双曲線

$A\ q.$ および $E\ q.$ が混ぜ合わされているにもかかわらず，A in E による同次のものが与えられたものとともに作用される，などとするときには，［そのような］すべての方程式［の処理］は非常に厄介である。

$B\ q. - A\ q.$ bis が A in E bis $+ E\ q.$ に等しくされる

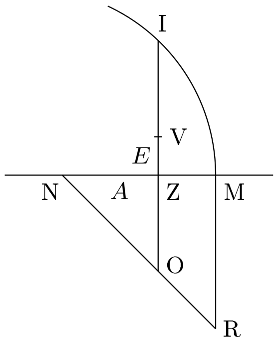
としよう。

101 $A + E$ が同次のものの中のもう一方の辺であるとするために，両方に $A\ q.$ が加えられると，ゆ

えに，

$$B\ q. - A\ q. \text{ が } A\ q. + E\ q. + A \text{ in } E \text{ bis に等しくされる}$$

であろう。



もし望むならば，$A+E$ の代わりに E がとられ，そして，先ほどのことから，円 MI が命題を明らかなものにするとしよう。すなわち，

$$\text{MN quad. (あるいは } B\ q.) - \text{NZ quad. (あるいは } A\ q.) \text{ が}$$
$$\text{ZI の平方 (あるいは } \overline{A+E} \text{ の平方) に等しくされる}$$

としよう。VI が NZ，あるいは A，に等しくなるとすると，ゆえに，ZV は E に等しくされる。さらに，この問題において，点 V，あるいは直線 E の端点，はまさに私たちが捜し求めているものである。ゆえに，そのような線に関して考察されるであろうことおよび証明されるであろうことは点 V［に関して］でよい。

MR が ZI に平行で，MN に等しくなるとし，NR が結ばれ，そこまで延長された IZ が点 O で切断するとしよう。MN が MR に等しいから，ゆえに，NZ は ZO に等しくされるであろう。しかし，NZ は VI に等しくされる。ゆえに，VO 全体と ZI 全体は等しい。そして，それゆえ，

$$\text{MN の平方} - \text{NZ の平方は VO に平方に等しくされる。}$$

さらに，三角形 NMR が形において与えられる。ゆえに，NM の平方は NR の平方に対して比が与えられ，そして，それゆえ，NZ の平方は NO の平方に対して比が与えられるであろう。それゆえ，

$$\text{MN の平方} - \text{NZ の平方が NR の平方} - \text{NO の平方に対する}$$

比が与えられる。しかし，私たちは 102

$$\text{OV の平方は MN の平方} - \text{NZ の平方に等しい}$$

ことを証明した。ゆえに，NR の平方 − NO の平方が OV の平方に対する比が与えられる。さらに，点 N および R，および角 NOZ が与えられる。ゆえに，点 V は，上の方で証明されたことから，楕円になる。

上の場合に関して，残りのものは異なってはいない方法によって還元されるであろう。そこでは，A in E による同次のものは，一部は与えられた同次のものによって，また一部は $A\ q.$ あるいは $E\ q.$ によって，あるいは，さらに，与えられた直線が掛けられた A および E によって，混ぜ合わされるであろうし，このことの探求は非常に容易である。なぜならば，つねに，既知の三角形の形の助けによって問題は構築されるからである。

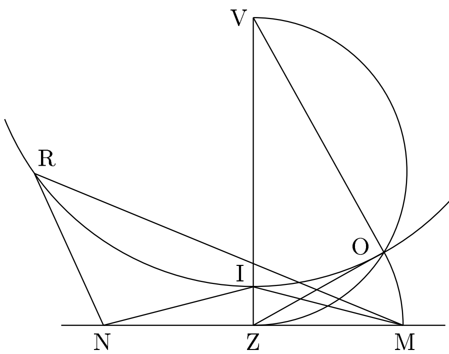
それゆえ，私たちには，古代の人々が解くことができずに残しておいた平面および立体の軌跡については何であれ，簡潔にそして明快に理解された。そして，アポロニウスの「平面軌跡論」の第 1 巻の最後の命題に関係するであろうすべての場合は次のような軌跡からなるであろうし，その主題に関係しているすべてのものは完全に苦もなく明らかにされるであろう。

しかし，最後の軌跡として，最も美しいこの命題を付け加えることが好ましく，その容易さはすぐに知られるようになるであろう。

もし，位置において与えられた任意個数の直線について，1 つのそして同一の点からそれぞれに与えられた角度で直線が引かれ，そして，それぞれの引かれたものの平方［の和］が与えられた広

さに等しいとするならば，その点は位置において与えられた立体軌跡に触れる。

> アポロニウス「平面軌跡論」第 1 巻の最後の命題は次のとおり。
> もし何らかの点から位置において与えられた平行な直線に与えられた角度でもって，その与えられた直線自身の上の点において止まり，［与えられた］比をもつかあるいは与えられた広さを囲むかのいずれかである，直線が引かれ，引かれた［線］自身による平方［の和］かあるいは平方の超過分［差］のいずれかが与えられた広さに等しいとするならば，その点は位置において与えられた直線に触れるであろう。



実際の方法が 1 つの例になる。2 つの与えられた点 N，M に対して，もし直線 IN，IM が結ばれるならば，直線 IN，IM の平方［の和］が三角形 INM に対して与えられた比をもつような，軌跡が見出されるであろうこと。

直線 NM が B に等しくされるとし，直線 ZI が，［NM に］直角として，項 E であるといわれ，NZ が A であるといわれるとすると，ゆえに，技法の規則によって，

A $q.$ bis + B $q.$ − B in A bis + E $q.$ bis が長方形 B in E に対して

与えられた比をもつであろうし，［問題の］本質が既に述べられた規則によって解かれることによって，作図は次のように進むであろう。

103 NM が Z において半分に切断されるとし，点 Z から垂直な ZV が立てられるとし，そして，ZV の 4 倍が NM に対して同じ与えられた比になるとしよう。VZ の上に描かれた半円 VOZ において，ZM 自身に等しい ZO が結ばれるとし，VO が結ばれ，中心 V，距離 VO として円 OIR が描かれるとして，その上に任意の点，例えば R，がとられ，直線 RN，RM が結ばれるとしよう。私は，RN，RM の平方［の和］は三角形 RNM に対して与えられた比にある，と断言する。

この［軌跡論の］発見がもし私たちによって最近に復元された「平面軌跡論」2 巻より先行していたならば，軌跡の定理の構成は，確かに，より洗練されたものになっていたであろう。しかし，その所産が未熟で早熟であったとしても，私たちは今まで後悔してはいないし，ある程度はそれ自身の理論に関係している，その初期の荒削りで単純な業績が，後世の人々によって実り豊かな種類のものに形成され，新しい発見によって強化され，成長するということを拒むものではない。それどころか，学問に関係している隠れた才能の進歩を，そして，それ自身を前進させる技法そのものを内部にもつということを認識させられたのである。

軌跡による立体の問題の解を含む
軌跡に関する「序説」への補遺

『全集』pp.103–110

原題は *Appendix ad Isagoge Topicam, Continens Solutionem Problematum Solidorum per Locos*。フェルマがこの論考に初めて言及したのは 1638 年 2 月のメルセンヌ (Marin Mersenne : 1588–1648) あての書簡の中ということである。

軌跡の線が明らかにされる方法が［次のことを］明らかにした。立体の問題の解を上述の非常に 103
洗練された方法によって導くことができるかどうかが探究されるであろうことが残っている，と。 104
このためには，未知量の大きさがその限界の外へさまよい出るであろう自由が制限されるようにするべきである。なぜならば，軌跡において提示された問題を満足させる点は無限にあるからである。

それゆえ，2 つの軌跡の方程式によって問題が決定されることが最も好都合である。なぜならば，位置において与えられた 2 つの軌跡の線が相互に切断され，そして，位置において与えられた，切断する点が問題を無限のものから指定された限界のものに追い込むからである。

このことは例を用いて簡潔にそして明快に説明される。

$$A\ c. + B \text{ in } A\ q. \text{ が } Z\ pl. \text{ in } B \text{ に等しい}$$

と提示されるとしよう。

ここに，$c.$ (cubus) は「立方」すなわち「3 乗」を表す。

除法 —— 前者は A での，後者は B での —— によってその立体が軌跡に還元されるために，適切に，方程式の両方の側が立体 B in A in E に等しいとできる。

それゆえ，

$$A\ c. + B \text{ in } A\ q. \text{ が } B \text{ in } A \text{ in } E \text{ に等しくされる}$$

とき，ゆえに，

$$A\ q. + B \text{ in } A \text{ が } B \text{ in } E \text{ に等しくされる}$$

であろうし，そして，私たちの方法によって明らかなように，E の端点自身は位置において与えられた放物線になるであろう。

次いで，

$$Z\ pl. \text{ in } B \text{ が } B \text{ in } A \text{ in } E \text{ に等しくされる}$$

とき，ゆえに，

$$Z\ pl. \text{ が } A \text{ in } E \text{ に等しくされる}$$

であろうし，そして，私たちの方法によって，E の端点自身は位置において与えられた双曲線になるであろう。

しかし，私たちは既に位置において与えられた放物線になることを証明した。ゆえに，それは位置において与えられるであろうし，そして，解析から総合への逆行は容易である。

すべての立方の方程式における方法も異なってはいない。なぜならば，一方で A によって作用されたすべての立体から，他方で完全に与えられた立体からあるいはまた A または $A\ q.$ によって

作用された立体とともに，つくられたものは先ほどの類似の方程式につくり変えることができるだろうからである。

平方の平方の方程式に関する例

$$A\ qq. + B\ s.\ \text{in}\ A + Z\ q.\ \text{in}\ A\ q.\ \text{が}\ D\ pp.\ \text{に等しくされる}$$

が提示されるとしよう。

ここに，$qq.$ (quadrato quadratum) は「平方の平方」すなわち「4 乗」を，$s.$ (solidum) は「立方」(3 次) を，$pp.$ (plano planum) は「平面的平面」(4 次) を，それぞれ表す。

105 ゆえに，

$$A\ qq.\ \text{が}\ D\ pp. - B\ s.\ \text{in}\ A - Z\ q.\ \text{in}\ A\ q.\ \text{に等しくされる}$$

であろう。これが 2 つの同次のもの［の積］$Z\ q.$ in $E\ q.$ に等しくされるとしよう。

それゆえ，

$$A\ qq.\ \text{が}\ Z\ q.\ \text{in}\ E\ q.\ \text{に等しくされる}$$

とき，ゆえに，平方を開平することによって，

$$A\ q.\ \text{が}\ Z\ \text{in}\ E\ \text{に等しくされる}$$

であろうし，そして，E の端点は位置において与えられた放物線になるであろう。

次いで，

$$D\ pp. - B\ s.\ \text{in}\ A - Z\ q.\ \text{in}\ A\ q.\ \text{が}\ Z\ q.\ \text{in}\ E\ q.\ \text{に等しくされる}$$

とき，すべて［の項］を $Z\ q.$ で割ると，

$$\frac{D\ pp. - B\ s.\ \text{in}\ A}{Z\ q.} - A\ q.\ \text{が}\ E\ q.\ \text{に等しくされる}$$

であろうし，そして，私たちの方法によって，E の端点は位置において与えられた円になるであろう。しかもそのうえ，それは位置において与えられた放物線になる。ゆえに，それは与えられる。

すべての平方の平方の方程式が解かれるであろう方法も異なっていない。なぜならば，ヴィエートの方法 (「改良について」第 I 章) によって，立方による，および一方では未知量の平方の平方による，他方では残りの同次のものによってつくられたものによる，作用に関しては清められるであろうし，放物線，円あるいは双曲線によって，問題は解かれるだろうからである。

「ヴィエート (François Viète : 1540–1603) の方法」とは，方程式を還元する方法のことで，「方程式の再検討および改良についての 2 つの論文」(*De Aequationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo*) の第 2 論文「方程式の改良について」(*De Emendatione Aequationum*) で述べられている。
その第 1 章「数［値解法］における困難さに対して，方程式が前もって準備されるであろう 5 つの通常の方法について」では方程式の還元・変形について，

(1) わずかな量による浄化
(2) 最初と最後［の項の比］による変形
(3) 倒置
(4) 同等性
(5) 補足付加による漸層法

という 5 つの方法が挙げられている。
『全集』では，スホーテン (Frans van Schooten : 1615–1660) 編集の『ヴィエート数学論文集』(*Francisci Vietae Opera Mathematica*，1646 年) の「132 ページを見よ」という脚注がついて

いる。

例として,「連続的な比例における 2 つの中項を見出すこと」が提示されるとしよう。

2 つの直線を,大きい方が B,小さい方が D とし,それらの間に比例する 2 つの中項が見出されるものとしよう。もし大きい方の中項が A とおかれるならば,

A $c.$ が B $q.$ in D に等しく

なるであろう。

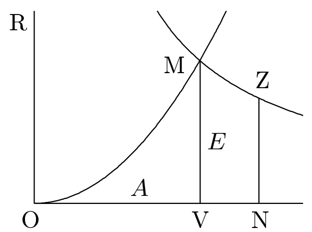
それらが 1 つの同次のもの B in A in E に等しくされるとしよう。[すると,] 前者は 106

A $q.$ が B in E に等しい

となり,後者は

A in E が B in D に等しい

となるであろう。そして,それゆえ,問題は双曲線および放物線の交点によって籠絡されるであろう。



なぜならば。任意の直線 OVN が位置において与えられるとし,その上に点 O が与えられるとしよう。与えられた直線を B および D として,その間に 2 つの比例する中項が見出されるであろう [ことが必要である]。直線 OV が A に等しく,そして,直線 VM が,OV そのものと直角で,E に等しくおかれるとしよう。

最初の方程式

A $q.$ が B in E に等しくされる

から,あたかも頂点であるような点 O を通って描かれるであろう放物線をおき,その直立辺を B,直径そのものを VM に平行 [な線],そして縦線そのものを OV に平行 [な線] としよう。それゆえ,この放物線は点 M を通過するであろう。

第 2 の方程式

B in D が A in E に等しくされる

から,直線 ON の上に自由に点,例えば N,がとられて,そこから垂直な NZ が立てられ,そして,長方形 ONZ が長方形 B in D に等しくなるとしよう。さらに,垂直な OR が立てられるとしよう。漸近線 RO,OV に関して,点 Z を通って描かれるであろう双曲線は,私たちの軌跡の方法によって,位置において与えられるであろうし,そして,点 M を通過するであろう。

しかもそのうえ,先ほど私たちが描いた放物線は位置において与えられるであろうし,同じ点 M 107
を通過する。それゆえ,点 M は位置において与えられ,もしそこから垂直な MV が下ろされるならば,点 V は与えられるであろうし,そして,直線 OV は私たちが捜し求めている連続的に比例する 2 つのものの大きい方であろう。

それゆえ,2 つの中項は放物線および双曲線の交点を通ることが見出されたことになる。

もし問題を平方の平方にまで拡張することを望むならば,すべて [の項] に A が掛けられて,

A $qq.$ が B $q.$ in D in A に等しくされる

であろう。先ほどの方法と同様に,それらが 1 つの同次のもの B $q.$ in E $q.$ に等しくされるとすると,2 つの方程式は,確かに,

$A\ q.$ が B in E に等しい，および，D in A が $E\ q.$ に等しい

になるであろうし，それらは 1 つの位置において与えられた放物線を与えるであろう。それゆえ，この場合は，比例中項の (mesolabii) 作図は 2 つの放物線の交点によるものになるであろう。

mesolabii は mesolabium の属格・単数形。

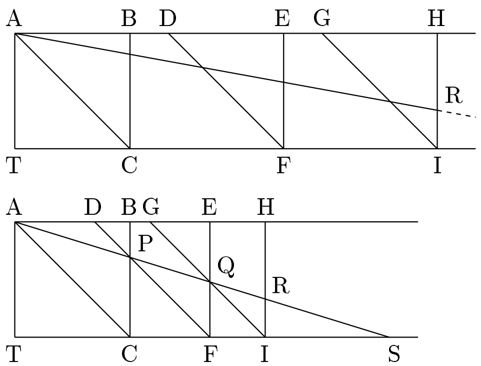
mesolabium, -ii, n : *a mathematical instrument for finding mean proportional lines, a mesolabe* ［ギリシア語では μεσόλαβος または μεσόλαβον］

メソラビウム (mesolabium) は，メソラビオ (mesolabio) あるいはメソラボス (mesolabos)，メソラボス・コンパスなどともいわれ，日本語では比例中項器といわれるらしい。

メソラビウムは，エラトステネス (Ἐρατοσθένης (Eratosthenes) : 前 275–前 194) によって立方体倍積問題［ある立方体に対して，体積がその立方体の体積の 2 倍である立方体 (の 1 辺) を求めよ，という問題］を解決するために発明された。

坂崎 紀「平均律の歴史的位置」(聖徳大学音楽文化研究会『音楽文化研究』第 1 号所収，2001 年) によれば，メソラビウムは「3 枚の正方形の板をずらして重ね合わせることにより，幾何学的な方法で中間比を求める」ための器具であって，スペインの音楽理論家でオルガン奏者でもあるサリナス (Francisco de Salinas : 1513–1590) は『音楽論 7 巻』(*De Musica Libri Septem* : 1577 年) の中で「メソラビウムを用いて中間比を求める方法に言及している」という。

また，デカルト (René Descartes : 1596–1650) は『幾何学』(*La Geometrie* : 1637 年) 第 3 巻において同様の器具を用いた比例中項の求め方を述べている (［8］pp.17–18，p.51)。



左上図 —— 一定の間隔 AT で引かれた平行線の間に，3 つの直角二等辺三角形 ABC，DEF，GHI があり，三角形 ABC は固定されているが, 残りの三角形 DEF，GHI は左右に動かすことができるものとする。さらに，辺 HI 上には点 R があり，これは上下に動かすことができるものとする。

左下図 —— まず，与えられた外項 k，m $(k > m)$ に対して，$\mathrm{AT} : \mathrm{RI} = k : m$ となるように点 R の位置を定める。

次に，2 つの三角形 DEF，GHI を適当に動かして，AR と GI の交点 Q を辺 EF が通り，AR と DF の交点 P を辺 BC が通るように調整する。

このようにすると，三角形 AST 内にできるいくつかの三角形の比例関係から，$\mathrm{PC}^2 = \mathrm{QF} \times \mathrm{AT}$ ［$p^2 = qk$］，$\mathrm{QF}^2 = \mathrm{PC} \times \mathrm{RI}$ ［$q^2 = pm$］がいえるから，2 つの比例中項 PC，QF ［$k : p = p : q = q : m$］がつくり出される，というのがメソラビウムの原理である。

このとき，$\mathrm{QF}^3 = \mathrm{AT} \times \mathrm{RI}^2$，$\mathrm{PC}^3 = \mathrm{AT}^2 \times \mathrm{RI}$ となるから，$\mathrm{AT} = 2$，$\mathrm{RI} = 1$ とすれば，$\mathrm{QF}^3 = 2$，$\mathrm{PC}^3 = 4$ となって，QF が立方体倍積問題の解になるという訳。

前のおよび後の作図はアルキメデス (Ἀρχιμήδης (Archimēdēs) : 前 287?–前 212) ［の著作］に関するエウトキオス (Εὐτόκιος (Eutocius) : 480?–540?) の著作の中にあり，責任のあるこの方法によって容易に再現される。

双曲線と放物線による方法については，『アルキメデス全集』(J. L. Heiberg (ed.)，*Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii*) の第 3 巻 (vol.III，1881) に収載されているエウトキオスによる「『球と円柱について』第 2 巻の注釈」(*Eutocii Commentarium in Librum II*

De Sphaera et Cylindro) の中のメナイクモス (Μέναιχμος (Menaechmus)：前 380–?前 320?) に関する部分［pp.92–97］に，
メソラビウムについては，同じ「注釈」のエラトステネスに関する部分［pp.102–115］に，
それぞれ記述がある。
この「注釈」には彼ら以外の人たちによる比例中項の求め方も紹介されている。

それゆえ，それによって平方の平方の方程式を中間の立方［の方程式］によって平面の根に変える，ヴィエートの「補足付加による漸層法」は消滅するはずである。なぜならば，既に明らかになったように，平方の平方［の問題］は立方の問題と同様に同等の洗練さ，容易さおよび簡潔さによって解かれ，私が思うに，より洗練されたものにはできないからである。

このような方法の洗練さを明らかにするために，それでは，「立方および平方の平方のすべての問題の作図を放物線および円によって」[行おう]。

［方程式］

$$A\ qq. - Z\ s.\ \mathrm{in}\ A \text{ が } D\ pp. \text{ に等しい}$$

が提示されるとすると，ゆえに，

$$A\ qq. \text{ が } Z\ s.\ \mathrm{in}\ A + D\ pp. \text{ に等しくされる}$$

であろう。$A\ q. - B\ q.$ による平方または別の任意の平方がつくられるとすると，平方は 108

$$A\ qq. + B\ qq. - B\ q.\ \mathrm{in}\ A\ q.\ \mathrm{bis}$$

になるであろう。

補充として方程式のそれぞれの側に

$$B\ qq. - B\ q.\ \mathrm{in}\ A\ q.\ \mathrm{bis}$$

が加えられると，

$$A\ qq. + B\ qq. - B\ q.\ \mathrm{in}\ A\ q.\ \mathrm{bis} \text{ が}$$
$$B\ qq. - B\ q.\ \mathrm{in}\ A\ q.\ \mathrm{bis} + Z\ s.\ \mathrm{in}\ A + D\ pp. \text{ に等しく}$$

なるであろう。

［そこで］

$$B\ q.\ \mathrm{bis} \text{ が } N\ q. \text{ に等しい}$$

とし，そして，それぞれの同次のもの［の全体］，あるいは方程式の［それぞれの］側，が $N\ q.$ in $E\ q.$ に等しくされると，前者は，平方の開平によって，

$$A\ q. - B\ q. \text{ が } N\ \mathrm{in}\ E \text{ に等しい}$$

となるであろう。そして，それゆえ，私たちの方法によって，E の端点は放物線になるであろう。後者は

$$\frac{B\ qq.}{N\ q.} - A\ q. + \frac{Z\ s.\ \mathrm{in}\ A}{N\ q.} + \frac{D\ pp.}{N\ q.} \text{ が } E\ q. \text{ に等しい}$$

となるであろう。そして，それゆえ，私たちの方法によって，E の端点は円になるであろう。

それゆえ，放物線および円の描画によって問題が解かれる。

この方法は立方だけでなく平方の平方のすべての場合に容易に拡張される。なぜならば，$A\ c.$ によって作用されないだけでなく，一方の側の中に $A\ qq.$ が，他方［の側］の中に任意の同次のものがあるように配慮されるだろうからである。しかし，ヴィエートの浄化［の方法］によって，すべての平方の平方の方程式は立方による作用から自由にされる。ゆえに，すべて［の場合］において方法は同じであろう。

さらに，立方の方程式がヴィエートの方法によって平方による作用から自由にされるならば，A が掛けられたすべての同次のものによって，その平方の平方の方程式は立方によって作用されるであろう同次のものが全くないものになるであろうし，それゆえ，上の方法によって解かれるであろう。

109 第 2 の方程式において，一方の側の中に $A\ q.$ が，他方［の側］の中に，反対の作用の符号によって見出されるはずである，$E\ q.$ があるだけであるように配慮されるであろうし，それはつねに非常に容易である。

なぜならば。別の場合において，私たちがすべてを概説すべきであるように，

$$A\ qq.\ \text{が}\ Z\ pl.\ \text{in}\ A\ q.\ -\ Z\ s.\ \text{in}\ D\ \text{に等しい}$$

としよう。

$A\ q.$ による任意の平方 $-$ 与えられたもの，例えば $B\ q.$，の任意の平方がつくられるとすると，

$$A\ qq.\ +\ B\ qq.\ -\ B\ q.\ \text{in}\ A\ q.\ \text{bis}$$

になるであろう。

方程式の両方の側に，補充として，

$$B\ qq.\ -\ B\ q.\ \text{in}\ A\ q.\ \text{bis}$$

が加えられるとすると，

$$A\ qq.\ +\ B\ qq.\ -\ B\ q.\ \text{in}\ A\ q.\ \text{bis が}$$
$$B\ qq.\ -\ B\ q.\ \text{in}\ A\ q.\ \text{bis}\ +\ Z\ pl.\ \text{in}\ A\ q.\ -\ Z\ s.\ \text{in}\ D\ \text{に等しい}$$

となるであろう。それゆえ，適切に除法が行われるようにするために，第 2 の方程式において，$B\ q.$ bis および $Z\ pl.$ の間の差が，例えば，$N\ q.$ であるととられ，方程式の両方の側が $N\ q.$ in $E\ q.$ に等しくされるとしよう。前者は

$$A\ q.\ -\ B\ q.\ \text{が}\ N\ \text{in}\ E\ \text{に等しい}$$

となり，後者は

$$\frac{B\ qq.}{N\ q.} - A\ q. - \frac{Z\ s.\ \text{in}\ D}{N\ q.}\ \text{が}\ E\ q.\ \text{に等しい}$$

となるはずである。

次いで，罰せられるであろう $B\ q.$ *bis* は Z *plano* にまさっていなければならず，そうでなければ，$A\ q.$ は不足の符号によって作用されていたはずはなく，私たちは円の代わりに双曲線を見出していたはずである。救済は容易である。なぜならば，私たちは $B\ q.$ を自由にとり，それゆえ，それ自身の 2 倍が Z *plano* より大きくとることに問題はないからである。さらに，軌跡の方法によって，その一方の側においては 1 つの未知量の平方が符号 $+$ によって作用され，他方［の側］においては別の未知量の平方が符号 $-$ によって［作用される］ような，方程式からつねに円がつくり出されることは明らかである。

もしこのことの例として 2 つの中項の発見を取り上げるならば，

$$A\ c.\ \text{が}\ B\ q.\ \text{in}\ D\ \text{に等しい}$$

および

$$A\ qq.\ \text{が}\ B\ q.\ \text{in}\ D\ \text{in}\ A\ \text{に等しい}$$

であろう。

110 両方の側に $B\ qq.\ -\ B\ q.$ in $A\ q.$ bis が加えられるとすると，

$$A\ qq.\ +\ B\ qq.\ -\ B\ q.\ \text{in}\ A\ q.\ \text{bis が}$$

$$B\ qq. + B\ q.\ \text{in}\ D\ \text{in}\ A - B\ q.\ \text{in}\ A\ q.\ \text{bis}\ \text{に等しくされる}$$

であろう。

［そこで］

$$B\ q.\ \text{bis}\ \text{が}\ N\ q.\ \text{に等しい}$$

とし，方程式のそれぞれの側が $N\ q.\ \text{in}\ E\ q.$ に等しくされるとすると，前者は

$$A\ q. - B\ q.\ \text{が}\ N\ \text{in}\ E\ \text{に等しい}$$

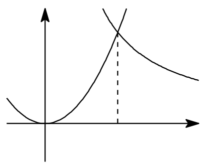
となり，そして，それゆえ，E の端点は放物線になるであろう。後者は

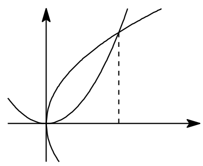
$$B\ q.\ \frac{1}{2} + D\ \frac{1}{2}\ \text{in}\ A - A\ q.\ \text{が}\ E\ q.\ \text{に等しい}$$

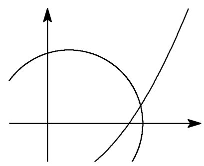
となり，E の端点は円になるであろう。

このことに注意を向けていた人は，角の 3 等分および［その他の］類似の，比例中項の問題を平面［の問題］に還元すること，すなわち［それらの問題を］直線および円によって解くこと，を無益に試すことになろう。

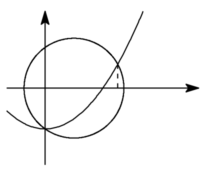
表題にいう「立体の問題」とは「連続的な比例における 2 つの中項を見出すこと」で，最初に $x^3 = b^2 d$ が取り上げられる［下左図，下中図］。
これが bxy に等しいとすると，$x^3 = bxy$ から $x^2 = by$ という放物線が，$b^2 d = bxy$ から $bd = xy$ という双曲線が得られ，これら 2 曲線の交点として x，y が求められる。
また，［両辺に x が掛けられた］$x^4 = b^2 dx$ が $b^2 y^2$ に等しいとすると，$x^4 = b^2 y^2$ から放物線 $x^2 = by$ が，$b^2 dx = b^2 y^2$ から放物線 $dx = y^2$ が得られる。





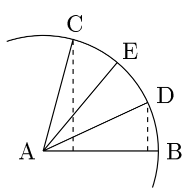


次に，$x^4 - z^3 x = d^4$，すなわち $x^4 = z^3 x + d^4$，が取り上げられる［上右図］。
両辺に $b^4 - 2b^2 x^2$ が加えられ，$n^2 = 2b^2$ と表されて，与えられた方程式の両辺が $n^2 y^2$ に等しいとおかれると，$x^4 + b^4 - 2b^2 x^2 = n^2 y^2$ から放物線 $x^2 - b^2 = ny$ が，$b^4 - 2b^2 x^2 + z^3 x + d^4 = n^2 y^2$ から円 $\left(x - \dfrac{z^3}{2n^2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{4n^2(b^4 + d^4) + z^6}{4n^4}$ が得られる。



最後に，再び，$x^4 = b^2 dx$ が取り上げられるが，今度は両辺に $b^4 - 2b^2 x^2$ を加えたうえで，$n^2 = 2b^2$ とする。
両辺が $n^2 y^2$ に等しいとされると，$x^4 + b^2 - 2b^2 x^2 = n^2 y^2$ から放物線 $x^2 - b^2 = ny$ が，$b^4 + b^2 dx - 2b^2 x^2 = n^2 y^2$ から円 $\left(x - \dfrac{1}{4}d\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{2}b^2 + \dfrac{1}{16}d^2$ が得られる。

このように，$x^3 = b^2 d$ あるいは $x^4 = b^2 dx$ は，放物線と双曲線，2 つの放物線，放物線と円を用いて解くことができる。が，円と直線だけでは解くことができない［最後に述べられているのはそのことである］。



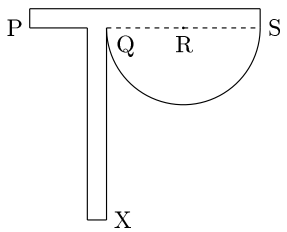
最後に触れられている「角の 3 等分」問題は，文字通り，任意に与えられた角 ∠BAC を 3 等分せよという問題である。
3 等分された角 ∠BAD を θ とするとき，$\cos 3\theta = \dfrac{a}{2}$，$\cos\theta = \dfrac{x}{2}$ とすると，$\cos\theta$ の 3 倍角の公式により，$\dfrac{a}{2} = 4\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 - 3\left(\dfrac{x}{2}\right)$ すなわち $x^3 - 3x = a$ が得られる。

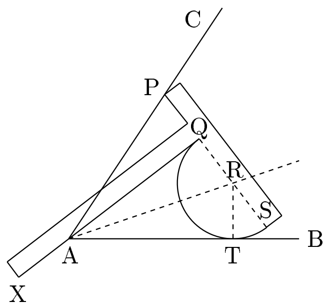
この方程式は角の 3 等分方程式といわれることがある。

そして，カルダノ (Girolamo Cardano : 1501–1576) の公式によれば，この角の 3 等分方程式の解 (の 1 つ) は $x = \sqrt[3]{\dfrac{a}{2} + \dfrac{\sqrt{a^2-4}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{a}{2} - \dfrac{\sqrt{a^2-4}}{2}}$ である。

角の 3 等分問題はコンパスと定規では，すなわち円と直線では，(一般には) 解決できないことが知られている。しかし，今なお，角の 3 等分の作図方法が見つかったと言い張る人がいるようで，そういう人のことを三等分屋とか三等分家というそうな。

なお，任意の角を 3 等分する器具に (日本語では) 三等分定規といわれるものがある。





左図に示したものがその器具で，PQ = QR = RS，PS ⊥ QX であり，直径 QS 上に半円 (よって R がその中心) が描かれている。

与えられた角 ∠BAC を 3 等分するには，(1) 点 P が直線 AC 上にあり，(2) 半円 QTS が点 T において直線 AB に接し，(3) 点 A が直線 QX 上にある，ようにおく [右図]。そうすると，∠BAC は直線 AQ，AR によって 3 等分される。(二等辺三角形，円の接線の性質がうまく組み合わされている。)

同じ原理に基づくトマホーク (tomahawk) —— 巡航ミサイルのことではなくて，北アメリカのインディアンが使う斧のこと —— といわれる器具もある。確かに，三等分定規は斧の形に似ている。

曲面の軌跡論序説

『全集』pp.111–117

原題は *Isagoge ad Locos ad Superficiem, Carissimo Domino de Carcavi*。
明示的な日付は 1643 年 1 月 6 日 (カルカヴィ (Pierre de Carcavi : 1600–1684) あての書簡) だが，この論考の主題について 1636 年にはロベルヴァル (Gilles Personne de Roberval : 1602–1675) あての書簡中で言及しているという。
回転体の形状に関する内容で，「平面および立体の軌跡論序説」を補完するものといえる。

「平面および立体の軌跡論序説」(*Isagogen ad locos planos et solidos*) は『曲面の軌跡論』(τόπων 111
πρὸς ἐπιφάνειαν ἐπίδειξις) が紹介されるであろうことによって完成する。古代の人々はこれを知らせるだけであったが，しかし，もしおそらくはずっと前から埋没させられていた，とても多くの古代の人々の素晴らしい発見が長い間昆虫や蛾と格闘させられているかあるいは完全に消え失せてしまった，幾何学の記録の中に隠れてはいないならば，彼らは一般的な規則を示したことはないし，少なくとも何らかのよく知られた例の概要を述べたこともない。

ユークリッド (Εὐκλείδης (Eukleides : Euclid) : 前 300 頃) の『曲面の軌跡論』(Τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ) は失われてしまった著作であるため，内容は不詳である —— 円柱や円錐の表面など，曲面に描かれた軌跡を扱っていたのであろう，と想像はできるが ——。パッポス (Πάππος (Pappos，Pappus) : 4 世紀前半) が『数学集成』(Συναγωγη : *Synagoge*，*Collectio*) の中で『曲面の軌跡論』に対する補助定理を詳細に紹介しているという。

