4　1次方程式・連立方程式

まず，例題を挙げましょう。

「会費として1人2000円集めると6000円不足し，2500円集めると3人分余るという。この会の会員は何人か。また，会費は全部でいくら必要か。」

この問題は通常次のように解かれます。

〔解1〕

2500円だと3人分余るのだから

余りは $2500 \times 3 = 7500$ 円

2000円だと6000円足りないのだから

$(7500 + 6000) \div (2500 - 2000)$

$= 13500 \div 500 = 27$

で，会員は27人

会費は $2000 \times 27 + 6000$

$= 60000$ 円必要である

〔解2〕

会員を x 人とすると，

集める会費について

$2000x + 6000 = 2500(x - 3)$

となる

この式から $500x = 13500$ より $x = 27$

だから，会員は27人

会費は $2000 \times 27 + 6000$

$= 60000$ 円必要である

この例題の〔解2〕に現れた $2000x + 6000 = 2500(x - 3)$ のように，定数値と未知数 x の1次の項だけを含んだ等式を1次方程式といいます。1次方程式という言葉は使わなくても，小学校以来〔解1〕のような方法でいろいろな問題を扱ってきました。

方程式を等式として成り立たせるような x の値をその方程式の「**解**」といい，解を求めることを「解く」というのでしたね。

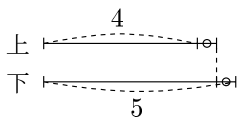
もう1つ例題を挙げましょう。

「ある川には20 km離れたA地点とB地点に船着場がある。このAB間を行くのに，上るときは5時間，下るときは4時間かかる船がある。この船の静水での速さはどれくらいか。また，川の流れの速さはどれくらいか。」

〔解1〕

上りの速さは $20 \div 5 = 4$ (km/時)

下りの速さは $20 \div 4 = 5$ (km/時)



だから川の流れの速さは

$(5 - 4) \div 2 = 0.5$ (km/時)

静水での船の速さは

$4 + 0.5 = 4.5$ (km/時)

〔解2〕

静水での船の速さを x (km/時)，

川の流れの速さを y (km/時) とすると，

$$\begin{cases} 5(x - y) = 20 \\ 4(x + y) = 20 \end{cases}$$

となる

この式から $x = 4.5$，$y = 0.5$

だから，静水での船の速さは 4.5 (km/時)

川の流れの速さは 0.5 (km/時)

この例題の〔解2〕にあるような，未知数 x，y を含んだ等式の組を連立方程式［より正確には2元1次連立方程式］といいます。連立方程式についても中学校で学んでいます。

1次方程式や連立方程式は古くから扱われてきました。ここではその様子を見てみましょう。

(1)　古代エジプト

古代エジプトの数学はリンド・パピルスなどによって知ることができます。

リンド・パピルスには 1 次方程式に相当する問題が載せられています。そこでの解法は (現代では)「**仮定法**」(method of false position) と呼ばれている方法で，それは

① 真の値ではないかも知れないことを承知のうえで，未知数を特定の値と仮定し，

② その値に対して与えられた演算を施してみて，

③ その演算の結果と題意とを比較して，比例法によって真の値を求める，

という方法です。

それでは例を挙げましょう (［1］pp.80–81)。

「例題 25　ある数とその $\overline{2}$ を加えると 16 になるという。ある数は何か。」

この問題に対するリンド・パピルスの解答は次のとおりです。［右部は解説］

ある数を 2 と仮定せよ。

✓	1	2
✓	$\overline{2}$	1
	和	3

まず，未知数の値を $\hat{x}=2$ と仮定します。$\overline{2}=\frac{1}{2}$ 倍したときに整数になる値を選んだのでしょう。

このとき，$\hat{x}+\frac{1}{2}\hat{x}=2+1=3$ となります。

16 を得るために 3 に掛けるべき数を，
2 に掛けると求める数を得る。

✓	1	3
	2	6
✓	4	12
	$\overline{\overline{3}}$	2
✓	$\overline{3}$	1
	和 5 $\overline{3}$	

仮定値 2 に対する和 3 が指定された和 16 になるようにするのだから，$3\times h=16$ となるような h を 2 に掛ければよいといっています。

