

3 円周率

円は、直線や三角形・四角形などと同様に古代から数学的研究の対象とされてきた、私たちにとってもとてもなじみのある図形です。

そして私たちは、円周の長さは「直径×円周率 ($2\pi r$)」、円の面積は「半径×半径×円周率 (πr^2)」で求められることを知っています。さらに、円周率は約 3.14 であることも知っています。

平面上で、円周の長さ l と直径との比、すなわち、

$$\text{半径 } r \text{ の円の周の長さを } l \text{ とするとき, } \frac{l}{2r}$$

$$\text{積分を用いていうと, } 2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

の値を**円周率**といいます。

こんにちでは円周率を表すのに記号 π が用いられています。この π はギリシア語で「周」を表す言葉 *περιφέρεια* の頭文字です。

ギリシア文字 π を数学記号としてはじめて使ったのはオートレット (William Oughtred : 1573–1660?) ですが、彼は円周を表す記号として用いていました。円周率を表す記号として π が一般的に用いられるようになったのは、18 世紀にオイラー (Leonhard Euler (1707–1783) が『無限解析入門』 (*Introductio in Analysin Infinitorum* : 1748 年) の中 (第 8 章) で使い始めてからです。

実数の中で、1 次方程式や 2 次方程式などの代数方程式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ の解となるような数のことを代数的数 (algebraic number) といいます。そして、代数的数でない実数を超越数 (transcendental number) といいます。

例えば、整数 k は $x - k = 0$ の解ですから代数的数ですし、平方根 \sqrt{a} は $x^2 - a = 0$ の解ですから代数的数です。超越数としては、円周率 π や自然対数の底 $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} =$

2.71828 18284 …… などが知られています

ちなみに、この π と e については $e^{\pi i} + 1 = 0$ (i は虚数単位 : $i^2 = -1$) が成り立ちます。これをオイラーの等式といっています。

円周率 π が無理数であることはランベルト (Johann Heinrich Lambert : 1728–1777) によって 1761 年に証明され、超越数であることはリンデマン (Carl Louis Ferdinand von Lindemann : 1852–1939) によって 1882 年に証明されました。

円周率 π は超越数ですから、分数や根号 $\sqrt[n]{\quad}$ だけを用いて表すことはできません。小数で表すと循環しない無限小数になり、最初の 500 桁は次のとおりです。

$\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399\ 37510$
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679
82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196
44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091
45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273
72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436
78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094
33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912 ……

(1) 古代エジプト

前 1800 年頃のものとするリンド・パピルスには、次のような問題が取り上げられています ([2] p.138)。

「例題 50 直径 9 ケトの丸い土地の問題。その面積はいくつか。

直径の $\frac{1}{9}$ すなわち 1 を引け。残りは 8 である。8 の 8 倍をすれば 64 となる。

故にこの土地は 64 セタトの広さである。」

この方法によれば、半径 r の円の面積は $\left(2r - \frac{2r}{9}\right)^2 = \left(\frac{16}{9}r\right)^2 = \frac{256}{81}r^2$ ということになります。

ところで、真の面積は πr^2 ですから、リンド・パピルスでは円周率の値を

$$\pi = \frac{256}{81} = 3.16049382 \dots \approx 3.16$$

としていたこととなります。[実は、この 3.16 は円周率 π の近似値として、いろいろなところでよく用いられていたようです。]

この値 $\pi \approx 3.16$ は、紀元前 1800 年頃という年代を考慮すると、かなり正確な値といえますが、次のように導いたのではないかと考えられています。

① 円を四方からつぶして正方形を作るとき、弧 AD は $\frac{8}{9}$ に縮小すると正方形の 1 辺の半分 BC になると考えた。(下の左図)

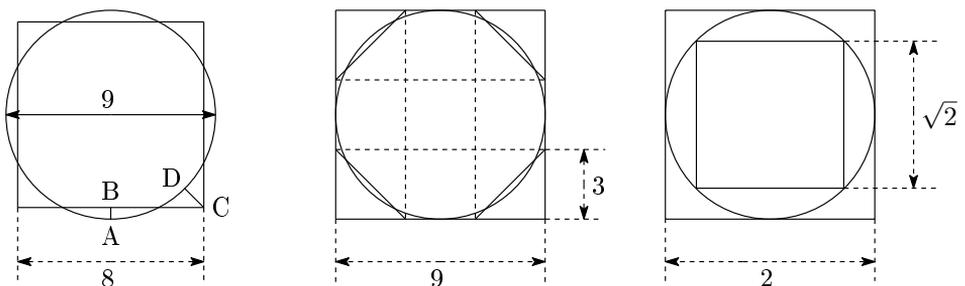
② 1 辺の長さ 9 の正方形から四隅を切り取った八角形の面積は

$$9 \times 9 - 4 \times \left(3 \times 3 \times \frac{1}{2}\right) = 81 - 18 = 63$$

であるから、これとほぼ等面積の正方形の 1 辺の長さを $\sqrt{63} \approx \sqrt{64} = 8$ とした。(下の中図)

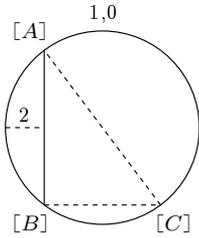
③ 半径 1 の円について、外接正方形の 1 辺の長さ $\left(2 = \frac{18}{9}\right)$ と内接正方形の 1 辺の長さ $\left(\sqrt{2} = 1.414 \dots \approx \frac{14}{9}\right)$ との中間値をとって、円の面積を $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ とした。(下の右図)

④ 1 辺の長さ 9 の外接正方形を方眼状に小さく区切ったとき、内接する円の部分の方眼の目の個数を数えて、円の面積を $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ とした。



