# 2　記号法

現代の私たちは，数学に限らず数多くの分野で，**文字式**［記号 (文字記号，演算記号) や数を用いて数量の関係を表した式］を使っています。

文字式 (そのものだけではく，文字を利用していろいろなことを表すという考え方を含めて) を借りずにいろいろな事柄を表現したり，それを分析したりすることは，不可能とはいわないまでもかなり大変ではないかと思われます。

文字式を使わないことの不便さは，数学の範囲でいうと，中学生になって文字式を活用できるようになって，小学校での文章問題がかえって扱いにくくなったことを思い出せば十分でしょう。

小学校での文章問題には「たかしくん」や「あけみさん」などがよく出てきます。しかし，この「たかしくん」や「あけみさん」は特定の「たかしくん」や「あけみさん」を指している訳ではありません。「たかしくん」や「あけみさん」によって「一般の誰か」を表しているのです。また，問題を解くときに**未知数**［その問題で求めたい値］を表すのに○や□を使いました。このように，一般的な何かや求めたい値などを分かりやすい別のもので置き換えて表現するというのが文字式の考え方です。この意味での文字式の考え方は古くから使われていました。というより，そうしなければ何も表現できなかったでしょう。

しかし，一般的な何かや求めたい値などをアルファベットなどの記号で表して“式”として活用するという意味での文字式の利用［記号化］が始まったのは (数学の歴史全体から見れば) それほど古いことではありません。

ここでは，数学における記号化の様子を見ることにします。なお，$+$ や $\times$ など，数学で用いられている演算記号などの記号そのものの変遷を調べてみることも 1 つのテーマではありますが，ここではその点には触れません。

記号化の発展を調べるには，記号化の段階をどう捉えるかが問題となります。

このことに関連して，ドイツの数学史家ネッセルマン (G. H. F. Nesselmann : 1811–1881) は『ギリシアの代数学』(*Die Algebra der Griechen* : 1842 年) の中で代数学の発展段階には ① 言語的代数，② 省略的代数，③ 記号的代数という 3 段階があるという説を提出しました。

① 言語的代数 $\cdots$ 記号をまったく用いないで，すべての過程が言葉だけで述べられます。

② 省略的代数 $\cdots$ 繰り返し出てくる概念や演算には省略記号が用いられます。これも本質的には言語的です。

③ 記号的代数 $\cdots$ すべての式や演算が，完全に発達した記号的言語で表現されます。これらの記号は普通の言葉からはまったく独立であって，かつ言語表現によって補足される必要のないものです。

例えば，言語的代数で「根の平方と 10 倍の根は 39 に等しい」という表現は，記号的代数では「 $x^2+10x=39$ 」となります。

このネッセルマンの分類はどちらかというと外形的なもので，代数学の内的な面があまり考慮されていないという批判はありますが，記号化に関する 1 つの目安とも考えられますから，以下ではこの分類を基にすることにします。

結論を先にいうと，記号化はフランスの哲学者・数学者デカルト (René Descartes : 1596–1650) によって，完成の域に達せられます。彼は，1628 年頃に執筆されたと思われる未完成の著作『精神指導の規則』(*Regulae ad directionem ingenii*) で，次のように述べています ( [7] pp.102–105)。

「　　第十六規則

たとえ結論には必要であっても，精神の現前する注意をまったく要求せぬものは，それらをもっとも簡潔な記号 (nota) によって示す方が図形全体をもってするよりも優っている，なぜなら，かくすれば，記憶は誤りえぬであろうし，また，思考はといえば，他のものの演繹に心を傾けているあいだにも，一方ではこれらを心に留めておこうとして，気が散ることもないであろうから。

…… 困難の解決のために一つのものとして考察されるべきものはなんでも，欲するままに思い描かれうるただ一つの記号によってわれわれは示すであろう。しかし，容易さからして，われわれは，既知の量には，a，b，c，等の文字を，未知の量を表現するのには A，B，C，等を用いるであろう，しばしば，それらの個数を説明するためにそれらの前に，1，2，3，4，等の数字をつける，そして，さらに，それらの文字において理解されるべき関係の数を表すのに，数字を付記するであろう，たとえば，もし $2a^3$ とわれわれが書くならば，三つの関係を含むところの a なる文字によって示された量の 2 倍とわれわれが言ったのと同じこととなろう。……

これらのことをすべてより明晰に理解するには，まず次のことに注目せねばならない，計算家たちは個々の量を多くの単位もしくはある数によって示す習慣を有していたが，しかしわれわれは，この場合，個々の量をば，少し前のところで幾何図形とか任意の他のものから抽象したのと同様，数自体からも抽象しているということである。かくするのは，ひとつには，われわれが長い余計な計算の労を避けるためであり，ひとつには，とりわけ，問題のもつ性質に関連する基体の部分が常に判明のままであり続け，無用の数によって覆い隠されぬためである，……

関係の数とは相互に連続する順序で継続しあう比例の意であることもまた，注目されねばならない，それらの比を他の人々は通俗的な代数学において多数の次元ならびに図形によって表現しようと努力している，そしてそれらのうちの最初の比を根 (radix)，第二の比を平方 (quadratum)，第三の比を立方 (cubum)，第四を二重平方 (biquadratum)，等々，と彼らは呼んでいるのである。私自身それらの名称に長い間欺かれていたことを告白する，というのは，線および正方形に次いでは，立方体およびこれらに似せて描かれた他の図形よりも明晰に私の想像に提示されうるものはなにもないように思われたからである，そして，実際，私はこれらの助けを借りて少なからぬ困難を解決してきた。…… 頭を混乱させぬために，かかる名称はまったく棄て去られるべきである，というのは，その量は，たとえ立方とか二重平方とか呼ばれようとも，線や面の場合と異なる仕方で先の規則にしたがって想像に提示されるべきではけっしてないからである。それゆえ，もっとも注意を払わねばならぬのは，根，平方，立方，等々，は連続的比例量以外のものではなく，すでに上で述べたところのあの仮定的な単位がそれらに先立って常にあらかじめおかれているものと考えられている，ということである，…… それゆえ，われわれは以後代数において根と呼ばれる量を第一比例量と呼ぶであろう，平方と呼ばれる量を第二比例量と，以下同様。

