1　記数法

数を数字といわれる文字を用いて書き表す方法のことを**記数法**といいます。それに対して，数を言葉で言い表す (数詞を用いて数を表す) 方法のことを**命数法**といいます。現代では記数法は世界共通ですが，古代においてはいろいろな記数法がありました。それを覗いてみようというのがここでのねらいです。(命数法は，言葉を使う以上当然なのでしょうが，現代でも各国・地域でそれぞれです。)

例えば,「よんまんさんぜんさんじゅうなな (四万三千三十七)」というような数の言い表し方が命数法で,「 43037 」というような数の書き表し方が記数法です。この例で，同じ数字「 3 」が 2 回使われていること,「 0 」という数字が使われていることに注意してください。これが現代の私たちが使っている記数法の特徴です。

ブルバキ (Nicolas Bourbaki) は記数法について，その著作『ブルバキ数学史』(*Éléments d'histoire des Mathématiques* : 1984 年) の中で「《一連の単位》b_1，b_2，$\cdots$，b_n，$\cdots$ の和の形に整数を分解することであって，その単位のおのおのは，自分の一つ前の単位の何倍か (整数倍) になっている。また，b_n/b_{n-1} は一定の数 b (その記数法の体系の《底》と呼ばれ，一番多いのは 10) に等しくとってあるのが普通である」といっています (［2］上 p.132)。

ところで，数字がいつ頃できたかというと，それははっきりとは分かりません。
私たちの日常生活の中には多くの量があふれています。古代の人たちの生活の中でも，現代ほどではないにしても，量は多く見られたでしょう。それらの量を表すのに数が必要になります。ですから，文字を記録や伝達の手段として考えると，数量も当然必要になってきますから，数字は文字の発生とそう変わらない時期にできたのではないかと想像されます。

そして，文字は紀元前 3500 年頃に作られたと考えられています。
バビロニア (古代メソポタミア) で使用されていた楔形文字はシュメール人によって紀元前 3500 年頃に発明されたものと推測されています。これは紀元後 1 世紀までは使われていた形跡があるそうですが，その後使われなくなりました。
古代エジプトのヒエログリフという文字は紀元前 3100 年頃にはできていて，紀元後 4 世紀までは読み手がいたものと思われています。
古代中国における甲骨文字［漢字の祖形であると考えられています］の使用は紀元前 1500 年以前までさかのぼることができるということです。
古代インドのインダス文字の起源は紀元前 2600 年頃だととも考えられています。
これらの文字のほか，世界各地でいろいろな文字が使われていました。
なお，楔形文字，ヒエログリフについては解読ができていますが，甲骨文字の解読はあまり進んでいないようです。また，インダス文字については，現時点で，まったく未解読だそうです。

数は最も基本的な数学的考察の対象です。ですから，数学的にきちんと定義することは可能ですが，それはここでのねらいとは別のことですから，数の定義には触れないことにします。ここでは，私たちの中に小さい頃から徐々に形作られてきた数の概念を基にすることにします。
数の定義について，紀元前 300 年頃の著作といわれる，ユークリッド (Euclid (Eukleides : Εὐκλείδης) : 前 300 頃) の『原論』(Στοιχείωσις) では，その第 7 巻に
「定義 1　単位とは存在するもののおのおのがそれによって 1 とよばれるものである。」
「定義 2　数とは単位から成る多である。」
と記述されています (［3］p.149)。
なお，数の基礎付けに興味のある人は，例えば
　島内 剛一『数学の基礎』(日本評論社，1971 年)

彌永 昌吉『数の体系』(上下 2 冊，岩波新書，1972，1978 年)
などを見てください。

現代の私たちが使っている記数法は，位取りの原理に基づく十進法で，利用する数字はインド・アラビア数字です。この記数法を十進位取り記数法といっています。

この十進位取り記数法は大変な優れもので，０，１，２，３，４，５，６，７，８，９の 10 個の数字を用いて，どのような (大きなあるいは小さな) 数をも表すことができ，計算にも便利です。

① 位取りの原理とは，
それぞれの単位の同数倍については同じ数字を用いるという考え方です。例えば，十の三倍でも，千の三倍でも，同じ数字「３」で表すということです。
異なる単位について同じ数字を用いるのですから，その数字がどの単位であるかがはっきりと分からなくてはなりません。そのためには，どこがどの単位なのかを決めておくことと，単位が存在しない (すなわち，単位の零倍の) 場合に「空位」を示す数字を定めておくことが重要です。
空位を表す数字として「０」を使い，それを計算にも利用しようという考え方は古代インド数学の創案となるもので，古代においては，他の文明圏では見られないことでした。以後，空位を表す数字を「零記号」ということにしましょう。

② 十進法とは，
ある単位の十倍がその 1 つ上の単位になるという考え方です。例えば，十の十倍が百，百の十倍が千，千の十倍が万，などとなっているということです。
十進法の起源は明らかではありませんが，人間の指の本数が 5 であることに関係があるのではないかと推測されています。
現代でも時間や角度については六十進法が見られますし，コンピュータの世界では二進法や十六進法が使われています。また，五進法やその他の方法も使われていたようですから，十進法が唯一の方法だという訳ではありません。

③ インド・アラビア数字は，
古代インドにおいて“0 の発見”がなされてから，幾時代もかかって現在のような数字の形になりました。中世において，インドから伝わった数字がアラビアを経由して 13 世紀初頭にヨーロッパにもたらされたため，このようにいわれます。
筆算に使われる数字という意味で算用数字といわれることがあります。

10 個の数字だけですべての数を表すというのは，現代の私たちにとっては当たり前すぎてピンときませんが，実はとてもすごいことなのです。漢数字では単位が上がるごとに，一，十，百，千，万，$\cdots$ というように，どんどん新しい数字が必要になってきてしまいますから，大きな数を (もちろん，小さな数も) 表すのは大変なことが多いです。