(2) バビロニア

バビロニア数学に関する粘土板「BM85194」に次のような問題があります ([4] pp.50-52)。



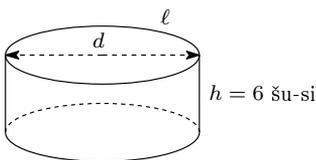
「円周が 1,0。私が下降した 2。弦 [AB] の長さはいくらか。君は, 2 を平方せよ (2 を 2 倍せよの誤り), 君は 4 を見る。4 を直径 20 から引いて, 君は 16 を見る。直径 [AC] 20 を平方せよ, 君は 6,40 を見る。[BC =] 16 を平方せよ, 君は 4,16 を見る。4,16 を 6,40 から引いて, 君は [AB² =] 2,24 を見る。2,24 の平方根は何か。12 が平方根で弦の長さである。計算の手順はこのようである。」

バビロニア人は直径の上に立つ円周角は直角である, すなわち $\triangle ABC$ は直角三角形である, ことを知っていて, 三平方の定理を利用して弦 AB を求めているのが分かると思います。が, ここでのテーマは円周率ですから, そちらに目を向けると, 直径 20 に対して円周は 1,0 = 60 であるといっています。すなわち, 円周率は 3 としていることとなります。バビロニア人の数学力からすると, これは随分と粗っぽい値ですね。

このような粗い値を用いていた理由について, 室井 和男は「これはバビロニア人がより精密な値を計算できなかったというよりも, 3 の方がいろいろな計算が簡単にできて便利だったからつねに用いられたといったほうがよい。彼らの関心は, 円周率のより正確な近似値を求めることではなく, 円に関する様々な長さや面積をどうやって計算するかにあったのである。」と言っています ([4] p.56)。

一方で, 円周率を $3;7,30 = 3 + \frac{7}{60} + \frac{30}{3600} = \frac{25}{8} = 3.125$ とした例も残っているということです。それは「YBC8600」と呼ばれているもので, 次のような内容のものです ([4] p.56)。

「1 kùš が木の周囲である。それは, どれだけ太ったか。君は 0;5 と 0;5 を掛けよ, そして (その結果の) 0;0,25 を定数 4,48 に君は掛ける。そして 2。2 sila が木の太さである。2 sila が木の太さである (ならば), 木の周囲はいくらか。君は 4,48 の逆数 0;0,12,30 を 2 sila に掛けよ, そして 0;0,25。0;0,25 の平方根は 0;5。1 kùš が木の周囲である。」



バビロニアでは, 木の太さを表すのに, その木を高さ $h = 6$ šu-si (約 10cm) の円柱に切り取ったときの体積を用いていたことに注意する必要があります。

左図のような, 周囲 ℓ , 直径 d の木の長さ $h = 6$ šu-si の円柱部分の体積は, もちろん円柱の上と下における周囲の長さの

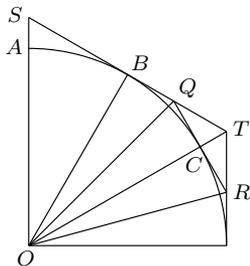
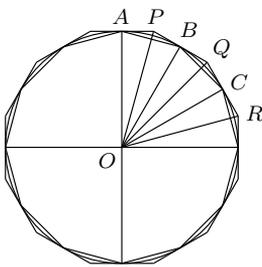
違いを無視することにして, $V = \pi \left(\frac{\ell}{2\pi} \right)^2 h = \frac{1}{4\pi} \ell^2 h$ です。

この体積 V が木の太さですが, 上の計算の仕方を見ると, 「定数 4,48」が $\frac{1}{4\pi}$ に相当していると思われまますから, 「4,48」は「0;4,48」と考えざるを得ません。とすると, $0;4,48 = \frac{4}{60} + \frac{48}{3600} = \frac{2}{25}$ ですから, $\frac{1}{4\pi} = \frac{2}{25}$ より, $\pi = \frac{25}{8}$ としていることとなります。

ここで、上の問題にも出てきた、紀元前 21 世紀から紀元前 16 世紀にかけてのバビロニアにおける度量衡をまとめておきましょう ([13] p.71)。

- 長 さ： 1 rod [nindan] = 12 cubit [kùš] ≐ 6 m (5.94 m)
 1 cubit [kùš] = 30 finger [šu-si] ≐ 0.5 m (0.495 m)
 1 chain = 60 cubit [kùš] = 5 rod [nindan]
 1 cable [UŠ] = 60 rod [nindan]
 1 league = 30 cable [UŠ]
- 面積・体積： 1 sar (面積) = 1 rod [nindan] 平方 ≐ 36 m² (35.2836 m²)
 1 sar (体積) = 1 sar (面積) × 1 cubit [kùš] ≐ 18 m³ (17.465382 m³)
 1 ubu = 50 sar
 1 iku = 2 ubu = 100 sar
 1 eshe [ešè] = 6 iku
 1 bùr = 3 eshe [ešè]
- 容 積： 1 sila ≐ 1 ℓ
 1 bán = 10 sila
 1 bariga [PI] = 6 bán
 1 gur = 5 bariga [PI]
- 重 量： 1 mina [ma-na] = 60 shekel [gín] ≐ 0.5 kg (0.505 kg)
 1 talent [gù] = 60 mina [ma-na]
 1 shekel [gín] = 180 grain [še]

「YBC8600」の最初で、1 kùš を $0;5 = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ としているのは単位を rod [nindan] にそろえたということです。



ところで、 $\pi \approx \frac{24}{8}$ を導く方法としては、例えば次のような方法があるということです ([9] pp.55-56, 改)。

左の上図は、半径 2 の円に内接、外接する正 12 角形を描いたものです。このとき、内接正 12 角形の一部である四角形 $OABC$ について考えると、 $\triangle OAC$ は 1 辺が 2 の正三角形になりますから、この四角形の面積は $OABC = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times 2 = 2$ となります。それゆえ、内接正 12 角形の面積は $S_1 = 2 \times 6 = 12$ となります。