すなわち「 3 : 16 = 2 : 解 」ということです。

$3\times h=16$ となるような h を求めてみて，

$h=5\ \overline{3}=5+\frac{1}{3}$ となることが示されます。

	1	5 $\overline{3}$
✓	2	10 $\overline{\overline{3}}$

そこで，$2\times 5\ \overline{3}=2\times(5+\frac{1}{3})$ を計算して，

$10\ \overline{\overline{3}}=10+\frac{2}{3}$ が解だといっています。

ゆえに求める答は 10 $\overline{\overline{3}}$ 。

$\overline{2}$	5 $\overline{3}$
和	16

最後に検算をして，$10\ \overline{\overline{3}}=10+\frac{2}{3}$ が解であることを確かめています。

問 1　この「例題 25」を現代の私たちが通常用いるような方法で解きなさい。

古代エジプトでは未知数を表す言葉として「アハ (aha)」あるいは「ハウ (hau)」が用いられていました。そのため，方程式の解 x を求める (ことに相当する) ような問題をハウ問題ということがあります。

古代エジプトでは，小数は使われていませんでしたし，分数も ($\overline{\overline{3}} = \dfrac{2}{3}$ 以外は) 単位分数しか用いられませんでしたから，1 次方程式については解法そのものよりも解を求めるための分数計算の方が大変だったろうと思われます。

例として「例題 33」を挙げましょう (［1］pp.95–97)。

「例題 33　ある数とその $\overline{\overline{3}}$ ，$\overline{2}$ ，$\overline{7}$ の和が 37 になるという。ある数を求めよ。

37 を得るように $1\,\dfrac{2}{3}\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{7}$ に掛けよ。

	1	$1\ \overline{\overline{3}}\ \overline{2}\ \overline{7}$
	2	$4\ \overline{3}\ \overline{4}\ \overline{28}$
	4	$9\ \overline{6}\ \overline{14}$
	8	$18\ \overline{3}\ \overline{7}$
✓	16	$36\ \overline{\overline{3}}\ \overline{4}\ \overline{28}$

$\dfrac{2}{3}$ ，$\dfrac{1}{4}$ 及び $\dfrac{1}{28}$ を 42 に適用すれば

	1	42
✓	$\overline{\overline{3}}$	28
	$\overline{2}$	21
✓	$\overline{4}$	$10\ \overline{2}$
✓	$\overline{28}$	$1\ \overline{2}$

和は 40 である。故に残りは 2 すなわち 42 の $\dfrac{1}{21}$ である。

$1\,\dfrac{2}{3}\,\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{7}$ を 42 に適用すれば 97 となるから，最初の乗法を継続すれば

	$\overline{97}$	$\overline{42}$ すなわち 42 の部分と考えると 1
✓	$\overline{56}\ \overline{679}\ \overline{776}$	$\overline{21}$ すなわち 42 の部分と考えると 2

この $\dfrac{1}{21}$ は既に前に得た積に加えると 37 となる。

故に求める数は $16\,\dfrac{1}{56}\,\dfrac{1}{679}\,\dfrac{1}{776}$ である。」

この「例題 33」は $x + \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{7}x = 37$ ということですから，現代の私たちならば

$$\frac{97}{42}x = 37 \text{ より } x = 37 \div \frac{97}{42} = \frac{1554}{97} = 16 + \frac{2}{97}$$

とするところです。

これから，古代エジプト人は次のように解いていたことが分かります。すなわち，……

問題 $x+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{7}x=37$ ，すなわち，$\left(1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{7}\right)x=37$ に対して，

① まず，$\left(1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{7}\right)$ の整数倍で 37 に近い値を見つけてみると，

$$\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)\times 16=36+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{28}=\frac{1552}{42}$$

となります。

② このとき，与えられた値 37 に不足する分は $37-\dfrac{1552}{42}=\dfrac{2}{42}=\dfrac{1}{21}$ ですから，次に

$$\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)y=\frac{1}{21}$$

となる値 y を見つけることになります。

そこで，3 ，2 ，7 の最小公倍数 42 について見てみると，

$$\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)\times 42=97$$

となることから，$\left(1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{7}\right)\times\dfrac{1}{97}=\dfrac{1}{42}$ となります。