…… 一種の表が作られなければならない，その表のうちに，われわれは問題の諸項をそれらが最初に提示されているままに書きとめる，ついで，それらの項がどのように抽象され，かついかなる記号で表示されているかを書きとめる，その結果，解が記号そのもので見いだされたであろう後に，その解を記憶の助けをまったく借りずに，問題とされるであろう特定の基体へとわれわれは容易に当てはめることとなろう，というのは，一般性の劣るあるものからでなければ，いかなるものもけっして抽象されぬからである。…… 」

長い引用でしたが，ここには既知量の記号化が明確に示されていると同時に，$a^2$，$a^3$ などに対して次元にとらわれない考え方も見られます。

(1)　古代エジプト

古代エジプトでは，記号の使用はまったくなく，数学的内容もすべて言葉で表されていました。上のネッセルマンの分類でいえば言語的代数に当たります。

リンド・パピルスから，例を挙げましょう（［1］p.177，pp.140–141)。

「例題 72　パンの交換の問題。諸君に語られたと仮定せよ。10 ペフスのパン 100 個を 45 ペフスのパンと交換しようとする。何個と交換されるか。

45 は 10 よりいくら多いかを見ると 35 である。35 を得るために 10 に掛けよ。$3\dfrac{1}{2}$ となる。100 に $3\dfrac{1}{2}$ を掛けると 350 となる。これに 100 を加えると 450 となる。故に 10 ペフスのパン 100 個は 45 ペフスのパン 450 個と交換すればよい。共に 10 ヘカトのウェツドェツト粉 (小麦粉，パン粉) から作られる。」

この問題はこんにち「ペフス」問題 (あるいは「ペス」問題) と呼んでいる一群の問題の 1 つです。「料理する」(psi̓：「ペシ」) という動詞に由来し，パンやビールの製造に関して使われる言葉「ペフス (pefsu)」(「ペス (psw)」) が出てくるためこのようにいわれます。
ペフスとは 1 単位の材料から作られる食物あるいは飲料の個数・量を表す単位です。例えば，1 ヘカトの粉から 20 個のパンを作ることができるとき，そのパンを 20 ペフスのパンといいます。

ここで，リンド・パピルスにあらわれる度量衡をまとめておきましょう。

長さ：1 ケト (khet) = 100 キュービット (cubit) = 約 52.4m
　　　1 キュービット = 7 パーム (palm) = 約 52.4cm
　　　1 パーム = 4 ディジット (digit) = 4 指幅 (shesep) ［親指以外の指 1 本の幅］

面積：1 セタト (setat) = 1 平方ケト = 約 2745.76m$^2$

容積：1 立方キュービット = $\dfrac{2}{3}$ カール (khar) = 約 143877.824cm$^3$
　　　1 カール = 20 ヘカト (hekat)
　　　1 ヘカト = 320 ロー (ro) = 約 4795.927cm$^3$

「ペフス」問題は比例問題ですから，例えばこの問題については現代の私たちならば $10:100=45:x$ とでもするところですが，リンド・パピルスの作者はかなり回りくどい方法で解いています。
すなわち，$a:n=b:x$ から $x=\dfrac{bn}{a}$ を求めるのに，

$$x=\{(b-a)\div a\}\times n+n=\frac{b-a}{a}n+n=\frac{b}{a}n-\frac{a}{a}n+n=\frac{bn}{a}$$

としていることになります。

「例題 52　等脚台形の土地の問題。諸君に語られたとせよ。辺が 20 ケト，下底が 6 ケト，上底が 4 ケトの台形の面積はどれだけか。

下底に上底を加えると 10 となる。矩形を得るために 10 の $\dfrac{1}{2}$ をとると 5 となる。5 の 20 倍をすると 10 (10 個の 10 セタト)。これがその面積である。」

このような図形の問題では，小学校ではこんにちでも「三角形の面積は底辺掛ける高さ割る 2」というような言い方をしますが，中学校以降になると式を用いて $S=\dfrac{1}{2}ah$ のように表すようになります。これが記号化です。

## (2)　バビロニア

バビロニアでも記号の使用は見られず，言語的代数の段階です。ただし，「長さ (uš)」,「幅 (sag)」という言葉は未知数を表す術語として使われていました。

ルーブル美術館所蔵の「AO8862」という粘土板を見てみましょう（［2］p.60)。

「長さ，幅。長さと幅をかけ合わせ，面をつくった。
さらに長さの幅を超える分を面につけ加えた。3,3。さらに長さと幅をつけ加えた。27。長さ，幅，面はいくらか。

| | | | |
|---|---|---|---|
| 27 | 3,3 | 和 | |
| 15 | 長さ | 3,0 | 面 |
| 12 | 幅 | | |

汝は自ら次のように行え。
長さと幅の和 27 を［3,3］に加えよ。3,30。2 に 27 を加えよ。29。29 を二分せよ。14;30 の 14;30 倍は 3,30:15 である。
3,30;15 から 3,30 を引け。0;15 がその差である。0;15 の平方根は 0;30 である。0;30 を最初の 14;30 に加えよ。15 は長さである。
第二の 14;30 から 0;30 を引け。14 は幅である。汝が 27 に加えた 2 を幅 14 から引け。12 が最終の幅である。
長さ 15 と幅 12 とをかけ合わせた。12 の 15 倍は面 3,0 である。長さ 15 の幅 12 を超える分はいくらか。3 がその超えている分である。面 3,0 に 3 を加えよ。結果は 3,3 である。」

バビロニアの記数法は六十進法で，「,」「;」はそれぞれ位の区切り，小数点を表します。詳しくは「記数法」の節を見てください。
ですから，$3\,,\,3=3\times 60+3=183$ ，$14\,;\,30=14+\dfrac{30}{60}=\dfrac{29}{2}$ などとなります。