しかし，この主題に欠けていなくはないであろう一般的な方法をこの非常に簡潔な論文が明らかにするであろう。なぜならば，私たちがこれまで絶えず幾何学者にかいつまんで与えてきた，数多くのそれぞれのものの発見をついに，もし暇な時間が十分にあるならば，私たちは明らかにするだろうからである。

それゆえ，軌跡に関して直線において私たちが捜し求め，また証明した特性式 (symptoma) は，もしこのような種類の軌跡を構成するそれぞれの補題を前もって言うならば，どのようなものであれ捜し求めることが妨げられることのない，平面，球，円錐，円柱および円錐状体または球状体の表面におけるものと同じである。

円錐状体 (conoido) とは双曲線あるいは放物線をその軸のまわりに回転させてできる立体で，それぞれ回転双曲線体，回転放物線体といわれる。
球状体 (sphaeroido) とは楕円をその長軸あるいは短軸のまわりに回転させてできる立体で，それぞれ長方球状体，扁平球状体といわれ，あわせて回転楕円体といわれる。

ゆえに，平面の表面における軌跡のために次の補題が提示されるとしよう。 112

1. もし何らかの表面が任意個数の平面によって無限に切断され，そして，無限に切断しているそれぞれの平面および言及されている表面との共通の切断面が直線であるならば，最初に主張された表面は平面であろう。

球の表面における軌跡のために。

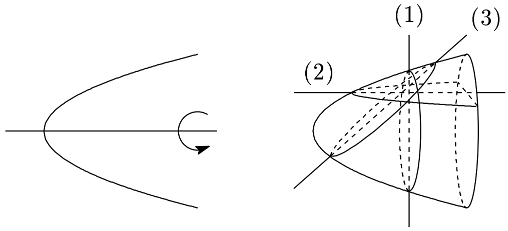
2. もし何らかの表面が任意個数の平面によって無限に切断され，そして，切断しているそれぞれの平面および言及されている表面との共通の切断面が円であるならば，その表面は球であろう。

球状体の表面における軌跡のために。

3. もし何らかの表面が任意個数の平面によって無限に切断され，そして，切断しているそれぞれの平面および言及されている表面との共通の切断面がときには円であり，ときには楕円であり，そしてそれら以外のものではないならば，その表面は球状体であろう。

放物線状のまたは双曲線状の円錐状体における軌跡のために。

4. もし何らかの表面が任意個数の平面によって無限に切断され，そして，(上のような) 共通の切断面がときには円であり，ときには楕円であり，ときには放物線または双曲線であり，そしてそれら以外のものではないならば，最初に主張された表面は放物線状のまたは双曲線状の円錐状体であろう。



回転放物線体［放物線状の円錐状体］を (1) 回転軸と垂直な平面で切断したときは切断面に円ができ，(2) 回転軸と平行な平面で切断したときは切断面に放物線ができ，(3) それらでない平面で切断したときは切断面に楕円ができる。
回転双曲線体［双曲線状の円錐状体］についても同様である。

円錐の表面における軌跡のために。

5. もし何らかの表面が任意個数の平面によって無限に切断され，そして，共通の切断面がときには直線であり，ときには円であり，ときには楕円であり，ときには放物線または双曲線であり，そしてそれら以外のものではないならば，最初に主張された表面は円錐であろう。

円柱の表面における軌跡のために。

6. もし何らかの表面が任意個数の平面によって無限に切断され，そして，共通の切断面がときには直線であり，ときには円であり，ときには楕円であり，それら以外のものではないならば，最初に主張された表面は円柱であろう。

しかし，切断面が直線，放物線または双曲線であり，そしてそれら以外のものではない (このことは問題そのものの解析がすぐに示すであろう) ような，軌跡がとても頻繁に現れるのであるから，
113 この議論のために，一般の円柱において起こるように，「互いに平行な底線が放物線または双曲線であり，そして，このような種類の底線と結ばれている直線が互いに平行な直線である，新しい［種類の］円柱をつくること」は好都合であり，完全に不可欠である。なぜならば，このような種類の円柱の平面による切断面が円または楕円を与えるようには全くならないであろうし，そして，それらは，提示された問題が要求するであろう軌跡の解析に従って，一般のものに倣って傾いている (scalae) かまっすぐであるかのいずれかであろうからである。

さらに，軌跡の問題そのものはこれらの円柱が必要なものであるとの合図を送る。そして，このような図形の (σχήματος) 説明および発見は無益なものであるとみなされてはならないことが付け加えられるであろう。

σχῆμα : *form*, *shape*, *figure*; *appearance*; *bearing*, *air*, *mien*; *fashion*, *manner*; *character*, *role*; *characteristic property* of a thing; a *figure* in dancing; *geometrical figure*

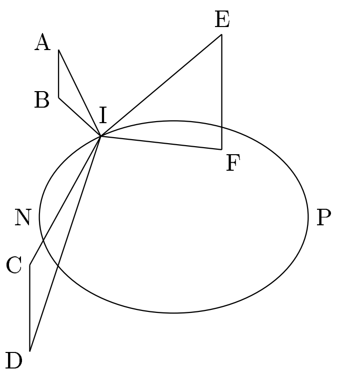
それどころか，さらに進む前に，アルキメデス (Ἀρχιμήδης (Archimēdēs)：前 287?–前 212) による球状体および円錐状体の構成はこの著作を完全には満足させるものではない［といえる］。なぜならば，問題自身は，まっすぐなものと同様に，傾いたものを出現させるだろうからである。

前もって言われていたことから「球状体の表面における」軌跡の最初の非常に美しい［結果］が従う。

もし任意［個数］の平面の上の任意個数の与えられた点から 1 つの点に向かって直線が曲げられ，そして，それぞれのものがつくる平方［の和］が与えられた広さに等しいものであるならば，曲折に関する点は位置において与えられた球状体あるいは球の表面におけるものであろう。——なぜならば，私たちは，円そのものの面積 (τὸ ἐμβαδόν) ではなく，円周そのものを円 (κύκλον) と呼んだ，ユークリッドや［その他の］古代の幾何学者に倣って，球と名づけることができるからである。確かに，そのような点はこのような種類の表面を描くであろう。

ἐμβαδόν：*surface*, *area*
κύκλος：*ring*, *circle*, *round*; *any circular body*, *wheel*, *trencher*, *place of assembly*, *vault* of the sky, *orb*, *disk* of the sun and moon, *the wall round* a city, *round shield*; *any circular motion*, *orbit* of the heavenly bodies, *circular dance*; *sphere*, *globe*

位置において与えられた任意の平面が提示されるとし，その［平面］において，指示された平面および立体の軌跡の［平面とは］別の場所で与えられたものに従って，与えられた点から曲げられた［直線の］平方［の和］が与えられた広さに等しくされるような，［点の］軌跡が捜し求められるとしよう。



しかし，これは容易である。それがなされたとし，提示された平面における軌跡を曲線 NIP としよう。その平面に対して，仮定により，与えられた点 A，E，C から垂線 AB，EF，CD が下ろされるとしよう。それゆえ，この平面が位置において与えられているとするとき，それに対して与えられた点 A，E，C から下ろされた垂線 AB，EF，CD は与えられるであろう。そして，提示された平面に引かれた垂線の 114
上の点 B，F，D が与えられるであろう。捜し求められた軌跡の線 NIP の上に任意の点，例えば I，がとられ，直線 AI，BI，EI，IF，CI，DI が結ばれるとしよう。

それゆえ，与えられた点 A，C，E から軌跡の線［の上］の点 I まで直線 AI，EI，CI を伸ばすとき，それらの平方［の和］は与えられた広さであると理解される。それゆえ，もしそれらの平方［の和］から，既に私たちが与えられたものであると証明した，垂線 AB，EF，CD の平方［の和］を取り去るならば，BI，FI，DI の平方［の和］—— それらの和も同様に与えられたものである ——が残るであろう，さらに，提示された平面の上に点 B，F，D が，同様に証明されたように，与えられる。それゆえ，同じ平面の上の与えられた点 B，F，D から同じ平面における軌跡［の上の点］に向かって直線が曲げられ，そして，BI，FI，DI のような，曲げられたものの平方［の和］が与えられた広さに等しいものであるとき，以前に復元されたアポロニウス (Ἀπολλώνιος (Apollonius)：前 262–前 200?) の定理から，軌跡 NIP が位置において与えられた円であることは明らかであろうし，

そして，完全に同様の解析は任意に提示された別の平面において［同じ］軌跡をもたらすであろう。

> 「アポロニウスの定理」とはアポロニウスの「平面軌跡論」(Τόπων ἐπιπέδων δύο : *De Locis Planis*) 第 2 巻命題 5 のこと。
> 「もし任意個数の与えられた点から 1 つの点に向かって直線が曲げられ，それぞれのものからつくられる平方［の和］が与えられた広さに等しければ，その点は位置において与えられた円周に触れるであろう。」

それゆえ，提示されたそれぞれの平面が軌跡としての円を無限に与えるのであるから，ゆえに，第 2 の補題の内容から，最初に捜し求められた表面は球であろう。

確かに，私たちが命題を満足させる表面の軌跡を捜し求めているとき，何が，与えられた平面によって捜し求められていた表面が切断されたことを想像することを妨げるであろうか？しかし，切断面は円になることができるだけである。なぜならば，既に私たちが証明したように，円が，さらに表面全体が満足させられなければならない，軌跡を満足させるとき，言及されている表面の軌跡の上に円を置く必要があることは明らかだからである。それゆえ，平面によって切断されている間，提示された状況において表面の軌跡は無限に円を与えることになり，そしてそれゆえ，それは球である。

115 そして，次の軌跡が比に関して同じことを証明するであろう。

もし 1 つあるいはいくつかの平面の上の任意個数の点から 1 つの点に向かって直線が曲げられ，そして，いくつかの曲げられたものからつくられる平方［の和］が残りのものから［つくられる］平方［の和］に対して，与えられた比にあるか，あるいは与えられた差にあるか，あるいは与えられた比より大きいまたは小さい［比にある］かのいずれかであるならば，曲折に関する点は位置において与えられた球におけるものであろう。

異なることのない技法によって球の表面の非常に美しい特性式が無限に明らかにされるであろう。

もし位置において与えられた任意個数の平面があり，そして，何らかの点から与えられた平面の上に与えられた角度で直線が下ろされ，同時にとられたそれら［の直線の］すべての平方［の和］が与えられた広さに等しくされるならば，その点は位置において与えられた球状体の表面におけるものであろう。

解析は，その方法が示すように，その上においてその［上の］任意の点から与えられた平面［の上］に与えられた角度で下ろされた直線の平方［の和］が与えられた広さに等しくされるような，軌跡が (以前に私たちが説明した，1 つだけの平面における平面［軌跡］および立体軌跡の規則に従って) 捜し求められる，位置において与えられた任意の平面が取り上げられる，ということになるはずである。

作図は必然的に非常に簡単になるであろう。なぜならば，取り上げられた平面が与えられた平面と同じように位置において与えられるとき，ゆえに，取り上げられたおよび与えられた平面の共通の切断面が同様に与えられるからである。それゆえ，解析においては，取り上げられた平面［の上］の任意の点から与えられた平面に下ろされた直線は適切な換喩［対象の事物をそれと関係の深いものによって表現する修辞法］を受け入れることになる。これら［の直線］の平方がもし結合されて，与えられた広さに等しくされるならば，解析は取り上げられた平面において円または楕円の軌跡を示す

だけでなく，解析の進行が示すであろうように，位置において与えられた別の任意の平面において他の方法によって軌跡を示すことはできないであろう。

それゆえ，第 3 の補題により，求められていた軌跡は，円または楕円だけを与えるのであるから，球状体であることは明らかである。

もしこのような種類［の直線］の任意に指定された部分の平方［の和］が残り［の部分の平方の和］に対して，与えられた差にある，あるいは与えられた比にある，あるいは与えられた比より大きいまたは小さい［比にある］かのいずれかであるならば，与えられた平面の位置に応じて，表面は球状体または円錐状体または円錐または円柱などを要求するであろう。そして，それは巧妙な解析の連鎖によって直ちに発見されるであろう。

例えば，もし与えられた比にあるならば，表面はたいていは円錐状体になるであろう。しかしながら，もし与えられた平面の共通の切断面が 1 つの点に集まるならば，表面はまぎれもなく円錐になるであろう。そして，もし与えられた平面の切断面が互いに平行であるならば，表面はまぎれもなく円柱に，すなわち私たちのあるいは一般の円柱の［表面に］，なるであろう。 116

経験はすべてのもの［がどういう結果になるか］をすぐに明らかにするであろう。なぜならば，一般的なことはかいつまんで与えられるが，非常に多くの例において方法の明白さが隠されることはないだろうからである。

私たちは，おそらく最初の位置を占めなければならなかったであろう，平面軌跡の例を最後に確立した。

もし位置において与えられた任意個数の平面があり，そして，任意の点からそれらの言及されている平面に与えられた角度で直線が下ろされ，そして，下ろされたすべての直線の和が与えられた直線に等しいならば，その点は位置において与えられた平面におけるものであろう。

なぜならば。先ほどの方法により，与えられた平面は位置において与えられた任意の平面によって切断され，そこにおいて，既に説明した平面軌跡の方法に従って，命題を満足させる軌跡が捜し求められるとしよう。解析から明らかなように，それは直線であろうし，どのような平面による切断面であろうと同じことが起きるであろう。それゆえ，最初の補題により，求められていた軌跡が平面の表面であることは明らかである。

もしこのような種類の直線の任意に指定された部分［の和］が残り［の部分の和］に対して，与えられた差あるいは比にある，あるいは与えられた比より大きい［または小さい比にある］ならば，その点は，同様に，位置において与えられた平面の表面におけるものであろう。

それどころか，先ほどの問題において，もし平面が互いに平行であるならば，軌跡は，私たちがほとんど助言することが［必要では］なかったような，平面の表面であったはずである。

3 線および 4 線の軌跡についてのアポロニウスの試み (ἐπιχείρημα) に関して，円錐状体の軌跡を付け加えること，さらに，その内容をこの論考に適合させることは好ましいことである。

ἐπιχείρημα : *undertaking, attempt, enterprise; base of operations against*

アポロニウスの 3 線および 4 線の軌跡問題とは次のようなものである (［10］p.9)。

「3 本の直線が位置に関して与えられたとき，1 点からこれらの 3 線に与えられた角をもって直線がひかれ，そのうちの 2 線に囲まれた矩形が残る線による正方形に対して与えられた比をもつならば，この点は位置に関して与えられた立体軌跡，すなわち 3 種の円錐曲線のひとつに属する。位置に関して与えられた 4 本の直線に与えられた角をもって線がひかれ，そのうちの 2 線に囲ま

れた矩形が残る 2 線に囲まれた矩形に対して与えられた比をもつならば，同じくその点は位置に関して与えられた円錐曲線に属するであろう。」

117 もし位置において与えられた 3 つの平面があり，そして，何らかの点からそれらの言及されている平面に与えられた角度で直線が下ろされ，そして，2 つの引かれた［直線］による長方形が残り［の直線］の平方に対して与えられた比にあるならば，その点は，与えられた平面が選ばれた位置に従って，平面における，あるいは球における，あるいは球状体における，あるいは円錐状体における，あるいはさらに (古代の人々のまたは最近の) 円錐曲線または円柱の表面におけるものであろう。

「4 線における」発見は，誰にでも容易であるように，異なることはない。

［いろいろな］場合，境界を定める［ための条件]，私たちが簡潔さという理由のために省略した無限に多くの軌跡の問題またはあなたが好む定理，前もって言われた補題の証明，およびおそらくはより注意深く説明されたであろうその他のことは，これらのことをその手中に収めた熱心で綿密な幾何学者によって非常に容易に補完されるであろう。そして，引き続く困難な主題は，それが現れたとして，容易に理解されることが知られないことはない。

トゥールーズにて，1643 年 1 月 6 日

球面の接触について

『全集』pp.52–69

原題は *De Contactibus Sphæricis*。
執筆されたのは 1643 年。
「与えられた 3 つの点，直線，円のそれぞれを通る，あるいは，に接する，円を見出すこと」というアポロニウスの問題を「4 つの点・平面・球に接する (を通る) 球」に拡張したもの。
アポロニウスの問題の条件には次の 10 通りがある。(順番はヴィエートが著した論考による。)

(1) 3 点を通る	(6) 1 点を通り，1 直線と 1 円に接する
(2) 2 点を通り，1 直線に接する	(7) 1 直線に接し，2 円に接する
(3) 3 直線に接する	(8) 2 点を通り，1 円に接する
(4) 1 点を通り，2 直線に接する	(9) 1 点を通り，2 円に接する
(5) 2 直線に接し，1 円に接する	(10) 3 円に接する

これらのうち，特に (10) がアポロニウスの問題と呼ばれることがある。

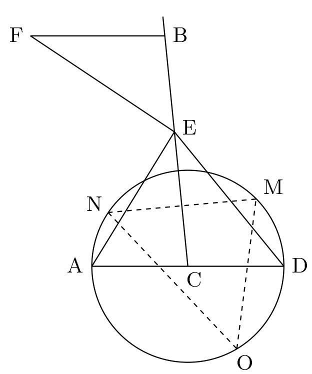
ペルガのアポロニウス (Ἀπολλώνιος (Apollonius) : 前 262–前 200?) の『接触について』(περὶ ἐπαφῶν) の教義をガリアのアポロニウス［ヴィエートのこと］は，またはその名前の仮面のもとにフォントネー［・ル・コント］(Fontenay-le-Comte) の人フランシス・ヴィエタ (Franciscus Vieta, フランス名 François Viète : 1540–1603) は優雅に復元したが，古代の幾何学者のその驚くべき労作は数学に実り豊かな援助を与えた。しかし，これまで平面にとどまっていたこの接触の主題をそれ以上に拡張し，そして，大胆にも球面の問題にまで高めようとする人は，私の知る限りでは，今まで誰も現れていなかった。しかし，直ちに，そこから優れた問題が導かれること，および，より高い問題の洗練された解法が非常に容易に派生させられることは明らかであろう。それゆえ，与えられた点を通過する，または，与えられた球面および平面に接する，球が探し求められなければならない。15 個の問題全部の仕事が仕上げられるであろう。 52

ヴィエートはアポロニウスの『接触について』を復元した際，その表題を『ガリアのアポロニウス，あるいは，目を覚まさせられたペルガのアポロニウスの「接触について」の幾何学』(*Apollonius Gallus, Seu, Exsuscitata Apollonii Pergæi* Περὶ Επαφῶν *Geometria*) としていた。

問題 I

4 つの点が与えられたとき，与えられた［点］を通過する球を見出すこと。

4 つの点 N，O，M，F が与えられるとするとき，それらを通る球が描かれなければならない。



任意にとられた 3 つの［点］N，O，M について，［ユークリッド (Εὐκλείδης (Eukleides, Euclid) : 前 300 頃活躍?) の］『原論』(Στοιχείωσις) により 1 つの平面上に存在する，三角形 NOM のまわりに円 NAOM が描かれるとすると，これは大きさおよび位置において与えられることは明らかである。さらに，もし球が平面によって切断されるならば，切断面は円を与えるということから，円 NAOM が見出されるであろう球の表面上にあることは明らかである。しかし，3 つの点 N，M，O を通る円はただ 1 つだけ描くことができ，それを私たちは今作図した。それゆえ，3 つの点 N，O，M は探し求められていた球の表面上

53 にあり，ゆえに，三角形 NOM の平面は探し求められていた球を円 NAOM に沿って切断する，それゆえ，それは球の表面上にあると私たちは結論する。

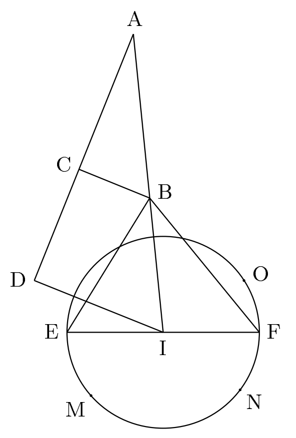
その中心を C とし，そこから円の平面に垂直な［直線］CEB が立てられるとしよう。直線 CB の上に探し求められていた球の中心があることは明らかである。点 F から直線 CB に垂直な［直線］FB が下されるとすると，それは位置および大きさにおいて与えられることは明らかである。点 C から FB 自身に平行な［直線］ACD が引かれるとしよう。それゆえ，角 BCA は直角であろう。しかもそのうえ，直線 BC は円の平面に垂直である。ゆえに，直線 ACD は円の平面上にあり，位置において与えられる。それゆえ，そこにおいて円と出会う点 A，D が与えられる。

それが既に行われ，見出されるであろう球の中心が，それは確かにテオドシオス (Θεοδόσιος (Theodosius of Bithynia)：前 2 世紀後半?) により直線 CB の上に見出されることを既に私たちは述べたから，E であると仮定されるとしよう。3 つの点は，確かに F は仮定から，そして A および D は証明されたことから，球の表面にあるから，結ばれた直線 FE，AE，ED は等しいであろう。しかし，3 つの直線 FE，AE，ED は同じ平面上にある。なぜならば，直線 FB，ACD は平行であるから，同じ平面上にあるであろうし，しかもそのうえに，直線 CB も［そうであるから］，それゆ
54 え，3 つの［直線］FE，AE，DE も［そうである］。それゆえ，もし与えられた 3 つの点 A，F，D のまわりに円が描かれるならば，その中心は直線 CB 上にあるであろうし，そして，それゆえに，探し求められていた球の中心も球そのものも知られずにはいないであろう。

テオドシオスは『球面論』(Σφαιρικά：*Sphaerica*：*Tripolitae Sphaericorum Libri Tres*) の第 1 巻命題 1 の系 2 で次のことを述べている。
「もし球［の表面］に円があるならば，球の中心から円の平面に対して引かれた垂線は円の中心に落ちることは明らかである。」

問題 II

3 つの点および［1 つの］平面が与えられたとき，与えられた点を通過し，与えられた平面に接する球を見出すこと。



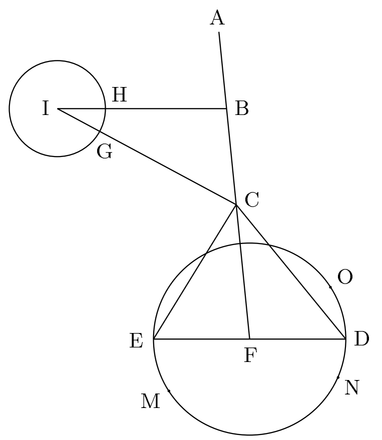
3 つの点 N，O，M，［および,］それらを通って描かれた円 MEON が与えられるとしよう。既に証明されたことから，探し求められていた球の表面に向かって，［円の中心 I から］円の平面に［垂直に］立てられた直線 IBA の上に私たちが探し求めている球の中心が見出されるであろう。直線 IBA は与えられた平面と点 A において出会うとしよう。それゆえ，点 A は位置において与えられるであろう。円 MEON の中心から与えられた平面に垂線 ID が下ろされるとしよう。それゆえ，点 D が，そしてそれゆえに，直線 AD が位置および大きさにおいて，与えられるであろうし，直線 ID および IA も同様である。それゆえ，三角形 ADI の平面が位置において与えられるであろう。さらに，円 MON の平面が位置において与えられる。ゆえに，それらの共通の平面の切断面 FIE が位置において与えられるであろうし，それゆえに，円の上の点 E および F が与えられるであろう。

それが行われ，探し求めていた球の中心が点 B であるとしよう。直線 BE，BF が結ばれるとし，
そして，直線 ID に平行な［直線］BC が引かれるとしよう。三角形 ADI および直線 EIF は同じ
平面の上にあるから，ゆえに，直線 EB，BF，BC は同じ平面の上にあるであろう。しかし，直線 55
ID は与えられた平面に垂直である。ゆえに，それに平行な直線 BC もまた与えられた平面に垂直である。それゆえ，描かれるであろう球は与えられた平面 AD に接しなければならないから，ゆえに，それ自身の中心から平面に下ろされた垂線 BC は接点 C を与えるであろう。それゆえ，直線 BC，BE，BF は等しいであろうし，そして，直線 AD もその上にある，位置において与えられた同じ平面の上にあることが証明された。

それゆえ，それによって，2 つの点 E および F および同じ平面上の直線 AD が与えられたとき，与えられた 2 つの点を通過し，与えられた直線に接する円が探し求められるから，問題が導かれた。ガリアのアポロニウスはこの問題に満足を与えた［冒頭の (2)］。それゆえ，球の中心 B が与えられるであろうし，すべてが明らかであろう。

問題 III

3 つの点および［1 つの］球が与えられたとき，与えられた点を通過し，与えられた球に接する球を見出すこと。



3 つの点 M，N，O および球 IG が与えられるとしよう。探し求められていた球の上に円 MON が与えられる。［円の中心 F から］円の平面に対して立てられた垂直な［直線］FCB は，上のように，私たちが探し求めている球の中心を含むであろう。与えられた球の中心 I から直線 FB に垂直な［直線］IB が下ろされると，それは
位置および大きさにおいて与えられるであろう。中心 F 56
を通ってそれに平行な［直線］ED が引かれると，それは，既に証明されたことから，円の平面の上にあるであろう。そして，点 E および D が与えられるであろう。

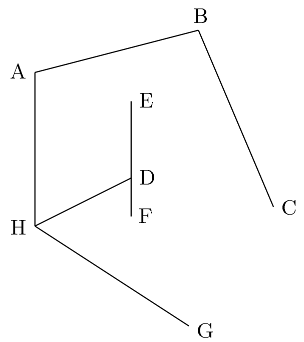
それが行われ，探し求めていた球の中心が C であるとしよう。ゆえに，点 I，E，D が与えられるから，直線 IC，CE，CD は，［それらによって］与えられた，同じ平面の上にあるであろう。さらに，2 つの球の接触［する点］はそれらの中心を結ぶ直線の上にある。ゆえに，探し求められていた球は与えられた球と点 G において接するであろう。それゆえ，直線 IC は直線 CE，CD に半径 IG だけまさるであろう。中心 I，与えられた球の半径の間隔で，与えられた直線 IC，CE，ED の平面の上に円が描かれるとすると，それゆえ，その円は点 G を通過するであろうし，位置および大きさにおいて与えられるであろう。しかもそのうえ，点 E および D は同じ平面上に［あるであろう］。

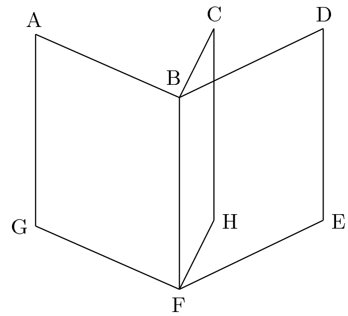
それゆえ，それによって，ガリアのアポロニウスにより［冒頭の (8)］，2 つの点および円が同じ平面上に与えられたとき，与えられた 2 つの点を通過し，与えられた円に接する，円を見出すことができる方法が探し求められるから，問題が導かれた。

問題 IV

4 つの平面が与えられたとき，与えられた 4 つの平面に接する球を見出すこと。

探し求められていた球が接しなければならない，4 つの平面 AH，AB，BC，HG が与えられるとしよう［下左図]。





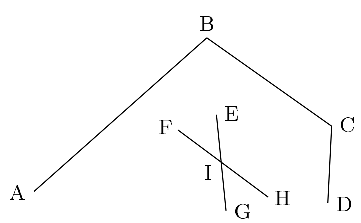
同じ球に接するべきである 2 つの平面 AF，FD があるとしよう［上右図]。それらの傾き［2 つの平面の間の角］が平面 BFHC によって半分に分けられるとしよう。2 つの平面が接している球の中心は［それらの平面を］分けている平面上にあることは，これほど容易なことに長い間留まっ
57 ていることは無駄であると思われるほどに，明らかである。もし平面 AF，FD が平行であったならば，球の中心はそれらに平行で，それらの間隔を半分に分ける平面の上にあったはずである。

これが確立されると，位置において与えられた平面 CB，BA［上左図］に関して，探し求められていた球の中心は，確かに与えられた平面 CB，BA の与えられた傾きを半分に分ける，平面にある。しかし，2 つの平面 BA，AH に関して，探し求められていた同じ球の中心は位置において与えられた別の平面にある。ゆえに，一方は平面 CB，BA の傾きを，他方は平面 BA，AH の傾きを半分に分ける，位置において与えられた 2 つの平面の共通の切断面は，見出されなければならない球の中心がそこにあるであろう，位置において与えられた直線を与えるであろう。その直線を FE としよう。しかし，2 つの平面 AH，HG に関してもまた，探し求められていた球の中心は位置において与えられた他の平面にあるであろうし，それと位置において与えられた直線 FE との交わりは点 D を与えるであろうし，それが探し求められていた球の中心であることは明らかである。そして，残りは明らかであろう。

問題 V

3 つの平面および［1 つの］点が与えられたとき，与えられた点を通過し，与えられた平面に接する球を見出すこと。

与えられた 3 つの平面 AB，BC，CD および点 H があるとしよう。3 つの平面に接し，点 H を通過する球が探し求められなければならない。



それが行われたとしよう。与えられた 3 つの平面は，先行する命題の論法により，位置において与えられた直線を与えるであろうし，それは探し求められていた球の中心の
58 位置であろう。それが GE であるとし，そこに与えられた点 H から垂直な［直線］HI が下ろされるとすると，それは位置および大きさにおいて与えられるであろう。IF が IH に等しくなるように，F まで延長されるとすると，点 F が与えられるであろう。

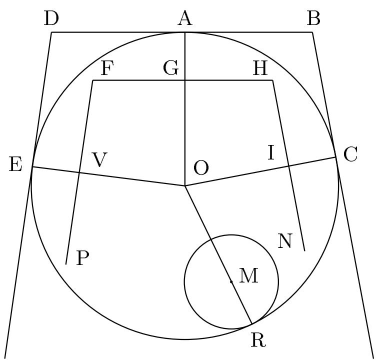
さらに，探し求められていた球の中心は直線 GE の上にあるはずであり，それに対して垂直に引

かれた HF が I において半分に切断され，その 1 つの端点 H は仮定から球の表面にあるから，そして，もう 1 つの端点 F もまた球の表面にあるであろう。それどころか，中心 I，間隔［半径］IH でその直線と直線 GE の［つくる］平面の上に描かれた，円は球の表面にあるであろう。さらに，その円は位置および大きさにおいて与えられる。さらに，球の円が位置および大きさにおいて，そして，AB のような任意の平面が与えられると，この［論考の］第 2 の命題の帰結により容易に，その表面の上に与えられた円があり，与えられた平面に接する球が与えられる。それゆえ，この第 2［の命題］により問題は導かれたし，残りが知られずにいることはないであろう。

問題 VI

3 つの平面および［1 つの］球が与えられたとき，与えられた球および与えられた平面に接する球を見出すこと。

3 つの平面 ED，DB，BC および球 RM が与えられるとしよう。与えられた球および 3 つの平面に同時に接する球が作図されなければならない。



それが行われ，球 ERCA が命題を満足する，すなわち，点 R において［与えられた］球に，点 E，A，C において［与えられた］平面に接する，としよう。球 ERCA の中心を O としよう。結ばれた RO，EO，AO，CO は等しいであろう。しかもそのうえ，直線 OR は与えられた球の中心 M を通過するであろうし，直線 EO，OA，OC は与えられた平面 DE，DB，BC に垂直であろう。直線 OM に直線 OV，OG，OI が等しくされるとし，点 59
V，G，I を通って平面 VP，GH，IN が与えられた ED，DB，BC に平行に引かれるものと理解されるとしよう。

直線 OR は OE に，そして，取り去られた OM は取り去られた OV に，等しいから，残りの RM は残りの VE に等しいであろう。さらに，RM は，与えられた球の半径に等しいから，大きさにおいて与えられる。それゆえ，VE も大きさにおいて与えられる。さらに，OE は平面 DE に垂直であるから，平面 DE に平行な平面 PV にも垂直であろう。それゆえ，直線 VE は平面 DE および PV の間隔であろう。しかし，証明されたことから，VE は大きさにおいて与えられる。ゆえに，平面 DE，PV の間隔が与えられる。さらに，これら 2 つの平面は平行であり，仮定から，DE は位置において与えられている。それゆえ，PV も位置において与えられる。同様に，平面 GH，IN が位置において与えられること，および，直線 OV，OG，OI はそれらに垂直であり，直線 OM に等しいことが証明されるであろう。それゆえ，中心 O，間隔［半径］OM で描かれた球は位置において与えられた平面 PV，GH，IN に接する。さらに，点 M が，与えられた球の中心であるから，与えられる。

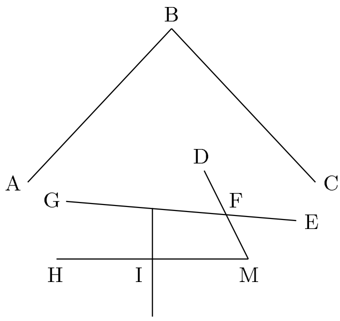
それゆえ，それによって，3 つの平面 PV，GH，IN および点 M が与えられたとき，与えられた点 M を通過し，与えられた平面 PV，GH，IN に接する球が見出されるように，問題が導かれた。すなわち，問題は先の［問題］から導かれる。

次の技法においても異なることはなく，与えられた点について何も見出されないとき，しかし，できるだけ多くの球または平面が与えられた球における 1 つの点の代わりに置き換えられるであろう。

60 ## 問題 VII

2 つの点および 2 つの平面が与えられたとき，与えられた点を通過し，与えられた平面に接する球を見出すこと。

2 つの平面 AB，BC および 2 つの点 H，M が与えられるとしよう。点 H および M を通過し，平面 AB，BC に接する球が探し求められなければならない。

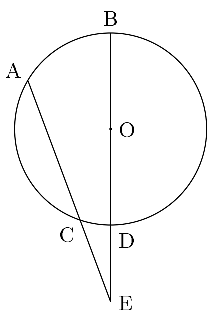


直線 HM が結ばれるとし，それが I において半分に分けられるとしよう。点 I が与えられるであろう。点 I を通る平面が直線 HM によって垂直に貫かれるとしよう。球の表面は点 H，M を含んでいるから，球の中心が，直線 HM に関して直角であり，そして，点 I を通過している平面上にあることは確かである。さらに，直線 HM および点 I は位置において与えられるから，この平面は位置において与えられる。ゆえに，球の中心は点 H および M によって与えられた平面にある。