一方、左の下図は左上図の一部を抜き出したものです。この図で、 $BQ = CQ = CR = x$ とします。まず、 $\triangle OST$ は正三角形で、 $OB = 2$ ですから、 $BT = \frac{2}{\sqrt{3}}$ 、 $OT = 2BT = \frac{4}{\sqrt{3}}$ です。

さて、 $\triangle OQT = \triangle OBT - \triangle OBQ$ ですから、 $OT \times CQ \div 2 = BT \times OB \div 2 - BQ \times OB \div 2$ 、すなわち $\frac{2}{\sqrt{3}} x = \frac{2}{\sqrt{3}} - x$ が成り立ちます。それゆえ、 $x = \frac{2}{2 + \sqrt{3}} = 2(2 - \sqrt{3})$ となります。

それゆえ、 $\triangle OQR = QR \times OC \div 2 = 4(2 - \sqrt{3})$ となりますから、外接正 12 角形の面積は $S_2 = 4(2 - \sqrt{3}) \times 12 = 48(2 - \sqrt{3})$ となります。

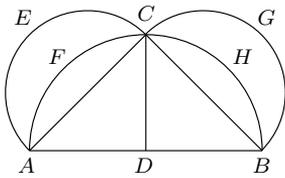
半径 2 の円の面積は 4π ですから、結局、 $12 < 4\pi < 48(2 - \sqrt{3})$ ということになります。これから、 $12 < 4\pi < 13$ となりますから、 $4\pi \approx \frac{12+13}{2} = \frac{25}{2}$ がいえるという訳です。

[角の 2 等分線の定理 ($OB : OT = BQ : QT$) を使っても x は求められますね。]

(3) 古代ギリシア

古代ギリシアではアナクサゴラス (Αναξαγόρας (Anaxagoras) : 前 500?-前 428?) の頃から求積問題に注意が払われるようになったようです。

キオスのヒポクラテス (Ἱπποκράτης Χίος (Hippocrates of Chios) : 前 440 頃活躍) は月形の方角化 [正方形化] を行ったと伝えられています。



すなわち、半円 ACB に内接する直角二等辺三角形 ABC を描き、その辺 AC , BC をそれぞれ直径とする半円 AEC , BGC を描くと、2つの月形の部分 $AECFA$, $BGCHB$ の面積の和は直角二等辺三角形 ABC の面積に等しい、ことを示したということです。

ヒポクラテスは二等辺三角形について論じましたが、月形の方角化は必ずしも二等辺三角形でなくとも成り立ちます。

直接、円周率に関係することとして、ユークリッド (Euclid (Eukleides) : Εὐκλείδης) : 前 300 頃) は『原論』(Στοιχείωσις) の第 12 巻命題 2 で

「円は互いに直径上の正方形に比例する。」

ことを証明しています ([5] p.367)。すなわち、円周率 π が定数であることを示しています。ただし、その値についての記述はありません。

前 5 世紀以来、ギリシアの数学者の間では次の 3 つの問題が難問として話題になりました。

- (1) 与えられた円と等しい面積をもつ正方形を作ること (「円の方角化問題 (円積問題)」)
- (2) 与えられた立方体の 2 倍の体積をもつ立方体を作ること (「立方体倍積問題」)
- (3) 与えられた角を 3 等分すること (「角の 3 等分問題」)

こんにち、これらの 3 つの問題はギリシア数学の 3 大難問といわれています。

第 1 の「円の方角化問題」は円周率 π にかかわるもので、先に述べたように最終的に決着するのは 19 世紀のことです。ユークリッドが円周率の値に関する記述を避けた (できなかった?) のはそのためでしょうか。

なお、19 世紀になって、この 3 大難問はすべて定規とコンパスだけ (を使った有限回の操作) では作図できないことが示されました。

アルキメデス (Ἀρχιμήδης (Archimēdēs) : 前 287?-前 212) は『円の計測』(Κύκλου μέτρησις (*Dimensio Circuli*)) という著作の中で

「命題 2 円 (の面積) はその直径上の正方形に対して 11 : 14 の比をもつ。」

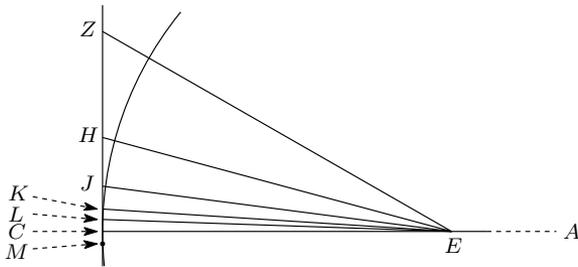
を示しました ([5] p.483)。

問 1 この命題 2 では、アルキメデスは円周率をいくつとしたということか。

さらに、円に内接および外接する正 96 角形の周を利用して

「命題 3 任意の円の周はその直径の 3 倍よりも大きく、その超過分は直径の $\frac{1}{7}$ よりは小さく、 $\frac{10}{71}$ よりは大きい。」

[すなわち、 $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$] ことを証明しています ([5] pp.484-487)。



左の上図は外接する正多角形の場合で、 CZ が外接正 6 角形の 1 辺の半分、 CH が外接正 12 角形の 1 辺の半分、 CJ が外接正 24 角形の 1 辺の半分、 CK が外接正 48 角形の 1 辺の半分、 $CL = CM$ が外接正 96 角形の 1 辺の半分になっています。

このとき、彼は、

$$EC : CZ [= \sqrt{3} : 1] > 265 : 153,$$

$$EC : CH > 571 : 153,$$

$$EC : CJ > 1162 + 1/8 : 153,$$

$$EC : CK > 2334 + 1/4 : 153,$$

$$EC : CL > 4673 + 1/2 : 153$$

であることを示しました。そして、直径 AC は半径 EC の 2 倍、外接正 96

角形の 1 辺 LM は CL の 2 倍であることから、 $AC : (\text{外接 96 角形の周囲}) > 4673 + 1/2 : 14688$ であることをいいます。