この問題では「長さ」,「幅」,「面」という言葉が用いられていますが，これらの言葉は文字通りの図形的な意味から離れ，「長さ」,「幅」がそれぞれ $x$ ，$y$ を表していると解釈されています。
ですから，この問題は

$$\begin{cases} xy+(x-y)=3\,,\,3=183 & \cdots ① \\ x+y=27 & \cdots ② \end{cases}$$

という連立方程式を表していることになります。
①$+$② をつくると $xy+2x=x(y+2)=210$
②$+2$ をつくると $x+y+2=x+(y+2)=29$
そこで，$y'=y+2$ とすると

$$\begin{cases} xy'=210 & \cdots ③ \\ x+y'=29 & \cdots ④ \end{cases}$$

④を元に「2 分法」によって $x=\dfrac{29}{2}+z$ ，$y'=\dfrac{29}{2}-z$ とすると，③から

$$xy'=\left(\frac{29}{2}\right)^2-z^2=210$$

これから $z=\sqrt{\left(\dfrac{29}{2}\right)^2-210}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$
したがって，$x=\dfrac{29}{2}+\dfrac{1}{2}=15$ ，$y'=\dfrac{29}{2}-\dfrac{1}{2}=14$［すなわち，$y=y'-2=12$］
そして面は $xy=15\times 12=180$ となります。

(3)　古代ギリシア

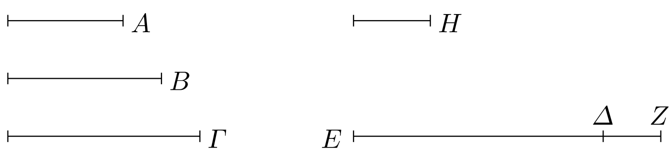
古代エジプトやバビロニアではある言葉を特定の意味で用いるということはなされていたようですが，それらを記号で表すことはできていませんでした。また，図形の問題に関しても，頂点や中心などの特定の点に符号を割り当てるということもしていません。

古代ギリシアでは論証的な考えが生成・発達し，いろいろなことがらを図形を用いて「証明」するようになりました。そして，そこでは，特定の点や長さに符号を割り当てるということが行われるようになりました。

その様子をユークリッド (Euclid (Eukleides : Εὐκλείδης) : 前 300 頃) の『原論』(Στοιχείωσις) から取り上げてみましょう (［3］p.218)。

「第 9 巻命題 20　素数の個数はいかなる定められた素数の個数よりも多い。

定められた個数の素数を $A$，$B$，$\Gamma$ とせよ。$A$，$B$，$\Gamma$ より多い個数の素数があると主張する。




$A$，$B$，$\Gamma$ に割り切られる最小数がとられたとし，それを $\Delta E$ とし，$\Delta E$ に単位 $\Delta Z$ が加えられたとせよ。そうすれば $EZ$ は素数であるかないかである。まず素数であるとせよ。そうすれば $A$，$B$，$\Gamma$ より多い素数 $A$，$B$，$\Gamma$，$EZ$ が見いだされた。

次に $EZ$ が素数でないとせよ。そうすればそれは何らかの素数に割り切られる。素数 $H$ に割り切られるとせよ。$H$ は $A$，$B$，$\Gamma$ のいずれとも同じではないと主張する。もし可能ならば，同じであるとせよ。ところが $A$，$B$，$\Gamma$ は $\Delta E$ を割り切る。したがって $H$ も $\Delta E$ を割り切るであろう。ところが $EZ$ をも割り切る。それゆえ $H$ は数であって残りの単位 $\Delta Z$ を割り切るであろう。これは不合理である。ゆえに $H$ は $A$，$B$，$\Gamma$ の一つと同じではない。そして素数であると仮定されている。したがって定められた個数の $A$，$B$，$\Gamma$ より多い個数の素数 $A$，$B$，$\Gamma$，$H$ が見いだされた。これが証明すべきことであった。」

これは素数が無限個存在することの証明として知られる命題です。素数を線分として表し，それに符号 $A$，$B$，$\Gamma$ を割り当てています。ただし，その符号は私たちが用いている「記号」というものとはちょっと異なります。

すなわち，『原論』ではこのような符号の導入は見られますが，記号化の段階でいえば言語的代数を脱していないということになります。

この『原論』の証明では，素数は 3 個提示されていて，4 個目の素数が存在することが示されます。
このとき重要なことは，3 個という個数に左右されない証明が行われているということです。
記号化ができていない段階では，このように，具体的な場合を例として挙げ，その特定の場合によらない証明が行われました。すなわち，その具体的な場合の証明から一般的な証明を感じ取らせるような証明が行われていたのです。
このような仕方のことを準一般的な (quasi-allgemein) 方法といっています。

『原論』では，上の例のように，代数や数論に関するような内容でも幾何学的に表現されていました。また，『原論』の述べ方は一般的な内容の主張として命題を挙げ，続いて，特述といわれる，証明すべき特定の場合を述べてから，最後に証明を示すというやり方です。

『原論』からの例を，証明は除いて命題と特述だけ，挙げてみましょう（［3］p.37，p.47，p.414)。現代的な文字式による表現ではどのようになるか考えてください。

「第 2 巻命題 4　もし線分が任意に 2 分されるならば，全体の上の正方形は，二つの部分の上の正方形と，二つの部分によって囲まれた矩形の 2 倍との和に等しい。

線分 $AB$ が $\Gamma$ において任意に分けられたとせよ。$AB$ 上の正方形は，$A\Gamma$，$\Gamma B$ 上の正方形と $A\Gamma$，$\Gamma B$ に囲まれた矩形の 2 倍との和に等しいと主張する。」