しかもそのうえ，［球の中心は］平面 AB，BC に関して，上で私たちが既に証明したように，別の与えられた平面にある。ゆえに，位置において与えられた直線にある。それが GE であるとすると，それに対して与えられた点の 1 つ M から垂直に下ろされた直線 MF は位置および大きさにおいて与えられるであろう。そして，FD が ME［MF の間違い?］に等しくなるように，D に結ばれると，点 D は与えられるであろうし，そのうえ，上で証明されたことから，球の表面にもあるであろう。それゆえ，探し求められていた球が通過する，3 つの点 H，M，D が与えられる。同じ球によって接しられなければならない，平面 AB もまた与えられる。それゆえ，この［論考の］第 2 の問題によって，問題は導かれた。

私たちはより先へ話を進める前に，非常に簡単な補題をいくつか先に述べておかなければならない。

61 補題 I —— 円 BCD があるとし，その外部の好きなところに点 E がとられ，中心を通って直線 EDOB が貫かれるとしよう。好きなところに［直線］ECA が引かれるとしよう。『原論』によって，長方形 AEC が長方形 BED に等しいことは明らかである［方べきの定理］。



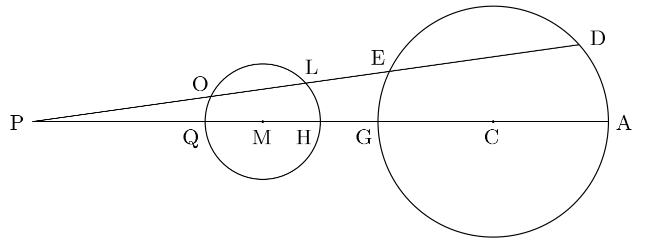
いま，中心 O のまわりに球があるとし，その最大の球が ACDB であるとしよう。もし同じ点 E から球の表面の任意の点を通って，球のもう一方の側に出会うまで，直線 ECA が貫かれるとするならば，同様に，長方形 AEC は長方形 BED に等しいであろう。

なぜならば，もし不動の直線 BDE のまわりに円も直線 ECA も同時に回転させられると理解されるとするならば，点 C および A は軸の直線に関して円を描くから，直線 EC および EA は変化させられないであろうし，また長方形 AEC も変わらないであろうし，それゆえ，どのような平面においても長方形 BED に等しいであろうから。

補題 II —— 同じ平面の上に 2 つの円 ADE，HLO があるとしよう。それらの中心を通って直線 ACMP が貫かれるとし，

半径 AC が半径 HM に対するように直線 CP が直線 MP に対する

ことになるとし，点 P から，両方の円を点 O，L，E，D において切断する，任意の直線 POLED が引かれるとしよう。ガリアのアポロニウスは長方形 APQ，GPH が等しいこと，および，それらのそれぞれは長方形 DPO，EPL に等しいことを証明した［ヴィエートの論考中の補題，らしい］。



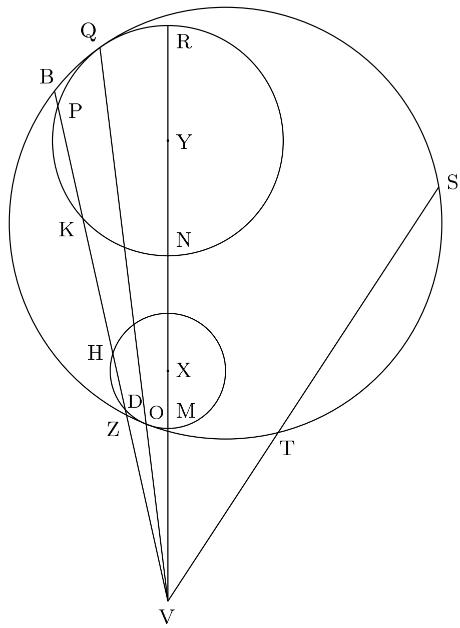
また，球においても次の問題の
真実が大切であることは同じで
ある。さらに，そのことから，も 62
し不動の軸 AP のまわりに直線
POLED と同様に 2 つの円が同時
に回転させられるとしても，上の
補題において用いられた方法によって，直線 PO，PL，PE，PD は変化させられないであろうし，それゆえ，長方形もそうではない。そして，どのような平面においても命題は成り立つであろう。

補題 III —— 2 つの球 YN，XM があるとして，それらの中心を通って直線 RYNXMV が貫かれるとし，そして，

半径 YN が半径 XM に対するように直線 YV が直線 VX に対する

ことになるとしよう。

点 V から任意の平面における直線 VTS が引かれるとし，長方形 SVT が長方形 RVM に等しいとしよう。もし点 T，S を通過し，与えられた 2 つ［の球］のうちの 1 つに接する球が描かれるならば，もう 1 つ［の球］にも同様に接するであろう。



すなわち，点 T および S を通り，球 MX に点
O で接する球が OTS であるとするとき，私は， 63
球 YN もまた球 OTS によって接しられることになると断言する。

直線 VO が，球 OTS に Q において出会うまで，延長されるとしよう。それゆえ，長方形 QVO は，第 1 の補題により，［長方形］SVT に等しい。しかし，長方形 SVT は，つくり方から，第 2 の補題により，VO および点 V および O を通って球の内部の小球 YN の表面まで延長された直線による長方形［QVO］に等しいところの，長方形 RVM に等しい。ゆえに，点 Q は球 YN の表面にある。それゆえ，それは球 YN の表面および球 OTS の表面に共通［の点］である。

私は，これら 2 つの球は同じ点 Q において互いに接すると断言する。なぜならば。点 V から球 OTS の任意の点を通る任意の平面における任意の直線が引かれるとし，それが，例えば，VZ であるとして，それが延長されるとき 3 つの球を点 Z，D，H，K，P，B において切断するとしよう。球 OTS において，長方形 ZVB は，第 1 および第 2 の補題により，2 つの球 XM および YN に制限された，長方形 DVP に等しい。しかし，DV は直線 VZ より大きい。なぜならば，球 OTS は

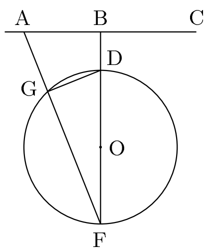
球 XM の外部にあり点 O において接するから，球 OTS を切断している直線は球 XM よりも前にそれ自身に出会うであろうから。ゆえに，長方形 DVP が長方形 ZVB に等しいこと，および，直線 ZV が直線 DV より小さいことが証明されたから，ゆえに，直線 PV は直線 BV より小さいであろう。それゆえ，点 B は球 YN の外部に落ちるであろう。

同様の推論によって，取り囲んでいる球［OTS］のすべての点［を通って引かれた直線］は，点 Q を除いて，［球 YN の］の外部に落ちることが結論されるであろう。それゆえ，球 OTS は球 YN に接する。これが証明されるべきことであった。

内側の接触における，そして，すべての場合における証明は異なっていないし，面倒でもない。

補題 IV —— 平面 AC およびその中心が O である球があるとしよう。点 O を通って平面に垂直な［直線］FODB が引かれるとし，点 F から平面に，球を G において，そして平面を A において切断する，任意の直線が引かれるとしよう。私は，長方形 AFG は長方形 BFD に等しいと断言する。

64

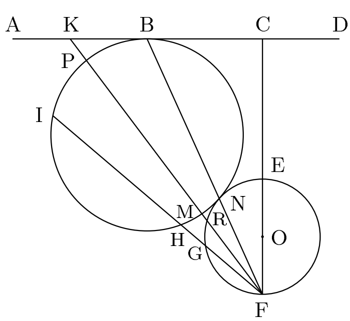


例えば，与えられた球および平面が三角形 ABF の平面によって切断されるとし，球の上に円 GFD が，さらに，平面の上に直線 ABC がつくられるとしよう。直線 FB は平面 AC に垂直であるから，直線 AC に対してもまた垂直であろう。それゆえ，私たちは同じ平面上に円 DGF および直線 AC，そして，円の中心を通って貫いている，AC に垂直な直線 FDB をもつ。GD が結ばれるとしよう。G における，および B における，角は直角である。ゆえに，四角形 ABDG は円の内部にあり，従って，長方形 AFG は長方形 BFD に等しい。さらに，球の任意の別の切断面についても同様に証明されるであろう。

補題 V —— 平面 ABD およびその中心が O である球 EGF があるとしよう。点 O を通って平面に垂直な直線 FOEC が貫かれるとし，任意の別の平面上に直線 FGHI が引かれ，そして，長方形 IFH が長方形 CFE に等しいとしよう。もし点 I，H を通って平面 AC に接する球が描かれるならば，同じ球は球 EGF に接するであろう。

点 I および H を通過し，平面 AC に点 B において接する球 IHB がつくられると理解されるとしよう。私は，球 EGF は球 IHB に接すると断言する。

65



直線 FB が結ばれ，長方形 CFE が長方形 BFN に等しくなるとしよう。前述のことから，点 N は球 EGF の表面にあるであろう。

しかもそのうえ，つくり方から，長方形 CFE は長方形 IFH に等しい。それゆえ，長方形 IFH，BFN は等しく，それゆえ，点 N は球 IBH の表面にもある。

いま，球 EGF が球 IBH に点 N において接することを証明しなければならないが，これは全く容易である。例えば，点 F から球 EGF の任意の点を通って，球 IBH を M および P において，平面 AC を K において切断する，直線 FR が引かれるとしよう。長方形 KFR は，前の補題から，長方形 CFE に等しく，これはつくり方から長方形 IFH に，それゆえ［長方形］PFM に，等しくされる。それゆえ，長方形 KFG および PFM は等しいが，しかし，球 IBH は平面 AC に B において接するから，

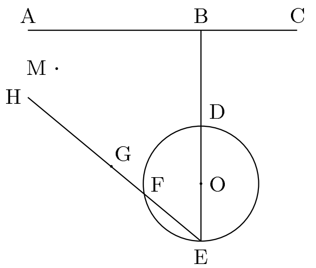
直線 KF は直線 FP より大きい。ゆえに，直線 FR は直線 FM より小さい。それゆえ，点 R は球 IBH の外部にある。

球 EGF の，任意の平面における，点 N のどちらの側にあっても，任意の別の点について，同じことが証明されるであろう。それゆえ，球 EGF が球 IBH に点 N において接することは明らかである。

これらの補題は簡単であるにもかかわらず，しかし，特に第 3 および第 5 のものは，非常に美しい。というのは，第 3［の補題］においては，点 S および T を通過し，球 XM に接する球は無限にあるが，しかし，それらすべては無限に，証明されたことから，同様に，球 YN に接するであろうし，さらに，第 5 の補題においては，点 I および H を通過し，平面 AC に接する球は無限にあるが，しかし，それらすべては無限に，証明されたことから，球 EGF に接するであろう，からである。仮定されたこれらによって，私たちは残りの問題を容易に順々に説明するであろう。

問題 VIII

2 つの点，［1 つの］平面および［1 つの］球が与えられたとき，与えられた点を通過し，与えられた球および平面に接する球を見出すこと。



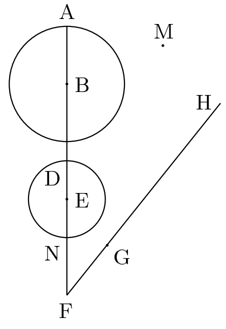
与えられた平面が ABC，球が DFE，そして，点が H，M であるとしよう。与えられた球の中心 O を通って与えられた平面 ABC に垂線 EODB が下ろされるとしよう。HE が結ばれるとし，長方形 BED が長方形 HEG に等しくなるとしよう。そうすると，点 G が与えられるであろう。

3 つの点 H，G と M および平面 ABC が与えられたから，この［論考の］第 2 の問題によって，与えられた 3 つの点を通過し，与えられた平面 ABC に接する球が探し求められるはずである。

その球が命題を満足させるであろう。実際，それは，つくり方から，与えられた 2 つの点 H およ 66
び M を通過し，平面 ABC に接する。しかもそのうえ，第 5 の補題により，球 DFE に接する。確かに，長方形 HEG は長方形 BED に等しくされるから，与えられた 2 つの点 H および G を通過し，平面 ABC に接するすべての球は球 DEF にもまた接する。

問題 IX

2 つの点および 2 つの球が与えられたとき，与えられた 2 つの点を通過し，与えられた球に接する球を見出すこと。



与えられた 2 つの球が AB，DE，そして，与えられた点が H および M であるとしよう。与えられた球の中心を通って直線 AF が結ばれるとし， 67

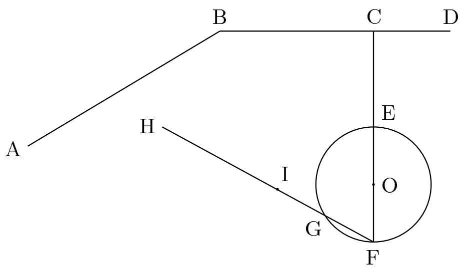
半径 AB が半径 DE に対するように直線 BF が FE に対することになるとすると，点 F が与えられるであろう。長方形 NFA が長方形 HFG に等しくなるとすると，点 G が与えられるであろう。

いま，3 つの点 M，G，H および球 DN が与えられるから，この［論考の］第 3 の問題によって，与えられた 3 つの点を通過し，与えられた球 DN に接する，問題を満足させるであろう，球が探し求められる

はずである。そのうえ，第 3 の補題から，それは球 AB に接するであろうし，それゆえ，それは命題を満足させるであろう。

問題 X

［1 つの］点，2 つの平面および［1 つの］球が与えられたとき，与えられた点を通過し，球および 2 つの平面に接する球を見出すこと。



［与えられた］2 つの平面が AB，BD，球が EGF，点が H であるとしよう。与えられた球の中心である，点 O を通って平面の上の任意［の点］に垂線 CEOF が下ろされるとし，そして，長方形 CFE が長方形 HFI に等しくなるとしよう。

2 つの点 H と I および 2 つの平面 AB，BD が与えられたから，この［論考の］第 7 の問題により，与えられた 2 つの点を通過し，与えられた 2 つの平面に接する球が探し求められるはずである。そのうえ，第 5 の補題から，それは球にも接するであろうし，そして，それは命題を満足させるであろう。

問題 XI

［1 つの］点，［1 つの］平面および 2 つの球が与えられたとき，与えられた点を通過し，与えられた平面および 2 つの球に接する球を見出すこと。

問題は先の［問題］と同様の推論によって，問題 VIII，「2 つの点，平面および球が与えられたとき」，から，しかもそのうえ，補題 V のおかげで，すぐに導かれるであろう。しかし，補題 III を使うことが好みならば，問題は，別の媒体および別の作図によって，同様に，同じ問題から導かれるであろう。

問題 XII

［1 つの］点および 3 つの球が与えられたとき，与えられた点を通過し，与えられた球に接する球を見出すこと。

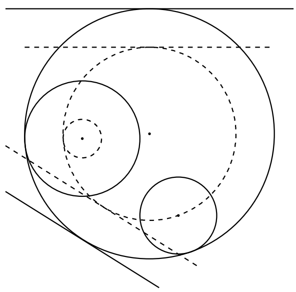
同様に，私たちはこれに図を割り当てない。というのも，補題 III のおかげで，問題 IX，「2 つの点および 2 つの球が与えられたとき，$\cdots$ 」，からすぐに導かれるだろうからである。

問題 XIII

2 つの平面および 2 つの球が与えられたとき，与えられた平面および球の接する球を見出すこと。

これが行われたとしよう。ゆえに，もし，探し求められたものからより小さい方の球の半径だけ離れている，見出された球の表面に平行な，同じ中心をもつ別の表面が私たちに想像されるならば，この新しい球の表面は，与えられたものからより小さい球の半径と同じ間隔だけ離れている，平面に接するであろう。そのうえ，それは，その半径が与えられた大きい方の球の半径と小さい方の半径と同じ間隔だけ異なっていて，さらに，大きい方の球と同心である，球に接するであろう。ゆえに，それは与えられるであろう。そして，与えられた 2 つの平面に平行で，それらから小さい方の球の半径だけ離れている［平面が］与えられるであろう。そして，この新しい球の表面は与えられ

た小さい方の球の中心を通過するであろうし，そして，確かにそれは与えられたものである。それゆえ，私たちが既に問題 VI において使ったものと同様の技法によって，問題は問題 X，「点，2 つの平面および球が与えられたとき，$\cdots$ 」，から導かれるであろう。



図を描くとすると，左図のようになるのかなぁ。
点 $\cdots$ 与えられた球のうち，小さい方の球の中心
平面 $\cdots$ 与えられた平面に平行な平面 (破線のもの)
球 $\cdots$ 与えられた球のうち，大きい方の球と同心の小さい球 (破線のもの)
とすると，問題 X になる。
そこで，条件に合う球 (破線で示してある) を見つけて，それを膨らませればよい，ということか。

問題 XIV 69

3 つの球および［1 つの］平面が与えられたとき，与えられた平面および球に接する球を見出すこと。

私たちが前のおよび第 6 の問題において使ったものと同様の方法によって，問題は問題 XI，「点，平面および 2 つの球が与えられたとき，$\cdots$ 」，から導かれるであろう。

問題 XV

4 つの球が与えられたとき，与えられたものに接する球を見出すこと。

これが行われたとしよう。3 つの円についての問題を点および 2 つの円についての問題に導くためにガリアのアポロニウスが使用した方法によって，同時に，先行する同様の有名でしかもよく知られている問題 XII，「3 つの球および点が与えられたとき」，に私たちは導くであろう。

命題はすべての点で明らかであろうし，明らかな補足物がガリアのアポロニウスに付け加わるであろう。さまざまな場合，条件，および些細なことを私たちは無視したが，接触に関して用いられた小球が無限に増大することはない。

幾何学の問題の解法について

『全集』pp.118–131

原題は *De Solutione Problematum Geometricorum per Curvas Simplicissimas et Unicuique Problematum Generi Proprie Convenientes, Dissertatio Tripartita*。(最も単純な，そして問題のそれぞれの種類に正確に適合する曲線による，幾何学の問題の解法についての，3 部からなる論考)
執筆されたのは 1643 年。
幾何学の問題の方程式を用いた解法に関して，デカルトの『幾何学』における問題・曲線の分類についての言明に対するフェルマの見解・主張が述べられている。

第 1 部 118

デカルト (René Descartes : 1596–1650) は幾何学においてさえ［唯一の］男であることは明らかであると，ことによると誰かが言うかも知れないことが，たとえ逆説に値するとしても，より鋭敏なデカルト派の人々はデカルトによる曲線の一定の類 (classis) または階級 (gradus) への分類が誤りを含んでいるかどうかを，そして，より優れたそしてより適切な幾何学的な解析の本当の規則に従って割り当てられているかどうかを考察すべきである。しかし，私たちはこれほど偉大でこれほど有名な男［の評判］の損失を考えることなしにそれを実行するであろうが，それというのも，その非常に洞察力のある支持者たちが不当にではなく誇示する，デカルトおよびデカルト派のすべての人々［のもの］とは異なっている真実が，彼ら自身の見解にしばらくの間は対立させられるけれども，すべて［の人々のために］(もしこれがあまりに一般的なのであれば) または少なくとも幾何学者および解析学者のために明らかにされるからである。

幾何学の問題の一定の類への分類は古代の［人々にとって］だけではなく最近の解析学者にとっても必要であると思われる。例えば，

A + D が B に等しくされる，

または,

A quadratum + B in A が Z plano に等しくされる

が提示されるとしよう。前のものはそれらの根または辺を未知のものが，それら自身の限界のために，越えないが，これに反して，後のものは未知の辺の第 2 のベキあるいは平方を含み，これら 2 119
つの方程式は問題の第 1 のそして最も単純な種類 (genus) を定める。さらに，それらの問題は幾何学者たちによって平面的［な問題］といわれることを習慣としている。

平面的な問題についてデカルトは次のように言う。
「問題が通常の幾何学によって解ける場合，つまり平面上に描かれた直線と円だけを用いて解ける場合は，最後の方程式が完全に整理されたとき，たかだか 1 個の未知の平方が，方程式の根に或る既知量を掛けたものと，やはり既知の他の或る量との加法か減法によって生ずるものに等しい，ということななるであろう。」(［10］p.6)
また，曲線の分類については次にように述べている。
「幾何学的と名づけうる線，すなわち，何らかの的確で精密な計測を受けうる線のすべての点は，必ず，ひとつの直線のすべての点にたいして或る関係をもち，この関係は線のすべての点に関して同一の方程式によってあらわされうる。そして，この方程式が 2 個の未定量による矩形あるいは同一の未定量による正方形までしかのぼらないとき，曲線は第 1 の最も単純な類に属し，そこに含まれるものは円と放物線と双曲線と楕円しかない。しかし，方程式が 2 個の未定量 —— というのは，ここでは 1 点と他の点との関係を説明するのに 2 個の未定量が必要だからであるが

> —— の双方または一方の第 3 ないし第 4 次元までのぼるときは，曲線は第 2 類に属する。方程式が第 5 ないし第 6 次元までのぼるときは，線は第 3 類に属し，以下同様にどこまでも進む。」(［10］p.19)

問題の第 2 の種類は，そこにおいては未知量が第 3 あるいは第 4 のベキ，すなわち立方あるいは平方の平方，まで達するものである。しかし，最も近くの［引き続く］2 つのベキが，異なる階級であるにもかかわらず，問題のただ 1 つの種類を定めるという理由，それは平方の方程式は古代の人々にも最近の人々にも知られている方法によって容易に単純なまたは辺［の方程式］に還元される，それゆえ，定規とコンパスによって苦もなく解かれる，ということである。さらに，第 4 の階級の，あるいは平方の平方の，方程式は，ヴィエート (François Viète : 1540–1603) およびデカルトによって生み出された，新しい方法のおかげで第 3 の階級あるいは立方［の方程式］に還元される。確かに，この作業のためにヴィエートは，『方程式の改良について』(*De Emendatione Æquationum*) という本の第 6 章において見られるように，その巧妙な，そして，彼自身に特有な補足付加による漸層法 (climax paraplerosis) を確立したし，同様の場合においてデカルトによって使用されている技法は，それを別の言葉で表現しているけれども，異なってはいない。

> ここで言及されている，4 次方程式のより低次の方程式への還元については，ヴィエート『方程式の再検討および改良についての 2 つの論文』(*De Æquationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo*，1591 年) のうちの第 2 論文『方程式の改良について』の第 6 章，および，デカルトの『幾何学』(*La Géométrie*，1637 年) 第 3 章の中の「問題が平面的である場合における，4 次元をもつ方程式の単純化。また，立体的な問題はどのようなものか」という節 (［10］p.61 以降) を参照のこと。

同様に，立方の立方の方程式もまた平方の立方［の方程式］に，あるいは第 6 の階級の方程式を第 5［の階級］の方程式に，多少面倒であるにもかかわらず，ヴィエート派またはデカルト派の解析学者は下げるであろう。さらに，前にいわれた場合におけることから，そこにおいてはただ 1 つだけの未知量が見出される，偶数の階級の方程式は最も近くのより小さい奇数の階級の方程式に下げられるし，そこにおいては 2 つの未知量が見出される方程式においても同じことが起こることをデカルトは，彼自身によってガリアの言葉［フランス語］で書き上げられた『幾何学』の 323 ページにおいて，自信をもって宣言している。

> デカルトの主張は，
> 「私はこの方程式を平方の平方まで高める曲線と，それを立方までしか高めない曲線とを同じ類に入れ，また，方程式が立方の平方まで高まる曲線と，方程式が超立体までしか高まらない曲線とを同じ類に入れ，以下同様にする。その理由はこうである。平方の平方に達する場合のすべての困難を立方の場合に還元し，立方の平方に達する場合のすべての困難を超立体の場合に還元する一般的規則があるので，前の場合をより複雑なものと考えるべきではないのである。」(［10］pp.20–21)
> なお，本文中にある「323 ページ」は 1637 年版の『幾何学』におけるページ数。以下も同様。

しかし，そのような種類のものが曲線を規定するすべての方程式である。確かに，これら［の方程式］について，前述の還元あるいは下降は，たとえデカルトが断言しているとしても，成功しないだけでなく，解析学者たちはそれが全く不可能であることを体験するであろう。例えば，

A quadratoquadratum が Z solido in E に等しくされる

という，放物線を規定する平方の平方の方程式が提示されるとしよう。どのような方法によってこの第 4 の階級の方程式は第 3［の階級の方程式］に下げられるのであろうか？何の目的で補足付加の漸層法の巧妙な救済策が使われるのであろうか？

ところで，私たちはヴィエートに従って未知量に母音の文字を割り当てる。なぜならば，軽快であり十分に任意性のあるこのことをデカルトはなぜ変えたのか，私には分からないからである。

しかし，どんな問題であろうとそれによって私たちが曲線のある階級に還元する［ことができる］普遍的な方法が手元にあり，その結果として，この探求または観察が無用でもなく役に立たないものでもないことは明らかである。

例えば，未知量が第 3 のあるいは第 4 のベキに達する問題が提示されるとすると，私たちはそれを第 2 の階級である円錐曲線によって解くであろう。しかし，もし方程式が第 5 あるいは第 6 のベキまで達するならば，そのときは私たちは解を第 3 の階級の曲線によって示すことができる。もし方程式が第 7 あるいは第 8 のベキに達するならば，私たちは解を第 4 の階級の曲線によって示すであろうし，そして，同一の方法によって無限にそうである。そしてそのために，これは言葉だけについてではなく内容について熟考する問題になることは明らかである。

例として，

A *cub.cub.* + B *pl.sol.* in A が Z *sol.sol.* に等しくされる，

または，もしあなたが望むならば，

A *qu.cub.* + B *pl. pl.* in A が Z *pl.sol.* に等しくされる

が提示されるとしよう。このいずれの場合においても，私たちは問題を第 3 の階級または立方の曲 121
線によって解くであろうし，そして，デカルトはそれを実行した。しかし，もし

A *qu.cub.cub.* + B *pl.pl.sol.* in A が Z *pl.sol.sol.* に等しくされる，

または

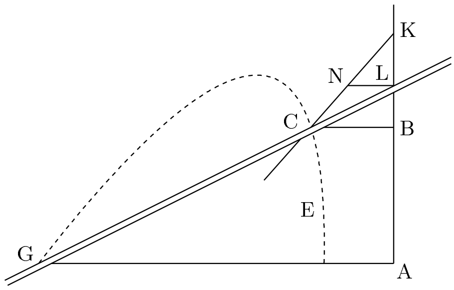
A *qu.qu.cub.* + B *sol.sol.* in A が Z *pl.pl.sol.* に等しくされる

が提示されるならば，そのときは私たちは問題を第 4 の階級のまたは平方の平方の曲線によって解くであろうが，しかし，デカルトは，この場合には当然第 5 あるいは第 6 の階級の曲線に還元されるであろうと信じていたから，実行しなかったしできるようになるとも考えなかった。既にパッポスやより最近の人々によって境界を定められた，不確かではない幾何学においていつの日か問題が不適切な種類［の曲線］によって解かれるということはしばしば間違いであるから，その問題の解に関して，適当なそしてより簡単な［曲線を］捨てることによって，非常に複雑なそしてより高い階級の曲線を要求する人は，確かに，より純粋な幾何学を害する。それが起こらない［ようにする］ために，デカルト［の行ったこと］は修正されなければならないし，そして 1 つ 1 つの問題は都合のよい，すなわち適切でしかも自然な，位置に復元されなければならない。

しかし，322 ページにおいて，デカルトは定規およびもう 1 つの直線または曲線の交線に由来する曲線を，それから導かれる 321 ページの図［次に掲げる図］における直線または曲線より，つねに，
高い階級または種類のものであるとはっきりと主張する。もしよければ，言及された 321 ページの 122
図における直線 CNK そのものの代わりにその頂点が点 K であり軸が無際限の［直線］KLBA である立方放物線 (parabola cubicus) がおかれるものと理解されるとし，そして，その他はデカルトの考えに従って作図されるとしよう。言及された立方放物線の規定する方程式は次の

一方の側は A *cub.* であり，他方の側は B *quad.* in E である

［という方程式］であることは明らかである。さらに，このような条件から生じる曲線 EC は平方の平方の方程式にまで達することを直ちに見出すであろう。ゆえに，デカルトの前述の定義によれば，平方の平方の曲線は立方の曲線より高い階級または種類である。たとえ彼が 323 ページにおいて同じようにはっきりと反対のこと，すなわち，平方の平方の曲線および立方の曲線は 1 つの同じ階級



123 または種類であること，を定義しているにもかかわらず，である。

> デカルトは言う。
> 「この曲線を描くのに使う器具で，平面 CNKL を限るものが直線 CNK でなく，この双曲線，あるいは第 1 類の他の何らかの曲線であるようにすれば，この線と定木 GL との交わりは，双曲線 EC のかわりに，第 2 類に属する他の曲線を描くであろう。…… しかし，平面 CNKL を限るものが第 1 類のこれらの線でなくて，第 2 類の曲線のひとつであるならば，それによって第 3 類の線のひとつが描かれるであろうし，第 3 類の線のひとつが使われるならば第 4 類の線のひとつが描かれ，以下同様にどこまでも進むであろう。」(［10］p.20)

さらに，すべての問題を無限に —— 確かに，第 3 および第 4 のベキの方程式を含む［問題］を第 2 の階級の曲線に，第 5 および第 6 のベキ［のもの］を第 3［の階級のもの］に，第 7 および第 8［のベキのもの］を第 4［の階級のもの］に —— そして無限に順序正しく，還元する，私たちの方法を，どのような誤りであれ，あるいはまたデカルトが［それを］真実の損害の中に隠蔽することを罪であると考える人々に提供することを，それを欲したときにはいつでも，私たちは延期しないであろう。

そして，それは，第 2 のベキに達する問題，および第 1 の階級の問題と同じ種類 (species) の問題であり，平面の［問題］といわれて，円すなわち第 2 の階級の曲線を必要とする問題をためらわせることもない。なぜならば，すべての問題を［それに］適合する曲線によって完全に解いてしまう私たちの一般的な方法を私たちは明らかにするであろうとき，独特で適切な応答はこの異論を無視しないであろうからである。

論考の第 2 部

公に与えられた信頼に満足を与えるために，どのような問題でも［それに］適合する適切な曲線によって解かれるであろう一般的な方法を私たちは提供する。この論考の第 1 部において，互いにすぐ近くの 2 つの階級の —— 例えば，第 3 のおよび第 4 の，第 5 のおよび第 6 の，第 7 のおよび第 8 の，第 9 のおよび第 10 の，など —— 問題がただ 1 つだけの曲線の階級に関係していることは既に述べられている。確かに，第 3 あるいは第 4 のベキに達する問題は第 2 の階級の曲線によって解かれ，さらに，第 5 あるいは第 6 のベキに達するそれは第 3 の階級の曲線によって解かれ，無限に［そうである］。

さらに，遂行されるであろう方法は次のようである。未知量が 1 つだけ見出される，与えられた任意の問題は，はじめに，より高いあるいは偶数の階級に還元されるべきである。次いで，辺によ

る作用から完全に自由にされるべきである。これがなされると，一方の側には既知の量あるいは与えられた同次のもの，そして，もう一方［の側］には，その 1 つ 1 つの要素は未知の辺の平方によって作用されるであろう，何か他の未知の同次のもの，の間の方程式が残るであろう。その未知 124
の同次のものは，その辺が，未知の同次のものといっしょのそれ自身の平方の方程式において，未知の辺の階級が消え去るほど高くなることができるように，同じ技法によって，表されるであろう，辺の平方に等しくされるべきである。さらに，それぞれの平方の辺が，未知の根あるいは辺によって作用されるかも知れない同次のものによって，そして最後にはついに，第 2 の未知の根によっても作用されるかも知れないそれらによって，表されるように配慮されなければならない。ついには，一方の側は単純な除法，他方［の側］は辺の平方の除去のおかげで，与えられた問題に適合する曲線を規定する 2 つの方程式が生じるであろうし，そして，軌跡による問題の解法において私たちが以前から使っていたのと同じ方法によって，それらの交線は問題の解を示すであろう。

もしよければ，例

A *cub.cub.* + B in A *qu.cub.* + Z *pl.* in A *qu.qu.*
+ D *sol.* in A *cub.* + M *pl.pl.* in A *qu.* が N *sol.sol.* に等しくされる

が提示されるとしよう。確かに，第 5 あるいは第 6 のベキに達する問題はすべてこの形に還元することができる。なぜならば，これは第 5 のベキを第 6［のベキ］に高めること，あるいは，次いで，A あるいは辺による最も高い［階級の］作用からそれを自由にすること，の他には何もないからであり，これはヴィエートもデカルトも十分に説明していることである。

それゆえ，辺

A *cub.* + B in A in E

による平方が形づくられるとし，はじめに，その方程式の前の側［左辺］に等しくされるとしよう。それゆえ，

A *cub.cub.* + B in A *qu.qu.* in E bis + B *qu.* in A *qu.* in E *qu.* が
A *cub.cub.* + B in A *qu.cub.* + Z *pl.* in A *qu.qu.*
+ D *sol.* in A *cub.* + M *pl.pl.* in A *qu.* に等しい

となるであろうし，そして，方法にはつねに制約がないことが注意されなければならないから，両側から A *cub.cub.* が取り去られ，残りが A *qu.* で割られると，方程式には， 125

一方の側に，B in A *cub.* + Z *pl.*in A *qu.* + D *sol.* in A + M *pl.pl.* が，

そして，

他方の側に，B in A *qu.* in E bis + B *qu.* in E *qu.* が，

残るであろう。さらに，この方程式は，明らかなように，第 3 の階級の曲線を与える。

さらに，2 重方程式が立てられ，適切に問題の解に到達するために，辺 A *cub.* + B in A in E の平方が前の方程式の後の側［右辺］，すなわち N *sol.sol.*，にも等しくされなければならないから，ゆえに，平方の辺の除去によって，平方 N *sol.sol.* の辺 —— これは容易に与えられ，もしよければ，N *sol.* と呼ばれる —— は