ちなみに，昭和 26 年に公布された「小切手振出等事務取扱規程」(最終改正は平成 17 年 3 月 30 日) では，その第 7 条第 2 項で「小切手の券面金額は，所定の金額記載欄に，印影を刻み込むことができる印字機を用い，アラビア数字により表示しなければならない。」と規定しています。

(1)　古代エジプトの記数法

古代エジプトの文字といえばロゼッタ・ストーン (Rosetta Stone) が有名です。ナポレオン (Napoléon Bonaparte : 1769–1821) のエジプト遠征の際に，1799 年 8 月，ナイル川の河口の町ロゼッタの近くで発見されたため，このようにいわれています。古代エジプトの象形文字の解読に際して重要な手がかりとなった玄武岩 (実際は花崗閃緑岩らしいですが) 製の石碑で，現在は大英博物館に所蔵されています。大きさは縦 114.4cm，横 72.3cm，厚さ 27.9cm，重さ 760kg だそうです。

ロゼッタ・ストーンは 3 段に分かれていて，2 種類の言語 (エジプト語，ギリシア語) の 3 種類の文字によって，すなわち，上段はヒエログリフ (聖刻文字あるいは神聖文字)，中段はデモティック (民衆文字)，下段は古代ギリシア文字によって，すべて同じ内容［プトレマイオス 5 世 (Ptolemaios : 前 2 世紀) をたたえる神官団の布告］が刻まれています。このうちヒエログリフは，1822 年にフランスの古代エジプト学研究者シャンポリオン (Jean-François Champollion : 1790–1832) によって解読されました。なお，イギリスの物理学者ヤング (Thomas Young : 1773–1829) は，それ以前に，ロゼッタ・ストーンからファラオ名 (ファラオとは古代エジプトの王のこと) など固有名詞の解読に成功しているということです。

古代エジプトでは 3 種類の文字がつかわれていました。1 つはヒエログリフで，これは石に刻むために用いる文字でした。2 つ目はヒエラティック (神官文字) で，ヒエログリフの筆記体です。このヒエラティックの簡略体がデモティックで，これが 3 つ目です。こんにちではこれらを総称してエジプト文字と呼んでいます。

書記がパピルス —— カヤツリグサ科カヤツリグサ属に属する大型 (高さ 3m 位になることがある) の多年生の水草。古代には，いろいろな部分が装飾品や実用品の材料として使われていましたし，根は乾燥させて燃料としました。この水草の地下茎の内部組織 (髄) を使って世界最古の紙 (のような筆写材) が作られました。この紙のことも同じくパピルスと呼んでいます。ここではその紙のこと。—— に記録を残すときにはヒエラティックが用いられました。

さて，古代エジプトの記数法は ······

ヒエログリフに見られる記数法では位取りの原理によらない十進法が用いられていました。

具体的には，1，10，100，1000，10000，10 万，100 万を表す記号を用いて，それらを必要な個数だけ並べるという形で数を表していたのです。［ただし，私たちの記数法とは違って，下位の位を左側に書きました。］ですから，零記号は不要で，「 0 」を表す記号はありません。

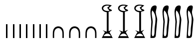
1	10	100	1,000	10,000	10 万	100 万
𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨

これらの記号はそれぞれ
1 は一本の垂直な棒,
10 は逆さ半円のくぐり門またはかかとの骨,
100 は大文字の C に似ているシュリンゲ,
1,000 は蓮の花,
10,000 は曲げた指 (人差し指) またはアシかパピルス草の芽,
10 万 はオタマジャクシ (に似た魚) ,

100 万 はひざまずく人 (たぶん永遠の神)
であると思われます。

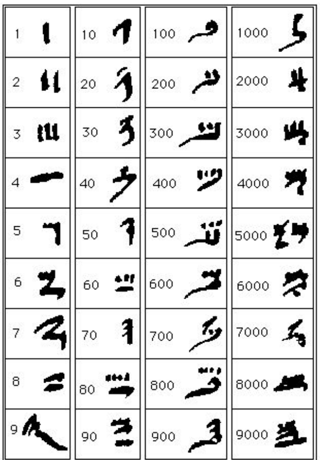
それぞれの単位を表す記号を用意して，ある単位の倍数はその単位の記号を倍数分だけ並べて書く，という方法はよく使われます。おそらく，簡単に思いつく方法なのでしょう。

例えば，「 43037 」は「一を表す記号を七つ，十を表す記号を三つ，千を表す記号を三つ，一万を表す記号を四つ」並べて，



となります。

問 1　ヒエログリフによる記数法で 1964 を書き表しなさい。



Hieratic numerals

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Egyptian_numerals.html

ヒエラティックでの数字は左の表のようになっていました。このように，1 , 10 , 100 , 1000 だけでなく，20 , 30, ··· などの記号も用いられていましたから，数を表記するために用いられる記号の個数はヒエログリフによる場合よりずっと少なくて済みます。しかし，その分直感的ではなくなりますし，覚えなければならない記号の数は増えてしまいます。

例えば 1964 は，ヒエログリフでは 20 個の記号が必要ですが，ヒエラティックでは 4 個の記号で済みます。でも，それぞれの記号がいくつを表しているのかを知っている必要があります。

なお，このヒエラティックは，デモティックが発明された後はあまり使われなくなったということです。

ところで, 古代エジプトの数学の様子を知る資料として「リンド・パピルス」(Rhind Mathematical Papyrus),「モスクワ・パピルス」(Moscow Mathematical Papyrus) などがあります。

リンド・パピルスは, スコットランドのエジプト学者リンド (Alexander Henry Rhind : 1833–1863) が 1858 年にナイル川沿いの都市ルクソール (古代エジプトの都テーベ) で手に入れ，ドイツの考古学者アイゼンロール (August Eisenlohr : 1832–1902) によって初めて解読されたパピルスです。アーメス (Ahmes) またはアフメスという書記の署名があり，前 1650 年頃にアメネムハト 3 世 (Amenemhat : 在位前 1849–前 1801) の時代の原本に基づいて写されたと記されています。その大きさは幅約 33cm ，長さ約 5.5m で，現在は大英博物館に保管されています。