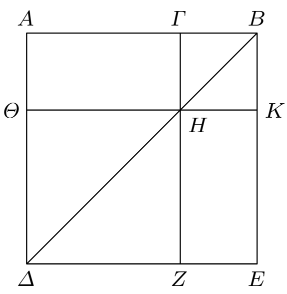
「第 2 巻命題 13　鋭角三角形において鋭角の対辺の上の正方形は鋭角をはさむ 2 辺の上の正方形の和より，鋭角をはさむ辺の一つと，この辺へと垂線が下され，この鋭角への垂線によって内部に切り取られた線分とに囲まれた矩形の 2 倍だけ小さい。

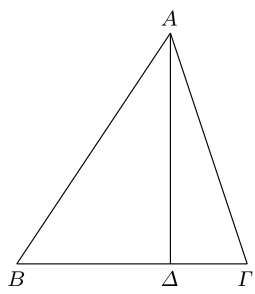
$AB\Gamma$ を $B$ における鋭角をもつ鋭角三角形とし，点 $A$ から $B\Gamma$ に垂線 $A\Delta$ が引かれたとせよ。$A\Gamma$ 上の正方形は $\Gamma B$，$BA$ 上の正方形の和より $\Gamma B$，$B\Delta$ に囲まれた矩形の 2 倍だけ小さいと主張する。」

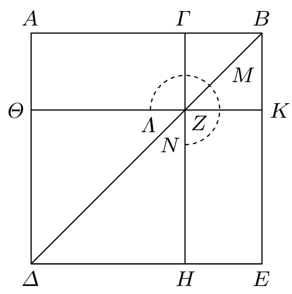
「第 13 巻命題 4　もし線分が外中比に分けられるならば，全体の上の正方形と小さい部分の上の正方形との和は大きい部分の上の正方形の 3 倍である。

$AB$ が線分であるとし，$\Gamma$ において外中比に分けられたとし，$A\Gamma$ をその大きい部分とせよ。$AB$， $B\Gamma$ 上の正方形の和は $\Gamma A$ 上の正方形の 3 倍であると主張する。」

これらの命題について付されている図は次のとおり (左から第 2 巻命題 4，第 2 巻命題 13，第 13 巻命題 4) です。








問 1　上に挙げた 3 つの命題はそれぞれどのような内容のものと解釈できるか。文字式を使って表しなさい。

(第 2 巻命題 4 および第 13 巻命題 4 では $A\Gamma = a$，$\Gamma B = b$，第 2 巻命題 13 では $B\Gamma = a$，$A\Gamma = b$，$AB = c$，$\angle B = \beta$ としなさい。なお，外中比に分けるとは $a : b = (a+b) : a$ とするということ。)

古代ギリシアでは「幾何学の優位」といわれるように，その表現方法は幾何学が中心でした。そしてそれは中世から近代のはじめまで，厳密性 = 幾何学 と考えられるほどでした。

しかし，古代ギリシア末期において幾何学的表現によらない著作が現れました。アレクサンドリアで活躍した数学者ディオファントス (Diophantus (Διόφαντος) : 246?–330?) が著した『数論』(*Arithmetica*) というものです。

この中で彼は未知数を表すのに記号を用いています。すなわち，彼は省略的代数の段階に最も早く達していたと考えられるのです。その様子を見てみましょう。

まず，彼は『数論』の序文に当たるところで次のように述べています (［8］pp.518–525)。

> 「…… すべての数は単位がいくつか集まったものでつくられており，そのつくり方には際限がないことは明らかである。
>
> 平方数はある数にそれ自身が掛けられたときにつくられ，その数のことを平方数の辺［平方根］という。立方数は平方数にその辺が掛けられたときにつくられる。平方平方数は平方数にそれ自身が掛けられたときにつくられる。平方立方数は平方数に同じ辺からつくられた立方数が掛けられたときにつくられる。立方立方数は立方数にそれ自身が掛けられたときにつくられる。
>
> …… ［未知量の］平方を dynamis (δύναμις) といい，その記号は指数 $\Upsilon$ (ユプシロン) をつけた $\Delta$，すなわち $\Delta^{\Upsilon}$ である。立方を cubus (κύβος) といい，その記号として指数 $\Upsilon$ をつけた K (カッパ)，すなわち $\mathrm{K}^{\Upsilon}$ をもつ。平方にそれ自身を掛けたものは dynamodynamis (δυναμοδύναμις) といわれ，その記号は指数 $\Upsilon$ をつけた 2 つの $\Delta$，すなわち $\Delta^{\Upsilon}\Delta$ である。平方に同じ根からつくられた立方を掛けたものは dynamocubus (δυναμόκυβος) といわれ，その記号は指数 $\Upsilon$ をつけた $\Delta\mathrm{K}$，すなわち $\Delta\mathrm{K}^{\Upsilon}$ である。立方にそれ自身を掛けたものは cubocubus (κυβόκυβος) といわれ，その記号は指数 $\Upsilon$ をつけた 2 つの K，すなわち $\mathrm{K}^{\Upsilon}\mathrm{K}$ である。それらのどれでもなく，単位の不定な集まりをもつだけのものは arithmos (ἀριθμὸς) といわれ，その記号は ς である。
>
> 既知数の不可分な要素すなわち単位を表す別の記号もあり，その記号は指数 ∘ をつけた M，すなわち $\overset{\circ}{\mathrm{M}}$ である。
>
> …… マイナスが掛けられたマイナスはプラスになり，プラスが掛けられたマイナスはマイナスになる。そして，マイナスの記号は $\Psi$ (プサイ) を上下逆にもの，すなわち ⋔ である。」

すなわち，ディオファントスは次のように表すことにしたのです。

| 未知数 | | 現代記号 | 未知数 | | 現代記号 |
|---|---|---|---|---|---|
| arithmos | ς | $x$ | dynamodynamis | $\Delta^{\Upsilon}\Delta$ | $x^4$ |
| dynamis | $\Delta^{\Upsilon}$ | $x^2$ | dynamocubus | $\Delta\mathrm{K}^{\Upsilon}$ | $x^5$ |
| cubus | $\mathrm{K}^{\Upsilon}$ | $x^3$ | cubocubus | $\mathrm{K}^{\Upsilon}\mathrm{K}$ | $x^6$ |