A *cub.* + B in A in E

—— これははじめに与えられた方程式の前の側に等しい平方の辺である —— に等しくされるであろう。それゆえ，私たちはこの，

N *sol.* と A *cub.* + B in A in E の間の，

第 2 の方程式を得，これは，同様に，第 3 の階級の曲線を与えるであろう。次いで，今見出された 2 つの曲線の交線が A 自身の値を，すなわち提示された問題の解を，与えるということを誰が見ないであろうか？

もし問題が第 7 あるいは第 8 のベキに達するならば，はじめに第 8 のベキによる形によって考えられなければならず，次いで，辺による作用から完全に自由にされなければならない。これがなされると，それゆえ，既に書かれた方法による適切な還元の後で，

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}\ \mathit{qu.cub.cub.} + \mathrm{B}\ \text{in}\ \mathrm{A}\ \mathit{qu.qu.cub.} + \mathrm{D}\ \mathit{pl.}\ \text{in}\ \mathrm{A}\ \mathit{cub.cub.}\\ &\quad + \mathrm{N}\ \mathit{sol.}\ \text{in}\ \mathrm{A}\ \mathit{qu.cub.} + \mathrm{M}\ \mathit{pl.pl.}\ \text{in}\ \mathrm{A}\ \mathit{qu.qu.}\\ &\quad + \mathrm{G}\ \mathit{pl.sol.}\ \text{in}\ \mathrm{A}\ \mathit{cub.} + \mathrm{R}\ \mathit{sol.sol.}\ \text{in}\ \mathrm{A}\ \mathit{qu.}\ \text{が}\ \mathrm{Z}\ \mathit{pl.sol.sol.}\ \text{に等しい}\end{aligned}$$

［となる］であろう。

この方程式の任意の側に等しくされるであろう平方は辺

$$\mathrm{A}\ \mathit{qu.qu.} + \mathrm{B}\ \frac{1}{2}\ \text{in}\ \mathrm{A}\ \mathit{cub.} + \mathrm{D}\ \mathit{pl.}\ \text{in}\ \mathrm{A}\ \text{in}\ \mathrm{E}$$

によって表されるであろう。

さらに，次に，方程式において辺あるいは根 A の 2 つのより高いベキが完全に消えるように，同じ技法によって私たちはこの平方の辺の同次のものを表したが，これは非常に容易である。それゆ
126 え，この平方の辺がもし提示された方程式の前の側に等しくされるならば，共通のものが消し去られ，残りが A $\mathit{qu.}$ で割られると，一方の側から第 4 の階級の曲線を規定する方程式が生じるであろう。

次いで，はじめに提示された方程式の他方の側からの辺の平方の除去の後で，Z $\mathit{pl.sol.sol.}$ の辺，これは P $\mathit{pl.pl.}$ ということができる，は

$$\mathrm{A}\ \mathit{qu.qu.} + \mathrm{B}\ \frac{1}{2}\ \text{in}\ \mathrm{A}\ \mathit{cub.} + \mathrm{D}\ \mathit{pl.}\ \text{in}\ \mathrm{A}\ \text{in}\ \mathrm{E}$$

に等しくされるであろう。しかし，この方程式は別の第 4 の階級の曲線をも与えるであろうし，そして，これら 2 つの曲線の交線は A の値，すなわち提示された問題の解，を与えるであろう。

さらに，第 9 または第 10 のベキに達する問題においては，平方の辺は，それらのおかげで未知の辺の 3 つのより高い階級が消え去るように，その中に少なくとも 4 つの同次のものが存在するように形づくられなければならないことに注意しなければならない。そのうえ，第 11 または第 12 のベキに達する問題においては，平方の辺は，それらのおかげで未知の辺の 4 つのより高い階級が消え去るように，少なくとも 5 つの同次のものからなるべきであるように形づくられなければならない。普遍的でしかも非常に簡単な方法によって，そして幾何学的な言葉として純粋な幾何学の主題において私たちが使うために，単独の単純な除法あるいは割り算によって表されるであろう平方の辺の形が自由にされることを解析学者は経験によって見出すであろうし，そして，記号 + および − の変化がこの方法に損害をもたらすことは決してない。

さらに，第 2 のベキに達する問題は平方の辺の除去によって第 1［のベキの問題］に還元されるから，知られているように，それらは第 1 の階級の線，すなわち直線，によって解かれるであろうし，そして，平方の辺の除去をあたかも，それが使われるであろう私たちの方法から生じるどのような問題においても，よく知られたそして手近なものであるかのように私たちは仮定したので，この論考の第 1 部においてと同様に無益な異論が生じるであろうと私たちは恐れている。

それゆえ，次に，厳格で非常に単純な幾何学的な問題の，解く［問題］に応じた，さまざまな種類

の曲線から生じるであろう適切な軌跡による，解法および作図が知られずにいることはない。さらに，つねに申し分のないしかも問題の自然な種類が保持されている曲線を変えることは解析学者には自由であろうし，そして，つねに，第 8 または第 7 の階級の問題は第 4［の階級］の曲線によって，第 10 または第 9 の問題は第 5 の曲線によって，第 12 または第 11 の問題は第 6 の曲線によっ 127
て，そしてそのように無限に同一の方法によって解かれるであろう。他方，反対に，デカルトによれば，第 8 または第 7 の階級の問題は第 5 または第 6［の階級］の曲線を必要としており，第 10 または第 9 の問題は第 7 または第 8 の曲線を，第 12 または第 11 の問題は第 9 または第 10 の曲線を［必要としており］，無限にそうである。これが単純さや幾何学的な真実からどれだけ離れているかということをデカルト派の人々は認識するかも知れないか，または，もしそのように思われるものがあったならば，彼らは反論するかも知れない。

確かに，私たちは真実を探し求めるだけであり，もしそれがこのとても偉大な人の論文の中のどこかに隠れているならば，私たちはそれを直ちに快く喜んで受け入れるであろうし，また，認識するであろう。確かに，たとえデカルトが，成功している (κατορθοῦντας) 多くのことと同じくらいに，私が他人の言葉を使うときに，私が引き起こすかも知れないであろう量より多く誤るとしても，この途方もない天才に対する大きな称賛の気持ちが私自身を襲った。

> κατορθόω : *to set upright*, *erect*, *to keep straight*, *set right*, *to accomplish successfully*, *bring to a successful issue*, *to succeed*, *prosper*; in PASS. *to go on prosperously*, *succeed*; *mend*, *manage well*, *keep sound*

論考の第 3 部

これは一般的な理論としておそらくは十分である。なぜならば，より高い階級の曲線によって解かれるであろうとデカルトが境界を定める問題，それらを私たちは一般的な方法によって運よく 2 倍より小さい曲線の階級に下げたからである。しかし，少なくともその方策がすべての問題を完全に容認するように理解されなければならないと私たちは宣言する。というのは，それらはより多くの無限の特別な場合を拒否しないからである。それゆえ，より多くのデカルトの誤りが見出され，そして，解析から直ちに適切な救済策が得られるように，それがさらに拡張されること，および，デカルトの解析が 2 倍より小さい限界までだけでなく，4 倍，6 倍，10 倍，100 倍など，ついには無限に小さくなるまで下げることは有益である。さらに，次に，数自身の指数によるベキをより高い階級によって表示することは適切であろう。

2 つの与えられたものの間に連続して比例する 6 つ［の中項］を見出すことが提示されるとしよう。

2 つの与えられたものを B および D としよう。見出されなければならない最初のものが A とおかれるとしよう。［そうすると，］

A^7 と $\mathrm{B}^6\mathrm{D}$ の間の方程式

が生じるであろう。

この方程式は，デカルトに従えば，第 5 または第 6 の階級の曲線だけによって解くことができ 128
る。私たちはそれをこの論考の第 2 部において，あたかもその他も同じ性質であるかのように，第 4 の階級の曲線によって一般的に解いた。しかし，私たちがそれを第 3 の階級の曲線によって解く

ことを妨げるものは何もない。

実際，方程式のそれぞれの項が次の同次のもの［すなわち］A^4E^2D に等しくされるとしよう。それは一方の側の A^7 に等しくされるであろうし，すべてが A^4 によって割られると，明らかに第 3 の階級の曲線を与える，E^2D と A^3 の間の方程式が残るであろう。その一方，他方の側によって A^4E^2D が B^6D に等しくされるであろうし，すべてが D で割られ，平方が開かれると，こちらもまた第 3 の階級の曲線を与えるであろう，A^2E と B^3 の間の方程式が残るであろう。さらに，これら 2 つの曲線の交線は A の値，すなわち提示された問題の第 3 階級の曲線による解，を与えるであろう。

しかし，2 つの与えられたものの間に連続して比例する 12 個の中項を見出すことが提示されるとすると，方程式は

A^{13} と $B^{12}D$ の間のもの

であろう。さらに，デカルトはそれを第 11 または第 12 の階級の曲線だけで解くことができると信じていた。私たちは一般に，この論考の第 2 部において，同じ階級の任意［の方程式］と同様に，それを第 7 の階級の曲線によって解くことができることを示した。しかし，それ以上に［詳しく］探し求めることによって第 5 の階級の曲線による洗練された解が生じ，それどころか，後で見られるように，第 4［の階級］の曲線によって［解が］与えられる。

まず，この方程式のそれぞれの要素，確かに一方が A^{13} であり他方が $B^{12}D$ である，が同次のもの A^8E^4D に等しくされるとしよう。第 1［の方程式］において，すべてが A^8 で割られると，明らかに第 5 の階級の曲線を与える，A^5 と E^4D の間の方程式になるであろう。第 2［の方程式］において，すべてが D で割られ，4 分の 1 のベキあるいは平方の平方［の開平］によって［次数が］下げられると，第 3 の階級の曲線を与える，A^2E と B^3 の間の方程式が残るであろう。それゆえ，1 つは第 5 の階級の，もう 1 つは第 3［の階級］の，それら 2 つの曲線によって，私たちは提示された問題を解決する。

しかし，そのうえ，同じ問題をより容易に，すなわち第 4 の階級の曲線によって，私たちは解くことができる。方程式のそれぞれの要素が A^9E^3D に等しくされるとしよう。一方は，A^9 による除法の後で，A^4 が E^3D に等しくなるであろうし，この方程式は第 4 の階級の曲線を与える。しか
129 し，他方は，すべてが D で割られ，次いで 3 分の 1 のベキあるいは立方［の開立］によって，再び第 4 の階級の曲線を与えるであろう，A^3E と B^4 の間の方程式になるであろう。それゆえ，私たちは問題を第 4 の階級の 2 つの曲線によって非常に簡単に解決する。

これらの例を見た人は，連続して比例する 30 個の中項の発見［という問題］を第 7［の階級］の曲線によって，それどころか第 6［の階級］の曲線によって，解くことができることを疑うことができないであろう。確かに，

A^{31} と $B^{30}D$ の間の

方程式は共通の項 $A^{24}E^6D$ に等しくされるであろうし，そのために［問題は］第 7 の階級の曲線によって解かれるであろう。または，共通の項 $A^{25}E^5D$ に等しくされるであろうし，そのために第 6 の階級の曲線による解が生ずるであろう。

だから，72 個の中項の発見［という問題］は第 9 の階級の曲線によって解かれるであろうし，前にいわれたことから，問題の階級およびそれを解く曲線の階級の間に，すべての与えられた比より大きい比を割り当てることができることは明らかである。そして，デカルト派の人々が［それを］

見たとき，彼らは私たちの警告や改良の必要性に同意するであろうことを私は疑わない。

いくつかの部分への適切な分割によって同次のもの自身を受け入れるために，しばしば方程式の形そのものが変えられなければならないことに注意が払われなければならないが，それは一度警告すれば十分であろう。

例えば，10 個の中項の発見［という問題］が提示されるとして，

A^{11} と $B^{10}D$ の間の

方程式があるとしよう。

同次のものに，何であれ，与えられた直線，例えば Z，が掛けられるとし，その結果として，

$A^{11}Z$ と $B^{10}DZ$ の間の

方程式があるとしよう。確かに，このようにして数 12 に到達されるであろうし，この作業によって非常に簡単にいくつかの部分への還元または下降が生じるであろう。すなわち，任意のものが同次のもの A^8E^4 に等しくされるとしよう。一方では，第 4 の階級の曲線を与える，

A^3Z と E^4 の間の

方程式が生じるであろうし，しかし，他方では，平方の平方の辺の開平のおかげで，第 3 の階級の曲線を与える，A^2E および与えられた同次のもの $B^{10}DZ$ の平方の平方の辺，もし望むなら N solidum であるとしよう，の間の方程式［が生じ］，そして，一方は第 4［の階級］の，もう一方は 130
第 3 の階級の，2 つの曲線によって 10 個の中項が見出されるであろう。そして，より以前のその方程式の軽微な変化によって私たちは非常に容易に［その解に］到達することになる。

私は，技法そのものが解析に十分に与えるであろう，無限［個］の別の近道に留まらない。私は，より下位の階級によって作用された別の同次のものを含む未知のベキがないときだけでなく，同次のものの中の何らかのものがすぐ後の［より高い］ベキの階級によって作用されるならば，適用されるということだけを，上の方で私たちが述べたすべてのことに付け加える。例えば，もし

$A^{13}+NA^{12}+MA^{11}+RA^{10}$ が $B^{12}D$ に等しくされる

ならば，この方程式の解は，同様に，方程式に対して仮定された，私たちが上で使った，共通の同次のもの，すなわち A^9E^3D，によって，あたかも 2 つの与えられたものの間に 12 個の中項が見出されなければならないと提示される［とき］ように，容易に与えられるであろう。さらに，同様の技法がより高い階級によって作用された方程式において使われるであろう。

しかし，一方の側の中に 1 つだけの未知量が見出される方程式において，その純粋なベキの指数は，それによってその問題の階級が規定されるべきであるためには，素数でなければならないことが注意されなければならない。確かに，もしその指数が合成された数であるならば，問題はそれを分割する数の階級に直ちに落とされるであろう。

例えば，与えられた 2 つのものの間に連続的に比例する 8 つの中項が探し求められるとすると，

A^9 と B^8D の間の方程式

が生じるであろう。この場合において，数 9 は，数 3 によって 2 回計られた，合成された［数］であるから，問題は第 3 の階級であると述べられるであろう。これは確かにそうである。確かに，もし与えられた 2 つのものの間に 2 つの中項が見出され，そしてさらに，第 1 のものと第 2 のものの［間に］，第 2 のものと第 3 のものの［間に］，第 3 のものと第 4 のものの間に，同様に 2 つ［ずつ］の中項が見出されるならば，はじめに提示された 2 つの線の間に 8 つの中項が生じるであろう。

もし与えられた 2 つのものの間に 14 個の中項が探し求められるとするならば，A^{15} と $B^{14}D$ の

間のものである，方程式は問題を別の 2 つの問題 —— そのうちの 1 つは第 3 の階級であり，もう 1 つは第 5［の階級］である —— に落とされることを示すであろう。

131 そしてそれゆえに，問題の階級を正しく表現し規定するために，純粋なベキの指数は素数でなければならないことは明らかである。さらに，私の見るところでは，自分自身に掛けられた 2 重の平方および増加された単位［との和］はつねに素数であることは明らかであり，ずっと以前から解析学者にその定理の真実性が示されていたから，確かに，3，5，17，257，65537 などは無限に素数であり，私たちは，そこから派生されるであろう方法のおかげで，その階級がその解の属している曲線の階級に対して与えられた任意の［比］より大きい比をもつという問題を何の困難もなく解決するであろう。

$F_n = 2^{2^n} + 1$ (n は自然数) の形の数をフェルマ数と，今日では，呼んでいるが，フェルマはこれらはすべて素数であると考えていた。なお，フェルマ数が素数であるとき，それをフェルマ素数という。
確かに，$F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$ は素数であるが，$F_5 = 4294967297 = 641 \times 6700417$ が素数でないことを 1732 年にオイラー (Leonhard Euler : 1707–1783) が示した。
フェルマ数がすべて素数であると初めて言及されたのは 1640 年 12 月 25 日付のメルセンヌ (Marin Mersenne : 1588–1648) あての手紙の中であるということだから，F_5 が合成数であることが分かるまでに 100 年ほどの時間を要したということになる。

例えば，与えられた 2 つのものの間に連続的に比例する 256 個の中項を見出すこと［という問題］が提示されるとすると，

$$\mathrm{A}^{257} \text{ と } \mathrm{B}^{256}\mathrm{D} \text{ の間の方程式}$$

が生じるであろうし，それぞれの項が次の $\mathrm{A}^{240}\mathrm{E}^{16}\mathrm{D}$ に等しくされ，これから問題は第 17 の階級の曲線によって解かれるであろう。

もし 65536 個の中項が探し求められるならば，問題は第 257 の階級の曲線によって解かれるであろうし，無限にそのように，より大きな階級はすぐ前のより小さい階級に下げられるであろう。さらに，すぐ近くの 2 つのものの間で比が無限に大きくされることを誰が見ないであろうか？

しかしながら，デカルトが誤ることを最近のデカルト派の人はそれでも隠すのであろうか？ゆえに，確かに，［これを］私は差し出す (ἐπέχω) し，このことについて［これは］入念なものであり，そして［これ以上］議論されることのないものであると判断されるであろうことを私は期待する。

ἐπέχω : *have* or *hold upon*, *hold out to*, *present*, *offer*, *direct towards*, *keep in*, *hold back*, *check*, *reach* or *extend over* a space, *occupy* a country

---

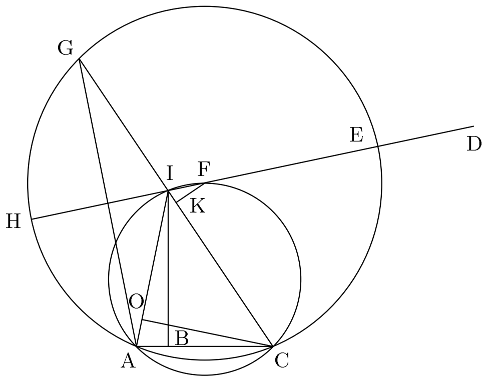
幾何学的断片

『全集』pp.70–89

幾何学に関係する，次の 5 つの論考を集めたもの。
パスカル氏によって提示された問題の解 (*Solutio Problematis a Domino Pascal Propositi*，1636 年)
2 つの補題 (*Porismata Duo*，1655 年)
ユークリッドの補題 (*Porismatum Euclideorum*，1655/56 年)
放物線に関するフェルマの命題 (*Propositio D. de Fermat circa Parabolen*，1636 年)
3 線の軌跡の証明 (*Loci ad Tres Lineas Demonstratio*，1629 年?)

パスカル氏によって提示された問題の解 70

パスカル氏 (Blaise Pascal：1623–1662) はこの問題を提示した。［すなわち,］三角形の頂点における角および垂線が辺の差に対してもっている比が与えられたとき，三角形の種類を見出すこと。



任意に与えられた直線 AC が提示されるとし，その上に与えられた角を含む円［周］の部分 AIFC が描かれるとしよう。私たちは問題を，与えられた底線が AC，頂角が AIC，そして，垂線が辺の差に対して［与えられた］比をもつ三角形を探し求めるように，変えた。

既にそれがなされ，そして，探し求められていた三角形が AIC であると仮定されるとしよう。垂線 IB が下され，弧 AFC が F において半分に分けられ，AF，FC および IF が結ばれ， 71
そして，直線 AI，IC に垂線 CO，FK が下されるとしよう。それから，中心 F，間隔［半径］AF で，円 AHGEC が描かれ，延長された直線 CI，IF が点 G，H，E においてそれに出会うとしよう。最後に，GA が結ばれるとしよう。

「ボスューによって与えられた 2 つの図において，補助線 AF，FC は確かに描かれていた。私たち［『全集』編集者］は，図 65［ここに掲げられた図］および 66 をより複雑ではなく表すために，それらを削除した。」(『全集』p.71)
なお，ボスュー (Charles Bossut：1730–1814) はフランスで広く使われていた教科書の著者として有名だったようです。『数学教程』(*Cours de mathématiques*，1781 年) や『数学の一般的な歴史』(*Histoire générale des mathématiques*，1810 年) などの著作があります。

中心に対する角 AFC は円周に対する角 AGC の 2 倍である。しかし，角 AIC は［弧の］同じ部分における角 AFC に等しくされる。それゆえ，角 AIC は角 AGC の 2 倍である。しかし，角 AIC は 2 つの角 AGC，IAG［の和］に等しくされる。それゆえ，角 IGA，IAG は等しく，そしてそれゆえ，直線 IA，IG も［等しい］。しかし，中心 F から直線 GC に垂線 FK を下すと，GK，KC は等しく，そしてそれゆえ，KI は直線 CI，IG，すなわち直線 CI，IA，の差の半分である。

さらに，垂線 IB の直線 CI，IA の差に対する比が与えられていた。ゆえに，BI の IK に対する比が与えられ，そして，それぞれに直線 AC が掛けられると，AC in BI による長方形の AC in IK による長方形に対する比が与えられる。しかし，AC in BI による長方形は AI in CO による長方

形に等しくされる。なぜならば，両方とも三角形 AIC の 2 倍だからである。ゆえに，AI in CO による長方形の AC in IK による長方形に対する比が与えられる。

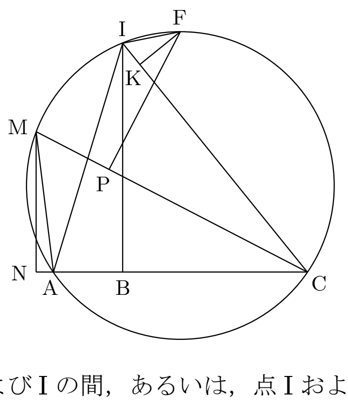
さらに，仮定から，角 AIC が与えられ，そして，つくり方から，［角］COI は直角である。ゆえに，三角形 COI が形において与えられる。それゆえ，CO が CI に対する比が与えられ，それゆえ，AI in CO による長方形の AI in IC による長方形に対する比が与えられる。しかし，私たちは AI in CO による長方形の AC in IK による長方形に対する比が与えられることを証明した。ゆえに，長方形 AIC［AI × IC］の AC in IK による長方形に対する比が与えられる。

既に，仮定から，三角形 AFC において角 AFC が与えられている。ゆえに，角 FAC が与えられ，それゆえ，それに等しい［角］CIF が与えられるであろう。さらに，角 FKI は直角である。ゆえに，三角形 FIK が形において与えられ，それゆえ，直線 KI が IF に対する比が与えられ，それゆえ，AC in IK による長方形の AC in IF による長方形に対する比が与えられる。さらに，長方形 AI in IC が長方形 AC in IK に対する比が与えられることが証明されている。ゆえに，長方形 AI in IC が長方形 AC in IF に対する比が与えられる。さらに，直線 IG，IA が等しいから，長方形 CIG は長方形 CIA に等しく，そして，［方べきの定理により］長方形 CIG は長方形 HIE に等しく
72 される。ゆえに，長方形 HIE の AC in IF による長方形に対する比が与えられる。

ED の AC に対する比が与えられた［比である］としよう。それゆえ，AC が与えられたとき，最初の図において直線 HE に対してまっすぐにおかれる，ED が与えられるであろう。それゆえ，長方形 HIE は長方形 AC in IF に対して ED が AC に対する与えられた比にある。しかし，DE が AC に対するように，DE in IF が AC in IF に対する。それゆえ，長方形 HIE は長方形 AC in IF に対して長方形 DE in IF が長方形 AC in IF に対するようである。それゆえ，長方形 DE in IF は長方形 HIE に等しくされる。

三角形 AFC が形において与えられることは証明されている。しかし，底線 AC は大きさにおいて与えられている。ゆえに，AF が与えられ，それゆえ，その 2 倍である EH が与えられる。

等しい長方形 DE in IF および HIE に DE in IH による長方形が加えられるとしよう。DE in FH による長方形が長方形 DIH に等しくなるであろう。さらに，両方の直線 DE，FH が与えられているから，DE in FH による長方形が与えられる。それゆえ，長方形 DIH が与えられ，与えられた大きさ DH に連結されると，平方の図が不足したものになる［$DI \times IH = (DH - IH) \times IH = DH \times IH - IH^2$ ということらしい］。ゆえに，直線 IH が，それゆえ，残りの IF が与えられる。さらに，点 F が位置において与えられている。ゆえに，点 I も三角形 AIC も与えられる。



解析から総合に戻ることは難しくない。しかし，すべての疑わしさが取り除かれるために，探し求められていた三角形が第 2 の図［左図］において見出された［三角形］AIC に相似であることが容易に証明される。さらに，三角形 AIC は点 F の両方の部分に点 F から両側に等しい距離にある頂点をもつことができる。確かに，形および大きさにおいて同じであろうし，位置は変えられるであろう。

確かに，もし探し求められていた三角形が見出されたものに相似でないならば，同じ底線が残され，その頂点は点 F お
73 よび I の間，あるいは，点 I および A の間にあるであろう。FC の側について，同様の証明によっ

て第 2 の三角形 AIC で同じことが結論されるから，どちらの側かは重要ではない。

はじめに，頂点が A および I の間にあり，もし可能ならば，探し求められていた三角形が三角形 AMC に相似であるとおかれるとしよう。FM が結ばれ，垂線 FP が下されるとしよう。垂線 MN の MP に対する比は仮定から与えられるであろうし，それゆえ，それは，私たちが与えられた［比］に等しいことを証明した，IB が IK に対する比に等しいであろう。これは不合理である。

確かに，三角形 FMP における M における角は三角形 IFK の I における角に等しくされるから，三角形 FIK，FMP は相似であろう。しかし，FM は FI より大きい。ゆえに，MP は IK より大きい。しかし，MN は IB より小さい。それゆえ，MN が MP に対する比は IB が IK に対する比と同じであることはできない。

もし点 M が I および F の間にあるとするならば，垂線が長くされ，辺の差が小さくされることが証明されるであろうし，同じ推論によって，それは比を多様にする［ことが証明されるであろう］。もし点 M が FC の部分にあるとするならば，私たちは第 2 の三角形 AIC を用いるであろうし，証明は同じであろう。そのため，長い間これらの場合にとどまることは無用である。

それゆえ，探し求められていた三角形は見出された［三角形］AIC に相似であることは明らかであり，命題が満たされることは明らかである。

お望みならば，ロベルヴァル氏 (Gilles Personne de Roberval : 1602–1675) と同様にパスカル氏に，解かれるであろうこの問題が提示されるとしよう。[すなわち,]

ガリレオの螺線の上の与えられた点における接線を見出すこと。

> フェルマは 1636 年 6 月 3 日付けのメルセンヌ (Marin Mersenne : 1588–1648) あての手紙の中で，螺線のことを話題にしている。
> ここで「ガリレオの螺線」としたところはラテン語原文では helice Baliani であるが，編集者タヌリ (Paul Tannery : 1843–1904) は une spirale de Galilée と訳している (［2］p.70)。ここではそれに従った。なお，Baliani はイタリアの数学者・物理学者 Giovanni Battista Baliani (1582–1666) か。
> ガリレオ (Galileo Galilei : 1564–1642) の螺線とは極座標による方程式で $r = a\theta^2 - l$ ($l \geqq 0$) と表される曲線 (代数螺線の 1 種) のことらしい (Encyclopedia of Mathematics)。剛体の自由落下の研究に関連して発見されたという。

しかし，ロベルヴァル氏はこのような種類の螺線がいったいどんなものであるかを知っていた。

私たちによって解かれたこの問題の解を，私たちは学識豊かな人々によって［もたらされることを］待っているか，または，もしそちらの方がお望みならば，私たちは彼らに分け与えるであろう。それどころか，曲線が接するための一般的方法を［見出すことを]。

しかし，私たちには今の主題から空の手による三角形が退くようには思えないから，この問題を提示することができる。[すなわち,]

底線，頂角，および垂線および辺の差の和が与えられたとき，三角形を見出すこと。

底線，頂角，および垂線および辺の差の差が与えられたとき，三角形を見出すこと。 74

底線，頂角，および垂線が掛けられた辺の差による長方形が与えられたとき，三角形を見出すこと。

底線，頂角，および垂線の平方および辺の差の和が与えられたとき，三角形を見出すこと。

そして，多くの同様のもの［を提示することができ]，それらの解明を非常に博学な人々はガリレ

オの螺線の接線についての提示された問題または定理よりも簡単に見出すであろうと私は思う。

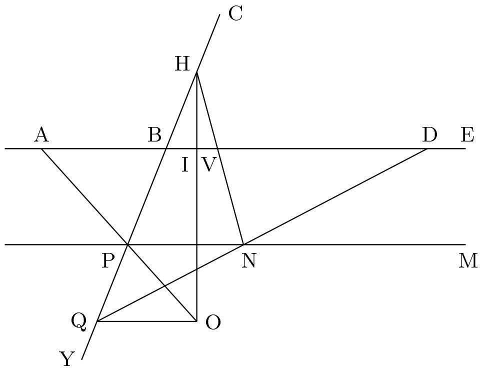
しかし，三角形の探求において，問題はしばしば，立体［的軌跡］に頼るのではなく，平面［的軌跡］によって解くことができるであろうことが観察されるであろう。しかし，非常に博学な人々は［このことについて］知っているから，［これ以上］付け加えることはおそらく無駄であると思う。

> 古代の人々は，直線，円を「平面的」軌跡と呼び，円以外の円錐曲線を「立体的」軌跡と呼んでいた。

---

2 つの補題

補題 I —— 点 B において互いに［他を］切断している 2 つの直線 ABE，YBC が位置において与えられ，さらに，直線 ABE の上に点 A および D が与えられたとき，それら［O，N］から，直
75 線 YBC の任意の点，例えば H，において曲げられ，直線 ABD を点 I および V で切断する，直線 OHN が［引かれると］，AI in DV による長方形が与えられた空間，すなわち AB in BD による長方形，に等しくされるような，2 つの点，例えば O および N，が探し求められる。



それゆえ，ユークリッド (Εὐκλείδης (Eukleides, Euclid)：前 300 頃活躍?) の作図はこの補題から生じ，問題の非常に一般的な解が提示されるであろう。

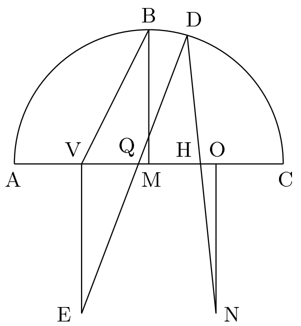
任意の点 O がとられるとしよう。直線 YBC を点 P において切断する直線 AO が結ばれるとしよう。点 O から，［直線］ABD に平行で直線 YBC と Q において出会う，直線 OQ が引かれるとしよう。さらに，同じ［直線］ABD に平行に無限の［直線］PNM が引かれ，結ばれた QD が直線 PNM を点 N において切断するとしよう。私は，2 つの点 O および N が命題を満たす，と断言する。

なぜならば，どこであろうと直線 YBC の上に点 H がとられ，直線 ABD と点 I および V において出会う直線 OH，NH が引かれると，AI in DV による長方形はどのような場合においても (3 つ［の場合］の 3 つの図だけが提示されている) 完全に AB in BD による長方形に等しいであろうからである。

補題 II —— その直径が AC，中心が M である円 ABDC が与えられたとき，もしそれら［E，N］から，円周上の任意の点，例えば D，において曲げられ，直径を点 Q および H において切断する，直線 EDN［が引かれる］ならば，QD および DH の平方の和が三角形 QDH に対して与えられた比をもち，そして任意［の点］における曲折について一般的にしかも普遍的に同じことが起きる，ような，2 つの点，例えば E および N，が探し求められる。

中心 M から直径に対する垂線 MB が立てられるとしよう。与えられた比が直線 BV の 4 倍が直線 VM に対するものと同じになるとしよう。点 V から，直径に対する垂線で VB に等しい，VE
76 が立てられるとしよう。MV に等しい直線 MO がとられると，ON は直線 VE に等しく平行にな

る。私は，求められていた点は点 E および N である，と言う。



なぜならば，円周上に任意の点，例えば D，がとられ，直径を点 Q および H で切断する直線 ED，ND が結ばれると，QD および DH の平方の和は三角形 QDH に対して，どのような場合においても，与えられた比にある，すなわち BV の 4 倍が直線 VM に対する比にある，であろうからである。

探究されるであろうその補題の証明が提示されるだけでなく，より洗練された数学者たちは E および N のほかに別の 2 つの点が問題の条件を満たすことができるかどうか，そして，問題の解が，はじめの補題におけるように，無限に手元にあるかどうかを見ることになる。もし彼らが答えないならば，この部分で苦しんでいる幾何学を助けることを私たちは軽蔑しないであろう。

ユークリッドの補題

復元され，最近の幾何学者に入門の形で示された理論

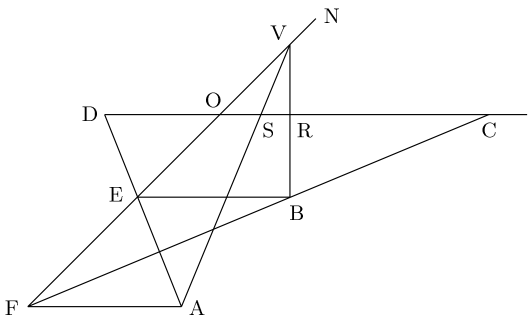
パッポス (Πάππος (Pappos，Pappus) : 4 世紀前半) は［『数学集成』(Συναγωγη : *Synagoge*，*Collectio*) の］第 7 巻のはじめで解析の場所 (τόπον ἀναλυόμενον) に関わりがある古代の幾何学者たちの本を列挙した。それらのすべては，ユークリッドの小品『ダタ』(Δεδομένα : *Data*) およびアポロニウス (Ἀπολλώνιος (Apollonius) : 前 262–前 200?) の『円錐曲線論』(Κωνικων : *Conica*) のはじめの 4 巻を除いて，時間の［経過による］損傷によって消失してしまったし，「破壊的な長い時間を廃止すること」を試みた作業の損失をしばらくの間回復するために，最近の幾何学者たちによって非常に大きな努力が払われなければならなかった。そして，確かに，最初の非常に正確なそれは，決して十分には賞賛されていなかったフランキスクス・ヴィエタ (Franciscus Vieta (François Viète) : 1540–1603) が運よく復元した，彼がガリアのアポロニウスと名付けた，アポロニウスの小冊子『接触について』(Περὶ ἐπαφῶν : *De Tactionibus*) 1 巻，である。この例によってゲタルディ (Marino Ghetaldi : 1568–1626) およびスネル (Willebrord Snell : 1580–1626) は同じ職務に備えることをためらわなかったし，成功が提供されることが欠けることはなかった。確かに，アポロニウスの本『比例分割』(Λόγου ἀποτομῆς : *De Sectione Rationis*)『面積切断』(Χωρίου ἀποτομῆς : *De Sectione Spatii*)『定量切断』(Διωρισμένης τομῆς : *De determinata sectione*) および『傾斜』(Νεύσεων : *Inclinationum*) を，彼らの大きな尽力によって私たちはほとんど失っていない。平面軌跡，立体軌跡および曲面の軌跡が［これらから］求められた。しかし，名前の知られていない幾何学者たちでさえこの部分を援助したし，手書きのそして今なお公表されていない，彼らの作品は世に知られずにいることがで 77
きなかった。