ここで、 $\frac{14688}{4673 + 1/2} < 3 + \frac{1}{7}$ ですから、 $\pi < 3 + \frac{1}{7}$ であるということです。

また、上の下図は内接する正多角形の場合で、 CB が内接正 6 角形の 1 辺、 CH が内接正 12 角形の 1 辺、 CJ が内接正 24 角形の 1 辺、 CK が内接正 48 角形の 1 辺、 CL が内接正 96 角形の 1 辺になっています。

このとき、 $AC : CB = 1560 : 780$, $AC : CH < 3013 + 1/2 + 1/4 : 780$,

$$AC : CJ < 1838 + 9/11 : 240, \quad AC : CK < 1009 + 1/6 : 66,$$

$$AC : CL < 2017 + 1/4 : 66$$

が示されます。

そして、 CL が内接正 96 角形の 1 辺であることから、 $(\text{内接 96 角形の周囲}) : AC < 6336 : 2017 + 1/4$ であることがいえます。

ここで、 $\frac{6336}{2017 + 1/4} > 3 + \frac{10}{71}$ ですから、 $\pi > 3 + \frac{10}{71}$ ということになります。

ところで、 $\frac{10}{71} = 0.1408450704\dots$, $\frac{1}{7} = 0.1428571428\dots$ ですから、アルキメデスによれば $3.140845\dots < \pi < 3.142857\dots$ です。

(4) 古代中国

古代中国における文明の発生は紀元前 5000 年頃とされています。その黄河文明の前半を仰韶文化ヤンシャオとっていますが、黄河中流域を中心に発展しました。河南省仰韶村で発見された彩陶と呼ばれる赤色で彩色された土器が有名です。黄河文明後期は龍山文化ロンシャンと呼ばれ、黄河下流域で紀元前 2500 年頃からはじまったとされています。1930 年に山東省龍山鎮でその遺跡が発見されました。

伝説上の聖王・堯ぎょう、舜しゆんの後を受け、禹うによって最初の王朝・夏が開かれたのは紀元前 2070 年頃のこととされています。

考古学上存在が確認されているのは殷いん(商)王朝で、紀元前 1600 年頃に成立したとされます。この時代のもことされる、文字の刻まれた甲骨片は 10 万以上発見されています。

紀元前 221 年には始皇帝によって最初の統一国家・秦が築かれました。彼は度量衡や貨幣を統一し、強力な中央集権政策をとりました。

『三国志演義』の中で有名であり日本人にも人気のある諸葛亮孔明(181-234)が活躍したのは紀元後 3 世紀のことでした。邪馬台国の女王・卑弥呼は 239 年に三国・魏に使者を送っています。

紀元前 1 世紀頃の中国における度量衡は次のようになっていました。

長さ：1 尺 \approx 0.2250 m

1 丈 = 10 尺，1 引 = 10 丈，1 歩 = 6 尺，1 里 = 300 歩 \approx 405 m

1 寸 = $\frac{1}{10}$ 尺，1 分 = $\frac{1}{10}$ 寸，1 釐 = $\frac{1}{10}$ 分，1 毫 = $\frac{1}{10}$ 釐

面積：1 畝 = 240 平方歩

1 頃 = 100 畝

容積：1 合 \approx 0.194 dℓ

1 升 = 10 合，1 斗 = 10 升，1 石 = 10 斗

1 勺 = $\frac{1}{10}$ 合，1 抄 = $\frac{1}{10}$ 勺

重量：1 兩 \approx 16 g

1 斤 = 16 兩，1 秤 = 15 斤，1 鈞 = 2 秤，1 石 = 4 鈞

1 分 = $\frac{1}{4}$ 兩，1 銖 = $\frac{1}{6}$ 分

唐代(618-907)に官吏としての数学者を養成する機関[算学といわれる制度で、2 人の算学博士の下で 30 人の弟子が養成されていました]で教えられていた数学書として『算経十書』(あるいは『十部算経』)があります。これは古代中国における数学書を集めたもので、中華民国 63(1974)年発行の『算経十書』(台湾商務印書館)には次のようなものが収められています。

『周髀算経』

『九章算術』

『海島算経』

『孫子算経』

『五曹算経』

『夏侯陽算経』

『張邱建算経』

『五経算術』

『緝古算経』

『数術記遺』

これらのうち、『九章算術』は秦漢の伝承を受け、後漢になってほぼ現在の形にまとめあげられました。官吏に必要とされる実務上の諸問題を例に挙げ、開平法、開立方、比例、連立方程式、さまざまな図形や立体の求積、直角三角形の性質などが 9 章(方田、粟米、衰分、少広、商功、均輸、盈不足、方程、句股)に分けられて 246 問載せられています。

『九章算術』には次のような問題が載せられています。魏の劉徽(りゅうき：生没年不詳)が『九章算術』に優れた「註」を残しています。その註を含めて内容を見てみましょう([6] pp.135-136)。

「巻第4「少広」問題18 また面積が三百平方歩の円がある。問う、円周はいくらか。

答、六十歩。

劉徽註——私の計算法により、六十一歩と五十分の十九歩とすべきである。

開円

<計算法> 面積の平方歩数を置き、十二を掛ける。その値を開方し、円周を得る。

劉徽註——この計算法は、周三径一を率となし、旧「円田術」と逆の関係である。私の計算法によれば、三百十四を面積に掛け、二十五で割り、その値を開方し、円周を得る。これは与えられた冪より円周を求めたもので、やや少なきに失する。また二百を面積に掛け、百五十七で割り、その値を開方し、直径を得る。これはやや多きに失する。」