また彼は，未知数の逆数は未知数の記号の肩に $\chi$ (カイ) をつけて表しました。例えば，$\dfrac{1}{x^2}$ は $\Delta^{\Upsilon\chi}$ と表されます。

さらに彼は，マイナスの記号を導入していますが，これはもちろん「負の数」ということではなく，「引き算」を明示したものです。

彼の式の表し方は次の原則によります：

① 係数は，べき乗などを表す記号の後ろに書く。

② 正の項をすべて前に書き，その後ろに負の項をすべてまとめて書く。

ですから彼は，こんにちなら $x^2-50x+625$ と書くところを，$x^2+625-50x$ として，

$$\Delta^{\Upsilon}\ \bar{\alpha}\ \overset{\circ}{\mathrm{M}}\ \overline{\chi\kappa\varepsilon}\ \pitchfork\ \varsigma\ \bar{\nu} \qquad (\Delta^{\Upsilon}\ 1\ \overset{\circ}{\mathrm{M}}\ 625\ \pitchfork\ \varsigma\ 50)$$

と表しました。

『数論』において，どのように記号が使われているかを実際に見てみましょう（［8］pp.536–537)。

「第 1 巻問題 28　和および平方の和がともに与えられた数になるような 2 数を見出すこと。

平方の和の 2 倍が和の平方より平方数だけ大きいことが必要条件である。

2 数の和が $\overset{\circ}{\mathrm{M}}\ \bar{\kappa}$ ［20］で，それらの平方の和が $\overset{\circ}{\mathrm{M}}\ \overline{\sigma\eta}$ ［208］であるとしよう。

それらの差を $\varsigma\ \bar{\beta}$ ［$2x$］として，より大きい方を $\varsigma\ \bar{\alpha}$ と $\overset{\circ}{\mathrm{M}}\ \bar{\iota}$ ［$x+10$］とし，より小さい方を $\overset{\circ}{\mathrm{M}}\ \bar{\iota}\ \pitchfork\ \varsigma\ \bar{\alpha}$ ［$10-x$］としよう。そうすると，再び，それらの和は $\overset{\circ}{\mathrm{M}}\ \bar{\kappa}$ ［20］で，差は $\varsigma\ \bar{\beta}$ ［$2x$］である。

それらの平方の和を $\overset{\circ}{\mathrm{M}}\ \overline{\sigma\eta}$ ［208］にすることが残っている。しかし，平方の和は $\Delta^{\Upsilon}\ \bar{\beta}\ \overset{\circ}{\mathrm{M}}\ \bar{\sigma}$ ［$2x^2+200$］である。これが $\overset{\circ}{\mathrm{M}}\ \overline{\sigma\eta}$ ［208］に等しいことから，$\varsigma\ \overset{\circ}{\mathrm{M}}\ \bar{\beta}$ ［$x=2$］となる。

仮定により，大きい方は $\overset{\circ}{\mathrm{M}}\ \overline{\iota\beta}$ ［12］で，小さい方は $\overset{\circ}{\mathrm{M}}\ \bar{\eta}$ ［8］である。そして，これらは問題の条件を満たす。」

古代ギリシアにおける記数法については「記数法」の節を見てください。

ディオファントスの解法はバビロニアでの解法を同様であることに注意してください。一般化すると，次のように解いたことになります。

$$\begin{cases} x+y=a & \cdots ① \\ x^2+y^2=b & \cdots ② \end{cases}$$

という問題に対して，① から $x=\dfrac{a}{2}+z$ , $y=\dfrac{a}{2}-z$ として，② に代入すると

$$x^2+y^2=\left(\frac{a}{2}+z\right)^2+\left(\frac{a}{2}-z\right)^2=\frac{a^2}{2}+2z^2=b$$

となりますから，これより $z=\dfrac{\sqrt{2b-a^2}}{2}$ が得られます。

［冒頭の「必要条件」はこの解 $z$ から無理数や虚数を排除するためのものです。］

ですから，$x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{\sqrt{2b-a^2}}{2}$ , $b=\dfrac{a}{2}-\dfrac{\sqrt{2b-a^2}}{2}$ となります。

上の例では，$a=20$ , $b=208$ ですから解は次のようになります。

$$x=\frac{20}{2}+\frac{\sqrt{416-400}}{2}=12\ ,\ y=\frac{20}{2}-\frac{\sqrt{416-400}}{2}=8$$

ディオファントスの式は私たちの式とはちょっと違う感じがするのは確かですが，バビロニアの解法より見やすくなっていませんか。これが式が持っている「力」でしょうか。

問 2　ディオファントスの式 $\mathrm{K}^{\Upsilon}\ 3\ \overset{\circ}{\mathrm{M}}\ 8\ \pitchfork\ \Delta^{\Upsilon}\ 2\ \varsigma\ 12$ は現代的に表すとどういう式になるか。

(4)　アラビア

古代ギリシアにおいてディオファントスによる未知数の記号化が見られましたが，それは継続・発展することはなかったようです。幾何学的な装いの古代ギリシア数学において，ディオファントスが異色ともいえる代数学者だったからでしょうか。あるいは，もう既にそれだけの力が残っていないほど，古代ギリシアの数学は衰退してしまっていたということでしょうか。

古代ギリシアに代わって数学の歴史の表舞台に登場するアラビアにおいては，まだ言語的代数の段階に留まっていました。

アラビアにおける代表的な数学者アル・フワーリズミー (Abū ‘Abd Allāh Muḥammad b. Mūsa al-Khwārizmī：850 頃没) の著作『アルジェブラとムカーバラの算法の書』(*Mukhtaṣar min ḥisāb ai-jabr wa-l-muqābala*：820 年頃) から例 (「問題の章」問題 5) を挙げましょう ([5] pp.57–58)。