しかし，ついには，［そのままの状態で］差し出されそして見込みなしとあきらめられていたように，ユークリッドの『補題集』が残された。たとえそれを「あまり知られていない問題の解決に関する非常に技巧的で有用な作品」とパッポスが主張しているとしても，より前のでもなく最近のでもない時代の幾何学者たちはその名前について知るようになったか，または，ただそれが何であったかを疑っているかである。しかし，長い間盲目であるほど大きな暗闇の中にいた私たちに，そし

て，私たちが援助した幾何学のこの主題について努力している方法に，ついには，それは明確であると思われるものを提供したし，夜の間ずっと純粋な光で輝いていた。見出された古代の人の手本が未来において拒まれることがあってはならない。確かに，すべての分野においてスウェーデンの星［デカルト (René Descartes：1596–1650) のこと？］が輝き出した後で，私たちが学問の秘密をあたかも何らかの秘儀であるかのように隠すのは無駄なことである。確かに，非常に明敏な女王［クリスティーナ (Kristina：1626–1689 (在位:1632–1654)) のこと？］の比類のない才能が通れないものは何もなく，ただ 1 度だけ鼓舞することによってまたは意志に委ねることによって，望むときはいつでも，発見されたことを私たちはほとんど疑うことができない，理論を隠すべきではないと私たちは考える。さらに，補題の問題全体をより明瞭に伝えるために私たちは，より有名な命題の補題をいくつか選び，そして，次に，補題が何であるかを，そして，とりわけ注意を払うべきその使用法
78 を知ってもらうために，私たちは幾何学者たちに考察され審査されるであろうそれらを自信をもって提示する。

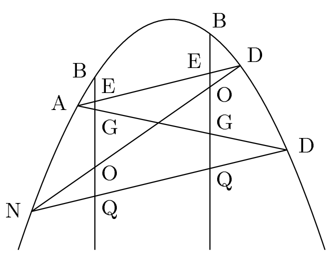
第 1 の補題

点 O において角をつくり，位置において与えられる，2 つの直線 ON，OC があるとし，そして，点 A および B が与えられるとしよう。点 B および A から，OC に平行であり延長された直線 NO と点 E および F で出会う，直線 BE，AF が引かれるとしよう。直線 AE が結ばれ，それは延長された直線 CO と D において出会うとしよう。同様に，直線 FB が結ばれ，それは同じ直線 CO と C において出



79 会うとしよう。そして，直線 ON の任意の点，例えば V，において直線 AV，BV が，直線 AV は直線 OC と点 S において出会い，さらに直線 BV は同じ［直線］OC と点 R で出会うように，曲げられるとしよう。CR in DS による長方形はつねに CO in OD による長方形，それゆえ与えられた空間，に等しいであろう。

第 2 の補題

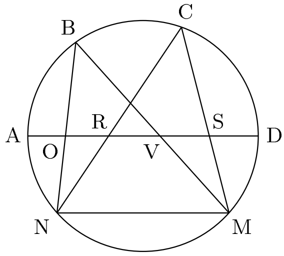


任意の放物線 NAB が提示され，その任意の直径が BEO であるとしよう。曲線の上に任意の 2 つの点 A および N がとられ，それらから，曲線の別の任意の点，例えば D，において曲げられ，そ［の直線上］の点 E，O，G，Q が直径の上に印をつける，直線 ADN が引かれるとしよう。同じ直径において切り取られるであろう 2 つの直線はつねに同じ比を保つであろう。確かに，OB が BE に対するように，QB が GB に対し，無限にそうであろう。

第 3 の補題

その直径が直線 AD である円があるとし，それに平行にどのようにであるにせよ，円に点 N および M で出会う，［直線］NM が引かれ，そして，N および M が与えられた点であるとしよう。直径

を点 O および V において切断する，任意の直線 NBM が曲げられるとしよう。私は，AO in DV 80

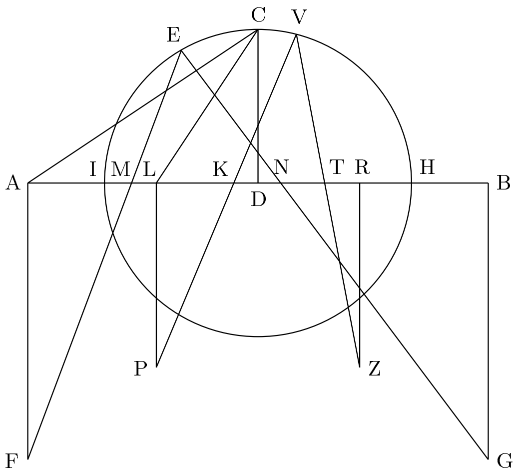


による長方形は AV in DO による長方形に対して与えられた比にある，と断言する。そしてそれゆえ，もし直径を点 R，S において切断する［直線］NCM が曲げられるならば，AO in DV による長方形が AV in DO による長方形に対するように，つねに，AR in DS による長方形が AS in DR による長方形に対するであろう。

［この］命題を楕円，双曲線および［それに］向かい合った切断線 (oppositus sectio) に拡張することは難しくない。

第 4 の補題

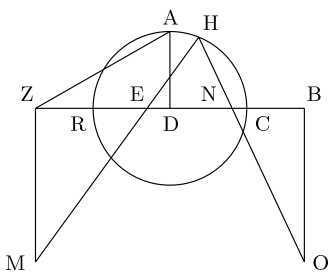
その与えられた直径が IDH，中心が D，直径に対して直角な半径が CD である，円 ICH が提示されるとしよう。延長された直径の上に与えられた点 B および A がとられ，直線 AI，BH が等しいとしよう。



DI が IA に対するように DL が LI に対するようになるとし，直線 DR が［直線］DL に等しいとしよう。［そうすると，］点 R および L が与えられるであろう。直線 CA が結ばれ，それに等しい［直線］AF が直径に垂直におかれ，そして，BG が同じもの［AF］に等しく平行になるとしよう。直径を点 M および N において切断する，点 F および G から円に［引かれた］任意の直線，例えば FEG，が曲げられるとしよう。私は，2 つ［の直線］RM，LN の平方の和はつねに与えられた同じ空間に等しい，と断言する。 81

同じ条件で，第 2 の場合として，直線 CL が結ばれ，それに等しい LP が直径に垂直におかれ，そして，RZ が同じもの［LP］に等しく平行になるとしよう。もし直径を点 K および T において切断する，2 つの点 Z および P から円周に［引かれた］任意の直線，例えば PVZ，が曲げられるならば，AT および BK の平方の和はつねに別の与えられた空間に等しくされるであろう。

第 5 の補題



その与えられた直径が RDC，中心が D，直径に直角な半径が DA である，円 RAC があるとしよう。どのようにであれ与えられた点 Z および B が直径の上に中心 D から等距離におかれ，直径に垂直な ZM が結ばれた AZ に等しくなるとし，そして，同じものに等しく平行に BO が引かれるとしよう。直径を点 E および N において切断する，円周に［引かれた］任意の直線 MHO が曲げられるとしよう。EH，HN の

平方が同時にとられたものの三角形 EHN に対する比はつねに与えられたものであろうし，確かに，直線 AZ が直線 ZD の 4 分の 1 に対する［比］と同じであろう。

導かれた補題 (それらの命題が非常に洗練された，そして，非常に美しいものであることを誰が否定するであろうか？) によって確かめられるであろう補題そのものの性質を明らかにすることは全然面倒ではない。確かに，パッポスに従って，［それらを］あるいは定理としてあるいは問題として直ちに表現することができることは明らかである。私たちは，確かに，定理として表現したが，問題に変えることを妨げるものは何もない。

82 例えば，第 5 の補題は次のように表現することができる。［すなわち,］その直径が RC である円 RAC が与えられたとき，もしそれら［M，O］から［引かれた］MHO のような任意の直線が円周上で曲げられるならば，切り取られた EH，HN の平方［の和］の三角形 EHN に対する比がつねに与えられたものになるような，2 つの点，例えば M および O，が探し求められる。解法は先に述べた定理から隠れてはいない。確かに，もし直線 AZ が［直線］ZD の 4 分の 1 に対して与えられた比にあるとおかれるならば，すべては明らかであろうし，そして，同じ方法によって，残りのすべての補題について完全に定理から問題に容易に変える［ことができる］であろう。

しかし，パッポスはより若い幾何学者たちの見解に従って補題は軌跡の定理から仮説をなくしたと指摘した。それは，確かに，補題の完全な性質を特徴的に明らかにしているし，そして，これらの言葉が与えたものの他の援助なしに私たちはこの主題の秘密に入り込んだ。

私たちが軌跡を調査するとき，私たちは，私たちが描いた線の軌跡が見出されるまで，その間私たちに知られていない直線または曲線を探し求める。しかし，私たちが与えられたそして知られるようになった軌跡として仮定されたものから別の軌跡を獲得しようと努めるとき，新しい軌跡そのものはユークリッド以来補題と呼ばれる。そのような理由によって，パッポスは軌跡そのものを補題の 1 つの種類であり本当にそう呼ばれるものであると付言した。

私たちは第 5 の補題の図に私たちの定義を 1 つだけ例として付け加えるであろう。直線 RC が与えられたとき，もし，その上の任意の点，例えば A，から垂線 AD が下されると AD の平方が
83 長方形 RDC に等しくなるような性質である，任意の曲線，例えば RAC，が探し求められるならば，私たちは曲線 RAC を円の周であると見出すであろう。しかし，もし既に与えられたその軌跡から，例えば第 5 の補題の問題のような，別のものを探求するならば，新しい軌跡そのものおよび熟練した解析学者の鋭敏さが提示するであろうし既に知られたものから引き出すであろう別の無限のものは補題と呼ばれるであろう。

さらに，私たちが既に述べたように，補題そのものは軌跡であるから，「補題の研究は，不明瞭な問題の解決にとって，そして，多くのものを与えるその性質を全く含まない種類［の問題］にとって非常に有用である」と彼［翻訳者］が言った場所について，ギリシア語テキストの中のパッポス［の著作］のラテン語への翻訳者の誤りを私たちは正すであろう。最後の言葉が意味を全く聞き入れられないとき，著者［パッポス］自身に戻されるであろうし，手書きの本におけるその言葉は次のようになっている。［すなわち,］補題とは困難な問題の，そして多くのものを与えている性質の無制限の種類の，解析の中に集められた技巧に優れた多くのものである。(πορίσματα ἐστὶ πολλοῖς ἄθροισμα φιλοτεχνότατον εἰς τὴς ἀνάλυσιν τῶν ἐμβριθεστέρων προβλημάτων καὶ τῶν γενῶν ἀπερίληπτον τῆς φύσεως παρεχομένης πλῆθος.)

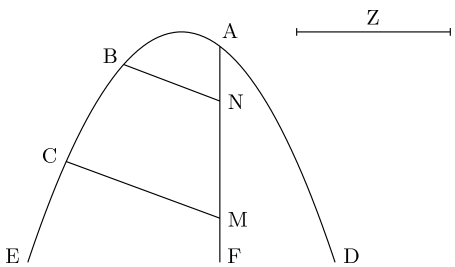
それゆえ，彼［パッポス］は，補題を不明瞭な問題および［そのような］種類の，すなわち一般的

な問題の，解析に捧げよ，と言う。なぜならば，述べられたことから補題の命題は非常に一般的であることが明らかだからである。続いて，彼は付け加える。［すなわち,］「性質が心ではほとんど理解することができない多くのものを与えるから」と。これらの言葉によって彼は次の同じ問題の無限のそして驚くべき解を示している。

純粋な解析から派生させられるであろう独特の方法はこの発見の定理あるいは問題に欠けてはいなくて，その助けによって先の第 5 の補題だけでなく非常に多くの別のものを私たちは見出し，解決し，そして証明した。そして，もし，私たちがただ入門としてそしてより厳密な作品の先駆けとして出版する，この少数のものが学者の気に入るのであれば，私たちはいつの日か『補題集』全 3 巻を復元するであろうし，それどころか，私たちはユークリッド自身によるものを拡張するであろ 84
うし，円錐曲線やその他の任意の曲線についての，本当に驚くべきそしてこれまで知られていなかった，補題をあらわにするであろう。

放物線に関するフェルマの命題

私は「与えられた 4 つの点を通る放物線を描くこと」［という問題］を提示した。［これには］2 つの場合があり，いずれに対しても次の補題が先に述べられるであろう。



第 1 の図において，ECBAD をその直径が AF である位置において与えられた放物線としよう。さらに，放物線を通る 2 つの点 B および C が与えられるとしよう。最後に，縦線 (applicatus) の直径 AF に対する角が与えられるとしよう。私は，放物線は位置において与えられる，と断言する。

縦線 (［applicatus］ ordinatim) BN および CM が結ばれるとしよう。与えられた点 B から位置において与えられた AF に与えられた角で (なぜならば，縦線の角が与えられることが定められているから) BN が引かれる。ゆえに，点 N が与えられる。同様に，点 M が与えられ，そして，直線 85
BN，CM が位置および大きさにおいて与えられる。もし点 A が放物線の頂点あるいは直径の端点であるとおくならば，放物線の性質から

CM の平方が BN の平方に対するように MA が NA に対する。

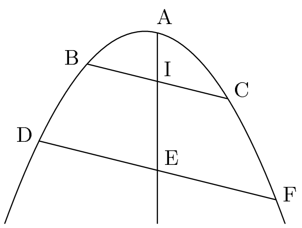
ゆえに，MA の NA に対する比が与えられ，分割されると MN の NA に対する比が与えられる。さらに，2 つの点 M，N が与えられるから，直線 MN が与えられる。それゆえ，NA および点 A が与えられる。もし

与えられた AN が与えられた NB に対するように NB が Z に対する

とするならば，放物線の通径 Z が与えられるであろう。それゆえ，頂点 A，通径 Z，位置において直径 AF，縦線の［直径に対する］角が与えられたから，アポロニウス［の『円錐曲線論』］の第 I 巻命題 52 により，放物線が位置において与えられる。

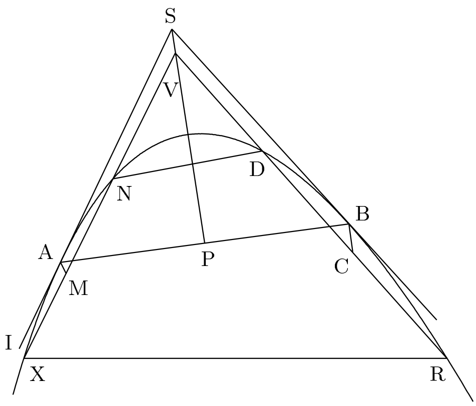
このことが仮定されると，［下図で］もし直線 BC，CF，FD，DB を結ぶならば，向かい合わせにおかれた相対するものはどちらも平行でないか，あるいは，この［下図の］場合のように，例え

ば，BC が DF に平行であるかであろう，4 つの点 D，B，C，F が与えられるという，第 2 の図における最初の場合は非常に容易に解決される。



どちらも点 I および E において半分に分割されるとし，［問題の解が］与えられたとしよう。ゆえに，等距離の 2 つの部分に分割するのだから，結ばれた IE は放物線の直径であろう。さらに，点 I および E は与えられる。ゆえに，IE が位置において与えられ，そして，角 DEI が［与えられる］。それゆえ，直径 IE が位置において与えられ，縦線の［直径に対する］角および放物線を通る 2 つの点 B および D もまた与えられるから，放物線 DBACF が位置において与えられるであろう。

第 2 の場合は，与えられた 2 つの点を結んでいる相対する直線はどちらも等距離ではないから，
86 より難しい。第 3 の図において，与えられた 4 つの点 X，N，D，R があり，直線 XR，RD，DN，NX によって結ばれるとし，向かい合わせにおかれた相対するものはどちらも等距離ではないとしよう。



既に［問題の解が］与えられ，命題を満たす放物線 XANDBR が描かれたものが提示されるとしよう。延長された［直線］XN，RD が点 V において出会うとし，点 M および C において半分に分割された XN，RD に対して，放物線と点 A および B において出会う，直径 MA，CB が引かれるとし，それら［A，B］から XV，VR に等距離で，点 S において出会う，直線 IAS，SB が引かれるとしよう。結ばれた AB が P において半分に分割されるとし，SP が結ばれるとしよう。

これが作図されたら，直径 MA の頂点［端点］を通って縦線 XN に等距離にある IAS が引かれるとき，IAS は A において放物線に接することは明らかである。同様に，直線 SB が同じ放物線に B において接することが証明されるであろう。ゆえに，アポロニウスの第 III 巻命題 17 により，

長方形 XVN が長方形 RVD に対するように AS の平方が SB の平方に対する

であろう。さらに，4 つの点 X，N，D，R が与えられるから，長方形 XVN の長方形 RVD に対する比が与えられる。ゆえに，AS の平方の SB の平方に対する比，それゆえ，直線 AS の直線 SB［に対する比］，が与えられる。さらに，角 ASB が，平行性のために与えられた角 XVR に等しくされるから，与えられる。ゆえに，三角形 ASB において頂点 S における角および直線 AS，SB の
87 比が与えられ，それゆえ，三角形 ASB が形において与えられる。それゆえ，角 SAB および SA の AB に対する比が与えられる。さらに，AP は AB の半分であるから，SA の AP に対する比もまた与えられる。それゆえ，三角形 SAP において A における角および辺 SA，AP の比が与えられる。それゆえ，［三角形 SAP は］形において与えられ，そして，角 PSA が与えられる。

これが確立されると，直線 SP は，接点を結んでいる直線 AB を半分に分割するから，アポロニウスの第 II 巻命題 29 により放物線の直径であろう。さらに，放物線においてすべての直径は互い

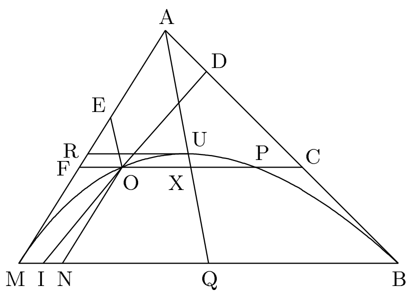
に等距離にある。ゆえに，直径 MA は直線 SP と等距離にあるであろうし，それゆえ，角 IAM は角 ASP に等しくされるであろう。さらに，私たちは角 ASP が与えられることを証明した。ゆえに，角 IAM および，平行性のために，その錯角 (alternus) NMA が与えられるであろう。さらに，点 M が，それは位置および大きさにおいて与えられた直線 NX を半分に分割するから，与えられる。ゆえに，直径 MA は位置において与えられる。そのうえ，縦線の角 AMN が与えられ，放物線を通る 2 つの点 N および D が与えられる。それゆえ，補題により放物線は位置において与えられ，解析から総合に戻ることは容易である。

さらに，この第 2 の場合における 2 つの放物線が命題を満たすことは明らかである。なぜならば，私たちが平行ではないと仮定していた，直線 DN および XR は出会うであろうから。この場合と同じ論証によって命題を満足する新しい放物線が構成されるであろう。

---

3 線の軌跡の証明

三角形をつくる 3 つの直線が位置において与えられるとしよう。それらは AM，MB，BA であり，そこ［o］から与えられた直線に与えられた角 OEM，OIM，ODB で直線 OE，OI，OD が引かれる任意の点 O があるとしよう。さらに，長方形 EOD の OI の平方に対する比が与えられるとしよう。私は，点 O は円錐曲線における 1 つ［の点］である，断言する。 88



MB が Q において半分に分割されるとし，AQ が結ばれたら，点 O を通って MB，MA に平行な直線 FOC，ON が引かれるとしよう。

3 つの三角形 OEF，ODC，OIN は形において与えられる。というのも，仮定から，角 OEF，ODC，OIN が与えられるからである。平行性のために与えられた角 AMB に等しいから，［角］EFO もまた与えられる。そして，与えられた［角］MBA に等しいから，［角］OCD も与えられる。最後に，平行性のために［角］AMB に等しい［角］ONB が与えられるから，［角］ONI が与えられる。それゆえ，OE の OF に対する比が与えられる。同様に，OD の OC に対する比が与えられる。ゆえに，長方形 EOD の長方形 EOC に対する比が与えられる。さらに，仮定から，長方形 EOD の OI の平方に対する比が与えられる。ゆえに，長方形 FOC の OI の平方に対する比が与えられる。さらに，三角形 OIN が形において与えられることから，OI の平方の ON の平方に対する比が与えられる。ゆえに，長方形 FOC の ON，あるいはそれに等しい FM，の平方に対する比が与えられる。

もし AQ が U において，MB に平行な UR が引かれたとして，UR の平方が RM の平方に対して長方形 FOC が FM の平方に対する与えられた比にある (しかし，これは，角 MRU が与えられるから，容易である。) として，点 U を通って直径 AQ に関して，直線 MA，AB が点 M，B において接する円錐曲線を描く (しかし，これは非常に容易であり，さまざまな点 U の位置によりそれは放物線または双曲線または楕円であろう。特にあなたには，私たちは余計なことを付け加えない。) ならば，私は，このように描かれた円錐曲線は点 O を通過する，と断言する。

89 例えば，［この円錐曲線が］他方の部分において点 P を通るとしよう。直線 UR は，縦線 MB に平行であるから，円錐曲線に接するであろう。それゆえ，円錐曲線は点 O を通るから，アポロニウスの第 III 巻の 16 番目の命題により，

長方形 PFO は FM の平方に対して UR の平方が RM の平方に対する

ようであろう。さらに，つくり方から，

UR の平方が RM の平方に対するように長方形 FOC が FM の平方に対する。

それゆえ，長方形 PFO は長方形 FOC に等しいであろうし，それゆえ，直線 FO は直線 PC に［等しいであろう］。

これは確かにそうである。なぜならば，AQ は MB を半分に分割するから，直線 FX は直線 XC に等しいであろうし，一方，円錐曲線であることのために直線 OX は XP に等しく，それゆえ，残りの FO は残りの PC に等しくされるからである。

解析から総合に戻ることは，不可能へと導く証明によって，困難ではない。

ディオファントスについての観察

『全集』pp.291–342

原題は *Observationes Domini Petri de Fermat*。
バシェ (Claude Gaspar Bachet de Méziriac : 1581–1638) の編集したディオファントス (Διόφαντος (Diophantos ; Diophantus) : 250 頃活躍) の『算術』(Αριθμητικων : *Arithmetica*) および『多角数について』(Περι Πολυγωνων Αριθμων : *De Polygonis Numeris* : *De Numeris Multangulis*) のラテン語版 (*Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libri Sex, et de Numeris Multangulis Liber Unus. Nunc primùm Græcè et Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati, Auctore Claudio Gaspare Bacheto Meziriaco Sebusiano, V. C.* : 1621 年) に対する注釈・書き込み。

I 291

(バシェの『補題集』(*Porismata*) 第 3 巻定義 6 に関して)

任意の 2 つの数から直角三角形がつくられるといわれるのは，その三角形の辺がそれら［2 数］による平方の和，および差，およびそれらの数によって囲まれた平面の 2 倍からなるときである。

算術的な比［等差数列］にある 3 つの数に関して，もしこの第 6 の定義に従ってその中項および差［公差］からそれ［三角形］をつくるならば，私たちは［直角］三角形をつくることができる。なぜならば，それら 3 つ［の項］による立体に差が掛けられたものは定められた三角形の面積になるであろうし，それゆえ，もし差が単位ならば，3 つ［の項］による立体は三角形の面積であろうから。

等差数列 a，$a+d$，$a+2d$ に対して，$p=a+d$，$q=d$ とすると，3 数

$$A=p^2+q^2=a^2+2ad+2d^2,\ B=p^2-q^2=a^2+2ad,\ C=2pq=2ad+2d^2$$

について，$A^2=B^2+C^2$ が成り立つから，2 数 p，q から定義 6 にいう直角三角形ができる。
そして，この三角形の面積は $B\times C\div 2=a(a+d)(a+2d)d$ である。

II

(ディオファントスの『算術』第 2 巻問題 8 に関して)

提示された平方数を 2 つの平方数［の和］に分割すること。

しかし，立方数を 2 つの立方数［の和］に，または，平方の平方数を 2 つの平方の平方数［の和］に，そして，一般に，平方より大きい無限にあるベキを 2 つの同じベキ［の和］に分割することは正しいことではない。私はこのことの本当に驚くべき証明を見出した。この余白の狭さは［その証明を］容れなかった。

この問題についてディオファントスが挙げた例は，$16=\dfrac{256}{25}+\dfrac{144}{25}$。
この注釈・書き込みが「フェルマの最終定理」と呼ばれる定理の内容で，「3 以上の自然数 n に対して，方程式 $x^n+y^n=z^n$ は自明でない整数解をもたない」というもの。
$n=3$ の場合はオイラー (Leonhard Euler : 1707–1783) によって (1770 年)，
$n=4$ の場合はフェルマ自身によって (1640 年)，
$n=5$ の場合はルジャンドル (Adrien-Marie Legendre : 1752–1833) によって (1825 年)，
$n=7$ の場合はラメ (Gabriel Lamé : 1795–1870) によって (1839 年) 示された。
一般の場合は長い間証明されなかったが，ようやく 1994 年になってワイルズ (Andrew John Wiles : 1953–) によって証明された。

III

(第 2 巻問題 10 に関して)

2 つの平方数によって構成される与えられた数を別の 2 つの平方数［の和］に分割すること。

さらに，2 つの立方数によって構成された数を別の 2 つの立方数［の和］に分割することはできないだろうか？これはバシェまたはヴィエート (François Viète，ラテン名は Franciscus Vieta :
292 1540–1603) にも，おそらくはディオファントス自身にも，確かに知られていなかった難しい問題である。しかし，私はその解を，のちに，第 4 巻の第 2 の問題に関する注釈において与えた。

第 2 巻問題 10 についてディオファントスが挙げた例は，$13 = 3^2 + 2^2 = \dfrac{324}{25} + \dfrac{1}{25}$。
第 4 巻問題 2 の注釈については VIII，IX 参照。

IV

(第 3 巻問題 10 に関して)

何らかの数が与えられたとき，与えられた数が加えられた，任意の 2 つずつ［の数］から構成されたものが平方数になり，しかもそのうえ，与えられた数が付け加えられた 3 つ［の数］の和が平方数になるような，別の 3 つ［の数］を見出すこと。

どのようにしたら，与えられた数が加えられた，任意の 2 つずつ［の数］から構成されたものが平方数になるような，4 つの数が見出されるかを，私は第 5 巻命題 30 に関して見出した。

第 3 巻問題 10 についてディオファントスが挙げた例は，与えられた数 3 に対して 3 数は 33，189，64。
第 5 巻問題 30 については XXXI 参照。

V

(第 3 巻問題 11 に関して)

何らかの数が与えられたとき，与えられた数が取り去られた，任意の 2 つずつ［の数］から構成されたものが平方数になり，しかもそのうえ，与えられた数が取り去られた 3 つ［の数］の和が平方数になるような，別の 3 つ［の数］を見出すこと。

第 5 巻［問題］31 に関して私たちが書いたことは，どのようにしたら，与えられた数が取り去られた，それらから任意にとられた 2 つずつ［の数の和］が平方数になるような，4 つの数が見出されるかを，示すことである。

第 3 巻問題 11 についてディオファントスが挙げた例は，与えられた数 3 に対して 3 数は 23，80，44。
第 5 巻問題 31 については XXXII 参照。

VI

(第 3 巻問題 17 に関して)

2 つずつ［の数］の乗法による積に同じものの和が加えられたものが平方数になるような，3 つの数を見出すこと。

このような問題についてのディオファントスの問題は第 5 巻問題 5 に存在する。しかし，ディオファントス自身が，知っていることとして次の問題を省略したか，それとも，むしろ［それよりありそうなことだが］13 巻［ある『算術』］のいずれかにおいて解決されていたか，私たちは知らない。

2 つずつ［の数］の乗法による積に同じものの和が加えられたものが平方数になるような，3 つ 293
の平方数を見出すこと。

しかし，私たちはこの問題の無限個の解を与えることができる。例えば，次の解を見よ。確かに，次の 3 つの平方数

$$\frac{3\,504\,384}{203\,401},\qquad \frac{2\,019\,241}{203\,401},\qquad 4$$

第 1 の平方数，　第 2 の平方数，　第 3 の平方数

は問題を満たす。

それどころか，［数を］それ以上に大きくすることやディオファントスの問題を拡張することを妨げるものはない。確かに，私たちは次の問題を一般的にそして無限の仕方によって解決した。

平面をなす任意の 2 つずつ［の数］によるものに，それらの和が加えられたものが平方数になる，4 つの数を見出すこと。

第 5 巻の第 5 の命題によって，同じものの和が加わっている，平面をなす 2 つずつ［の数］が平方数になるような 3 つの平方数が見出され，そして，それらの平方数は［例えば］

$$\frac{25}{9},\ \frac{64}{9},\ \frac{196}{9}$$

であろう。

ゆえに，それらが私たちの問題の最初の 3 つの平方数である。第 4［の平方数］が $1N$ とおかれるとしよう。［先ほどの 3 つの数のそれぞれと N との］3 つの積は，同じものの和とともに，

$$\frac{34}{9}N+\frac{25}{9},\quad \frac{73}{9}N+\frac{64}{9},\quad \frac{205}{9}N+\frac{196}{9}$$

第 1，　第 2，　第 3

となるであろう。

それゆえ，これらの 3 つが平方数に等しくされるであろうし，3 つの方程式が生じ，私たちはその解を第 6 巻問題 24 に関して与えた。

第 3 巻問題 17 についてディオファントスが挙げた例は，4，9，28。
第 6 巻問題 24 の注釈については XLIII，XLIV 参照。

VII

(第 3 巻問題 22 についての［バシェの］注釈に関して，特にその主題に関して)

第 3 巻問題 22 とは「すべてのものからつくられたものの平方が 1 つずつのそれぞれのものの追加あるいは除去に対して平方数になるような，4 つの数を見出すこと」というもので，これに対してディオファントスが挙げた解は $\frac{17136600}{163021824}$，$\frac{12675000}{163021824}$，$\frac{15615600}{163021824}$，$\frac{8517600}{163021824}$ であり，例えば，

$$\left(\frac{17136600}{163021824}+\frac{12675000}{163021824}+\frac{15615600}{163021824}+\frac{8517600}{163021824}\right)^2+\frac{17136600}{163021824}=\left(\frac{845}{1824}\right)^2,$$

$$\left(\frac{17136600}{163021824}+\frac{12675000}{163021824}+\frac{15615600}{163021824}+\frac{8517600}{163021824}\right)^2-\frac{17136600}{163021824}=\left(\frac{845}{12768}\right)^2$$

である。

4 ずつ増えていくものより単位だけまさる素数はただ 1 通りだけ［の仕方で］直角三角形の斜辺
294 であり，その平方は 2 通り，立方は 3 通り，平方の平方は 4 通り［の仕方で直角三角形の斜辺である］など，無限に［そうである］。

p を $4n+1$ の形の素数 —— 5，13，17，29，など —— とする。
p を斜辺とする直角三角形をただ 1 つだけつくることができる。すなわち，p^2 をだた 1 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。
例えば，$13^2=5^2+12^2$。
p^2 を斜辺とする直角三角形を 2 つつくることができる。すなわち，$\left(p^2\right)^2$ を 2 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。
例えば，$\left(13^2\right)^2=65^2+156^2=119^2+120^2$。
p^3 を斜辺とする直角三角形を 3 つつくることができる。すなわち，$\left(p^3\right)^2$ を 3 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。
例えば，$\left(13^3\right)^2=828^2+2035^2=845^2+2028^2=1547^2+1560^2$。
そして，一般に，p^k を斜辺とする直角三角形を k 個つくることができる。すなわち，$\left(p^k\right)^2$ を k 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。

同じ素数およびその平方は 2 つの平方数から 1 通りに構成される。その立方および平方の平方は 2 通り，平方の立方および立方の立方は 3 通り［に 2 つの平方数から構成される］など，無限に［そうである］。

$4n+1$ の形の素数 p について，
p および p^2 はただ 1 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。
p^3 および p^4 は 2 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。
一般に，p^{2k-1} および p^{2k} は k 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。
例えば，$13=2^2+3^2$。
$13^3=9^2+46^2=26^2+39^2$。

もし 2 つの平方数から構成された素数が 2 つの平方数から構成された別の素数に掛けられるならば，その積は 2 つの平方数から 2 通りに構成されるであろう。もし同じ［第 2 の］素数の平方に掛けられるならば，その積は 2 つの平方数から 3 通りに構成されるであろう。もし同じ［第 2 の］素数の立方が掛けられるならば，その積は 2 つの平方数から 4 通りに構成されるであろう。そして，無限に［そうである］。

$p=x^2+y^2$，$q=u^2+v^2$ の形の 2 つの素数 p，q について，
$p\times q$ は 2 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。
$p\times q^2$ は 3 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。
一般に，$p\times q^k$ は $k+1$ 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。
例えば，$13\times 5=1^2+8^2=4^2+7^2$。
$13\times 5^2=1^2+18^2=6^2+17^2=10^2+15^2$。
$13\times 5^3=5^2+40^2=16^2+37^2=20^2+35^2=28^2+29^2$。

このことから，与えられた数が何通りに直角三角形の斜辺になるかを決定することは容易である。

与えられた数を分割する，4 ずつ増えていくものより単位だけまさる素数 —— 例えば 5，13，17 —— がすべて取り上げられるであろう。

しかし，もし言及された素数のベキが与えられた数を分割するならば，辺の代わりにその他［のベキ］のものとともに分割するであろう。例えば，与えられた数が 295

5 の立方によって，13 の平方によって，そして，単純に辺 17 によって

分割されるとしよう。

すべての因子の指数がとられるとしよう。確かに，数 5 の指数は，立方であることから，3 であり，数 13 の指数は，平方であるために，2 であり，そして，数 17［の指数］は単なる単位である。