モスクワ・パピルスは，ロシアのエジプト学者ゴレニシチェフ (Владимир Семёнович Голенищев (Vladimir Semyonovich Golenishchev) : 1856–1947) が 1893 年にルクソール付近で入手したパピルスで，現在はモスクワのプーシキン美術館にあります。中王国時代 (前 2060–前 1580) の学生の練習ノートではないかと考えられています。その大きさは幅約 7.6cm ，長さ約 4.6m です。

古代エジプトでは 1 より小さい数は分数を使って表されていました。ただ，私たちが使っているような一般的な分数 $\dfrac{m}{n}$ ではなく，分子が 1 の単位分数と，たぶん特別な分数としての，$\dfrac{2}{3}$ だけが用いられました。

単位分数 $\dfrac{1}{n}$ を表すには，ヒエログリフでは分母の自然数 n の上に小さい楕円形の印をつけ，ヒエラティックでは自然数の上に点をつけていました。また，$\dfrac{2}{3}$ には専用の記号がありました。しかし，ここでは，フォントの関係 (とスペースの節約) から，単位分数 $\dfrac{1}{n}$ を $\overline{n}$ で表し，$\dfrac{2}{3}$ は $\overline{\overline{3}}$ と表すことにします。

リンド・パピルスには，被除数が 2 で，除数が 5 から 101 までの奇数であるときの商の値 $\left(\text{すなわち } \dfrac{2}{n}\right)$ が，単位分数の和として表されています。この表は現在では「$\dfrac{2}{n}$ 表」といわれていて，次のようになっています。

$2 \div 5$	$\overline{3}\ \overline{15}$	$2 \div 39$	$\overline{26}\ \overline{78}$	$2 \div 73$	$\overline{60}\ \overline{219}\ \overline{292}\ \overline{365}$
$2 \div 7$	$\overline{4}\ \overline{28}$	$2 \div 41$	$\overline{24}\ \overline{246}\ \overline{328}$	$2 \div 75$	$\overline{50}\ \overline{150}$
$2 \div 9$	$\overline{6}\ \overline{18}$	$2 \div 43$	$\overline{42}\ \overline{86}\ \overline{129}\ \overline{301}$	$2 \div 77$	$\overline{44}\ \overline{308}$
$2 \div 11$	$\overline{6}\ \overline{66}$	$2 \div 45$	$\overline{30}\ \overline{90}$	$2 \div 79$	$\overline{60}\ \overline{237}\ \overline{316}\ \overline{790}$
$2 \div 13$	$\overline{8}\ \overline{52}\ \overline{104}$	$2 \div 47$	$\overline{30}\ \overline{141}\ \overline{470}$	$2 \div 81$	$\overline{54}\ \overline{162}$
$2 \div 15$	$\overline{10}\ \overline{30}$	$2 \div 49$	$\overline{28}\ \overline{196}$	$2 \div 83$	$\overline{60}\ \overline{332}\ \overline{415}\ \overline{498}$
$2 \div 17$	$\overline{12}\ \overline{51}\ \overline{68}$	$2 \div 51$	$\overline{34}\ \overline{102}$	$2 \div 85$	$\overline{51}\ \overline{255}$
$2 \div 19$	$\overline{12}\ \overline{76}\ \overline{114}$	$2 \div 53$	$\overline{30}\ \overline{318}\ \overline{795}$	$2 \div 87$	$\overline{58}\ \overline{174}$
$2 \div 21$	$\overline{14}\ \overline{42}$	$2 \div 55$	$\overline{30}\ \overline{330}$	$2 \div 89$	$\overline{60}\ \overline{356}\ \overline{534}\ \overline{890}$
$2 \div 23$	$\overline{12}\ \overline{276}$	$2 \div 57$	$\overline{38}\ \overline{114}$	$2 \div 91$	$\overline{70}\ \overline{130}$
$2 \div 25$	$\overline{15}\ \overline{75}$	$2 \div 59$	$\overline{36}\ \overline{236}\ \overline{531}$	$2 \div 93$	$\overline{62}\ \overline{186}$
$2 \div 27$	$\overline{18}\ \overline{54}$	$2 \div 61$	$\overline{40}\ \overline{244}\ \overline{488}\ \overline{610}$	$2 \div 95$	$\overline{60}\ \overline{380}\ \overline{570}$
$2 \div 29$	$\overline{24}\ \overline{58}\ \overline{174}\ \overline{232}$	$2 \div 63$	$\overline{42}\ \overline{126}$	$2 \div 97$	$\overline{56}\ \overline{679}\ \overline{776}$
$2 \div 31$	$\overline{20}\ \overline{124}\ \overline{155}$	$2 \div 65$	$\overline{39}\ \overline{195}$	$2 \div 99$	$\overline{66}\ \overline{198}$
$2 \div 33$	$\overline{22}\ \overline{66}$	$2 \div 67$	$\overline{40}\ \overline{335}\ \overline{536}$	$2 \div 101$	$\overline{101}\ \overline{202}\ \overline{303}\ \overline{606}$
$2 \div 35$	$\overline{30}\ \overline{42}$	$2 \div 69$	$\overline{46}\ \overline{138}$		
$2 \div 37$	$\overline{24}\ \overline{111}\ \overline{296}$	$2 \div 71$	$\overline{40}\ \overline{568}\ \overline{710}$		

この表にある分解がどのような方法で作られた (あるいは，選ばれた) のかは定かではありません。つまり，分数 $\dfrac{2}{n}$ の単位分数への分解は，例えば，

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}\ ,$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21} \text{ など,}$$

必ずしも一意的ではありません。

そのようないくつかの可能な分解のうち，なぜ表にあるような分解が選ばれたのかがはっきりしないのです。(もちろん，いろいろな説明・解釈がなされてはいますが $\cdots$。)