> 「問題 5　10 を二つの部分に分けよ。それらのおのおのを自乗して加えよ。その和が 58 である。
>
> この規則は次のようである。10 から res を引いたものを自乗して，100 と census から 20 倍の res を引いたものになる。それから res を自乗して census になる。次にそれを加えて，100 と 2 倍の census から 20 倍の res を引いたものとなり，これが 58 に等しい。そこで 100 と 2 倍の census から引く 20 res を直せ，そうしてそれを 58 に加えよ。そうすると 100 と 2 倍の census とで 58 と 20 倍の res に等しくなる。これを 1 倍の census に引き戻せ，そうすると 50 と census とで 29 と 10 倍の res に等しくなる。そこで対置をなせ。すなわち 50 から 29 を放出するのである。すると 21 と census が残り，これが 10 倍の res に等しくされる。そこで 10 を半分にして自乗して 25 となる。それから 21 を引いて 4 が残る。それを (平方に) 開いて 2 となる。それを radix の半分である 5 から引け，3 が残る。これが二つの部分の一つである。これでこの問題を 6 形式の一つに導いた。それは census と数とが radix に等しくなる例である。」

これは 2 次方程式 $x^2 + (10 - x)^2 = 58$ を解く問題です。
まず，$(10 - x)^2 + x^2 = 100 + x^2 - 20x + x^2 = 100 + 2x^2 - 20x = 58$ とします。
これを $100 + 2x^2 = 58 + 20x$ とするのが「アルジャブル (直す)」です。
次に両辺を 2 で割って，$50 + x^2 = 29 + 10x$ とします。
この式を $21 + x^2 = 10x$ とするのが「ムカーバラ (対置する)」です。
この変形によって 2 次方程式の基本形の 1 つ $x^2 + q = px$ になります。
この形式の 2 次方程式の解は $x = \dfrac{p}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2 - q}$ で与えられることは知られていました。
後半で，このことに基づいて解 $x = 3$ を導いています。

『アルジェブラとムカーバラの算法の書』が西欧に伝えられたとき，アラビア語からラテン語に翻訳される際に使われた res，radix［ともに $x$ を意味する］や census［$x^2$ を意味する］はそのままにしてありますが，この census，radix，res という言葉はこんにちいう「記号」ではありません。普通語を数学に流用してある一定の意味で用いたもの —— バビロニアにおける「長さ」「幅」と同様 —— ですが，census は普通語として財産評価などの意味があり，radix には木の根という意味があるそうです。

このように，アル・フワーリズミーは問題の解法をすべて言葉で表しています。しかし，その内容を見れば，彼が 2 次方程式の解法をしっかりと把握していたことは明らかです。彼は 2 次方程式を次の 6 つの形式に分類し，それぞれの形式についての解法を示しています。(彼は解法の「証明」を幾何学的に行っているのですが，それについては別の項目で調べましょう。)

① $x^2 = px \quad \longrightarrow \quad x = p$

② $x^2 = q \quad \longrightarrow \quad x = \sqrt{q}$

③ $x = q$

④ $x^2 + px = q \quad \longrightarrow \quad x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$

⑤ $x^2 + q = px \quad \longrightarrow \quad x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

⑥ $x^2 = px + q \quad \longrightarrow \quad x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$

この分類で ①，② にあたる例を挙げましょう（［5］pp.55–56)。

「問題 1　たとえばこういうのがある。10 を二つの部分に分けよ。その一つの部分を他の部分に掛けよ。それからその一つを自乗せよ。そうしてその自乗したものが，一つの部分を他の部分に掛けたものの 4 倍に等しいとする。その規則は次のようである。二つに分けた片方を res とおく。もう一つの部分は 10 から res を引いたものである。次に res に 10 から res を引いたものを掛けよ。それからこれの前述の 4 を掛けよ。そうすると，二つの部分の一方を他方に掛けたものの 4 倍は 40 倍の res から 4 倍の census を引いたものである。二つの部分の一つである res を res に掛けよ。そうすると census となり，それが res の 40 倍から census の 4 倍を引いたものに等しいのである。そこで 40 を 4 倍の census で直すのである。そのあとで census に census を加える。そうすると 40 倍の res が 5 倍の census に等しくなるであろう。それゆえ (1 倍の) census は 5 倍の radix であり，それは 64 である。そこで 64 の根は，二つの部分の一つを自乗したものであり，残りの部分は 2 である。このようにして，この問題を 6 種の形式の一つに帰着できた。それは census と radix とが等置される形である。」

「問題 2　10 を二つの部分に分けよ。また 10 を自乗せよ。そうして 10 を自乗したものが，二つの部分の一方を自乗したものの 2 倍と 7/9 倍に等しいとせよ。この計算の規則は次のようである。二つの部分の一つを res とおけ。それを自乗せよ。それは census である。それに 2 と 7/9 を掛けよ。すると 2 倍の census と 7/9 倍の census になろう。また 10 を自乗して 100 になる。そこで 100 が 2 倍の census と 7/9 倍の census (の和) に等しいことになる。そこで，その全体を 1 倍の census に引き戻せ。それは 9/25 で，これは 1/5 と 4/25 (の和) である。そこで 100 の 1/5 と 4/25 を作れ。それは 36 である。これが census に等しいのである。その根は 6 であり，これが二つの部分の一つである。これで 6 形式の一つに帰着できた。それは census が数に等しくなる例である。」

問 3　上の例を現代的な表し方に直しなさい。

(5)　ヨーロッパ

中世ヨーロッパは「暗黒時代」といわれることがありましたが，史料に基づく研究が進むにつれ，中世ヨーロッパにおいても着実に探求が行われ，近世・近代へとつながる業績があることが分かってきました。

ここでのテーマである「記号化」については，15 世紀から 16 世紀にかけて主にイタリアで代数の記号化が進みますが，それについてはここでは触れないことにします。［アラビア語からの翻訳の際に，「もの」を表す言葉がイタリアでは cosa，ドイツでは coss とされましたので，この頃発展した代数を総称して「コス代数」といっています。］