それゆえ，言及されたすべての指数が，望み通りに，配置されるはずである。望むなら，3，2，1 のように。

最初のもの［すなわち 3］が第 2 のもの［すなわち 2］の 2 倍に掛けられるとし，最初のものと第 2 のものの和が加えられたものがつくり出されると，17 になる。いま，17 に第 3 のもの［すなわち 1］の 2 倍が掛けられるとし，17 および第 3 のものの和が加えられたものがつくり出されると，52 になる。それゆえ，与えられた数は 52 個の直角三角形の斜辺であろう。どれだけ多くの因子についてもまたそれらの［どのような］ベキについても方法が異なることはない。

その他の，4 ずつ増えていくものより単位だけまさるのではない，素数は探求［している因子］を増やすことも減らすこともないし，それらのベキもそうである。 296

数 a が $4n+1$ の形の素数 p_i によって $a=(p_1)^{k_1}\cdot(p_2)^{k_2}\cdots(p_m)^{k_m}$ の形に表されるとき，

$$s_1=k_1\times(2k_2)+(k_1+k_2),\ \cdots,\ s_{m-1}=s_{m-2}\times(2k_m)+(s_{m-2}+k_m)$$

とすると，a^2 は s_{m-1} 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。

例えば，$21125^2=\left(5^3\times 13^2\right)^2$ は $s_1=3\times(2\times 2)+(3+2)=17$ 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。

実際，
$$\begin{aligned}21125^2 &= 741^2+21112^2=2340^2+20995^2=2900^2+20925^2=3075^2+20900^2\\ &=5200^2+20475^2=5915^2+20280^2=7436^2+19773^2=8125^2+19500^2\\ &=8643^2+19276^2=8804^2+19203^2=10080^2+18565^2\\ &=10235^2+18480^2=10725^2+18200^2=12675^2+16900^2\\ &=13260^2+16445^2=14469^2+15392^2=14875^2+15000^2。\end{aligned}$$

望んでいる回数だけ斜辺になる数を見出すこと。

7 通りに斜辺になる数が探し求められるとしよう。

与えられた数 7 が 2 倍にされると，14 になる。単位を加えよ。15 になる。15 を計り分けるすべての素数をとれ。それは 3 および 5 である。それぞれから単位が取り去られたら，残りを半分にせよ。それらは 1 および 2 である。このときの［個］数，すなわち 2，と同じだけの素数の因子が探し求められるとし，そして，2 つの指数 1 および 2［をもつ数］が互いに，すなわち一方が他方の平方に，掛けられるとしよう。この場合に，4 ずつ［増えていくもの］より単位だけまさる素数だけによって，問題は満足させられるであろう。

このことから，望んでいる回数だけ斜辺になる最小の数を見出すことは容易にできる。

数 k について，$2k+1=(q_1)^{j_1}\cdot(q_2)^{j_2}\cdots(q_m)^{j_m}$ と素因数分解できるとき，$4n+1$ の形の素数 p_i によって $a=(p_1)^{\frac{j_1-1}{2}}\cdot(p_2)^{\frac{j_2-1}{2}}\cdots(p_m)^{\frac{j_m-1}{2}}$ と表される数 a に対して，a^2 は k 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すとこができる。

$k=10$ とすると，$2k+1=21=3\times 7$ であるから，$a=5^{\frac{7-1}{2}}\times 17^{\frac{3-1}{2}}=5^3\times 17^1=2125$ に対して，a^2 は 10 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。
実際，$2125^2=276^2+2107^2=325^2+2100^2=435^2+2080^2=595^2+2040^2$
$=748^2+1989^2=900^2+1925^2=1000^2+1875^2=1275^2+1700^2$
$=1403^2+1596^2=1485^2+1520^2$。

望んでいる回数だけ 2 つの平方数によって合成される数を見出すこと。

与えられた数を 10 としよう。その 2 倍は 20 であり，そのすべての素因数がとられる。［それは］2，2，5 である。それぞれから単位を取り去れ。［そうするとそれらは］1，1，4 になる。それゆえ，4 ずつ［増えていくもの］より単位だけまさる素数が 3 つ —— 例えば，5，13，17 —— 選ばれなければならない。そして，指数が 4 であるために，1 つの平方の平方が残りの 2 つに掛けられると，それが求められていた数になるであろう。

このことから，望んでいる回数だけ 2 つの平方数によって合成される最小の数を見出すことが容易にできる。

数 k について，$2k=(q_1)^{j_1}\cdot(q_2)^{j_2}\cdots(q_m)^{j_m}$ と素因数分解できるとき，$4n+1$ の形の素数 p_i によって $a=(p_1)^{j_1-1}\cdot(p_2)^{j_2-1}\cdots(p_m)^{j_m-1}$ と表される数 a は k 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すとこができる。
$k=6$ とすると，$2k=20=2\times 2\times 3$ であるから，$a=5^{3-1}\times 13^{2-1}\times 17^{2-1}=5^2\times 13^1\times 17^1=5525$ は 6 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。
実際，$5525=7^2+74^2=14^2+73^2=22^2+71^2=25^2+70^2=41^2+62^2=50^2+55^2$。

その結果，さらに，与えられた数が 2 つの平方数によって何通りに合成されるかが見分けられるはずである。

与えられた数を 325 としよう。それを構成する素数，もちろん 4 ずつ［増えていくもの］より単位だけまさるもの，は 5，13 である。後者は単独で，前者は平方による。指数は 2，1 と規定される。乗法による［それらの］積は［それらの］和が加えられると 5 になり，単位が加えられると 6 になり，その半分は 3 である。それゆえ，与えられた数は 2 つの平方数によってそれだけの数の仕方で［すなわち 3 通りに］合成される。

297 もし 3 つの指数，例えば 2，2，1 があったとするならば，次のように進められるであろう。はじめの［2 つの］ものによる積に［それらの］和が加えられると，8 になる。8 に第 3 のものが掛けられて，その積と［第 3 のものと］の和が結合されると，17 になる。これに単位を結合すると，18 になる。その半分は 9 を与える。第 2 の数は 2 つの平方数によってそれだけの数の仕方で［すなわち 9 通りに］合成される。

もし半分に割られるであろう最後の数が奇数になったならば，そのときは単位が取り去られた残りの半分がとられなければならない。

数 a が $4n+1$ の形の素数 p_i によって $a=(p_1)^{k_1}\cdot(p_2)^{k_2}\cdots(p_m)^{k_m}$ の形に表されるとき，

$m=2$ ならば，$s_1=\dfrac{k_1\times k_2+(k_1+k_2)+1}{2}$ or $=\dfrac{k_1\times k_2+(k_1+k_2)}{2}$

$m\geqq 3$ ならば，

$s_1=k_1\times k_2+(k_1+k_2)$，$\cdots$，$s_{m-2}=s_{m-3}\times k_{m-1}+(s_{m-3}+k_{m-1})$，

$$s_{m-1}=\frac{s_{m-2}\times k_m+(s_{m-2}+k_m)+1}{2}\quad \text{or}\quad =\frac{s_{m-2}\times k_m+(s_{m-2}+k_m)}{2}$$

とすると，a は s_{m-1} 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。
例えば，$10625 = 5^4 \times 17^1$ は $s_1 = \dfrac{4 \times 1 + (4+1) + 1}{2} = 5$ 通りの仕方で 2 つの平方数の和の形に表すことができる。
実際，$10625 = 4^2 + 103^2 = 25^2 + 100^2 = 40^2 + 95^2 = 52^2 + 89^2 = 65^2 + 80^2$。
また，$112890625 = 5^8 \times 17^2$ は $s_1 = \dfrac{8 \times 2 + (8+2)}{2} = 13$ 通り。
実際，
$$\begin{aligned} 112890625 &= 824^2 + 10593^2 = 1380^2 + 10535^2 = 1625^2 + 10500^2 = 2175^2 + 10400^2 \\ &= 2975^2 + 10200^2 = 3740^2 + 9945^2 = 4500^2 + 9625^2 = 5000^2 + 9375^2 \\ &= 5217^2 + 9256^2 = 5712^2 + 8959^2 = 6375^2 + 8500^2 = 7015^2 + 7980^2 \\ &= 7425^2 + 7600^2。\end{aligned}$$

しかもそのうえ，お望みとあれば，次の問題が提示されるであろう。与えられた数が加えられたものが平方をつくり，そして，望むだけの数の仕方で直角三角形の斜辺になるような，すべての数を見出すこと。

この問題は難しい。例えば，2 通り［の直角三角形］の斜辺であり，2 が加えられたものが平方をつくる，数が提示されるとしよう。

求められていた数は 2023 であろう。別の無限のもの，例えば 3362 など，が同じことをひき起こす。

VIII

(第 4 巻問題 2 についての［バシェの］注釈に関して)

ディオファントスの問題：それらの差が与えられた数であり，そして，それらから生じる立方の差も同様に指示されたものになる，2 つの数を見出すこと。

バシェの最初の問題：2 つの立方数が与えられたとき，それらの和が与えられたものの差に等しくなる，別の 2 つ［の立方数］を見出すこと。さらに，小さい方の立方数の 2 倍が大きい方［の立方数］を超えないことを要求する。

規準：与えられた立方数のいずれかの 3 倍に他方の辺を掛け，その掛けられたものを立方数の和で割り，大きい方の商から小さい方の辺を取り去り，そして，小さい方の商を大きい方の辺から取り去れ。求められていた立方数の辺が残されるであろう。

操作の繰り返しによって私たちは容易に条件を取り除くことができ，そして，一般に，この問題だけでなく，バシェもヴィエートも解くことができなかった，次の問題も私たちは解くことができる。

それらの和が与えられたものの差に等しくなる［ような］別の 2 つ［の立方数］が見出される［べき］，与えられた立方数が 64 および 125 であるとしよう。

次の紙葉の第 3 の問題によって，それらの差が与えられたものの差に等しくなる［ような］別の 298
2 つの立方数が探し求められるはずである。バシェはそれらを見出し，そして，それらは
$$\frac{15\,252\,992}{250\,047} \text{ および } \frac{125}{250\,047}$$
である。

つくり方から，それら 2 つの立方数は与えられたものの差に等しい差をもっている。しまし，第 3 の問題の操作によって見出された，それら 2 つの立方数は，小さい方の 2 倍が大きい方を超えないとき，最初の問題に転用することができる。それゆえ，これら 2 つの立方数が与えられたら，それらの和が与えられたものの差に等しくされる，別の 2 つ［の立方数］が探し求められる。確かに，

これはこの最初の問題の条件によって許されている。しかし，第 3 の問題によって与えられたこれらの立方数の差は最初にとられた立方数 64 および 125 の差に等しい。それゆえ，それらの和が与えられた 64 および 125 の差に等しくなる，2 つの立方数をつくることを妨げるものはなく，このことには確かにバシェ自身が驚かされた。

それどころか，もしこれらの 3 つの問題［の解法］を循環的に進め，［操作が］無限に繰り返されるならば，同じことをひき起こす 2 つの立方数が無限に与えられるであろう。確かに，それらの和が与えられたものの差に等しくなる，最後の 2 つの立方数の発見から，第 2 の問題の操作によって私たちは，それらの差が最後のものの和，すなわち最初のものの差，に等しくなる，別の 2 つ［の立方数］を獲得するであろう。そして，この差から再び和を獲得するであろうし，無限にそうである。

> 第 4 巻問題 2 についてディオファントスが挙げた例は，差が 6 で，立方の差が 504 であるとき，求める 2 数は 8，2。

IX

(同じ注釈に関して)

バシェの第 2 の問題：2 つの立方数が与えられたとき，それらの差が与えられたものの和に等しくなる，別の 2 つ［の立方数］を見出すこと。

規準：与えられた立方数のいずれかの 3 倍に他方の辺を掛け，その掛けられたものを立方数の差で割り，そして，小さい方の商に大きい方の辺を加え，さらに，大きい方の商から小さい方の辺を取り去れ。その和および差が捜し求められていた立方数の辺を与えるであろう。

バシェの第 3 の問題：2 つの立方数が与えられたとき，それらの差が与えられたものの差に等しくなる，別の 2 つ［の立方数］を見出すこと。

規準：いずれかの立方数の 3 倍に他方の辺が掛けられた積を立方数の和で割れ。大きい方の商から小さい
299 方の辺を取り去り，小さい方の商から大きい方の辺を取り去れ。求められていた立方数の辺が残されるであろう。

私たちは，この問題の解が，私たちが最初の問題において使っていた操作と同様に，適切ではないことを明らかにするであろう。

それどころか，上で述べられた問題から，バシェは［その解法を］知らなかった，［次の問題を］私たちは上手に解くであろう。

2 つの立方数によって合成された与えられた数を別の 2 つの立方数［の和］に分割すること。

そして，これは，上で私たちが忠告したように，操作の継続的な繰り返しによって無限の仕方で［分割される］。

2 つ［の立方数］8 および 1［の和］に等しい別の 2 つの立方数が見出されるとしよう。最初に，第 2 の問題により，それらの差が与えられたものの和に等しい 2 つの立方数が探し求められ，それらは

$$\frac{8000}{343} \text{ および } \frac{4913}{343}$$

であろう。

小さい方の 2 倍が大きい方にまさるから，これは，結局最初［の問題］に戻されるであろう，第 3 の問題へと導かれ，命題は成り立つであろう。

もしあなたが第 2 の解を望むならば，問題は再び第 2［の問題］などに戻るであろう。

さらに，第 3 の問題の解が適切ではないことを明らかにするために，2 つの立方数 8 および 1 が

与えられたとき，その差が与えられたものの差に等しくなる別の 2 つ［の立方数］が見出されるであろう。

確かにバシェはこの問題を不可能であると述べた。しかし，私たちの方法によって，それらの差が本当に，8 および 1 の差である，7 に等しくされる，次の 2 つの立方数が見出された。そして，それら 2 つの立方数は

$$\frac{2\,024\,284\,625}{6\,128\,487} \text{ および } \frac{1\,981\,385\,216}{6\,128\,487}$$

であり，それらの辺は

$$\frac{1265}{183} \text{ および } \frac{1256}{183}$$

である。

X 300

(第 4 巻問題 11 についての［バシェの］注釈に関して)

ディオファントスの問題：それら［の和］が辺［の和］に等しい 2 つの立方数を見出すこと。

バシェの問題：名づけられるであろう比が平方あるいは平方の 3 倍［の形］であるならば，それらの和が辺の和に対して与えられた比にある 2 つの立方数を見出すこと。

この解に，よく知られた次［の問題］について私たちが与えたことと，同じことが付け加えられるであろうし，私はバシェが本当に難しい一般的な方法を認識していなかったことには驚かされないが，少なくとも，読者にこれ自身から一般的なものが与えられることはないと警告しなかったことには驚かされる。

第 4 巻問題 11 についてディオファントスが挙げた例は，$\dfrac{125}{343}$，$\dfrac{512}{343}$。

XI

(第 4 巻問題 12 に関して)

それらの差が辺そのものの差に等しい 2 つの立方数を見出すこと。

さらに，このことに関して，それらの差が辺そのものの差に等しい 2 つの平方の平方数を見出すことができるかどうかを探求することが許され，私たちの方法の技法が差し出されて，それは全く疑いなく成功するであろう。

確かに，辺の差が 1 であり，平方の平方数の差が立方数であるような 2 つの平方の平方数が探し求められるとしよう。それらの辺は，最初の操作によって，

$$-\frac{9}{22} \text{ および } \frac{13}{22}$$

であろう。

しかし，最初の数は記号 $-$ が書かれているから，私たちの方法に従って操作が繰り返されなければならず，最初の辺は $1N-\dfrac{9}{22}$ とおかれ，第 2［の辺］は $1N+\dfrac{13}{22}$ であろうし，そして，新し 301
い操作に従って問題を満たすであろう真の［正の］数が見出されるであろう。

第 4 巻問題 12 についてディオファントスが挙げた例は，$\left(\dfrac{7}{13}\right)^3$，$\left(\dfrac{8}{13}\right)^3$。

XII

(同じ問題についての［バシェの］注釈に関して)

バシェの問題：名づけられるであろう比が平方あるいは平方の 3 倍［の形］であるならば，それらの差が辺の差に対して与えられた比にある 2 つの立方数を見出すこと。

これは一般的ではないから，条件は不適切である。それゆえ，「あるいは 3 つずつ増えていくものより単位だけまさる素数またはそれらから合成されたもの［の平方］の何倍か［の形］」—— 7，13，19，37 などあるいは 21，91 などのような —— が付け加えられなければならない。証明および解法は私たちの方法によって得られるであろう。

XIII

(第 4 巻問題 17 に関して)

引き続く数が引き入れられた，それらのいずれかの平方が平方数になるような，［それらの和が］平方数に等しい 3 つの数を見出すこと。

おそらくは，この問題は次のようにより洗練された形で解かれるであろう。

最初の数が $1N$ と，第 2 の数が，最初［の数］の平方とともに平方数になるために，$2N+1$ とおかれるとし，第 3 の数は，その条件から第 2［の数］の平方が加えられると平方数になるように，単位の数［定数項］および数の数［1 次の項の係数］が任意におかれるとし，例えば，$4N+3$ としよう。

それゆえ，提示された［4 つの条件のうちの］2 つの部分は十分である。3 つ［の数］の和，そしてそのうえ，最初［の数］といっしょになった第 3［の数］の平方が平方数になる，ことが残っている。

3 つ［の数］の和は $4+7N$ であり，一方，第 3［の数］の平方および最初［の数］の和は
302 $9+25N+16Q$ であって，そして，2 重方程式が生じ，その解法は，もし単位［の数］が［2 つの方程式の］いずれの数の平方についても同じ数の平方に等しくされるであろう平方数であるということを思い起こすならば，容易である。

同じ方法によって，問題は 4 つの数に，そして無限［個の数］に，非常に簡単に拡張されるであろう。確かに，それぞれの数に関しておかれるものについて，単位［の数］の和が平方数になるように，用心するだけであろう。これは確かに非常に容易である。

第 4 巻問題 17 は $\begin{cases} {x_1}^2+x_2=\text{平方数} & \cdots① \\ {x_2}^2+x_3=\text{平方数} & \cdots② \\ {x_3}^2+x_1=\text{平方数} & \cdots③ \\ x_1+x_2+x_3=\text{平方数} & \cdots④ \end{cases}$ となる 3 数 x_1，x_2，x_3 を求める問題であるが，$x_1=x$，$x_2=2x+1$，$x_3=4x+3$ とおけば，

$$x^2+(2x+1)=(x+1)^2,\ (2x+1)^2+(4x+3)=\{2(x+1)\}^2$$

であるから，どのような x に対してもはじめの 2 つの条件①，②は満たされる。よって，後の 2 つの条件③，④ —— すなわち，$16x^2+25x+9=\text{平方数}$，$7x+4=\text{平方数}$ —— が満たされるように x を定めればよいことになる。

ところで，$\begin{cases} a^2x^2+bx+c^2=\text{平方数} \\ dx+c^2=\text{平方数} \end{cases}$ については，

$$(a^2x^2+bx+c^2)-(dx+c^2)=a^2x^2+(b-d)x=ax\left(ax+\frac{b-d}{a}\right)$$

であることから，$dx+c^2=\left(\dfrac{b-d}{2a}\right)^2$ [因子の差の半分の 2 乗] とおく [ここで，$a^2x^2+bx+c^2=\{ax+(b-d)/2a\}^2$ (因子の和の半分の 2 乗) とすることもできる。] と，

$$x=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{b-d}{2a}\right)^2-c^2\right\} \text{ より，} a^2x^2+bx+c^2=\left(\frac{b^2-d^2-4a^2c^2}{4ad}\right)^2$$

となるから，条件を満たす x が求められる，ということか。

なお，第 4 巻問題 17 についてディオファントスが挙げた例は，$\dfrac{36621}{2704}$，$\dfrac{157300}{2704}$，$\dfrac{317304}{2704}$。

XIV

(第 4 巻問題 18 に関して)

順序に従って続いているものが取り去られた，それらのいずれかの平方が平方数になるような，[それらの和が] 平方数に等しい 3 つの数を見出すこと。

私たちが上の問題で使ったものと同じ計算によって，私たちはこれも同様に解くであろうし，私たちは任意個数の数に拡張するであろう。

第 4 巻問題 18 についてディオファントスが挙げた例は，$\dfrac{170989}{10816}$，$\dfrac{640692}{10816}$，$\dfrac{1270568}{10816}$。

XV

(第 4 巻問題 20 に関して)

単位が引き入れられた，2 つずつのものが相互の乗法によってつくり出すものが平方数になるような，3 つの不定の数を見出すこと。

単位が引き入れられた，2 つずつのものが相互の乗法によってつくり出すものが平方数になり，そして，そのうえ，単位が引き入れられた，3 つのそれぞれのもののが平方数になるような，3 つの数を見出すこと，が提示されるとしよう。

私たちはこの問題の解を付け加えるであろうし，それは既になし遂げられている。今の問題の不定の解は，単位が加えられた，第 1 のおよび第 3 の数の 1 つずつが平方数になるようであるとしよう。例えば，不定の 3 つの数は 303

$$\begin{aligned}&\text{第 1 のものが } \frac{169}{5184}N+\frac{13}{36}\\&\text{第 2 のものが } 1N\\&\text{第 3 のものが } \frac{7225}{5184}N+\frac{85}{36}\end{aligned}$$

であるとしよう。この不定の解がこの [ディオファントスの第 4 巻の] 20 番目の問題の条件を満たすことは明らかである。単位が引き入れられた，それらの数の中の 1 つずつが平方になるということが残っており，3 重方程式が生じるであろう。その解法は，単位によって増やされた，それらの数の中の任意の 1 つずつの数は平方数であるから，私たちの方法によれば容易であろう。

第 4 巻問題 20 についてディオファントスが挙げた例は，$x+2$，x，$4x+4$。

XVI

(第 4 巻問題 21 に関して)

単位が引き入れられた，2 つずつのものが相互の乗法によってつくり出すものが平方数になるような，4 つの数を見出すこと。

単位が引き入れられた，2 つずつのものが相互の乗法によってつくり出すものが平方数になるような，何であれ 3 つの数が見出されるとしよう。例えば，それらの数は 3，1，8 であるとしよう。

いま，第 4［の数］が掛けられた，見出された 3 つ［の数］の 1 つずつによってつくられるものが，単位が引き入れられると，平方数になるという条件で第 4［の数］が探し求められるとしよう。見出されるであろうものが $1N$ であるとおかれるとしよう。ゆえに，

$$3N+1 \text{ さらに } 1N+1 \text{ さらに } 8N+1$$

が平方数に等しくされ，そして，その解法が私たちの発見［した方法］に負わされている，3 重方程式が生じる。私たちが第 4 巻問題 24 に関して注釈したものを見よ。

第 4 巻問題 21 についてディオファントスが挙げた例は，$\dfrac{1}{16}$，$\dfrac{33}{16}$，$\dfrac{68}{16}$，$\dfrac{105}{16}$。

304

XVII

(第 4 巻問題 23 に関して)

それらのうちの任意のものが引き入れられた，それらによって囲まれた立体が平方数になるような，3 つの数を見出すこと。

ディオファントスの補題なしにだけでなく，2 重方程式なしにでも，この問題は解かれるであろう。

3 つのものによる立体が $1Q-2N$ と，第 1 の数が単位と，第 2［の数］が $2N$ とおかれるとしよう。

それゆえ，確かに，命題［の条件］の 2 つの部分が満たされる。

第 3［の数］のために，3 つ［の数］による立体，$1Q-2N$，が第 1 および第 2［の数］による長
305 方形，すなわち $2N$，によって割られるとしよう。この除法によって，第 3［の数］，$\dfrac{1}{2}N-1$，が生じるであろうし，これが 3 つ［の数］による立体に加えられると，平方数に等しくなければならない，

$$1Q-\frac{3}{2}N-1$$

となる。

さらに，位置が既につくられているために，数の値は 2 より大きくなければならない。それゆえ，この辺 $1N-2$ より大きい何らかの単位の数 の平方に等しくされるはずである。［残りは］すべては明らかであろう。

この第 4 巻問題 23 は，$x_1x_2x_3+x_1$，$x_1x_2x_3+x_2$，$x_1x_2x_3+x_3$ がすべて平方数になるような 3 数 x_1，x_2，x_3 を見出せ，という問題であるが，ディオファントスは $x_1x_2x_3=x^2+2x$，$x_1=1$，$x_2=4x+9$ として解法を進める際に，$2m-2=\dfrac{m^2}{2}$ となる m を利用した。

そして，ディオファントスが与えた例は，1，$\dfrac{34}{6}$，$\dfrac{2\frac{1}{2}}{6}$。

また，バシェは，$1Q+1-1N$，$1Q-1$ がともに平方数になる，という条件を導いて，3 数を $\dfrac{65}{56}$，1，$\dfrac{9}{56}$ とした。

なお,「ディオファントスの補題」とは $2m-2=\dfrac{m^2}{2}$ となる m を求める方法のことで,

> 「2 が罰せられたその 2 倍が同じ数の平方の半分になるような数を探し求めるための補題は定められた第 3 の規則によって解かれる。確かに,$4N$ が $1Q+4$ に等しいことが生じ,そして,数の半分の平方が単位に等しくされるから,その規則の証明から明らかなように,数の半分そのものが数の値であることが従う。」

とある (*Diophanti Alexandrini Arithmeticorum Libri Sex, et de Numeris Multangulis Liber Unus*, 1621 年,p.221)。

XVIII

(第 4 巻問題 31 についての［バシェの］注釈に関して)

問題：それらの辺の和がいっしょに結合された,それらの和が指示された数になる,4 つの平方の数を見出すこと。

この問題についての「注釈」でバシェは,1 から 120 までの数を例として挙げ,「すべての数は平方数かあるいは 2,3 あるいは 4 個の平方数の和である」と主張している (らしい)。

なお,第 4 巻問題 31 についてディオファントスが挙げた例は,$\dfrac{11}{10}$,$\dfrac{7}{10}$,$\dfrac{19}{10}$,$\dfrac{13}{10}$。

それどころか,私たちは最も美しく,しかも,きわめて一般的な命題をはじめて明らかにした。確かに,すべての数は三角数であるか,あるいは,2 つまたは 3 つの三角数から合成されたものであるかである。平方数は 2 つまたは 3 つまたは 4 つの平方数から合成されたものである。五角数は 2 つ,3 つ,4 つまたは 5 つの五角数から合成されたものである。そして,無限にそのように続き,六角数,七角数および任意の多角数について,角の数に応じて,一般的なそして驚くべき命題が主張されるであろうことは明らかである。

しかし,多くのさまざまな,そして深遠な数の不思議さから導かれる,その証明をここに付け加えることはできない。なぜならば,私たちはこの作業に本全体を捧げることを,そして,この部分について,算術を古代の人々に知られていた限界を越えて,驚くべき方法によって,前進させることを決意したからである。

XIX 306

(第 4 巻問題 35 に関して)

与えられた数を,第 1 のものに第 2 のものが掛けられてつくられるものに第 3 のものが加えられる,あるいは取り去られると平方数になるように,3 つの数に分割すること。与えられた［数］は 6 であるとしよう。

操作は次のように簡単にできるであろう。与えられた数 6 がどのようにであろうと,例えば 5 および 1 に,分割されるとしよう。単位が取り去られた,［それらから］つくられたもの,すなわち 4,が与えられた数 6 で割られるとすると,$\dfrac{2}{3}$ になるであろう。これをもし 5 からだけでなく 1 からも取り去るならば,残っている 2 つ $\dfrac{13}{3}$ および $\dfrac{1}{3}$ は分割されるであろう数のはじめの 2 つの部分であろう。それゆえ,第 3［の数］は $\dfrac{4}{3}$ であろう。

第 4 巻問題 35 についてディオファントスが挙げた例は,与えられた数が 6 のとき,$\dfrac{5}{3}$,$\dfrac{5}{3}$,

$\frac{8}{3}$。

XX

(第 4 巻問題 44 に関して)

問題：3 つ［の数］から合成されたものに第 1［の数］が掛けられると三角数になり，第 2［の数］が掛けられると平方数になり，第 3［の数］が掛けられると立方数になるような，3 つの数を見出すこと。

バシェ：··· 最後に，最後の平方の辺がつくられるであろうときに，三角数は整数以外のものであることができないから，数の値が整数として見出されるためにこのような条件が利用されるであろうことに注意せよ。さらに，もし平方の辺が数の平方が掛けられた平方の辺が求められたもの -1 に等しくされるであろう数によってつくられるならば，ディオファントスによって残された方法によって遂行されるであろうことはつねに成功するであろう。残りのことはほとんど異なることなく行うことができることを，あなたは経験によって十分に認めるであろう。

307 バシェは正確な試みを十分にはしていなかった。任意の立方数，例えば，その辺が 3 ずつ増えていくものに単位が付け加わったものである，がとられるとしよう。例えば，

三角数は $2Q-344$ に等しくされる

であろう。ゆえに，

平方数は $16Q-2751$ に等しくされ，

その辺は，望むならば，

$$4N-3$$

などとされるであろう。なぜならば，立方数を多様にするのに，3 そのものの代わりに，私たちが無限にあるその他の奇数を用いるとしても，一般的な方法を妨げるものは何もないからである。

第 4 巻問題 44 についてディオファントスが挙げた例は，$\frac{153}{81}$，$\frac{6400}{81}$，$\frac{8}{81}$。

XXI

(第 4 巻問題 45 についての［バシェの］注釈に関して)

ディオファントスの問題：大きいものと中間のものとの差が中間のものと小さいものとの差に対して与えられた比をもち，しかもそのうえ，2 つずつとられたもの［の和］が平方数になるような，3 つの数を見出すこと。

バシェ：··· ゆえに，この問題においてディオファントスは，2 つのいずれもが数および単位からつくられ，それらの数の数は等しくなく，そして，平方が平方に対する比をもたず，さらに，単位の数は等しくない平方数であるとき，2 つの数がどのように同時に平方数に等しくされるかという方法を示している。私は，命題における等しくされるであろう数の平方がいずれも数および単位からつくられ，それらの数の数は等しくなく，
308 そして，平方が平方に対する比をもたず，しかもそのうえ，単位の数は等しくないか，あるいは平方数であるか，あるいはそうでないか，のとき，そのように 2 重方程式が解けるであろう方法を与えることができると断言する。さらに，私たちはそれを 2 つの場合において明らかにするであろう。

第 1 の場合は，等しくされるであろう数の平方の差が以下のようであるとき，［すなわち，］それに何らかの単位の数が掛けられあるいは割られ，そして，命題におけるより小さい数から取り去られた積あるいは商が単位の数だけ平方数にまさる，···

第 2 の場合は，等しくされるであろう数の平方の差が以下のようであるとき，［すなわち，］それに何らかの単位の数が掛けられあるいは割られ，そして，命題におけるより小さい数から取り去られた積あるいは商が単位の数だけ不足し，それは乗数あるいは除数に対して平方数が平方数に対する比をもつ，···

しかし，もし望むならば，これらの 2 重方程式，もちろん

$2N+5$ および $6N+3$ が平方数に等しくされる，

が提示されるとしよう。

等しくされるであろう平方数 $2N+5$ は 16 であろう，

そして，

等しくされるであろう平方数 $6N+3$ は 36 であろう，

そして，問題を満足させるであろう異なるものが無限に見出されるであろう。彼［バシェ］が 2 つだけ［の場合］において考案したことは無限の場合に，それどころか可能なすべての場合に，非常に容易に拡張できるから，バシェの解法そのものはほとんどそれほど大きな価値がない，このような種類の問題の解法に関する一般的な規則を提示することは難しくはない。

第 4 巻問題 45 についてディオファントスが挙げた例は，与えられた比が 3 であるとき，$\frac{11007}{726}$，$\frac{2817}{726}$，$\frac{87}{726}$。

XXII

(第 5 巻問題 3 に関して)

与えられた数に，それらの任意のものおよび何であれ 2 つずつのものによって掛けられるものに与えられた数が付け加えられたものが［それぞれ］平方数になるように，3 つの数を追加すること。

この命題から次の問題が容易に導かれるであろう。

その条件が，与えられた数が取り込まれた，2 つずつのものによって掛けられるものが平方数になるというような，4 つの数を見出すこと。

この命題に従って，与えられた数が増やされた 1 つずつのものが平方数をつくるような，問題を満足させる 3 つ［の数］が見出されるとしよう。見出されるであろう第 4 のものが $1N+1$ であるとおかれるとしよう。その解が私たちの方法の助けによって容易［に得られる］であろう，3 重方 309
程式が生じるであろう。第 6 巻の第 24 の問題に関する注釈を見よ。

それゆえ，バシェが第 3 巻問題 12 に関して提示した問題がこの方法によって，それは非常に一般的であり，さらに，私たちの解法において，与えられた数が増やされたはじめの 3 つの数が［それぞれ］平方数になるという，バシェの方法より著しいものであるから，解かれるであろう。

しかし，さらに与えられた数が増やされた第 4［の数］が平方数になるという，問題が解けるかどうかを今まで私たちは本当に知らない。それゆえ，さらに探究されるべきである。

第 5 巻問題 3 についてディオファントスが挙げた例は，与えられた数が 5 であるとき，$\frac{2861}{676}$，$\frac{7645}{676}$，$\frac{20336}{676}$。
第 6 巻問題 24 の注釈については XLIII，XLIV 参照。

XXIII

(第 5 巻問題 8 に関して)

それらの面積が等しい，3 つの直角三角形を見出すこと。

一方，等しい面積の 4 つのまたはさらに無限に多くの三角形を見出すことができるかどうかという，問題が可能であるということを妨げるものは何もないように思える。それゆえ，さらに探究されるべきである。