(2)　古代エジプトの計算法

ここで，記数法とは直接関係はありませんが，古代エジプトにおける計算法を見てみましょう。

① 加法・減法

ヒエログリフによる加法・減法は，それほど難しくはありません。それぞれの単位を表す記号を加えたり，取り去ったりすればよいのです。

ただし，減法において，ある単位について引く数の方が大きい (多い) ときには上の単位から「借りてくる」必要があります。

一方，ヒエラティックではそう簡単にはいきません。

② 乗法

古代エジプトにおける乗法は，2 倍法を基本にしています。

すなわち，

「$2^0 = 1$, $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $\cdots\cdots$, 2^n の $(n+1)$ 個の数のうちのいくつかを用いれば，1 から $(2^{n+1}-1)$ までの数を表すことができる」

という事実を用います。ただし，ときには 10 倍したものを使うことがあります。

具体的には，次のようにします。

(i) 乗数の左に 1 をおき，

(ii) 乗数を 2^n 倍した (ときには，10 倍した) 値，およびその左に 2^n (ときには，10) を，その下の行に書いて，

(iii) 左に書いた数の中から，合計が被乗数になるように適当にいくつかを選び，

(iv) それらの右に書かれた数をすべて加える。

例えば，14×80 (例題 69 中に現れる計算) は次のように計算します。

	1	80
✓	10	800
	2	160
✓	4	320

(i) 乗数 80 と 1 を書く。

(ii) 乗数を 10 倍，2 倍，4 倍した値，および 10，2，4 を書く。

(iii) 左に書かれた数のうちから，合計が被乗数 14 になるような組み合わせを調べ，印をつける。

(iv) 印をつけた行の，一番右にある数をすべて加えると，求める積が得られる。

(v) だから，$14 \times 80 = (10+4) \times 80 = 800 + 320 = 1120$ となる。

もちろん，14×80 は $(2+4+8) \times 80 = 160 + 320 + 640 = 1120$ としても計算できますが，そうしていないのは，被乗数を分割したときの個数ができるだけ少なくなるようにしたいからでしょうか。

問 2　上のような古代エジプトの方法で 19×27 を計算しなさい。

③ 除法

古代エジプトにおける除法では，2 分法，2 倍法，$\dfrac{2}{n}$ 表を用いて計算します。

2 倍法は乗法のときと同様ですが，2 分法は次のようにします。

(i) 除数の左に 1 をおき，

(ii) 除数を 2^n で割った (ときには，2 倍などした) 値，およびその左に 2^n (ときには，2 など) を，その下に書いて，

(iii) 右に書かれた数の中から，合計が被除数になるように適当にいくつかを選び，

(iv) それらの左に書かれた数をすべて加える。

例えば，$19 \div 8$ (例題 24 中に現れる計算) は次のようにします。

	1	8
✓	2	16
	$\overline{2}$	4
✓	$\overline{4}$	2
✓	$\overline{8}$	1

(i) 除数 8 と 1 を書く。

(ii) 除数を 2 倍，$\dfrac{1}{2}$ 倍，$\dfrac{1}{4}$ 倍，$\dfrac{1}{8}$ 倍した値，および 2，$\overline{2}$，$\overline{4}$，$\overline{8}$ を書く。

(iii) 右に書かれた数のうちから，合計が被除数 19 になるような組み合わせを調べ，印をつける。

(iv) 印をつけた行の，左側にある数をすべて加えると，求める商が得られる。

(v) だから，$19 \div 8 = 2 + \overline{4} + \overline{8}$ となる。

2 倍法での計算は，例えば，$696 \div 29$ は次のようにします。

	1	29
	2	58
	4	116
✓	8	232
✓	16	464

(i) 除数 29 と 1 を書く。

(ii) 除数を 2 倍，4 倍，8 倍，16 倍した値，および 2，4，8，16 を書く。

(iii) 右に書かれた数のうちから，合計が被除数 696 になるような組み合わせを調べ，印をつける。

(iv) 印をつけた行の，左側にある数をすべて加えると，求める商が得られる。

(v) だから，$696 \div 29 = 8 + 16 = 24$ となる。

また，$\dfrac{2}{n}$ 表に基づいた計算は，例えば，$5 \div 21$ の場合は次のようになります。

$$
\begin{aligned}
5 \div 21 &= 5 \times \frac{1}{21} = (1+2+2) \times \frac{1}{21} = \frac{1}{21} + \frac{2}{21} + \frac{2}{21} \\
&= \frac{1}{21} + \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{42}\right) + \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{42}\right) = \frac{1}{21} + \frac{2}{14} + \frac{2}{42} \\
&= \frac{1}{21} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} = \frac{1}{7} + \frac{2}{21} = \frac{1}{7} + \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{42}\right) \\
&= \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}
\end{aligned}
$$

すなわち，$5 \div 21 = \overline{7} + \overline{14} + \overline{42}$ となります。

リンド・パピルスには，計算の例として次のようなもの (例題 30) が挙げられています。これは結構難問です。

「ある代書人が，ある数の $\overline{\overline{3}}\ \overline{10}$ が 10 になるといった。ある数とは何かをいえ。」

「 $\overline{\overline{3}}\ \overline{10}$ に掛けて 10 を得よ。

✓	1	$\overline{\overline{3}}\ \overline{10}$
	2	$1\ \overline{3}\ \overline{5}$
✓	4	$3\ \overline{15}$
✓	8	$6\ \overline{10}\ \overline{30}$

和は 13 。
$\overline{\overline{3}}\ \overline{10}$ の 13 倍は 9 と分数 $\overline{\overline{3}}\ \overline{10}\ \overline{15}\ \overline{10}$ 及び $\overline{30}$ となる。
残りは $\overline{30}$ である。
30 をとれば，30 の $\overline{\overline{3}}\ \overline{10}$ は 23 である。
故に 30 の $\overline{30}$ すなわち 1 は $\overline{\overline{3}}\ \overline{10}$ の $\overline{23}$ である。
故に 13 $\overline{23}$ が求める数である。」

この問題は，現代風にいえば，$x \times \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{10}\right) = 10$ となる数 x を求めよ，ということです。