円田術とは、円周の2乗を12で割って面積を求めるという計算法のことです。

問2 ここでの『九章算術』は、円周率をいくつとしているか。また、劉徽は円周率をいくつとしていたか。 $(\ell = \sqrt{12 \times S})$ としているが、円周率を x とすると、 $S = xr^2$ より $\ell = \sqrt{12xr^2} = 2\sqrt{3x}r = (2r)\sqrt{3x}$ となる。一方で $\ell = \text{直径} \times \text{円周率} = 2r \times x$ だから、これらと比較して……)

劉徽は円周率の値の算出法に関して、「このように円の内接多角形を次第に細かく割っていくと、その面積と円の面積の差はますます小さくなり、その過程を繰り返して割ることができない所まで行なえば、終には円周と一致し、面積の差などなくなる。つまり、正多角形の一辺の外側に、さらに余径があれば、余径とその一辺の積で示される部分の面積の辺数倍を正多角形の面積に加えた値は、円の面積より大きくなるが、細かく分割された正多角形が円周と一致すれば、外側にさらに余径が存することなどなく、その場合、面積が円の面積より大きくなることはないのである。」と述べています([6] p.93)。

そして、円に内接および外接する正192角形の周長を利用して円周率の値を

$$3.14 \frac{64}{625} < \pi < 3.14 \frac{169}{625}$$

と算出したということです。[アルキメデスの方法をさらに進めれば正192角形になります。上の言葉に見られるように、劉徽は正多角形を細分するという方法を使ったのではないかと思います。]ただし、実際の計算では3.14を使っていました。

また、宋の天文学者・数学者である祖冲之(そちゅうし：429-500)は円周率の値として $\frac{22}{7}$ (約率)と $\frac{355}{113}$ (密率)とを得ていました。

さらに、『隋書律歷志』(636年)によれば、祖冲之は

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927$$

をも得ていることが知られています。

(5) 古代インド

インダス川流域を中心に文明が興ったのは紀元前 2600 年頃のことであろうと思われます。モヘンジョダロやハラッパーの都市遺跡に見られるような整然と計画された都市づくりと、大浴場や水洗トイレなどに代表される優れた衛生観念が特徴といえます。このインダス文明は紀元前 1800 年頃まで続いたといわれています。

チャンドラグプタ (Chandragupta : 在位前 317?-前 293?) によってインド最初の王朝ともいえるマウリヤ朝がつくられたのは紀元前 317 年頃のことです。第 3 代の王であるアショーカ王 (Ashoka : 在位前 268?-前 232?) は第 3 回仏典結集を行うなど、仏教守護に力を入れました。

カニシカ王 (Kanishka : 在位 130?-155?) のときに全盛期を迎えるクシャナ朝では、ガンダーラ美術 [1 世紀~5 世紀にガンダーラ地方に発展した仏教美術で、史上初めて仏像を造りました] が栄え、大乘仏教が成立しました。

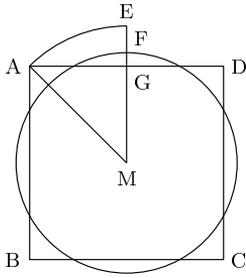
グプタ朝はチャンドラグプタ 1 世 (Chandragupta : 在位 320?-355?) によって開かれ、6 世紀前半まで続きますが、5 世紀にはサンスクリット文学が盛んになりました。古代インドの 2 大叙事詩『マハーバーラタ』(Mahabharata), 『ラーマーヤナ』(Rāmāyana) が成立したのも 5 世紀頃と考えられています。

古代インドの数学は宗教祭礼にかかわる祭場設営に関することから出発しています。祭礼にかかわる書としてのヴェーダ文献の補足あるいは補遺として現れたのがシュルバーストラ (śulbasūtra : 「繩の経」) で、その主なものに『アーパスタンバ・シュルバーストラ』、『バウダーヤナ・シュルバーストラ』、『カーツヤナ・シュルバーストラ』、『マーナヴァ・シュルバーストラ』があります。これらは紀元前 6 世紀頃から紀元後 2 世紀頃にかけて成立したものと考えられています。そこには、正方形や長方形などに関する作図法や等積変形法などに続いて、翼を広げた鳥の形などの祭場の設営法が書かれています。

1881 年にインド北西部のバクシャーリーという村で、数学的内容が書かれた樺の樹皮が 70 枚ほど発見されました。これは現在「バクシャーリー写本」(Bakhshali manuscript) といわれていますが、作成された年代の特定には至っていないようです。4 世紀から 5 世紀頃という人から、12 世紀以降のものであるという人までいます。いずれにしてもインド数学の初期のものといえます。この「バクシャーリー写本」では算術の計算、比例配分の問題、1 次方程式や連立方程式、商品の売買や交換の問題などが扱われています。

さて、『アーパスタンバ・シュルバーストラ』(Āpastamba Śulbasūtra) には正方形の円への等積変形として次の手順が示されています ([7] p.401)。

「第 3 章 2 四角形 (正方形 ABCD) を (等面積の) 円形に作ろうとする場合、(正方形の) 中心 (M) から頂点 (の 1 つ) に (綱を) のぼすべし。(M 点を中心として、この綱で) 側辺方向に円を描き、(M から辺 AD に垂線を下ろし、AD との交点を G、この垂線の延長線が円弧と交わる点を E とし、線分 ME の、正方形の外にある) 超過部分 (GE) の 3 分の 1 (GF) を (MG に) 加えて、(M を中心に半径 MF の) 円を描くべし。それ [以上の手続きで作図された図形面積] は (所与の正方形の面積と) 不変であり、円形 (である)。……」



- すなわち、1 辺が a の正方形 ABCD と等面積の円をつくるには、
- ① 正方形の中心 M を中心とする、半径 MA の円を描き、
 - ② 辺 AD に垂直な半径を ME として、AD と ME の交点を G とし、
 - ③ 半径 ME のうち、正方形の外側の部分 GE を 3 等分し、正方形に近い方を F とすると、
 - ④ MF を半径とする円の面積は正方形の面積と (近似的に) 等しくなる。