私たちはこの問題を解決したし，それどころか，私たちは与えられた任意の三角形の面積から同じ面積の無限個の三角形を与える［ことができる］。例えば，与えられた三角形 3，4，5 の面積 6 から，同じ面積の別の三角形

$$\frac{7}{10},\quad \frac{120}{7},\quad \frac{1201}{70},$$

または，もし同じ分母が望みとあれば，

$$\frac{49}{70},\quad \frac{1200}{70},\quad \frac{1201}{70}$$

が［与えられる］。

普遍的で確実な方法はこうである。その斜辺が Z，底線が B，垂線が D である，任意の三角形が提示されるとしよう。それを基に同じ面積の異なる別の三角形が次のように形成される。確かに，それは Z quadrato［Z^2］および B in D bis［$2BD$］から形成されるはずであり，辺としての平面的平面が Z in B quadratum bis $-$ Z in D quadratum bis［$2ZB^2 - 2ZD^2$］で割られることになる。この新しい三角形は前述［の三角形］の面積と等しい面積をもつであろう。

2 数 m，n $(m > n)$ に対して，$m^2 - n^2$，$2mn$，$m^2 + n^2$ を辺とする三角形は直角三角形になる。いま，斜辺が z，底辺が b，高さが d の直角三角形が与えられたとき，$m = z^2$，$n = 2bd$ とすると新しい直角三角形がつくられるが，その各辺を $2zb^2 - 2zd^2 = 2z(b^2 - d^2)$ で割った直角三角形をつくれば，それは元の直角三角形と同じ面積になる。

$$\begin{aligned} S_{\text{new}} &= \frac{(z^2)^2 - (2bd)^2}{2z(b^2-d^2)} \times \frac{2z^2(2bd)}{2z(b^2-d^2)} \div 2 = \frac{bd(z^4 - 4b^2d^2)}{2(b^2-d^2)^2} \\ &= \frac{bd((b^2+d^2)^2 - 4b^2d^2)}{2(b^2-d^2)^2} = \frac{bd}{2} = S_{\text{old}} \end{aligned}$$

さらに，第 2［の三角形］から同じ方法によって第 3［の三角形］が，第 3 から第 4 が，第 4 から第 5 が形成されるはずであり，そして，同じ面積の異なる三角形が無限につくられるであろう。

そして，3 つより多く［の三角形］を与えることができることは疑わしくなく，ディオファントスが見出した 3 つ［の三角形］

40，42，58，　24，70，74 および 15，112，113

に，私たちはやはり同じ面積の第 4 の異なる［三角形］を付け加える。［すなわち，］

$$\text{斜辺が } \frac{1\,412\,881}{1189}$$

$$\text{底線が } \frac{1\,412\,880}{1189}$$

$$\text{垂線が } \frac{1681}{1189}$$

［の三角形］であり，すべて［の数］に同じ分母が掛けられると，同じ面積の 4 つの三角形は［各辺が］整数になるであろう。

第 1	47 560	49 938	68 962
第 2	28 536	83 230	87 986
第 3	17 835	133 168	134 357

$$\text{第}\,4 \qquad 1\,681 \quad 1\,412\,880 \quad 1\,412\,881$$

そして，同じ方法によって同じ面積の三角形が無限に見出されるであろうし，次の問題はディオ 311
ファントスの限界を超えて進められるであろう。

さらに，別の方法によって，ちょうど 3，4，5 のように，その面積が平方数の 6 倍になる三角形が［得られる］。確かに，

$$2\,896\,804,\ 7\,216\,803,\ 7\,776\,485$$

［がそうである］。

XXIV 312

(第 5 巻問題 9 に関して)

3 つ［の数］の総計が加えられたあるいは取り去られた，それぞれ［の数］の平方が平方数になるような，3 つの数を見出すこと。

上で述べられたことから，［次の］一般的な問題を解決することができることは明らかである。

すべての総計が加えられたあるいは取り去られた，それぞれ［の数］の平方が平方数になるような，任意個数の数を見出すこと。

この問題［の解法］をおそらくバシェは知らなかった。なぜならば，もしこの問題の解法をあらわにしていたのならば，既に第 4 巻の第 31 の問題やその他について［行った］ように，ディオファントス［の問題］を拡張していたであろうから。

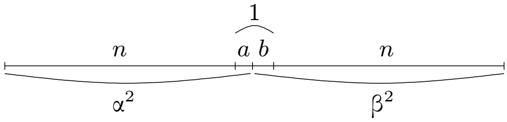
第 5 巻問題 9 についてディオファントスが挙げた例は，$\dfrac{406}{96}$，$\dfrac{518}{96}$，$\dfrac{791}{96}$。

XXV

(第 5 巻問題 12 についての［バシェの］注釈に関して)

ディオファントスの問題：単位を 2 つの部分に分け，与えられた数が加えられたそれぞれの切片が平方数になるようにすること。さらに，与えられた［数］は奇数ではなく，その［数］N の 2 倍と単位［との和］は，
それ自身が素数によって分割される［数］の 4 分の 1 より大きい数でもないはずである。 313

与えられた数を n とするとき，単位 1 を $1 = a + b$ と分割して，$a + n = \alpha^2$，$b + n = \beta^2$ がともに平方数になるようにせよ，という問題。
$\alpha^2 > n$，$\beta^2 > n$ でなければならないから，($\beta > \alpha$ とするなら) $\beta^2 - \alpha^2 < 1$ となるように $1 + 2n = \alpha^2 + \beta^2$ が分割できればよい。



ディオファントスは $n = 6$ (だから $1 + 2n = 13$) のとき，次のように解いた。
2 分された $\dfrac{13}{2}$ よりちょっとだけ大きい数が平方数になるようにするために，$\dfrac{13}{2} + \dfrac{1}{4x^2} = A^2$ としてみる。これから，$26x^2 + 1 = (2xA)^2$ とできるから，$26x^2 + 1 = (5x + 1)^2$ とすると，$x = 10$ である。すなわち，$\dfrac{13}{2}$ を平方数にするには $\dfrac{1}{400}$ を足して，$\dfrac{13}{2} + \dfrac{1}{400} = \left(\dfrac{51}{20}\right)^2$ とすればよい。

一方，$13 = 2^2 + 3^2$ であることから，13 を分割する 2 数を $\left(\dfrac{51}{20}\right)^2$ に近づけるために，

$2+u=\dfrac{51}{20}$，$3-v=\dfrac{51}{20}$ としてみると，$u=\dfrac{11}{20}$，$v=\dfrac{9}{20}$ となる。
そこで，$\dfrac{1}{20}$ を変数化して y で表し，$13=(2+11y)^2+(3-9y)^2$ とすると，$y=\dfrac{5}{101}$ が得られる。従って，$13=\left(\dfrac{257}{101}\right)^2+\left(\dfrac{258}{101}\right)^2$ とすればよい。
それぞれから 6 を引いて，$1=\dfrac{4843}{10201}+\dfrac{5358}{10201}$ とすればよい。
これがディオファントスが挙げた例。

バシェ：$\cdots$ 他方，残りの言葉「その 2 倍は $\cdots$ でもない」はその記述を適切に受け入れることができない程に損傷している。私は，確かにディオファントスが，単位だけ増やされたその 2 倍が平方数あるいは 2 つの平方数から合成されたものであるように，一般的ではない何らかの，選択された偶数によって定義される，数の性質を探したことを疑わない。しかし，なぜ自分自身にこれほど多くの言葉の暗闇の中で［それを］推測することができないと望むであろうか。私は，この本について何らかの修正を行う人々にその重荷を残すことにする。$\cdots$ 確かにクシュランダー (Xylander (本名は Wilhelm Holtzman)：1532–1576) が与えられるものは素数の 2 倍でなければならないと言ったことは，その言葉は誤りであると思われることを望むのだが，確かに無益であり，誰にとっても努力の根拠ではなく，そして，それは経験そのものによってすぐに反駁することができる。確かに，もし与えられた［数］が 10 ならば，それは素数 5 の 2 倍であるが，問題が解かれるであろう適当な最小の［数］が見出されるであろうし，確かに，それは数 21 を 2 つの平方数に分割しなければならなかった。このことは，私が考えるに，それは平方数ではなく，それ自身の性質から 2 つの平方数から合成されたものでもないから，確かに不可能である。

数 21 は分数の形の 2 つの平方数に分割することはできない。さらに，私たちはこのことを容易に証明することができ，より一般的に，その 3 分の 1 が 3 分の 1 をもたない［3 では割り切れるが 9 では割り切れない］，すべての数は 2 つの平方数，それが整数であろうと分数であろうと，［の和］に分割することはできない。

XXVI

(同じ注釈に関して)

バシェ：ときどき私はディオファントスが望んでいたことは単位だけ増やされた与えられた数の 2 倍が素数であるということだと思う。というのも，このような種類の，5，13，17，29，41 のような，数はほとんどすべて 2 つの平方数から合成されるし，他の素数は単位が取り去られると同じように偶数を残すからである。それにもかかわらず，この解決法は許容することができない。なぜならば，はじめに，この解決法からこのような種類の条件によって，単位だけ増やされたその 2 倍が平方数である，すべての数が除外されていたからである。$\cdots$ 次いで，さらに，単位だけ増やされたその 2 倍が 2 つの平方数から合成されている，22，58，62 およびその他の無数の［数の］ような，多くの数が除外されていた。確かに，単位だけ増やされたそれらの 2 倍
314 は 45,117,125 であり，そのどれもが多くものに分割されるから，それらのどれも素数ではない。しかし，それぞれ［の数］は 2 つの平方数から，すなわち最初のものは平方数 36 および 9 から，第 2 もののは平方数 81 および 36 から，第 3 のものは平方数 100 および 25 から，つくられる。

これが，確かに一般的でしかもすべての役に立たない数を除外している，真の条件である。

与えられた数は奇数ではなく，単位だけ増やされたその 2 倍は，それによって分割される最も大きい平方数によって割られるとき，4 ずつの何倍か［の数］より単位だけ小さい任意の素数によって割り切れることもないはずである。

XXVII

(第 5 巻問題 14 についての［バシェの］注釈に関して)

ディオファントスの問題：単位を 3 つの数に分け，与えられた同じ数が加えられた任意のものがそれぞれ平方数をつくるようにすること。さらに，与えられた［数］は 2 ではなく，8 ずつの何倍か［の数］に 2 が加えられてできるもののどれかでもないはずである。

> 第 5 巻問題 14 についてディオファントスが挙げた例は，与えられた数が $n = 3$ であるとき，$1 = \dfrac{228478}{505521} + \dfrac{142381}{505521} + \dfrac{134662}{505521}$。
> 彼の解法は，当然ながら，先の問題 12 と同様であり，(1) $\dfrac{1+3n}{3}$ よりちょっとだけ大きい平方数を探し，(2) $1 + 3n$ を分割する 3 つの平方数をその平方数に近づけるようにする，というものである。

バシェ：··· このような種類の条件は著者にとって適切でありふさわしいものである。しかし，明らかにされたように，たとえこの条件が必要であっても，しかし十分ではない。というのも，問題が解かれるであろうこの条件によって表現されたすべての数は役に立たないだけでなく，さらに，数 9 および 9 が 32 にあるいはその何倍か［の数］に加えられてできる，41，73，105 などのような，その他のすべて［の数］も［そう］だからである。確かに，単位が加えられたそれらの 3 倍は平方数ではなく，2 つあるいは 3 つの平方数から合成された数でもない。···

さらに，おそらくこれら 2 つの条件は，その両方によって同時に，単位だけ増やされたその 3 倍が平方数ではなく 2 つあるいは 3 つの平方数から合成されたものでもない，すべての数が完全に除外されるので，同時に十分であろうと，私はむこうみずにではなくあえて主張したい。私としては，単位から 325 までずっとすべての数についてそれを試したので，ほとんどそうではないと思う気になれない。

バシェの条件そのものは不十分であり，それどころか，その試みは十分には厳密でなかった。というのも，数 37 は条件に属するが，しかし規則には［属さない］からである。

真の条件は次のように表現されなければならない。

一方は単位から，他方は 8 から［始まる］，2 つの 4 倍の系列［公比 4 の等比数列］が提示され，次のように一方が上におかれるとしよう。

1,	4,	16,	64,	256,	1024,	4096,	etc.,
8,	32,	128,	512,	2048,	8192,	32768,	etc.

そして，はじめに，第 2［の系列］の最初の項，それは 8 である，が詳しく調べられるであろう。与えられた数は，単位がそれよりも上におかれているから，単位の 2 倍ではなく，8 ずつの何倍か［の数］より単位の 2 倍だけまさっているのでもないはずである。 315

次いで，第 2 の系列の第 2 の項，それは 32 である，が詳しく調べられるであろう。その上におかれた数，それは 4 である，の 2 倍がとられるとしよう。それは 8 になり，もし上の方の同じ系列におけるすぐ前［の項］のすべて (この例では単位だけが見出されるであろう) を加えると，それは 9 になる。

それゆえ，2 つの数 32 および 9 がとられたとき，与えられた数は 9 ではなく，数 9 と 32 の何倍か［の数］との和でもないはずである。

次に，第 2 の系列の第 3 の項，それは 128 である，が詳しく調べられるとしよう。その上におかれた数，それは 16 である，の 2 倍がとられるとすると，それは 32 になり，もし上の方の同じ系列におけるすぐ前［の項］のすべて，それは今は 1 および 4 である，を加えると，37 になる。それゆえ，2 つの数 128 および 37 がとられたとき，与えられた数は 37 ではなく，37 と 128 の何倍か［の数］との和でもないはずである。

次いで，第 2 の系列の第 4 の項が詳しく調べられると，［同じ］方法によって数 512 および 149

がつくられるであろう。それゆえ，［与えられた］数は 149 ではなく，149 と 512 の何倍か［の数］との和でもないはずである。

そして，ディオファントスは一般的には述べなかったし，バシェ自身も明らかにしなかった，方法は無限に同一であり普遍的である。その試みは，私たちが既に前もって警告したように，彼が保証を与えている試みの範囲内にある，数 37 についてだけでなく数 149 およびその他［の 325 までの数］についても，期待を裏切る。

XXVIII

(第 5 巻問題 19 に関して)

それらの和の立方からそれら自身の任意のものが取り去られると［そのそれぞれが］立方数になるような，3 つの数を見出すこと。再び 3 つのものの和が $1N$ と，そしてそれら自身が $\dfrac{7}{8}C$，$\dfrac{26}{27}C$，$\dfrac{63}{64}C$ とおかれるとしよう。さて，結合された 3 つのものは $1N$ に等しくされるから，ゆえに，$\dfrac{4877}{1728}C$ は $1N$ に等しくなり，そして，それぞれ［の辺］が数で割られるとすると，$\dfrac{4877}{1728}Q$ が 1 に等しくなり，さらに，1 は平方数である。ゆえに，平方の［項の係］数［4877/1728］が平方数でなければならない。しかし，それはどこから生じるのであろうか？ 3 から取り除かれたものが 3 つの立方数［の和］であるから，それらの任意のものは単位
316 より小さい。それゆえ，3 つの立方数が見出されるために，同じことが起こり，それらの任意のものは単位より小さく，さらに，3 から取り去られたそれら自身の和は平方数になるであろう。そして，私たちはそれぞれの立方数が単位より小さいことを望んでいるから，もし私たちが 3 つの数が同時に単位より小さいと考えるならば，それぞれ［の数］は単位よりはるかに小さいであろう。それゆえ，残されるであろう平方数は 2 より大きくなければならないであろう。残される平方数が $2\dfrac{1}{4}$ と定められるとしよう。それゆえ，$\dfrac{3}{4}$ および第 2 の何らかの立方数で割られたそれらの何倍かは 3 つの立方数に分割されなければならない。第 2［の立方数］を 216 としよう。それゆえ，私たちは 162 を 3 つの立方数に分割しなければならない。しかし，162 は立方数 125 および 2 つの立方数 64 と 27 の差から合成されている。さらに，私たちはすべての 2 つの立方数の差が 2 つの立方数から合成されることを命題として持っている。私たちははじめの命題に戻って，見出されたそれぞれの立方数，および単位から取り除かれた任意のもの，を取り上げ，私たちは残りを求められている数として定めて，和が $1N$ であるとしよう。それゆえ，立方数の和は，それらの任意のものが取り除かれると，立方数になることになる。3 つのもの［の和］が $1N$ に等しくされるのと同時に，3 つのものの和が $2\dfrac{1}{4}C$ になることが残っている。それゆえ，これが $1N$ に等しくされ，そしてそのために $1N$ は $\dfrac{2}{3}$ になるであろう。これは条件に適う。

2 つの立方数の差を 2 つの立方数の和で表すことに関しては，第 4 巻問題 1「与えられた数を，その辺の和が (別の) 与えられた数である，2 つの立方数の和に分解こと」および第 4 巻問題 2「それらの差が与えられた数であり，それらの立方の差も (別の) 与えられた数であるような 2 つの数を見出すこと」がある。

具体的には，与えられた a，b に対して，$u=\dfrac{a}{a^3+b^3}(a^3-2b^3)$，$v=\dfrac{b}{a^3+b^3}(2a^3-b^3)$ とおくと，$a^3-b^3=u^3+v^3$ となる (［5］p.359)。

例えば，$a=4$，$b=3$ のときは，$u=\dfrac{40}{91}$，$v=\dfrac{303}{91}$ となり $64-27=\dfrac{64000}{753571}+\dfrac{27818127}{753571}$ である。

さて，第 5 巻問題 19 は $\begin{cases}(a+b+c)^3-a=\alpha^3\\(a+b+c)^3-b=\beta^3\\(a+b+c)^3-c=\gamma^3\end{cases}$ となる 3 数 a，b，c を求める問題である。

まず，$a+b+c=x$，$a=\dfrac{7}{8}x^3$，$b=\dfrac{26}{27}x^3$，$c=\dfrac{63}{64}x^3$ とおくと，

$$x = a+b+c = \frac{7}{8}\,x^3 + \frac{26}{27}\,x^3 + \frac{63}{64}\,x^3 = \frac{4877}{1728}\,x^3$$

であるから，$1 = \dfrac{4877}{1728}\,x^2$ すなわち $\dfrac{4877}{1728} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2$ となって，$\dfrac{4877}{1728}$ は平方数ということになる。

一方，条件の 3 式を加えると，$3(a+b+c)^3 - (a+b+c) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ となるから，

$$3x^3 - \frac{4877}{1728}\,x^3 = \left(3 - \frac{4877}{1728}\right)x^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

［前の $a+b+c$ は $a+b+c=x$，後の $a+b+c$ は $a+b+c = (7/8+26/27+63/64)x^3$ による］より，$3 - \dfrac{4877}{1728} = u^3+v^3+w^3$ とすることができ，さらに $\dfrac{4877}{1728} = 3-(u^3+v^3+w^3)$ は平方数である。

そこで，$u<1$，$v<1$，$w<1$ とすることから，$3-(u^3+v^3+w^3) = \dfrac{9}{4}$ とすると，

$$\begin{aligned} u^3+v^3+w^3 &= 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} = \frac{162}{216} = \frac{1}{216}(125+64-27) \\ &= \frac{1}{216}\left(125 + \frac{64000}{753571} + \frac{27818127}{753571}\right) \\ &= \frac{125}{216} + \frac{8000}{20346417} + \frac{1030301}{6028568} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \left(\frac{20}{273}\right)^3 + \left(\frac{101}{182}\right)^3 \end{aligned}$$

となる。

そこで，$3-(u^3+v^3+w^3) = (1-u^3)+(1-v^3)+(1-w^3)$ であることから，$a = \dfrac{91}{216}\,x^3$，$b = \dfrac{20338417}{20346417}\,x^3$，$c = \dfrac{4998267}{6028568}\,x^3$ (そして，もちろん，$a+b+c=x$) とおき直すと，

$$x = a+b+c = \left(\frac{91}{216} + \frac{20338417}{20346417} + \frac{4998267}{6028568}\right)x^3 = \frac{9}{4}x^3$$

から，$x = \dfrac{2}{3}$ となり，問題 19 の解として，$a = \dfrac{91}{216} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^3$，$b = \dfrac{20338417}{20346417} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^3$，$c = \dfrac{4998267}{6028568} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^3$ が得られる（［6］pp.213–214)。

実際，$(a+b+c)^3 - a = \left(\dfrac{5}{9}\right)^3$，$(a+b+c)^3 - b = \left(\dfrac{40}{819}\right)^3$，$(a+b+c)^3 - c = \left(\dfrac{101}{273}\right)^3$。

ディオファントスは解［を得るため］の方法をはっきりと述べていないか，あるいはギリシア語が損なわれているかである。バシェは偶然にディオファントスに助けられたと思っているが，しかし，私たちはディオファントスの方法を見出すことは難しくはないと思うから，私たちは［そのことを］容認しない。

3 から取り除かれた残りの数を 3 つの立方数に分割するのだから，見出されるであろう平方数は 2 より大きく，3 より小さい。

求められている平方数の辺が任意の数の数 − 単位，例えば 317

$$1N - 1,$$

とおかれるとしよう。それ自身の平方が 3 から取り除かれると

$$2 - 1Q + 2N$$

が残り，これによって，方程式がついには最も近い種類の 2 つのものだけからなるように形づくられるであろうものに同等な，3 つの立方数が見出されるであろう。

確かに，それは無数の方法によって解くことができる。1 つの立方数の辺を

$$1 - \frac{1}{3}\,N$$

としよう。第 2［の立方数の辺］を (両方の立方数における数の数［の和］が $2N$ になるように)

$$1 + 1N$$

としよう。第 3［の立方数］の辺は数だけで表現されるであろうし，さらに，$1N$ の値が求められていた限界を出ないために不足の記号［$-$］が記されなければならず，その値が方程式をあらかじめ指定された限界に応じた状態に変えるように，その数の数を選ぶことは骨の折れることではない。

これがなし遂げられると，第 1 の立方数は，私たちが欲していたように，単位より小さいことは明らかである。それゆえ，第 2［の立方数］は［単位より］大きく，第 3［の立方数］は不足の記号が記されるから，第 2 および第 3［の立方数］の差は 2 つの立方数［の和］に等しくされることは明らかであり，その計算の結果としてディオファントスも私たちも第 2 の操作に落とされる。

「さらに，私たちはすべての 2 つの立方数の差が 2 つの立方数から合成されることを命題として持っている。」と彼は言う。

再びバシェは固執し，そして，ディオファントスの命題から見捨てられた，この第 2 の問題を条件が不足していると彼は断言する。確かに，彼は，もし与えられた立方数の大きい方が小さいほうの 2 倍にまさるのであれば，2 つの立方数の差を 2 つの立方数［の和］に分割する条件だけを教えている。一方，彼はどのようにしてすべての 2 つの立方数の差を 2 つの立方数［の和］に分割するか
318 を自分自身は知らないと誠実に告白している。私たちは先に第 4 巻の第 2 の問題に関して，この，そして，このような主題の問題が一般的に解決されるであろう方法を成功裏に明らかにした。

XXIX

(第 5 巻問題 24 に関して)

それら自身によって囲まれた立体が，それら自身の任意のものが受け入れられると，平方数となるような，3 つの平方数を見出すこと。その立体が $1Q$ とおかれるとし，単位が受け入れられたそれらの任意のものが平方数になるような，3 つの平方数が探し求められるとしよう。さらに，これは何であれ直角三角形から探し求めることができる。私は 3 つの直角三角形を与えて，直角のまわりの 1 つの辺の平方をとり，それを直角のまわりのもう一方の辺の平方で割って，第 1 のものが $\dfrac{9}{16}Q$，第 2 のものが $\dfrac{25}{144}Q$，第 3 のものが $\dfrac{64}{225}Q$ であり，それらの任意のものが $1Q$ とともに平方数になるような，［3 つの］平方数を見出す。3 つのものによって囲まれた立体が $1Q$ に等しくされることが残っている。しかし，その立体は $\dfrac{14400}{518400}CC$ であり，これが $1Q$ に等しくされ，そして，それぞれがその分母によって約分され，$1Q$ によって割られると，$\dfrac{14400}{518400}QQ$ が 1 に等しいとなり，辺が辺に等しくされると，$\dfrac{120}{720}Q$ が 1 に等しいとなる。さらに，単位は平方数である。そして，もし $\dfrac{120}{720}Q$ もまた平方数であるならば，問題は解決された。しかし，そうではない。それゆえ，それがなされたとして，私は底線による立体が掛けられた垂線による立体が，その辺が 1 つの三角形の直角のまわりの辺から生じる乗法による数である，平方数になるような 3 つの直角三角形を見出さなければならない。そして，もしそれぞれを見出された直角［三角形］の直角のまわりの辺による積で割ったならば，第 2［の直角三角形］の直角のまわりの辺の積にもう 1 つの三角形の直角のまわりの辺の積が掛けられたものからつくられるものが生じるであろう。そして，もしそれらの 1 つを 3，4，5［の辺をもつ直角三角形である］と定めるならば，［一方の三角形の］直角のまわりの辺の積が掛けられた［他方の三角形の］直角のまわりの辺
319 の積が $12N$ であるような 2 つの直角三角形が見出されることにならなければならない。それゆえ，面積の面積は 12 である。しかし，もし 12 でなく，3 ならば。しかし，これは容易であり，9，40，41 に相似である。もう一方は 5，12，13 (8，15，17 と読まれるべきである) である。ゆえに，3 つの直角三角形があり，私たちははじめの命題に戻らなければならない。そして，私たちは 3 つの平方数を 1 つは 9，もう 1 つは 25，3 つ目は 81 と決定し，そして，もしそれらによる立体が $1Q$ に等しくされるならば，$1N$ は推論によるものになるであろう。これは条件に適う。

第 5 巻問題 24 についてディオファントスが挙げた例は，$\frac{25}{4}$，$\frac{256}{81}$，$\frac{9}{16}$。

ディオファントスの方法を，バシェは理解していなかったが，私たちは次のように復元し，説明する。

第 1 の三角形が 3，4，5 であり，［直角のまわりの］辺による長方形が 12 であるから，ディオファントスは「［一方の三角形の］直角のまわりの辺の積が掛けられた［他方の三角形の］直角のまわりの辺の積が 12 の倍数であるような 2 つの直角三角形が見出されることにならなければならない」と言う。そして，その理由は 1 つ［の三角形］の辺の積にもう 1 つ［の三角形］の辺の積が掛けられたものが，12 に比例する平面であろう，数をつくり出すということであろうし，そしてそれゆえ，それら相互の倍数は平方数になるであろうから，これは命題が望むことである。

ディオファントスは続ける。「それゆえ，面積の面積は 12 である」が，これは自ずから明らかである。次いで，「しかし，もし 12 でなく，3 ならば」，12 が平方数 4 で割られると 3 になるから，乗法においてはつねに平方数が生じる。確かに，平方数は平方数で割られると平方数になる。

ディオファントスの命題の残りは明らかではないが，私たちは次のように復元するであろう。

この場合において，［一方では］7 および 2 による三角形が，他方では 5 および 2 による［三角 320
形］が想像されるとすると，第 1 の三角形［の面積］は第 2［の三角形の面積］の 3 倍であろうし，提示された 2 つ［の三角形］は［命題を］満足させるであろう。さらに，与えられた比にある［面積をもつ］2 つの直角三角形を見出す一般的な規則はこれである。

与えられた比を，大きい方が小さい方に対して，R が S に対するとしよう。大きい方の三角形は

R bis + S および R − S

から，他方，小さい方［の三角形］は

R + S bis および R − S

から形成されるであろう。

他の方法では，

第 1 の三角形は R bis − S および R + S から，第 2［の三角形］は S bis − R および R + S から形成されるはずである。

他の方法では，

第 1 の三角形は R sexies および R bis − S から，第 2［の三角形］は R quater + S および R quater − S bis から形成されるはずである。

他の方法では，

第 1 の三角形は R + S quater および R bis − S quater から，第 2［の三角形］は S sexies および R − S bis から形成されるはずである。

既に述べたことから，［それらの面積が，］2 つの与えられた数［の和］が残りの 4 倍であるような，3 つの与えられた数に比例する 3 つの直角三角形を見出す方法を導くことができる。

例えば，与えられた 3 つの数を R，S，T とし，R，T がいっしょで S の 4 倍であるとしよう。3 つの三角形が次のように形成されるであろう。

第 1［の三角形］は R + S quater および R bis − S quater から，

第 2［の三角形］は S sexies および R − S bis から，

第 3［の三角形］は S quater + T および S quater − T bis から。

さらに，私たちはRはTより大きいと仮定していた。

321 ここから，さらに，それらの面積が直角三角形を定めるであろう，3つの直角三角形を数において見出す方法が引き出されるであろう。

確かに，これから，その底線および斜辺［の和］が垂線の4倍である，三角形を見出すという問題が導かれるであろう。しかし，これは容易であり，三角形はこれ，［すなわち］

17，15，8，

に相似であろう。正しい3つの三角形は次のように形成されるであろう。

第1［の三角形］は49および2から，

第2［の三角形］は47および2から，

第3［の三角形］は48および1から。

このため，それらの面積が与えられた3つの平方数，それら［の平方数］の2つ［の和］が残りのものの4倍である，に比例する3つの三角形を見出す方法もまた引き出されるであろうし，そしてそれゆえ，同じ方法によって同じ面積の3つの三角形を見出すことができるであろう。それどころか，私たちは，項のうちの1つまたは両方掛ける与えられた平方数が計算されることなどによって，無限の仕方で与えられた比にある2つの直角三角形を構成することができる。

XXX

(第5巻問題25に関して)

それら自身によって囲まれた立体から，それら自身の任意のものが取り去られると，平方数になるような，3つの平方数を見出すこと。それら自身によって囲まれた立体が $1Q$ とおかれるとし，さらに，探し求められる平方数が直角三角形によって1つが $\frac{16}{25}$ と，2つ目が $\frac{25}{169}$ と，3つ目が $\frac{64}{289}$ ととられるとしよう。私はそれらを，それら自身の任意のものが取り去られると平方数になるような，平方数に定め，そして，それは $1Q$ のままであるとしよう。3つのものによって囲まれた立体が $1Q$ に等しくされることが残っている。しかし，その立体は $\frac{25600}{1221025}CC$ である。ゆえに，これが $1Q$ に等しくされ，それぞれが $1Q$ で割られると，$\frac{25600}{1221025}QQ$ が1に等しくなる。さらに単位は平方数でり，その辺は平方数である。ゆえに，
322 $\frac{25600}{1221025}QQ$ もまた，平方の辺をもっている平方数でなければならない。それゆえ，斜辺による立体が掛けられた垂線による立体が，その辺が平方数である，平方数であるような，3つの直角三角形が見出されるために，再び元に戻されなければならない。そして，もし私たちがそれぞれを1つの直角［三角形］の斜辺掛ける垂線による積で割るならば，ある直角［三角形］の斜辺掛ける垂線による積掛けるもう1つの直角［三角形］の斜辺掛ける垂線による積にならなければならず，1つの直角［三角形］を3，4，5であるとしよう。それゆえ，斜辺および垂線による数の斜辺および垂線による数［との積］が20であるような，2つの直角三角形が見出されるということになる。さらに，もし20および5であるならば，簡単である。というのも，大きい方は5，12，13であり，小さい方は3，4，5であるからである。ゆえに，これらから，斜辺と垂線による数が6であり，さらに，大きい方の斜辺が $6\frac{1}{2}$，垂線が60であるような，別の2つが探し求められるであろう。さらに，小さい方の斜辺は $2\frac{1}{2}$ で，実際，1つの直角［三角形］が掛けられると12であり，相似のものの最小のものをとって，私たちは最初の命題に戻り，そして，私たちは3つのものに囲まれた立体を $1Q$，それらの平方の1つを $16Q$，他の1つを $576Q$，3つ目を $\frac{1}{28561}Q$ とおく。3つのものによる立体が $1Q$ に等しくされることが残っており，それぞれに $1Q$ が掛けられて，辺が辺に等しくされると，$1N$ が65であると見出されるであろう。これは条件に適う。

ディオファントスの方法に従った問題25の解明および説明に関して，バシェは同様に，1つ［の三角形］の斜辺と垂線による積がもう1つ［の三角形］の斜辺と垂線による積に対して与えられた

比をもつような，2 つの直角三角形が探し求められる，ということを利用しなかった。 323

これは確かに長い間私たちを苦しめた，そして，どのような試みであれ本当の難しさが経験されるであろう問題であるが，しかし，ついにはそれに対する一般的な解の方法が明らかになった。

1 つ［の三角形］の斜辺と垂線による長方形がもう 1 つ［の三角形］の斜辺と垂線による長方形 324
の 2 倍であるような，2 つの三角形が探し求められるとしよう。

1 つは A および B による，もう 1 つは A および D による三角形と想像されるとしよう。［2 数 A，B から $\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2$，2AB，$\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2$ を 3 辺とする直角三角形がつくられるから，］前［の三角形］の斜辺および垂線による長方形は

$$\mathrm{B\ in\ A\ cubum\ bis + B\ cubo\ in\ A\ bis}$$

であろうし，一方，後［の三角形］の斜辺および垂線による長方形は

$$\mathrm{D\ in\ A\ c.\ bis + D\ c.\ in\ A\ bis}$$

であろう。

それゆえ，B in A c. bis + B c. in A bis が長方形 D in A c. bis + D c. A in bis の 2 倍であるから，ゆえに，

B in A c. + B c. in A が D in A c. bis + D c. in A bis に等しくされる

であろうし，すべてが A で割られると，

B in A q. + B c. が D in A q. bis + D c. bis に等しい

となるであろうし，対照［移項］によって，

D c. bis − B c. が B in A q. − D in A q. bis に等しくされる

であろう。それゆえ，もし D c. bis − B c. が，B − D bis によって割られて，平方数［A^2］に等しくされるならば，問題は解かれるであろう。

それゆえ，1 つ［の数］の立方の 2 倍引くもう 1 つ［の数の立方］が，後［の数］の 2 倍引く前［の数］によって割られるあるいは［それが］掛けられる (それは同じことになるのだから) と，平方数になるという条件から，2 つの数，すなわち B および D，が探し求められるであろう。

1 つが $1N+1$ で，もう 1 つが 1 であるとおかれるとしよう。

前の立方の 2 倍引く後の立方は

$$1+6N+6Q+2C$$

になる。

さらに，後の 2 倍引く前は

$$1-1N$$

になる。ゆえに，もし $\overline{1-1N}$ を $\overline{1+6N+6Q+2C}$ に掛けるならば，平方数になるであろう。そ 325
の積は $1+5N-4C-2QQ$ に等しくされ，これは $\dfrac{5}{2}N-1-\dfrac{25}{8}Q$ の平方に等しくされるであろう。そして，すべては直ちに明らかになるであろう。