さて，計算表の右に書かれた数の和が 10 に近くなるようにすると，

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{10}\right) \times 13 &= \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{10}\right) \times (1+4+8) \\
&= \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{10}\right) + \left(2 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5}\right) + \left(5 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{5}\right) \\
&\qquad \left[\ \tfrac{2}{3} \times 4 = \tfrac{8}{3} = 2 + \tfrac{2}{3}\ ,\ \ \tfrac{1}{10} \times 8 = \tfrac{8}{10} = \tfrac{4}{5} = \tfrac{2}{5} + \tfrac{2}{5}\ \text{など}\right] \\
&= \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{10}\right) + \left(2 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{15}\right) + \left(5 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{15}\right) \\
&= \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{10}\right) + \left(3 + \tfrac{1}{15}\right) + \left(6 + \tfrac{2}{15}\right) \\
&= \left(\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{10}\right) + \left(3 + \tfrac{1}{15}\right) + \left(6 + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{30}\right) \\
&= 9 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{30} \\
&= 9 + \tfrac{20+3+2+3+1}{30} = 9 + \tfrac{29}{30}
\end{aligned}$$

となって，$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{10}\right) \times 13$ では，10 には $\frac{1}{30}$ 足りません。

この $\frac{1}{30}$ については，$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{10}\right) \times 30 = \frac{60}{30} + \frac{30}{10} = 23$ ですから，$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{10}\right) \times \frac{1}{23} = \frac{1}{30}$ となることを用いればよいことになります。

よって，$\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{10}\right) \times \left(13 + \frac{1}{23}\right) = 9 + \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = 10$ となりますから，「ある数」は $13 + \frac{1}{23}$ であるということになるのです。

問 3　上のような古代エジプトの方法で $7 \div 15$ を計算しなさい。

(3)　バビロニア (古代メソポタミア) の記数法

バビロニア (現在のイラクのバグダード以南のメソポタミア南部を指す歴史的呼称) では，チグリス川，ユーフラテス川の岸辺で取れる粘土を利用して書板をつくり，そこに先端をとがらせた葦の茎を押しつけて文字を記録しました。もちろん，記録した後は太陽や窯などでそれを乾かす必要がありました。できた粘土版は割れてしまうという欠点はありますが，パピルスよりはずっと耐久性があると思われます。

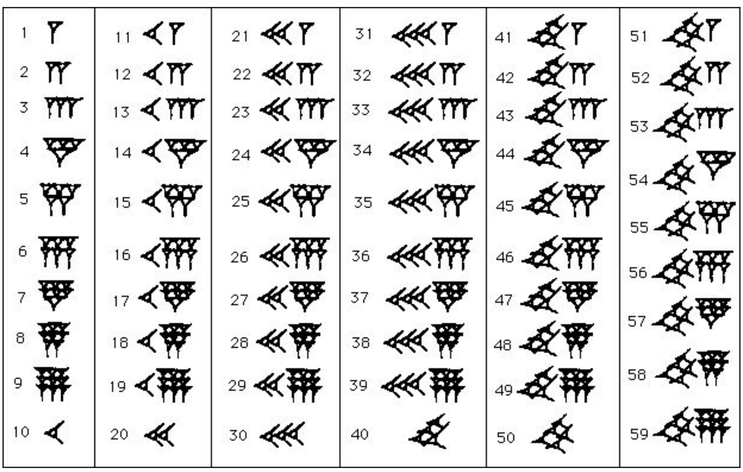
押しつけた後が楔形に見えることから，バビロニアの粘土板で使われていた文字を楔形文字といっています。

それらの粘土板が多数見つかっていますが，数学に関係するものは 500 枚程度だそうです。そして，数学に関係するものは 3 つの時代のものに分けられます。

1 つは前 3000 年頃のもので，商業や法律に関係したもののほか，度量衡についてのものもあります。2 つ目はバビロン第 1 王朝 (前 1890 年頃〜前 1595 年頃：古バビロニア王国ともいいます) 時代のものと推定されていますが，これが最も多く全体の 2/3 以上になります。3 つ目は前 600 年頃以降のもので，天文学における業績が見られるそうです。

バビロニアの記数法は位取りの原理を取り入れた六十進法でした。[ただし，補助的に十進法が使われています。]

1 から 59 までの実際の数字は次の表のとおりですが，使われている記号は縦に刻んだもの (1 を表します：必要ならば Y と書きます) と横に刻んだもの (10 を表します：必要ならば $<$ と書きます) の 2 種類を組み合わせたものです。



http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/HistTopics/Babylonian_numerals.html

この表は 1 から 59 までの数を示していますが，60 になると再び 1 と同じ記号を用いて表します。[それが位取り記数法 !!] ですから，1 を表す記号 Y が書いてあっても，それが 1 なのか，60 なのか，あるいは $3600 = 60^2$ などなのかは文脈から判断する必要があります。日常生活などの場面では数の大きさはおおむね予想できますから，それでも実用上は問題なかったのでしょう。

バビロニアの人たちがなぜ 60 という大きな数を基準値としたかについてはいろいろな説がありますが，そのことについてはここでは割愛します。

バビロニアでは位取りの原理を採用していますが，初期の頃には零記号は存在していません。後期になると位の区切りとしての記号が現れますが，現代の私たちが使っているような零記号ではありません。すなわち，それをも数として扱うという考えはなかったようです。

その点 (と基にする数が 60 と大きいこと) を除けば，バビロニアの記数法は現代のそれと基本的には変わりません。

古代エジプトでは 1 より小さい数は分数を用いて表わしましたが，バビロニアでは小数が使われました。ただし，基準値が 60 ですから，

$$\text{小数第 1 位は } \frac{1}{60}\text{，小数第 2 位は } \frac{1}{60^2}\text{，小数第 3 位は } \frac{1}{60^3}\text{，}\cdots\cdots$$

ということになります。すなわち，各位は 1 ，60 ，$3600 = 60^2$ ，60^3 ，$\cdots$ ，あるいは $\frac{1}{60}$ ，$\frac{1}{60^2}$ ，$\frac{1}{60^3}$ ，$\cdots$ を表していることになります。