このとき、 $MF = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) a = \frac{2 + \sqrt{2}}{6} a$ となりますから、

$$\pi \left(\frac{2 + \sqrt{2}}{6} a \right)^2 = a^2 \text{ より } \pi = \left(\frac{6}{2 + \sqrt{2}} \right)^2 = 18(3 - 2\sqrt{2}) \doteq 3.088312$$

ということになります。

また、アールヤバタ (Āryabhaṭa : 476?-550?) の著した『アールヤバティーヤ』(Āryabhaṭīyā) には、次のような記述があります ([7] p.96, p.98)。

「第 2 章 7 円周の半分に直径の半분을掛けたものが、円の面積果にほかならない。それ (面積果) に自分の平方根を掛けると、過不足なしの球の体積果になる。」

「第 2 章 10 104 に 8 を掛けたものと、62000 (の和) は直径が 20000 の円の周囲に近い。」

「第 2 章 7」で、アールヤバタは、円周を ℓ 、直径を d とし、円の面積を S 、球の体積を V とするとき、 $S = \frac{\ell}{2} \times \frac{d}{2}$ 、 $V = S \times \sqrt{S}$ であるといっていますが、球の体積の算出式の方は正しくありませんね。

問 3 アールヤバタは円周率をいくつとっているか。(円周 = $104 \times 8 + 62000$ 、直径 = 20000 ということ。)

さらに、バースカラ 2 世 (Bhāskara : 1114?-1185?) の著した『リーラーヴァティー』(Līlāvati) には、次のような記述があります ([7] p.319)。

「詩節 199 直径に 3927 を掛け 1250 で割れば、それ (商) は密な円周である。あるいはまた (直径に) 22 を掛け 7 で割れば、粗ではあるが実用的 (円周) となるう。」

問 4 ここ述べられている「密な円周」では、円周率はいくつとされているか。

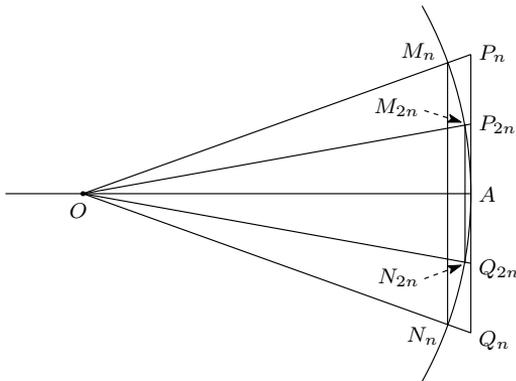
(6) 円周率の正多角形による近似値計算

円周率 π の近似値を求めるのに、近代以前は多くの場合、円に内接および外接する正多角形の周の長さを利用していました。

いま、円に内接する正 n 角形の周長を l_n とし、同じ円に外接する正 n 角形の周長を L_n とする (直径が 1 ならば、 $l_n < \pi < L_n$ です。) と、

$$L_{2n} = \frac{2l_n L_n}{l_n + L_n} \quad l_{2n} = \sqrt{l_n L_{2n}}$$

が成り立ちます ([11] p.18)。



左図で、 O は半径 r の円の中心、 OA はその半径で、

$$\angle P_n O Q_n = \frac{360^\circ}{n},$$

$$\angle P_{2n} O Q_{2n} = \frac{360^\circ}{2n}$$

です。すなわち、 OP_{2n} 、 OQ_{2n} はそれぞれ $\angle AOP_n$ 、 $\angle AOQ_n$ の 2 等分線です。このとき、

$M_n N_n$ は内接正 n 角形の 1 辺

$P_n Q_n$ は外接正 n 角形の 1 辺

$M_{2n} N_{2n}$ は内接正 $2n$ 角形の 1 辺、 $P_{2n} Q_{2n}$ は外接正 $2n$ 角形の 1 辺
ですから、

$l_n = M_n N_n \times n$ 、 $L_n = P_n Q_n \times n$ 、 $l_{2n} = M_{2n} N_{2n} \times 2n$ 、 $L_{2n} = P_{2n} Q_{2n} \times 2n$
となります。そして、これらについて上の関係式が成り立つということです。

さて、半径 50 の円に内接・外接する正 6 角形 (中心角 60°) の周の長さはそれぞれ

$$l_6 = 50 \times 6 = 300, \quad L_6 = \left(\frac{50}{\sqrt{3}} \times 2 \right) \times 6 = 200\sqrt{3} \cong 346.4101615$$

ですから、上の関係式によれば、

$$L_{12} = \frac{2 \times 300 \times 346.4101615}{300 + 346.4101615} \cong 321.5390309(11413)$$

$$l_{12} = \sqrt{300 \times 321.5390309} \cong 310.5828541(14647)$$

となります。

真の値によれば、

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{2 \times 300 \times 200\sqrt{3}}{300 + 200\sqrt{3}} = \frac{120000\sqrt{3}}{100(3 + 2\sqrt{3})} = \frac{1200\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} = 2400 - 1200\sqrt{3} \\ &= 1200(2 - \sqrt{3}) \cong 321.5390309(17347) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{12} &= \sqrt{300 \times 1200(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{360000(2 - \sqrt{3})} = 600\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 600\sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} \\ &= 600 \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = 300\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) = 300(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \cong 310.5828541(23025) \end{aligned}$$

ということです。

いまの場合、直径は 100 ですから、 l_{12} と L_{12} について

$$\frac{310.5828541}{100} < \pi < \frac{321.5390309}{100} \quad \text{すなわち} \quad 3.105828541 < \pi < 3.215390309$$