最初に記号的代数の段階に達したのはフランスの数学者ヴィエート (François Viète : 1540–1603) でした。彼は『解析法入門』(*In Artem Analyticem Isagoge* : 1591 年) や『方程式の再検討および改良に関する 2 論文』(*De Aequationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo* : 1591 年) などの著作を残しています。その中で彼は未知数だけでなく既知数の記号化までも行いました。その様子を見てみることにしましょう。

彼は『解析法入門』第 5 章において次のように既知量の記号化を高らかに宣言します (［10］p.8)。

> 「…… 変わることのない永続的な，そして非常に明白な記号によって，与えられた大きさ［既知量］が不確かな求められているもの［未知量］から区別されるようにしよう。例えば，求められている大きさが字母 $A$，その他の母音 $E$，$I$，$O$，$U$，$Y$ によって，与えられたものが字母 $B$，$G$，$D$，その他の子音によって表されるように。」

また，『解析法入門』第 3 章で既知量や未知量のべき乗に対して次のような名称を与えています。

| 未知量 | 現代記号 | 既知量 | 現代記号 |
|---|---|---|---|
| latus または radix | $x$ | longitudo または latitudo | $a$ |
| quadratum | $x^2$ | planum | $a^2$ |
| cubus | $x^3$ | solidum | $a^3$ |
| quadrato-quadratum | $x^4$ | plano-planum | $a^4$ |
| quadrato-cubus | $x^5$ | plano-solidum | $a^5$ |
| cubo-cubus | $x^6$ | solido-solidum | $a^6$ |
| quadrato-quadrato-cubus | $x^7$ | plano-plano-planum | $a^7$ |
| quadrato-cubo-cubus | $x^8$ | plano-solido-solidum | $a^8$ |
| cubo-cubo-cubus | $x^9$ | solido-solido-solidum | $a^9$ |

既知量についていえば，2 乗 planum と 3 乗 solidum が基本です。そして，4 乗は $(2+2)$ 乗で plano-planum，5 乗は $(2+3)$ 乗で plano-solidum などとなっています。

ヴィエートが著述に用いたのは当時の公用語であるラテン語です。ですから以下では，ラテン語の語尾変化のために，表記がこの表のものと多少異なることがあります。

彼によって既知数の記号化がなされることによって，2 次方程式の解法などの数学的処理・操作を「公式化」する道が開けたのです。

例えば，$x^3+3b^2x=2c^3$ に相当する式は

$$A \text{ cubus} + B \text{ plano } 3 \text{ in } A\text{ , aequari } Z \text{ solido } 2$$

と表され，$y^2+xy=b^2$ に相当する式は

$$E \text{ quad.} + A \text{ in } E\text{ , aequetur } B \text{ plano}$$

と表されます。

ヴィエートは多くの場合，ディオファントスと同様に，係数は文字の後ろに書きました。また，掛け算「 × 」は「 in 」として表されています。aequus あるいは aequalis は「等しい」という意味のラテン語で，こんにちの等号に当たります。

上の例のように，ヴィエートにおいては方程式の各項の次数はすべて同じになっています。これは量の積は幾何学的な意味を持つという彼の［というより，近世において一般的な］考え方によるもので，これを「同次元の法則」といっています。

記号化の実例として『解析法入門』第 4 章規則 4 を挙げましょう ( ［10］pp.7–8)。［記号の使われ方，そして現代の記号法との違いに気をつけてください。］

「加法において，$\dfrac{A \text{ plano}}{B}$ に $Z$ を加えることを要求する。和は $\dfrac{A \text{ planum} + Z \text{ in } B}{B}$ であろう。

あるいは，$\dfrac{A \text{ plano}}{B}$ に $\dfrac{Z \text{ quadratum}}{G}$ を加えることを要求する。和は $\dfrac{G \text{ in } A \text{ planum} + B \text{ in } Z \text{ quadrat}}{B \text{ in } G}$ であろう。

減法において，$\dfrac{A \text{ plano}}{B}$ から $Z$ を取り去ることを要求する。残り［差］は $\dfrac{A \text{ planum} - Z \text{ in } B}{B}$ であろう。

あるいは，$\dfrac{A \text{ plano}}{B}$ から $Z\,\dfrac{\text{quadratum}}{G}$ を取り去ることを要求する。残り［差］は $\dfrac{A \text{ planum in } G - Z \text{ quad. in } B}{B \text{ in } G}$ であろう。

［乗法の部分は省略］

除法において，$\dfrac{A \text{ cubum}}{B}$ を $D$ で割ることを要求する。両方の大きさに $B$ を掛けて，商 (ortiva) は $\dfrac{A \text{ cubus}}{B \text{ in } D}$ であろう。

あるいは，$B$ in $G$ が $\dfrac{A \text{ planum}}{D}$ で割ることを要求する。両方の大きさに $D$ を掛けて，商は $\dfrac{B \text{ in } G \text{ in } D}{A \text{ plano}}$ であろう。

あるいは，最後に，$\dfrac{B \text{ cubum}}{Z}$ を $\dfrac{A \text{ cubum}}{D \text{ plano}}$ で割ることを要求する。商は $\dfrac{B \text{ cubus in } D \text{ planum}}{Z \text{ in } A \text{ cubum}}$ であろう。」

現代の私たちの目から見れば，ヴィエートの表す式は洗練されていない感じがしますが，それでも既知数も記号化されていますから，記号の使い方に慣れれば私たちの式と同様であることに気づくはずです。

例えば上の例で，加法の箇所のはじめに述べられていることは

$$\frac{A \text{ plano}}{B} + Z = \frac{A \text{ planum} + Z \text{ in } B}{B} \quad \text{ですから} \quad \frac{a^2}{b} + c = \frac{a^2+bc}{b}$$

ということです。

また，除法の箇所ではじめに述べられていることは

$$\frac{A \text{ cubum}}{B} \div D = \frac{A \text{ cubum}}{B \text{ in } D} \quad \text{ですから} \quad \frac{a^3}{b} \div d = \frac{\frac{a^3}{b}}{d} = \frac{\frac{a^3}{b} \times b}{d \times b} = \frac{a^3}{bd}$$