バビロニアの記数法による数表記を当時の記号を使って表すことは私たちにとっては書きづらいし見づらいため，次のように表すのが一般的になっています。

(i) 各位の数は現代の私たちが用いている数の表記法による。

(ii) 位と位の区切りはカンマ (,) を用いる。

(iii) 小数点にはセミコロン (;) を用いる。

例えば，43037 は

$$\begin{aligned} 43037 &= 11 \times 3600 + 57 \times 60 + 17 \qquad [\leftarrow 60^n \text{ を基準に表す}] \\ &= 11 \times 60^2 + 57 \times 60 + 17 \end{aligned}$$

ですから，「 11 ，57 ，17 」と書かれます。

また逆に，「 28 ，0 ，47 」と書かれる数は

$$28 \times 3600 + 0 \times 60 + 47 = 100847 \qquad [\leftarrow \text{各位を } 60^n \text{ 倍する}]$$

ということです。

さらに，「 1 ; 2 ，3 」という数は

$$1 + \frac{2}{60} + \frac{3}{60^2} = \frac{3600}{3600} + \frac{120}{3600} + \frac{3}{3600} = \frac{3723}{3600} = \frac{1241}{1200} = 1.034166\cdots$$

という数を表しています。

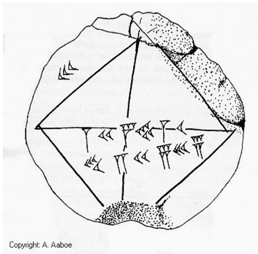
私たちの 2.05 は

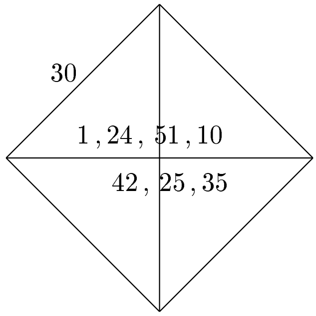
$$2 + \frac{5}{100} = \frac{205}{100} = \frac{41}{20} = \frac{123}{60} = 2 + \frac{3}{60}$$

ですから「 2 ; 3 」ということになります。

問 4　バビロニアの六十進記数法では 1964 はどのように表せるか。

バビロニアの記数法の実例を挙げましょう。下の写真と模写は「YBC7289」と呼ばれている粘土板です。バビロン第 1 王朝時代のものと推定され，直径約 8cm の円盤状のものです。(なお，YBC というのは the Yale Babylonian Collection の略で，エール大学のコレクションという意味です。)





http://cerebro.xu.edu/~otero/math147/plimpton/YBC7289.html

この粘土板には，上右図に示したように，正方形と 3 つの数が書かれています。それらの数を

$$30 \quad \rightarrow \quad a = 0\,;30 = \frac{1}{2}$$

$$1\,,24\,,51\,,10 \quad \rightarrow \quad b = 1\,;24\,,51\,,10$$

$$42\,,25\,,35 \quad \rightarrow \quad c = 0\,;42\,,\,25\,,35$$

と見ると，

$$b = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} = \frac{30547}{21600} = 1.41421296296296\cdots \fallingdotseq 1.414212962$$

$$c = \frac{42}{60} + \frac{25}{60^2} + \frac{35}{60^3} = \frac{30547}{43200} = 0.707106481481481\cdots \fallingdotseq 0.707106481$$

となっていて，さらに，$a \times b = c$ が成り立っています。

この値から分かるように，$b \fallingdotseq 1.414212962$ は $\sqrt{2} \fallingdotseq 1.414213562$ の近似値［小数第 5 位まで正しい !!］になっています。

そして，$a \times b = c$ であることから，この粘土版は

「1 辺の長さが 0 ; 30 の正方形の対角線の長さは 0 ; 42 , 25 , 35 である」

$$\left(\frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \fallingdotseq 0.707106481 \right)$$

ことを表していると考えてもおかしくありません。

バビロニア人がどのような方法でこんなに精度の高い値を得たのかについてはよく分かっていません。古代ギリシアの数学者ヘロン (Ἥρων (Heron of Alexandria) : 60 前後?) の方法として知られる方法 —— x の平方根を求めるのに，a_1 を $\min(1,\ x)$ と $\max(1,\ x)$ の間にとり，$b_i = \dfrac{x}{a_i}$，$a_{i+1} = \dfrac{a_i + b_i}{2}$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots)$ とすれば，a_1，a_2，$\cdots$ が $\sqrt{x}$ の近似値を与え，もし $b_r = a_r$ ならば $\sqrt{x} = a_r$ である，という方法 —— によったのではないかと考えることができます。

しかし，実用上の問題として，これほど高い精度が必要だったのでしょうか。ちょっと疑問が残ります。

(4)　バビロニアの計算法

ここで，バビロニアの計算法についても目を向けてみましょう。

バビロニアの記数法は，私たちのものと同じ位取り記数法ですから，計算も私たちが行っている方法と原理的には同様です。ただし，六十進法ですから，基になる数が 60 と大きいことが異なります。

①　乗法

私たちは十進法ですから，乗法については「掛け算九九」を覚えればよかったのですが，バビロニア人の場合は極端にいえば「 1×1 」から「 59×59 」までの“九九”が必要になります。

これを全部覚えているのは普通の人には［専門的な人でも?］たぶん無理ですから，計算における工夫と補助的な「掛け算表」が必要でしょう。

実際，いくつかの「掛け算表」が出土していて，例えば，36 を基数とする「掛け算表」は次のようになっています。

36×1	36		36×9	5,24		36×17	10,12	
36×2	1,12		36×10	6	(6,0)	36×18	10,48	
36×3	1,48		36×11	6,36		36×19	11,24	
36×4	2,24		36×12	7,12		36×20	12	(12,0)
36×5	3	(3,0)	36×13	7,48		36×30	18	(18,0)
36×6	3,36		36×14	8,24		36×40	24	(24,0)
36×7	4,12		36×15	9	(9,0)	36×50	30	(30,0)
36×8	4,48		36×16	9,36				