となります。

そこで、これらの値の平均をとれば、[本当は単なる平均ではないのですが…]

$$\pi \doteq \frac{3.105828541 + 3.215390309}{2} = 3.160609425$$

ということになります。

次に、内接・外接する正 24 角形については

$$L_{24} = \frac{2 \times 310.5828541 \times 321.5390309}{310.5828541 + 321.5390309} \doteq 315.9659942$$

$$l_{24} = \frac{2 \times 300(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \times 1200(2 - \sqrt{3})}{300(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + 1200(2 - \sqrt{3})} = \frac{2400(2 - \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{\sqrt{6} - \sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 8} \doteq 315.9659942$$

$$l_{24} = \sqrt{310.5828541 \times 315.9659942} \doteq 313.2628613$$

$$l_{24} = \sqrt{300(\sqrt{6} - \sqrt{2}) \times \frac{2400(2 - \sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{\sqrt{6} - \sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 8}}$$

$$= 1200(\sqrt{3} - 1) \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 8}} \doteq 313.2628613$$

$$\pi \doteq \frac{l_{24} + L_{24}}{2} \div 100 \doteq \frac{3.132628613 + 3.159659942}{2} = 3.1461442775$$

となります。

問 5 上の関係式を利用して、下表を埋めて π の近似値を求めなさい。(コンピュータを活用しましょう。)

[π の近似値については、古来多くの方がより精密な値を見出そうと努力してきましたが、円に内接・外接する正多角形を利用する方法で近似値の精度を上げるのは実はとても大変なことなのです。]

n	l_n	L_n	
6	300	346.4101615	← 平均して、 $\pi \doteq 3.2320508075$ ということ
12	310.5828541	321.5390309	← $\pi \doteq 3.160609425$
24	313.2628613	315.9659942	← $\pi \doteq 3.1461442775$
48			
96			← アルキメデスはこの値を基にしました
192			← 劉徽はこの値を基にしました
384			← さあ、もう少し頑張ってみましょう

(7) 円周率に関する表示式・展開式

近世になって記号代数や微分積分法などが発展してくると、無限級数の和や種々の形の極限值などを用いて π を表す多くの式が得られ、また現代では電子計算機の普及により、その近似値がより精密に計算されるようになりました。

「無限」の考えを使って π の表示式を初めて得たのはヴィエート (François Viète : 1540-1603) です。その表示式はこんにちヴィエートの公式といわれ、次のようなものです。

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

π の表示式をいくつか挙げてみましょう。

① ウォリス (John Wallis : 1616-1703) によるもの

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}$$

② グレゴリー (James Gregory : 1638-1675), ライブニッツ (Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz : 1646-1716) によるもの

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

これは $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \cdots$ から導かれたようですが、この展開式はグレゴリーが 1671 年までには得ていたということです。

ライブニッツは、グレゴリーの発見を知らずに、1673 年に再発見しているとのこと。

③ ニュートン (Isaac Newton : 1642-1727) によるもの

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6} &= \arcsin \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{1}{2^7} + \cdots \end{aligned}$$

④ ガウス (Carl Friedrich Gauss : 1777-1855) によるもの

$$\frac{\pi}{4} = 12 \arctan \frac{1}{18} + 8 \arctan \frac{1}{57} - 5 \arctan \frac{1}{239}$$

⑤ オイラーによるもの

$$\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

⑥ マチン (John Machin : 1680-1751) によるもの

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

この関係式はマチンの公式といわれています。

⑦ ハットン (Charles Hutton : 1737-1823) によるもの

$$\frac{\pi}{4} = 3 \arctan \frac{1}{4} + \arctan \frac{5}{99}$$

これらのうち、マチンの公式は次のような級数展開とあわせて π の計算によく使われます。

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} \quad (|x| \leq 1)$$

では、マチンの公式を用いて、 π の近似値を求めてみましょう……

$$\begin{aligned} \arctan \frac{1}{5} &\doteq \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{5}\right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{5}\right)^9 \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} \\ &\doteq 0.19739556165079365079 \end{aligned}$$

$$\text{だから, } 4 \arctan \frac{1}{5} \doteq 0.78958224660317460317$$

$$\begin{aligned} \arctan \frac{1}{239} &\doteq \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{239}\right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{239}\right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{239}\right)^9 \\ &= \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \frac{1}{9 \cdot 239^9} \\ &\doteq 0.0041840760020747238645 \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &\doteq 0.78958224660317460317 - 0.0041840760020747238645 \\ &= 0.78539817060109987931 \end{aligned}$$

より、 $\pi \doteq 3.1415926824043995172$ [これは小数第7位まで正しい] となります。

もう少し先までやってみましょう……

$$\begin{aligned} \arctan \frac{1}{5} &\doteq \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{5}\right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{5}\right)^9 - \frac{1}{11} \left(\frac{1}{5}\right)^{11} + \frac{1}{13} \left(\frac{1}{5}\right)^{13} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} - \frac{1}{11 \cdot 5^{11}} + \frac{1}{13 \cdot 5^{13}} \\ &\doteq 0.19739555985199085359 \end{aligned}$$

$$\text{だから, } 4 \arctan \frac{1}{5} \doteq \boxed{}$$

$$\begin{aligned} \arctan \frac{1}{239} &\doteq \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{239}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{239}\right)^5 - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{239}\right)^7 + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{239}\right)^9 - \frac{1}{11} \left(\frac{1}{239}\right)^{11} \\ &\quad + \frac{1}{13} \left(\frac{1}{239}\right)^{13} \\ &= \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \frac{1}{7 \cdot 239^7} + \frac{1}{9 \cdot 239^9} - \frac{1}{11 \cdot 239^{11}} \\ &\quad + \frac{1}{13 \cdot 239^{13}} \\ &\doteq 0.00418407600207472386 \end{aligned}$$

$$\text{よって, } \frac{\pi}{4} \doteq \boxed{} \text{ より,}$$

$$\pi \doteq \boxed{}$$

です。

(8) 円周率に関する話題

円周率 π の近似値を得る実験として「ビュッフォン (Georges Louis Leclerc Comte de Buffon : 1707-1788) の針」といわれるものがあります。