ですから，$\dfrac{1}{21}$ を得るためには

$$\frac{1}{21}=\frac{1}{42}\times 2=\left\{\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)\times\frac{1}{97}\right\}\times 2$$

とすればよいことになります。

③ 以上によって，

$$\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\right)\times\left(16+\frac{2}{97}\right)=\frac{1552}{42}+\frac{2}{42}=\frac{1554}{42}=37$$

となりますから，求める「ある数」は $16+\dfrac{2}{97}$ となります。

なお，$\dfrac{2}{97}$ は「$\dfrac{2}{n}$ 表」によって単位分数の和に分解します。

このように見てみると，古代エジプト人はなんと大変な計算をしていたのだろうと思ってしまいます。

問 2 次の「例題 29」(［1］p.85) を現代の私たちの方法で解きなさい。

「例題 29 ある数にその $\dfrac{2}{3}$ を加え，またその和の $\dfrac{1}{3}$ を加える。次に全部の和の $\dfrac{1}{3}$ を求めると 10 であるという。ある数を求めよ。」

(2)　古代中国

古代中国における方程式の取り扱いを『九章算術』から見てみましょう。

古代中国の数学書『九章算術』は (その名のとおり) 9 章からなっていて，その第 7 章「盈不足」及び第 8 章「方程」において方程式を扱っています。
『九章算術』に優れた注を残した魏の劉徽 (りゅうき : 生没年不詳) は，次のように述べています (［2］pp.203–204，p.220)。

盈不足については，
「劉徽註 ——「盈」は，朓 (跳) という意味であり，「不足」は，朒 (縮) という意味である。そして出した率 (「所出率」) は，仮定を意味する。また，余り数と不足数をたがいに両設定に掛けるのは，「斉同術」を行おうとしてである。」

斉同術：分数の加減において，通分によって共通の分母とすることを「同」といい，通分するときに各分数の分子に他の分数の分母を掛けることを「斉」というようです。例えば，$\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{5}$ の計算において $\dfrac{1\times 5}{3\times 5}+\dfrac{2\times 3}{5\times 3}$ とするとき，1×5 や 2×3 が斉で，3×5 や 5×3 が同となります。

方程については，
「劉徽註 ——「程」は課程という意味である。群物がさまざまに入りまじれば，さまざまの数の並び方でその実情を告げる。ここで各行が比率をなすようにすれば，二物は二程，三物は三程のようにみな物の数だけ程をもち，並んで行をなすから，この計算法を「方程術」と名付ける。もちろん各行に，まったく同じ数が並ぶことなどなく，かつそれぞれより所があって並べられるのである。またこの計算法は，方程類型問題の総術である。しかも空言を用いては明らかにしがたい。」

まず，第 7 章「盈不足」から例を挙げましょう (［2］pp.203–205)。

「巻第 7 問題 4　いま共同で牛を買う。7 家ごとに 190 銭を出すと 330 銭不足し，9 家ごとに 270 銭を出すと 30 銭余る。問う，家数と牛の価格は，それぞれいくらか。

答，126 家。3750 銭。

< 計算法 >　おのおのが出した率を置き，その下に余り数，不足数を置く。余り数，不足数をたがいにおのおのが出した率に掛け，加え合わし「実」(被除数) とする。余り数と不足数を加え合わし，「法」(除数) とする。「実」を「法」で割る。

もし分数部分があれば，先に通分しておく。

共同で物を買う場合は，おのおのが出した率を置き，多い方から少ない方を引く。その余りで「法」「実」を約すと，「実」は物の価格であり，「法」は人数である。

< 別の計算法 >　余り数と不足数を加え合わし，「実」とする。おのおのが出した率のうち，多い方から少ない方を引き，余りを「法」とする。「実」を「法」で割り，人数を得る。この値におのおのが出した率を掛け，余る場合では余り数を引き，不足する場合では不足数を加えると，物の価格である。」