ということです。

『方程式の再検討および改良に関する 2 論文』において 2 次方程式の解法に関する部分の例を挙げる ( [4] p.120) と ……

「$A$ quad. + $B$ 2 in $A$ , aequetur $Z$ plano とする。$A+B$ が $E$ であるとおけば，$E$ quad. , aequabitur $Z$ plano + $B$ quad. 。

結論

これから $\sqrt{Z \text{ plano} + B \text{ quad.}} - B$ が $A$ となる。これからはじめの方程式が解ける。」

これを現代的に表すと，次のようになります。

「$x^2+2bx=c^2$ とする。$x+b=y$ であるとすると，$y^2=c^2+b^2$ となる。
これから $\sqrt{c^2+b^2}-b=x$ となる。」

$x+b=y$ から $x=y-b$ を $x^2+2bx=c^2$ に代入して，
$(y-b)^2+2b(y-b)=y^2-2by+b^2+2by-2b^2=y^2-b^2=c^2$ だから，$y^2=c^2+b^2$
よって $y=\sqrt{c^2+b^2}$ となるから $x=y-b$ より，$x=\sqrt{c^2+b^2}-b$

このようにヴィエートにおいては根号記号も使われるようになっていました。ここには現れませんが，立方根 (3 乗根) は $\sqrt{\text{C.}\quad}$ と表しました。

問 4　前の例 (『解析法入門』第 4 章規則 4) における「除法」の部分の残りを現代的な表し方に直しなさい。

$$B \text{ in } G \text{ を } \frac{A \text{ planum}}{D} \text{ で割ると，} \frac{B \text{ in } G \text{ in } D}{A \text{ plano}} \text{ である。}$$

$$\frac{B \text{ cubum}}{Z} \text{ を } \frac{A \text{ cubum}}{D \text{ plano}} \text{ で割ると，} \frac{B \text{ cubum in } D \text{ planum}}{Z \text{ in } A \text{ cubum}} \text{ である。}$$

17 世紀のデカルトになると，根号記号や指数表示も含めて，記号法はほとんど私たちのものと同じです。記号の用い方について，デカルトの数学上の主著である『幾何学』(*La Géomètrie* : 1637 年) —— 主著『方法序説 (自分の理性を正しく導き，いろいろな学問において真理を求めるための方法について述べる話)』(*Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences* : 1637 年) の 3 つある「試論」のうちの 1 つ —— 第 1 巻の中の「幾何学においてどのように記号を用いうるか」から引用してみましょう (［6］p.4)。

「しかし多くの場合，こうして紙に線をひく必要はない。各々の線をひとつずつの文字で示せば足りるのである。たとえば，線 BD を GH に加える場合は，一方を $a$ ，他方を $b$ と名づけて，$a+b$ と書く。$a$ から $b$ を引く場合は $a-b$ と書く。また，これらを掛け合わせる場合は $ab$ と書く。$a$ を $b$ で割る場合は $\dfrac{a}{b}$ と書く。$a$ にそれ自身を掛ける場合は $aa$ または $a^2$ と書き，これにもう一度 $a$ を掛ける場合は $a^3$ と書き，以下どこまでも進む。$a^2+b^2$ の平方根を出す場合は $\sqrt{a^2+b^2}$ と書く。$a^3-b^3+abb$ の立方根を出す場合は $\sqrt{\mathrm{C}.\ a^3-b^3+abb}$ と書き，他の場合も同様である。

ここで注意してほしいが，$a^2$ ，$b^3$ ，そのほか類似の書き方をするとき，私も代数学で用いられている語を使って，これを平方，立方などと呼びはするが，普通は単なる線しか考えていないのである。

同じく注意してほしいことであるが，問題中に単位が定められていないときは，同じ線のすべての部分は，普通はどれも同じ次元によって表現されるべきで，たとえば上の $a^3$ は，私が $\sqrt{\mathrm{C}.\ a^3-b^3+abb}$ と名づけた線を構成する $abb$ や $b^3$ と同じ次元を含んでいる。しかし，単位が定められたときはそうではない。次元が多すぎたり少なすぎたりする場合はいつも，言外に単位を考えればよいからである。たとえば，$aabb-b$ の立方根を出すという場合には，量 $aabb$ は 1 度単位で割られており，他の量 $b$ には 2 度単位が掛かっていると考えねばならない。」

参考文献

［1］ 高崎 昇「古代エジプトの数学」，総合科学出版，1977 (昭和 52)

［2］ 伊東 俊太郎「ギリシア人の数学」，講談社 (講談社学術文庫 942)，1990 (平成 2)

［3］ ユークリッド (中村 幸四郎，寺坂 英孝，伊東 俊太郎，池田 美恵・訳・解説)「ユークリッド 原論」，共立出版，1971 (昭和 46)

［4］ 中村 幸四郎「数学史 − 形成の立場から −」，共立出版 (共立全書 236)，1971 (昭和 46)

［5］ 矢島 祐利「アラビア科学史序説」，岩波書店，1977 (昭和 52)

［6］ R. デカルト (原 亨吉・訳)『幾何学』，白水社 (「デカルト著作集 1」所収)，1973 (昭和 48)

［7］ R. デカルト (大出 晁，有働 勤吉・訳)『精神指導の規則』，白水社 (「デカルト著作集 4」所収)，1973 (昭和 48)

［8］ I. Thomas(trans.)，*Greek Mathematical Works* II，Harvard U. P.(Loeb Classical Library362)，1941 (2005)

［9］ T. L. Heath，*Diophantus of Alexandria*，Dover，1964

［10］ F. Schooten(operâ atque studio)，*Francisci Vietae Opera Mathematica*，Lugduni Batavorum，1646

［11］ F. Viète(trans. by T. R. Witmer)，*The Analytic Art*，Dover，2006

［12］ F. Rosen(ed. and trans.)，*The Algebra of Mohammed Ben Musa*，Kessinger，2004