これはモンテカルロ法の古典的な例になっているのですが、モンテカルロ法 (Monte-Carlo method) というのは、1945 年頃にフォン・ノイマン (John von Neumann : 1903-1957) らによって導入された手法で、彼らは“決定論的な数学的問題の処理に乱数を用いること”と定義しました。すなわち、乱数あるいは物理的なランダム・メカニズムを使った実験によって数学的問題の近似的な数値解を得る方法のことをいいます。

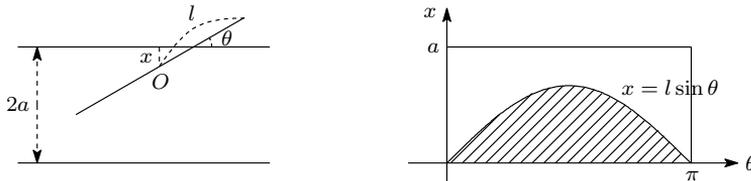
さて、「ビュッフオンの針」の内容は、

「平面上に、等間隔 $2a$ で無数の平行線が引いてある。ここに、長さ $2l$ の針をランダムに投げたとき、針が平行線と交わる確率は、 $l < a$ のとき、 $\frac{2l}{\pi a}$ である。」

というものです。

仮定 $l < a$ により、針は 2 本以上の平行線とは交わりません。

そこで、針の中心 O から、最も近い平行線までの距離を x とし、針と平行線とのつくる角を θ とすると、 $0 \leq x \leq a$ 、 $0 \leq \theta \leq \pi$ であって、針の位置は x と θ によって完全に定まります。[下の左図では、針の長さを少し長めにしてあります。]



針が平行線と交わるための必要かつ十分な条件は $x \leq l \sin \theta$ が成り立つことです。

このときの確率は $p = \frac{\text{斜線部の面積}}{\text{長方形の面積}} = \frac{1}{\pi a} \times \int_0^\pi l \sin \theta d\theta = \frac{2l}{\pi a}$ です。

実際に何本かの針を投げてみて、そのうちどれくらいが交わるかを調べて (実際に針を投げてみるのは大変ですから、コンピュータを使って乱数を発生させてシミュレーションしてみるのがよいでしょうけど)、 π の近似値を求めてみるのもよいでしょう。

1855 年にド・モルガン (Augustus de Morgan : 1806-1871) が友人にしてもらった実験では、 $a = 5$ 、 $l = 3$ としたとき、3204 回の試行で針が平行線と交わったのは 1213 回、交わったかどうかが不正確な場合が 11 回あったそうです ([1] p.262)。

このとき、不正確な 11 回のうちの半分が交わったものとして計算すると、

$$\frac{2 \times 3}{\pi \times 5} = \frac{1218.5}{3204} \text{ より、 } \pi = \frac{6}{5} \times \frac{3204}{1218.5} \doteq 3.1553549446$$

ということになります。また、不正確な 11 回をすべて交わったものとして計算すると、

$$\pi = \frac{6}{5} \times \frac{3204}{1224} = \frac{267}{85} \doteq 3.1411764706$$

という結果になります。

一方、不正確な 11 回をすべて交わっていないものとする、

$$\pi = \frac{6}{5} \times \frac{3204}{1213} = \frac{19224}{6065} \approx 3.1696619951$$

ですね。

問 6 天文学者ウォルフ (Johann Rudolf Wolf : 1816–1893) は、針を 5000 回投げたとき、2532 回平行線と交わったというデータを得た。このことを基に π の近似値を求めなさい。ただし、 $2a = 45$ mm , $2l = 36$ mm である ([12] p.112)。

円周率 π は、はじめに述べたとおり、小数表示では循環しない無限小数になりますが、小数点以下に 0 から 9 までの数字がどれくらい出現するかを調べてみると、次のようになります。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500 位まで	45	59	53	51	53	50	48	36	53	52
1000 位まで	93	116	103	102	93	97	94	95	101	106

このように、小数第 500 位まででは 7 がやや少ないようで、小数第 1000 位まででは 1 がやや多いようですが、大体どの数字も平均的に出現しています。

これは乱数における出現率ではなく、特定の値における出現率ですから、当然というよりむしろ自然界の不思議といえるのではないのでしょうか。でも、これなら、出現率だけからいうと、 π の小数表示を乱数として使えちゃう？

参考文献

- [1] 平山 諦「改訂新版 円周率の歴史」, 大阪教育図書, 1980 (昭和 55)
- [2] 高崎 昇「古代エジプトの数学」, 総合科学出版, 1977 (昭和 52)
- [3] M. リュッタン (矢島 文夫・訳)「バビロニアの科学」, 白水社 (文庫クセジュ), 1962 (昭和 37)
- [4] 室井 和男「バビロニアの数学」, 東京大学出版会, 2000 (平成 12)
- [5] 田村 松平 (責任編集)「ギリシアの科学」, 中央公論社 (世界の名著 9), 1972 (昭和 47)
- [6] 藪内 清 (責任編集)「中国天文学・数学集」, 朝日出版社 (科学の名著 2), 1980 (昭和 55)
- [7] 矢野 道雄 (責任編集)「インド天文学・数学集」, 朝日出版社 (科学の名著 1), 1980 (昭和 55)
- [8] 林 隆夫「インドの数学 ゼロの発明」, 中央公論社 (中公新書 1155), 1993 (平成 5)
- [9] 近藤 洋逸「数学の誕生 - 古代数学史入門 -」, 現代数学社, 1977 (昭和 52)
- [10] G. ジョーゼフ (垣田 高夫, 大町 比佐栄・訳)「非ヨーロッパ起源の数学」, 講談社 (講談社ブルーバックス), 1996 (平成 8)
- [11] 小林 昭七「円の数学」, 裳華房, 1999 (平成 11)
- [12] 武隈 良一「確率」, 培風館 (現代数学レクチャーズ A-3), 1978 (昭和 53)
- [13] Victor J. Katz(ed.), *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam. A Sourcebook*, Princeton U. P., 2007