命題は，既に私たちによって 2 倍の比率についてなされたように，もし探し求められるであろう数の 1 つの代わりに $1N$ 足す比率の大きい方の項が小さい方を超える超過分と，そして，もう 1 つの代わりにその超過分自身とおかれるならば，すべての比率に対して拡張されるであろう。この理由によって，確かに，単位の数はつねに平方数になるであろうし，方程式は［解くのが］容易であろう。これがなし遂げられると，B および D そのものが表現されるであろう 2 つの数が見出されるであろうし，最初の問題に戻ることができるであろう。

私たちがここまで 25 番目の問題に関して書いてきたことを再検討すると，私たちがなし遂げた問題に関する推論は私たちの問題にはふさわしくないから，私たちはすべてを直ちに消去するように見えた。しかし，私たちは別の問題をかろうじて現在の問題に導いたから，私たちは［それを］正しく解決したし，努力を無駄にしたというより置き誤ったし，そしてそれゆえ，未使用の余白への書き込みが残っているのである。

ディオファントスの問題そのものをもう一度新しい審査に委ね，そして，私たちの方法を注意深く熟考し，私たちはついには一般的に解いた。私たちは，それらの数を運によってではなく技法によって見出さなければならないことを十分に示すであろうと確信する，例を 1 つだけ付け加えるであろう。

1 つ［の三角形］の斜辺と垂線の積がもう 1 つ［の三角形］の斜辺と垂線の積に対して 5 が 1 に対する比をもつという条件の 2 つの直角三角形が見出されるというディオファントスの問題について。

これらがその 2 つの三角形である。

第 1［の三角形］，その	斜辺	48 543 669 109
	底線	36 083 779 309
	垂線	32 472 275 580
第 2［の三角形］，その	斜辺	42 636 752 938
	底線	41 990 695 480
	垂線	7 394 200 038

326

XXXI

(第 5 巻問題 30 に関して)

与えられた数に対して，それらから 2 つずつとられたものが，与えられた数が受け入れられると，平方数になるような，3 つの平方数を発見すること。

この問題のおかげで，私たちは，そうでなければ非常に難しいと思われていた，次の問題の解を与える［ことができる］であろう。

与えられた数に対して，それらから 2 つずつとられたものが，与えられた数が受け入れられると，平方数になるような，4 つの平方数を見出すこと。

与えられた数を 15 として，はじめに，この問題によって，それらから 2 つずつとられたものが，与えられた数が受け入れられると，平方数になるような，3 つの平方数が見出されるとしよう。そして，それら 3 つの平方数は

$$9,\ \frac{1}{100},\ \frac{529}{225}$$

であるとしよう。

探し求められている 4 つの数の第 1 のものが $1Q-15$,

第 2 のものが $6N+9$

(9 は［見出された］平方数の 1 つであり，さらに，$6N$ はその辺の 2 倍に N が掛けられたものであるから) とおかれるとし，

同じ理由によって第 3 のものが $\dfrac{1}{5}N+\dfrac{1}{100}$,

$$\text{最後に第 4 のものが } \frac{46}{15}N + \frac{529}{225}$$

とおかれるとしよう。

それゆえ，条件が定められたから，提示された［問題の］3 つの部分は満たされる。確かに，最初［の数］といっしょになったそれらの数の任意の 1 つは，15 が受け入れられると，平方数になる。

第 2 のものおよび第 3 のもの［の和］に 15 が加えられると，さらに，第 3 のものおよび第 4 のもの［の和］に 15 が加えられると，最後に，第 2 のものおよび第 4 のもの［の和］に，同じく，15 が加えられると，平方数になるということが残っている。そして，つくり方から，私たちがこの問題から，どのようなものであれ等しくされるであろう項について，平方数である単位［の数］およ 327
び数［の数］だけが見出される，技法を取り出したから，その解決が容易である 3 重方程式が生じる。それゆえ，私たちが第 6 巻問題 24 に関して述べたことと同じことが思い出されるであろう。

> ディオファントスはこの問題 (および次の問題も) の解を明示していない。
> 第 6 巻問題 24 (の注釈) については XLIII，XLIV 参照。

XXXII

(第 5 巻問題 31 に関して)

与えられた数が取り去られた，それらから 2 つずつとられたものが平方数になるような，3 つの平方数を見出すこと。

上の問題で，与えられた数が受け入れられた，それらから 2 つずつとられたものが平方数になるような 4 つの平方数を見出すために，私たちが用いた技法は，この問題についても同様に，与えられた数が取り去られた，それらから 2 つずつとられたものが平方数になるような 4 つの平方数を見出すために，用いることができる。

確かに，第 1 のものは $1Q +$ 与えられた数と，第 2 のものはこの問題において見出した 1 つのものの平方とそれ自身の辺の 2 倍に N が掛けられたものがいっしょになったものとおかれるであろう。そして，残りは明らかである。

XXXIII

(第 5 巻問題 32 に関して)

それらの平方によって合成されたものが平方数になるような，3 つの平方数を見出すこと。

なぜ彼はそれらの和が平方数である 2 つの平方の平方数を探し求めないのか？確かに，私たちの証明の方法では全く疑いをほどくことができないように，この問題は不可能である

> 第 5 巻問題 32 についてディオファントスが挙げた例は，$\frac{144}{25}$，9，16。

XXXIV

(第 6 巻問題 3 に関して)

ディオファントスの問題：その面積の数に与えられた数が付け加えられると平方数になるような，直角三角形を見出すこと。与えられた数を 5 としよう。

バシェ：··· さらに，これから偶然にフランシス・ヴィエートの心に 2 つの平方数から合成される数だけを付け加えることができるという問題が生じたのは，ディオファントスが 2 つの平方数から合成されるために彼 328

の仮定において 5 をとったからである。たとえ彼自身によって導かれたディオファントスの解析によって問題がどのような数にも拡張されることは十分に明らかであっても，疑われるであろう点が残っている人はいないけれども，その技術を確証することは好ましいことである。

ヴィエートの誤りは全く疑いなくそこから生じる。この非常に傑出した人は面積に等しくされるであろう 2 つの平方の平方の差，例えば $1QQ-1$，に平方数の 5 倍が付け加えられることによって平方数になると仮定した。

もし与えられた数 5 が 2 つの平方数に分割されるならば，その 5 倍から単位が取り去られると平方数になるような平方数を見出すことができるであろう。それゆえ，5 倍されるであろう平方数の辺が $1N+1$，または別の任意の数の数 $+1$，とおかれるとしよう。その平方の 5 倍は

$$5Q+10N+5$$

であろうし，これは，もし面積，$1QQ-1$，を加えるならば，

$$1QQ+5Q+10N+4$$

となるであろうし，この和が平方数に等しくなければならない。しかし，これは，問題に加えられた仮定により，単位の数が平方数であるから，面倒ではない。

ヴィエートは，もし $1QQ-1$ に代わりに面積として $1-1QQ$ をとったならば，問題を同様に解くことができるということが分からなかった。なぜならば，問題はすぐに，5 あるいは 6 あるいは別の任意の，与えられた数が掛けられた平方数が，単位が加えられると，平方数になるというように替えられるからであり，これは，単位は平方数であるから，一般に非常に簡単である。

329 私たちは独特の方法によってこの問題およびすぐ後の 2 つ［の問題］を解決したし，そのおかげで，もし私たちが，例えば 5 といっしょになった，その面積が平方数になるような三角形を探し求めるならば，私たちは，その面積が 20 で 5 が加えられると平方数 25 になる，最も小さいものとして三角形

$$\frac{9}{3},\ \frac{40}{3},\ \frac{41}{3}$$

を与える。しかし，この場所は私たちのこの方法の規則および使用法についてさらに付け加えるところではない。確かに，私たちは述べなければならないことを多くもっているから，この余白の狭さでは十分ではない。

ディオファントスはこの問題の解を明示していないが，彼の解法を進めると，$\frac{331151}{31800}$，$\frac{48}{53}$，$\frac{332401}{31800}$ を 3 辺とする三角形が得られる（［6］p.227)。

XXXV

(第 6 巻問題 6 に関して)

面積の数が，直角のまわりの 1 つの辺が加えられると，与えられた数になるような直角三角形を見出すこと。

330 この命題および次［の命題］は別の方法によって解かれる。

この命題において，三角形が与えられた数および単位から形成されるとし，同様の辺による平面が単位および与えられた数の和によって割られるとするならば，探し求められていた三角形が生じるであろう。

第 6 巻問題 6 についてディオファントスが挙げた例は，6，$\frac{7}{4}$，$\frac{25}{4}$ を 3 辺とする三角形。

XXXVI

(第 6 巻問題 7 に関して)

面積の数が，直角のまわりの 1 つの辺が罰せられると，与えられた数になるような直角三角形を見出すこと。

三角形が与えられた数および単位から形成されるとし，同様の辺による平面が与えられた数および単位の差によって割られるとしよう。

この問題は，私たちがこのような種類の 2 重方程式を無限の方法で解いたような仕方によって，無限の解を受け入れる。さらに，私たちは後で問題 24 に関して使用する方法に言及し説明した。

それどころか，それらの無限の解は続く 4 つの問題に適合するが，このことにはディオファントスもバシェも注目しなかった。しかし，なぜディファントスもバシェも次の問題を付け加えなかっ 331
たのだろうか？

［直角のまわりの］辺の中の 1 つが，面積が罰せられると，与えられた数になるような直角三角形を見出すこと。

疑いなく彼らはこれ［の解］を知らなかったようである。というのも，それは 2 重方程式の解をすぐにはもたらさないからである。しかし，私たちの方法によって容易に見出すことができる。

同様に，この第 3 の場合は次の問題を補完することができる。

ディオファントスはこの問題の解を明示していない。
第 6 巻問題 24 (の注釈) については XLIII，XLIV 参照。

XXXVII

(第 6 巻問題 8 および 9 に関して)

私たちの方法によって次の問題を付け加えることができる。

［直角のまわりの］辺の和が，面積が罰せられると，与えられた数になるような直角三角形を見出すこと。

第 6 巻問題 8 は「面積に直角のまわりの辺の和が加えられると与えられた数になるような直角三角形を見出すこと」。
第 6 巻問題 9 は「面積から直角のまわりの辺の和が引かれると与えられた数になるような直角三角形を見出すこと」。
ディオファントスはこれらの問題の解を明示していない。

XXXVIII

(第 6 巻問題 10 および 11 に関して)

私たちの方法によって次の問題を付け加えることができる。

斜辺および直角のまわりの 1 つの辺の和が，面積が罰せられると，与えられた数になるような直角三角形を見出すこと。

それどころか，バシェの注釈に次［の問題］を付け加えることができる。

面積が取り去られた斜辺が与えられた数になるような直角三角形を見出すこと。

第 6 巻問題 10 は「面積に斜辺および直角のまわりの 1 つの辺の和が加えられると与えられた数になるような直角三角形を見出すこと」。
第 6 巻問題 11 は「面積から斜辺および直角のまわりの 1 つの辺の和が引かれると与えられた数になるような直角三角形を見出すこと」。
ディオファントスはこれらの問題の解を明示していない。

332

XXXIX

(第 6 巻問題 13 に関して)

面積の数が，直角のまわりの一方の辺が加えられると，平方数になるような直角三角形を見出すこと。

ディオファントスは命題を満たしているただ 1 つの種類の三角形を与えている。しかし，私たちの方法によって，ディオファントスのものから順番に引き出される，無限の異なる種類の三角形が得られる。

それゆえ，その性質が直角のまわりの辺の相互の積が，直角のまわりの大きい方の辺，それらの差および囲まれた［三角形の］面積による立体が取り入れられると，平方数になるというような，三角形 3，4，5 が見出されたとしよう。それから同じ性質の別［の三角形］が導かれるであろう。

探し求められていた三角形の直角のまわりの辺のうちの大きい方が 4 で，一方，小さい方が $3+1N$ であるとしよう。直角のまわりの辺による長方形は，直角のまわりの大きい方の辺，それらの差および囲まれた面積［による立体］が取り入れられると，

$$36-12N-8Q$$

となり，それゆえ，これは平方数に等しくなければならない。さらに辺，4 および $3+1N$，は直角三角形の直角のまわりの辺であるから，結合されたそれらの平方もまた平方数に等しくなければならない。結合されたそれらの平方は

$$25+6N+1Q$$

333 になり，それゆえ，これもまた平方数に等しくされなければならない。そして，2 重方程式が生じる。すなわち，

$$36-12N-8Q \text{ も } 25+6N+1Q \text{ も}$$

平方数に等しくなければならない。この 2 重方程式の解法は容易である。

第 6 巻問題 13 についてディオファントスが挙げた例は，$\frac{12}{19}$，$\frac{16}{19}$，$\frac{20}{19}$ を 3 辺とする三角形。

XL

(第 6 巻問題 14 に関して)

面積の数が，直角のまわりの一方の辺が罰せられると，平方数になるような直角三角形を見出すこと。

私たちの方法によって，そうでなければ非常に難しい，次の問題が解かれるであろう。

直角のまわりの一方の辺が，面積が罰せられると，平方数になるような直角三角形を見出すこと。

第 6 巻問題 14 についてディオファントスが挙げた例は，$\dfrac{12}{5}$，$\dfrac{16}{5}$，4 を 3 辺とする三角形。

XLI

(第 6 巻問題 15 および 17 に関して)

15　面積の数が，斜辺と同様に直角のまわりの一方の辺が取り去られると，平方数になるような直角三角形を見出すこと。

17　面積の数が，斜辺と同様に直角のまわりの一方の辺が取り入れられると，平方数になるような直角三角形を見出すこと。

私たちの方法のおかげで，そうでなければ非常に難しい，次の問題が調べられるはずである。

斜辺と同様に［直角のまわりの］辺の中の 1 つが，面積が取り去られると，平方数になるような直角三角形を見出すこと。

第 6 巻問題 15 についてディオファントスが挙げた例は，$\dfrac{8}{3}$，5，$\dfrac{17}{3}$ を 3 辺とする三角形。

この三角形の面積は $S = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8}{3} \times 5 = \dfrac{20}{3}$ だから，

$$S - \frac{8}{3} = 4 = 2^2,\ S - 5 = \frac{5}{3} \neq \text{平方数},\ S - \frac{17}{3} = 1 = 1^2$$

第 6 巻問題 17 についてディオファントスが挙げた例は，$\dfrac{8}{77}$，$\dfrac{15}{77}$，$\dfrac{17}{77}$ を 3 辺とする三角形。

この三角形の面積は $S = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8}{77} \times \dfrac{15}{77} = \dfrac{60}{5929}$ だから，

$$S + \frac{8}{77} = \left(\frac{26}{77}\right)^2,\ S + \frac{15}{77} = \frac{1215}{5929} \neq \text{平方数},\ S + \frac{17}{77} = \left(\frac{37}{77}\right)^2$$

XLII

(第 6 巻問題 19 に関して)

斜辺の数といっしょの面積の数は平方数になるが，しかし周囲の数は立方数であるような直角三角形を見出すこと。

$\cdots$ それゆえ，2 が付け加えられると立方数になるような何らかの平方数を見出さなければならない。$\cdots$ それゆえ，平方の辺は 5 であり，一方，立方［の辺］は 3 である。それ自身の平方は 25 で，立方は 27 である。$\cdots$

しかし，25 自身のほかに，2 が付け加えられると立方数になるような別の平方数が整数として見出されるであろうか。それは一見したところ確かに難しい調査のように思われる。しかし，確実な 334
証明によって，2 が付け加えられると立方数になる別の平方数は整数としては 25 のほかにはないことを証明することができる。分数としてはバシェの方法によって無限［の数］が得られるが，しかし，確かに最も美しくそして最も洗練されたものである，整数についての理論にバシェも自分の著作を私に届けた別のどの人も今までは精通していなかった。

第 6 巻問題 19 についてディオファントスが挙げた例は，2，$\dfrac{621}{50}$，$\dfrac{629}{50}$ を 3 辺とする三角形。

この三角形について，面積 $= \dfrac{1}{2} \times 2 \times \dfrac{621}{50} = \dfrac{621}{50}$ だから，

$$\text{面積} + \text{斜辺} = \frac{621}{50} + \frac{629}{50} = 25 = 5^2,\ \text{周囲} = 2 + \frac{621}{50} + \frac{629}{50} = 27 = 3^3。$$

XLIII

(第 6 巻問題 24 についての［バシェの］注釈に関して)

ディオファントスの問題：周囲の数が立方数であり，そして，［それに］面積の数が付け加えられると平方数になるような直角三角形を見出すこと。

バシェ：··· しかし，この本の中でディオファントスはさまざまな方法で 2 重方程式を用いているから，より強固な意志で学んでいる 2 重方程式の全体の理論に執着するために，もし私が彼が用いているすべての方法を 1 つずつ検討し，そして，私たちによってあちこちに書き留められたものの 1 つが考察されるように仕向けるならば，私は私自身に起こるであろうことについては考えない。私たちはディオファントスの仮説を利用するだけではなく，それによってこのような種類の方程式のさまざまな性質が明らかにされる別のものを与えるであろうし，さらに，方程式の理論を工夫し，そして第 45 番目［の問題］を解決した，新しいものを別のものに付け加えるであろう。

2 重方程式あるいは διπλοισότης が十分ではないときは，私たちの発見であり，以前の非常に多くの非常に美しい問題に対して松明を差し出す，τριπλοισότης または 3 重方程式に頼ることになろう。

διπλόος : *twofold, double*
διπλοισότης : *double equation*
τριπλόος : *triple, threefold*

明らかに，$\begin{cases} 1N+4 \\ 2N+4 \\ 5N+4 \end{cases}$ が平方数に等しくされるとすると，中間の 2 重方程式によるその解法が容易である 3 重方程式が生じる。

335 もし $1N$ の場所に 4 といっしょになって平方数になる数，例えば $1Q+4N$，がおかれるならば，

平方数に等しくされるであろう数の第 1 のものは $1Q+\ \ 4N+4$ になるであろう。
それゆえ，第 2 のものは $2Q+\ \ 8N+4$ で，
第 3 のものは $5Q+20N+4$ であろう。

そして，つくり方から，第 1 のものは平方数である。ゆえに，

$$2Q+8N+4 \text{ および } 5Q+20N+4$$

が平方数に等しくなければならず，確かにただ 1 つの解を与えるであろう 2 重方程式が生じるが，しかし，与えられた［解］から再び新しいものが現れ，そして，第 2 のものから第 3 のものが，そして無限に，導かれるであろう。

そして，$1N$ の値が見出されたら，再び，$1N$ が $1N+$ 最初に見出された $1N$ 自身の数に等しいものであるとおかれることになるように，進むであろう。なぜならば，この無限の方法によって以前の解に［新しい］解が付け加えられるであろうし，最後のものはつねに先行する最も近くのものから導かれるであろうからである。

この発見のおかげで，私たちは同じ面積の無限［個］の三角形を示すことができ，第 5 巻の第 8 の問題 —— 彼はそこでは 3 つの［未知］数をもつ次の問題を解決するために面積が等しい 3 つの三角形だけを探している —— から明らかなように，そのことをディオファントスは知らなかったと思われるが，私たちが最初に明らかにしたことによって，そのことは［問題を］無限［個の三角形を探すこと］に拡張することを保証する。

第 6 巻問題 24 についてディオファントスは解を明示していないが，彼の解法を続けると $\dfrac{448}{25}$，$\dfrac{176}{9}$，$\dfrac{5968}{225}$ を 3 辺とする三角形が得られる（［6］p.245)。

「次の問題」とは第 6 巻問題 25 で，斜辺の平方が別の平方数とその辺との和であり，斜辺の平方が直角のまわりの一方の辺で割られたものがある立方数とその辺との和であるような直角三角形を見出す問題である。

ディオファントスの解法によれば，この問題の解は $\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{9}{16}$，$\dfrac{15}{16}$ を 3 辺とする三角形。

実際，$\left(\dfrac{15}{16}\right)^2 = \left(\dfrac{9}{16}\right)^2 + \dfrac{9}{16}$，$\left(\dfrac{15}{16}\right)^2 \div \dfrac{3}{4} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^3 + \dfrac{3}{4}$。

第 5 巻問題 8 については XXIII 参照。

XLIV 336

(同じ注釈に関して)

2 重方程式に関するこの考察に，私たちは古代の人々も最近の人々もあらわにできなかった多くのことを付け加えることができた。今，私たちの方法の価値および使用法を主張するためには，非常に難しい次の問題を解決することで十分である。

その斜辺が，直角のまわりの辺の和と同様に，平方数であるような［整］数の［辺をもつ］直角三角形を見出すこと。

探し求められていた三角形を次の 3 つの数は提示する。

4 687 298 610 289，4 565 486 027 761，1 061 652 293 520。

さらに，これは次の 2 つの数によって形成される。

2 150 905，246 792。

さらに，私たちは別の方法によって次の問題の解を明らかにした。

その条件が直角のまわりの辺の差の平方引く［それらの］小さい方の辺の平方の 2 倍が平方数に
なるという，［整］数の［辺をもつ］直角三角形を見出すこと。 337

この問題に適合する三角形のうちの 1 つは

1525，1517，156

によるものであり，それは数 39 および 2 から形成される。

それどころか，私たちは自信をもって，既に提示された 2 つの問題に関して与えられた 2 つの直角三角形が問題を満たしているすべての整数［の三角形］の最小のものであるということを付け加える。

私たちの方法はこうである。提示された問題［の解］が普通の方法に従って探し求められるとしよう。もし完全な操作の後でも解法が成功しないのならば，確かに知られるようになった数の値には不足の印がつけられ，それゆえ零より小さいと理解されるから，私たちは絶望する (それは，ヴィエートが言うように，彼自身のそして古代の解析学者の怠惰によるものであった) ことはない
と自信をもって宣言するだけでなく，もう一度問題を調査することになり，そして，私たちは根の 338
値の代わりに $1N -$ 不足の記号によって最初の操作において私たちが見出した未知の根に等しくされる数とおくことになって，本当の数によって問題の解を表現するであろう全く疑わしくない新しい方程式が現れるであろう。

そして，この方法によって，そうでなければ非常に難しい，上の 2 つの問題を私たちは解いた。

同様に，私たちは 2 つの立方数によって合成された数を別の 2 つの立方数に分解することができることを証明したが，これを操作を 3 回まで繰り返すことによって解決した。確かに，探し求められた真実が操作の多くの繰り返しを熟練したそして勤勉な解析学者に強いることが，経験によって容易に認められるであろうように，しばしば起こる。

補遺

とても運よく多くの 2 重方程式の方法や洗練された場合を非常に博学な解析学者バシェはディオファントスの第 6 巻の 24 番目の問題に関して提示したが，確かに整数の作物を収穫しなかった。というのも，1 つの問題だけをたかだか 2 重の解に制限するか，または無限に広げたり拡張したりすることを妨げるものは何もなく，それどころか，下向きのその操作を遂行することは容易だからである。

彼［バシェ］自身が 439 および 440 ページで十分に詳細に説明している第 6 の方法が提示されるとしよう。彼自身によって列挙されたすべての場合は，すぐに示されるであろう方法と同様に，無
339 限の解を許容する私たちの方法によって，解析が繰り返されることによって最初のものから無限に次々に導かれる。

はじめに挙げたバシェの編集になるディオファントスの『算術』ラテン語版では，第 6 巻問題 24 が 432 ページから 440 ページにかけて述べられている。その問題についてのバシェの「注釈」には 6 つの「方法」が示されており，第 6 の方法は 439 ページから 440 ページにある。

方法はこうである。提示された問題の解が，未知の数あるいは根の値がすぐに現れるであろう，普通の方法に従って，すなわちバシェまたはディオファントスの方法に従って，探し求められるとしよう。これがなし遂げられたら，解析が繰り返され，新しく探し出されるであろう根の値の代わりに，1 つの根足す前の根のうちの 1 つの数とおかれるとしよう。問題は，前の解によって両方に平方数の 1 つが見出されるであろう，新しい 2 重方程式に変えられるであろうし，それゆえ，互いに最も近い種である，数および平方だけの［2 つの］方程式の差は明らかであろう。それゆえに，ディオファントスおよびバシェ［の方法］によって，この新しい 2 重方程式は解かれるであろう。これから，同様の技法によって，第 3［の解］が，そして，第 3［の解］から第 4［の解］が，そして，無限に，導かれるであろう。

このことをディオファントスも，バシェも，ヴィエートさえも，気づいていなかったので，これはここまで解析の非常に大きな損失であった。しかし，問題を進める私たちの発見の技法は優れており，それらにおいては，最初の解析は未知の根の値の代わりに不足の符号が記された，それゆえ零より小さいと理解される，数を与える。さらに，この場合における私たちの方法は，単に 2 重方程式によって解かれる問題の中だけでなく，一般にどのような［問題の］中においても，経験することによって知ることになるであろうように，位置を占めている。

それゆえ，［解法は］このように進む。··· が探し求められるとしよう。(これを提示するために，上の 337 ページ 10 行から 338 ページ 5 行まで［このページ数はこの「観察」の原文のページ数。この訳文では 227 ページの「私たちの方法はこうである」。］を見よ。)

340 XLV

(ディオファントスの『算術』の最後の問題についての［バシェの］注釈の問題 20 に関して)

「『算術』の最後の問題」とは第 6 巻問題 26 で，直角のまわりの一方の辺が立方数で，他方が (別の) 立方数とその辺との差であり，斜辺が (別の) 立方数とその辺との和であるような直角三角形を見出す問題。
この問題についてディオファントスが挙げた例は，6，8，10 を 3 辺とする三角形。
バシェはこの問題についての「注釈」の中で 22 個の問題を挙げている。

バシェ：その面積が与えられた数であるような直角三角形を見出すこと。さらに，2 倍にされた面積の平方が，何らかの平方の平方が加えられると，平方数になるようでなければならない。

整数［の辺］をもつ直角三角形の面積は平方数になることはできない。

私たちによって見出されたこの定理の証明を，私たちは面倒で困難な熟慮なしにではなくようやくあらわにしたことを付け加えるであろう。確かに，この種の証明は算術における驚くべき進歩を与えるであろう。

もし三角形の面積が平方数であったならば，それらの差が平方数であるような 2 つの平方の平方数が与えられたはずであった。そしてそこから，それらの和も差も平方数であるような 2 つの平方数が与えられることが従う。それゆえ，平方数および平方数の 2 倍から構成され，その条件がそれを構成する平方数［の和］が平方数になるというような，平方に等しい数が与えられる。しかし，もし平方数が平方数および別の平方数の 2 倍から構成されるならば，その辺も同様に平方数および平方数の 2 倍から構成されるが，私たちはそれを非常に簡単に証明することができる。そしてそこから，その辺は直角三角形の直角のまわりの辺の和であり，それを構成している平方数の 1 つは底線になり，平方数の 2 倍は垂線に等しいものである，ことが結論されるであろう。

それゆえ，その直角三角形はそれらの和および差が平方数であろう 2 つの平方数によってつくられるであろう。しかし，それら 2 つの平方数［の和］ははじめに仮定された，それらの和も差も平方数になる，最初の［2 つの］平方数［の和］より小さいことが証明されるであろう。ゆえに，もしそれらの和および差が平方数になるような 2 つの平方数が与えられるならば，同じ性質をもち，前のものより小さい，2 つの平方数の和が整数として与えられるであろう。

同じ計算によって，前の方法によって見出したものより小さいものが与えられるであろうし，つねに，同じことを保証している，より小さい数が整数として無限に見出されるであろう。任意の整数が与えられたとき，それより小さい整数を無限に与えることはできないから，これは不可能である。

余白に証明の全体および長々とした説明を挿入することをそれ自身の狭さが妨げる。 341

この理由によって，単位を除いて，平方の平方数に等しい三角数はない，ということを私たちは見出し，その証明を確立した。

XLVI

(ディオファントスの『多角数について』の命題 9 についての［バシェの］注釈に関して)

バシェ：辺が与えられたとき多角形を見出すこと。··· 多角形が与えられたとき辺を見出すこと。

私たちが見出した，非常に美しくそして驚くべき命題をこの場所に証明なしで私たちは付け加えるであろう。

単位からの開始を仮定している，自然の数列［公差 1 の等差数列］において，任意の数はそれより大きい最も近くのものが掛けられるとその数自身の三角数の 2 倍になり，それより大きい最も近く

の三角数が掛けられるとその数自身のピラミッド数に 3 倍になり，それより大きい最も近くのピラミッド数が掛けられるとその数自身の三角形状三角数 (triangulotriangulum) の 4 倍になり，そして，単一のそして一般的な方法によって無限にそうである。

私は［多角］数についてより美しいまたはより一般的な定理を与えることができるとは思わない。余白にその証明を挿入することは余裕もないし許されてもいない。

任意の数 n に対して，それより大きい数のうちで最小もの，すなわち $n+1$，が掛けられると，
$$n \times (n+1) = 2 \times \frac{1}{2}\, n(n+1)$$
で，$\dfrac{1}{2}\, n(n+1)$ は n 番目の三角数。

次に，n に $n+1$ 番目の三角数 $\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$ が掛けられると，
$$n \times \frac{1}{2}(n+1)(n+2) = 3 \times \frac{1}{6}\, n(n+1)(n+2)$$
で，$\dfrac{1}{6}\, n(n+1)(n+2)$ は n 番目のピラミッド数。なお，このピラミッド数は三角錐数あるいは四面体数ともいわれ，球をピラミッド状［三角錐状］に配置したときの球の総数で，三角数を 1 から順に足していったもの —— すなわち $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\, k(k+1)$ —— に等しい。

さらに，n に $n+1$ 番目のピラミッド数が掛けられると，
$$n \times \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) = 4 \times \frac{1}{24}\, n(n+1)(n+2)(n+3)$$
となるが，一方で，
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{6}\, k(k+1)(k+2) &= \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} \left(k^3 + 3k^2 + 2k\right) \\ &= \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{4}\, n^2(n+1)^2 + 3 \times \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1) + 2 \times \frac{1}{2}\, n(n+1)\right\} \\ &= \frac{1}{24}\, n(n+1)(n+2)(n+3)\end{aligned}$$
が成り立つ。
さらには，
$$\begin{aligned}n \times \frac{1}{24}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) &= 5 \times \frac{1}{120}\, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \\ &= 5 \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{24}\, k(k+1)(k+2)(k+3)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}&n \times \frac{1}{120}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \\ &\qquad = 6 \times \frac{1}{720}\, n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \\ &\qquad = 6 \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{120}\, k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\end{aligned}$$
である。

XLVII

(『多角数について』第 2 巻のバシェの補遺の命題 27 に関して)

単位は第 1 の立方数である。続く 2 つの奇数が合成された［加えられた］ものは第 2 の立方数である。続く 3 つ［の奇数の和］は第 3 の立方数である。続く 4 つ［の奇数の和］は第 4［の立方数］である。そして，つねに，続く 1 つより多くの奇数が加えられたものはその次の立方数を，無限に，定める。

私はこの命題を次のようにより一般的に提示する。

どのような多角数の数列においても，単位は第 1 の多角柱 (columna) を定める。4 が罰せられた多角形の角［の数］だけ多くのものがとられたのと同じ回数だけ第 1 の三角数が罰せられた，続く 342
2 つの数［の和］は第 2 の多角柱［となる］。続く 3 つ［の数の和］は，4 が罰せられた多角形の角［の数］だけ多くのものがとられたのと同じ回数だけ第 2 の三角数が罰せられると，第 3 の多角柱［になる］。そして，無限に同じように進む。

k 角数とは球を正 k 角形状に配置したときの球の総数で，k 角数を総称して多角数という。
$P_{n+1}^k - P_n^k = (k-2)\,n+1$ であるから，第 n 番目の k 角数 P_n^k は

$$P_n^k = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \{(k-2)\,i+1\} = n + (k-2)\frac{n(n-1)}{2}$$

で与えられる。
この k 角数の数列において，最初の 1 項の和，次の 2 項の和，その次の 3 項の和，$\cdots$，その次の m 項の和，$\cdots$ を考えるのであるが，第 m 番目の m 項の和を S_m^k と表すことにすると，

$$S_m^k = \sum_{i=1}^{m(m+1)/2} P_i^k - \sum_{i=1}^{m(m-1)/2} P_i^k = \frac{m}{24}\left\{3(k-2)m^4 + (k+10)m^2 - 4(k-5)\right\}$$

である。
さて，フェルマのいう多角柱とはこの S_m^k から第 $(m-1)$ 番目の三角数の $(k-4)$ 倍を引いたものだから，第 m 番目の多角柱を C_m^k と表すと，

$$\begin{aligned} C_m^k &= \frac{m}{24}\left\{3(k-2)m^4 + (k+10)m^2 - 4(k-5)\right\} - (k-4)\frac{m(m-1)}{2} \\ &= \frac{m}{24}\left\{3(k-2)m^4 + (k+10)m^2 - 12(k-4)m + 4(2k-7)\right\} \end{aligned}$$

ということになろうか。
例えば，6 角数については，

$$\begin{array}{lllllll} P_n^6: & 1, & \underbrace{6,\ 15}, & \underbrace{28,\ 45,\ 66}, & \underbrace{91,\ 120,\ 153,\ 190}, & 231,\ 276, & \cdots\cdots \\ S_m^6: & 1, & 21, & 139, & 554, & & \cdots\cdots \\ & & -2\times 1 & -2\times 3 & -2\times 6 & -(6-4)\times P_m^3 & \cdots \\ C_m^6: & 1, & 19, & 133, & 542, & & \cdots\cdots \end{array}$$

となろう。

XLVIII

(第 2 巻のバシェの補遺の命題 31 に関して)

この (確かに，最小の項が［公］差に等しくされるような算術的な) 数列において，最小［の数］の立方に最終［の番号］の三角数の平方が掛けられたものは各々［の項］の立方の和に等しくされる。

これから，最終の数であるのと同じ回数だけとられた，最大［の数］の立方がそれらの立方の和に対して 4 より小さい比をもつことが従う。

初項 a，公差 a の等差数列 a，$2a$，$\cdots$，na，$\cdots$ について，$a^3\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ka)^3$ が成り立つというのが命題 31 の内容。
それゆえ，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ka)^3 = \frac{a^3n^4 + 2a^3n^3 + a^3n^2}{4} > \frac{a^3n^4}{4} = \frac{n(na)^3}{4}$ となる。