「計算法」によれば $\cdots\cdots$

「7 家ごとに 190 銭」ですから 1 家あたりは $\dfrac{190}{7}$ 銭となります。

また「9 家ごとに 270 銭」ですから 1 家あたりは $\dfrac{270}{9}=30$ 銭で，これらが「率」です。

これらの値に余り数「30 銭」と不足数「330 銭」をそれぞれ掛けると，

$\dfrac{190}{7} \times 30 = \dfrac{5700}{7}$, $30 \times 330 = 9900$

そして，これらの値を加えた $\dfrac{5700}{7} + 9900 = \dfrac{75000}{7}$ が「実」です。

さらに，余り数と不足数を加えた $330 + 30 = 360$ が「法」です。

「実」を「法」で割ると $\dfrac{75000}{7} \div 360 = \dfrac{75000}{2520} = \dfrac{625}{21}$ 　(これはこの問題では不要?)

となり，出した「率」の差をとると $30 - \dfrac{190}{7} = \dfrac{20}{7}$ となります。

それで，牛の価格は $\dfrac{75000}{7} \div \dfrac{20}{7} = 3750$ ，家の数は $360 \div \dfrac{20}{7} = 126$

$\left(3750 = \dfrac{625}{21} \times 126\right.$ となっています。［下の ④ に相当］$\left.\right)$

以上が「計算法」なのですが，これを文字式で表すと次のようになります。

家の数を x 家，牛の価格を y 銭とし，「率」を a ，c ，「不足数」，「余り数」をそれぞれ b ，d $(b > 0$ ，$d > 0)$ とすると，

$$\begin{cases} y = ax + b & \cdots ① \\ y = cx - d & \cdots ② \end{cases}$$

定数項を消去するために，① $\times d$ ，② $\times b$ を作れば［たがいに掛け］

$$\begin{cases} dy = adx + bd \\ by = bcx - bd \end{cases}$$

となりますから，これらの辺々を加えて［加え合わし］

$$(d + b)y = (ad + bc)x \qquad \cdots ③$$

となり，この右辺の x の係数 $(ad + bc)$ が「実」で，左辺の y の係数 $(d + b)$ が「法」ということです。

また，③ から $y = \{(ad + bc) \div (d + b)\}\, x = \dfrac{ad + bc}{d + b}\, x \qquad \cdots ④$

一方，① − ② を作ると $0 = (a - c)x + (b + d)$ ですから

$$(c - a)x = (b + d) \text{ より } x = \frac{b + d}{c - a} \qquad \cdots ⑤$$

$(c - a)$ は「率の差」ですから，x は ⑤ より「法」÷「率の差」で求められ，

④ ，⑤ より $y = \dfrac{ad + bc}{c - a}$ となりますから，y は「実」÷「率の差」で求められることになります。

$\left(y\right.$ は $y = \dfrac{ad + bc}{d + b} \times x$ とせず，$y = (ad + bc) \div (c - a)$ としています。$\left.\right)$

なお「別の計算法」だと $\cdots\cdots$

$$ax + b = cx - d \quad \text{より} \quad (c - a)x = (b + d) \quad \text{だから} \quad x = \frac{b + d}{c - a}$$

となります。

「計算法」に示された解法はちょっと面倒なやり方をしているように見えますが，アラビアの数学書にも見られる方法だそうで，複仮定法 (method of double false position) と呼ばれることがあります。上の表現で「率」が仮定された数値と見なされます。

次に，『九章算術』第 8 章からの例を挙げましょう（［2］pp.220–222)。

「巻第 8 問題 1　いま上禾3 たばと中禾 2 たばと下禾 1 たばでは，実は 39斗であり，上禾 2 たばと中禾 3 たばと下禾 1 たばでは，実は 34 斗であり，上禾 1 たばと中禾 2 たばと下禾 3 たばでは，実は 26 斗である。問う，上中下禾の実は，1 たばそれぞれいくらか。

答，上禾 1 たば，9 斗と 4 分の 1 斗。
　中禾 1 たば，4 斗と 4 分の 1 斗。
　下禾 1 たば，2 斗と 4 分の 3 斗。

＜計算法＞　上禾 3 たば，中禾 2 たば，下禾 1 たば，実 39 斗を右行に置く。中行，左行の禾も，右行と同じように並べる。右行の上禾をあまねく中行に掛け，右行で直ちに除く。