そして，計算の際には「分解して計算する」という工夫をしていました。［分解して計算するという方法は現代でも使えますね。下の例参照。］

多位数 $\times$ 一位数 は，各位の値に一位数を掛け，位ごとに加える (60 を超えたら繰り上げる) ことによって求められます。

例えば，「 13,40,8 $\times$ 36 」は次のようになります。

	13,	40,	8	
$\times$			36	
		4,	48	$8 \times 36 = 4, 48$
	24,	0		$40 \times 36 = 24, 0$
7,	48			$13 \times 36 = 7, 48$ で,
7,	72,	4,	48	$72 = 1, 12$ だから,
8,	12,	4,	48	$13, 40, 8 \times 36 = 8, 12, 4, 48$

多位数 $\times$ 多位数 は，多位数 $\times$ 一位数 を繰り返 (して，それらを足) せば計算できるのは私たちの場合と同様です。

分解して計算するという工夫は，例えば，次のようにするということです。

$$32 \times 53 = (30+2) \times (50+3) = 30 \times 50 + 30 \times 3 + 2 \times 50 + 2 \times 3$$
$$= 25, 0 + 1, 30 + 1, 40 + 6 = 27, 76 = 28, 16$$

② 除法

除法は，逆数の乗法として計算します。すなわち，$a \div b = a \times \dfrac{1}{b}$ とします。

このとき，計算のたびに逆数を調べるのは大変ですから「逆数表」があると便利です。問題は逆数が有限小数にならない場合への対応ですが，そのときは近似値を用いていたようです。

実際の「逆数表」は次のようになっていました。

2	30	16	3 , 45	45	1 , 20
3	20	18	3 , 20	48	1 , 15
4	15	20	3	50	1 , 12
5	12	24	2 , 30	54	1 , 6 , 40
6	10	25	2 , 24	1	1
8	7 , 30	27	2 , 13 , 20	1 , 4	56 , 15
9	6 , 40	30	2	1 , 12	50
10	6	32	1 , 52 , 30	1 , 15	48
12	5	36	1 , 40	1 , 20	45
15	4	40	1 , 30	1 , 21	44 , 26 , 40

実際の計算は，例えば「 6 ÷ 27 」は次のようになります。

$$6 \div 27 = 6 \times \frac{1}{27} = 6 \times 0\,;\,2\,,\,13\,,\,20 = 0\,;\,12\,,\,78\,,\,120 = 0\,;\,12\,,\,80$$
$$= 0\,;13\,,20$$

また例えば，「 17 , 9 ÷ 1 , 4 」［すなわち，1029 ÷ 64］は

$$17\,,\,9 \div 1\,,\,4 = 17\,,\,9 \times \frac{1}{1\,,\,4}$$
$$= 17\,,\,9 \times 0\,;\,0\,,\,56\,,\,15$$
$$= 16\,;\,4\,,\,41\,,\,15$$

となります。

			17 ,	9
×	0 ;	0 ,	56 ,	15
			255 ,	135
		952 ,	504	
		952 ,	759 ,	135
	16 ;	4 ,	41 ,	15

問 5　バビロニアの記数法での 18 , 50 × 36 を計算しなさい。

問 6　上のようなバビロニアの方法で 12 ÷ 32 を計算しなさい。

(5)　古代ギリシア

古代ギリシアの記数法には 2 つの方式がありました。1 つはヘロディアン方式 (あるいはアティック方式) と呼ばれ，もう 1 つはアルファベット方式といわれます。ヘロディアン方式の方が古い方式 (紀元前 7 世紀には使われていたようです。) で，アルファベット方式はより新しい方式です。

ヘロディアン方式は，ヒエログリフの記数法と同様の方法で，1 ，5 ，10 ，100 ，1000 ，10000 及び 50 ，500 ，5000 ，50000 を表す記号を必要な個数だけ組み合わせて数を表しました。

一方，アルファベット方式による記数法は，位取りの方法によらないもので，次の表のようにギリシア語のアルファベットに数を割り当てて，いろいろな数を表していました。

α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	ϑ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	$\varkappa$	λ	μ	ν	ξ	o	π	ϙ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

1000 から 9000 までの数は 1 から 9 までの数を表すアルファベットの左下にコンマをつけて表しました。(本当は，コンマとはちょっと違うみたいだけど。)

,α	,β	,γ	,δ	,ε	,ς	,ζ	,η	,ϑ
1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

また，万の桁を書くときは，M のうえに 1 から 9 までを表すアルファベットを書きました。

$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$	$\overset{\delta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\varepsilon}{\mathrm{M}}$	$\overset{\varsigma}{\mathrm{M}}$	$\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\eta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\vartheta}{\mathrm{M}}$
10000	20000	30000	40000	50000	60000	70000	80000	90000

この方法は，紀元前 450 年頃から主に数学で用いられ，ギリシア全土で公用されだしたのは前 200 年頃だと考えられています。この表から分かるように，1000 までの数を表すのに 27 個の文字を必要とします。

そして，数を表すときには大きい数を左に書き，普通の文字と区別するため数字の上には横線を引きます。

例えば，43037 は「$\overline{\overset{\delta}{\mathrm{M}},\gamma\lambda\zeta}$」$(40000 + 3000 + 30 + 7)$ と表されます。

また，古代ギリシアでは分数は，古代エジプトと同様に，分子が 1 の単位分数を用い，分母に当たる数字の右上にダッシュ (プライム) をつけて表しました。

例えば，$\dfrac{1}{5}$ は「$\overline{\varepsilon'}$」と，$\dfrac{1}{73}$ は「$\overline{o\gamma'}$」と表します。

問 7　古代ギリシアの記数法では 1964 はどのように表せるか。

(6)　ローマ数字

現代においてローマ数字といわれている数字があります。

ローマ数字を用いた記数法は，位取りの原理によらない 10 進法ですが，5 進法の考え方が取り入れられています。すなわち，次のような記号を必要なだけ並べて数を表します。

1	5	10	50	100	500	1000
I i	V v	X x	L l	C c	D d	M m

例えば，ローマ数字による記数法では 1 から 12 までの数は次のようになりますが，これらの数字は時計の文字盤などによく使われます。

I，II，III，IV，V，VI，VII，VIII，IX，X，XI，XII

ここに見られるように，ローマ数字による記数法では注意することがあります。それは，「 4 」と「 9 」については“引き算”を用いて表すということです。すなわち，

$4 = 5 - 1$ で IV，$40 = 50 - 10$ で XL，$400 = 500 - 100$ で CD

$9 = 10 - 1$ で IX，$90 = 100 - 10$ で XC，$900 = 1000 - 100$ で CM

となりますが，

$$\begin{cases} \text{左から右に向かってその記号が表す数を足していくが，} \\ \text{ある記号のすぐ左にその記号が表す数よりも小さい数を表す記号があるときは引き算をする，} \end{cases}$$

ということがローマ数字による記数法の原則ということになります。

また，ローマ数字には 1000 より大きな数を表すために記号はありませんから，大きな数の場合はかなり多くの記号を書くことになります。

例えば，13048 は「 MMMMMMMMMMMMMXLVIII 」と表されます。

問 8　ローマ数字による記数法では 1964 はどのように表せるか。

(7)　インド・アラビア数字

こんにちインド・アラビ数字と呼んでいる数字がいつ頃発生したものかは定かではありません。現在確認できている最古のものは紀元前 3 世紀のアショーカ王 (Aśoka：在位前 268 年?–前 232 年?) の詔勅の碑文に現れるもので，ブラーフミー数字と呼ばれています。

1881 年にインド北西部の村バクシャーリーで発見された「バクシャーリー写本」といわれる文献 (といっても，シャーラダー文字が書かれた樺の樹皮) では，位取り記数法，0 を表すための点が用いられ，負の数も現れているそうです。この写本がいつ頃のものかは確定していませんが，4〜5 世紀頃にまとめられた資料を後になって (7 世紀頃か?) 写したものという説が有力だそうです。

なお，いわゆる“0 の発見”は 6 世紀ころまでにはなされていたものと思われます。

もちろん，字形は長い時間の間にいろいろな変遷をたどることになるのですが，その様子については割愛します。[例えば，0 は最初小円や点で表されていました。]

数としての 0 の扱いについてはブラフマグプタ (Brahmagupta : 598–665?) によって 628 年に著された天文学書『ブラーフマスプタ・シッダーンタ』(*Brāhmasphuṭasiddhānta*) に次のように書かれています。

「正数 2 つの和は正数，負数 2 つの和は負数，正数と負数の和は差，同じ (絶対値をもつ正数と負数) の和はゼロである。負数または正数とゼロとの和は負数または正数である。ゼロ 2 つの和はゼロである。」

「負数と正数の積は負数，負数 2 つの積は正数，正数 2 つの積は正数になる。ゼロと負数，ゼロと正数，ゼロとゼロ，の積はゼロである。」

「正数割る正数，負数割る負数，は正数になる。ゼロ割るゼロはゼロである。負数で正数を割ると負数，正数で負数を割ると負数になる。」

「負数または正数をゼロで割ると，それ (すなわちゼロ) を分母とするものである。ゼロを負数または正数で割るとゼロである。負数または正数の平方は正数である。ゼロの平方はゼロである。」

ここに見られるように，0 で割ることの扱いは難しかったようで，「ゼロ分母」という扱いにし，その意味・内容には触れていません。

このインドでの記数法はアル・フワーリズミー (Abū ‘Abd Allāh Muḥammad b. Mūsa al-Khwārizmī : 850 頃没) の『インド数字による計算法』(*Algoritmi denumero Indorum*) によってアラビアに紹介され，フィボナッチ (Fibonacci (Leonardo Pisano) : 1174?–1250?) の『算盤の書』(*Liber Abaci* : 1202 年) がヨーロッパに普及するきっかけとなりました。

その後，16 世紀にはこんにちのものと変わらない字形になったようです。そして現在，私たちが使っているという訳です。

参考文献

[1] V. カッツ (上野 健爾，三浦 伸夫・監訳)「カッツ 数学の歴史」，共立出版，2005 (平成 17)
[2] N. ブルバキ (村田 全，清水 達雄，杉浦 光夫・訳)「ブルバキ数学史」(上下 2 冊)，筑摩書房 (ちくま学芸文庫)，2006 (平成 18)
[3] ユークリッド (中村 幸四郎，寺阪 英孝，伊東 俊太郎，池田 美恵・訳・解説)「ユークリッド原論」，共立出版，1971 (昭和 46)
[4] 高崎 昇「古代エジプトの数学」，総合科学出版，1977 (昭和 52)
[5] A. アーボー (中村 幸四郎・訳)「古代の数学」，河出書房新社，1971 (昭和 46)
[6] 近藤 洋逸「数学の誕生 – 古代数学史入門 – 」，現代数学社，1977 (昭和 52)
[7] G. ジョーゼフ (垣田 高夫，大町 比佐栄・訳)「非ヨーロッパ起源の数学」，講談社 (講談社ブルーバックス)，1996 (平成 8)
[8] S. ホリングデール (岡部 恒治・監訳)「数学を築いた天才たち」(上下 2 冊)，講談社 (講談社ブルーバックス)，1993 (平成 5)
[9] 安藤 洋美「高校数学史演習」，現代数学社，1999 (平成 11)
[10] 林 隆夫「インドの数学 ゼロの発明 」，中央公論社 (中公新書 1155)，1993 (平成 5)
[11] Richard J. Gillings，*Mathematics in the Time of the Pharaohs*，Dover，1982
[12] 「世界大百科事典 第 2 版」，日立システムアンドサービス，2004 (平成 16)
[13] http://www-gap.st-and.ac.uk/~history/Indexes/HistoryTopics.html