またあまねく次の行に掛け，右行で直ちに除く。

次に中行の中禾の余りをあまねく左行に掛け，中行で直ちに除く。

左行の下禾に余りがあれば，上 (下禾のたば数) を「法」(除数) とし，下 (実の量) を「実」(被除数) とする。この「実」は下禾の「実」である。

中禾を求めるには，「法」の中行を最下の「実」(定数項) に掛け，これから下禾の「実」を除く。

余りを中禾のたば数で割ると，中禾の「実」である。

上禾を求めるには，また「法」を右行の最下の「実」に掛け，これから下禾の「実」と中禾の「実」を除く。

余りを上禾のたば数で割ると，上禾の「実」である。「実」を「法」で割り，それぞれの斗数を得る。」

「計算法」では次のようにして解を求めています。

$$\boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \text{上} \\ 2 & 3 & 2 & \text{中} \\ 3 & 1 & 1 & \text{下} \\ 26 & 34 & 39 & \text{実} \\ \text{左} & \text{中} & \text{右} & \end{array}} \xrightarrow{\text{中}\times 3} \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 6 & 3 & \text{上} \\ 2 & 9 & 2 & \text{中} \\ 3 & 3 & 1 & \text{下} \\ 26 & 102 & 39 & \text{実} \\ \text{左} & \text{中} & \text{右} & \end{array}} \xrightarrow{\text{中}-\text{右}\times 2} \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 3 & \text{上} \\ 2 & 5 & 2 & \text{中} \\ 3 & 1 & 1 & \text{下} \\ 26 & 24 & 39 & \text{実} \\ \text{左} & \text{中} & \text{右} & \end{array}}$$

$$\xrightarrow{\text{左}\times 3} \boxed{\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 3 & \text{上} \\ 6 & 5 & 2 & \text{中} \\ 9 & 1 & 1 & \text{下} \\ 78 & 24 & 39 & \text{実} \\ \text{左} & \text{中} & \text{右} & \end{array}} \xrightarrow{\text{左}-\text{右}} \boxed{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 3 & \text{上} \\ 4 & 5 & 2 & \text{中} \\ 8 & 1 & 1 & \text{下} \\ 39 & 24 & 39 & \text{実} \\ \text{左} & \text{中} & \text{右} & \end{array}}$$

$$\xrightarrow{\text{左}\times 5} \boxed{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 3 & \text{上} \\ 20 & 5 & 2 & \text{中} \\ 40 & 1 & 1 & \text{下} \\ 195 & 24 & 39 & \text{実} \\ \text{左} & \text{中} & \text{右} & \end{array}} \xrightarrow{\text{左}-\text{中}\times 4} \boxed{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 3 & \text{上} \\ 0 & 5 & 2 & \text{中} \\ 36 & 1 & 1 & \text{下} \\ 99 & 24 & 39 & \text{実} \\ \text{左} & \text{中} & \text{右} & \end{array}}$$

ここで，下禾の余り (たば数) 36 が「法」で，実の量 99 が「下禾の実」となります。

$$\xrightarrow{\text{中}\times 36} \boxed{\begin{array}{rrrc} 0 & 0 & 3 & \text{上} \\ 0 & 180 & 2 & \text{中} \\ 36 & 36 & 1 & \text{下} \\ 99 & 864 & 39 & \text{実} \\ \text{左} & \text{中} & \text{右} & \end{array}} \xrightarrow{\text{中}-\text{左}} \boxed{\begin{array}{rrrc} 0 & 0 & 3 & \text{上} \\ 0 & 180 & 2 & \text{中} \\ 36 & 0 & 1 & \text{下} \\ 99 & 765 & 39 & \text{実} \\ \text{左} & \text{中} & \text{右} & \end{array}} \xrightarrow[180\div 36=5]{\text{中}\div 5} \boxed{\begin{array}{rrrc} 0 & 0 & 3 & \text{上} \\ 0 & 36 & 2 & \text{中} \\ 36 & 0 & 1 & \text{下} \\ 99 & 153 & 39 & \text{実} \\ \text{左} & \text{中} & \text{右} & \end{array}}$$

ここで，実の量 153 が「中禾の実」となります。

$$\xrightarrow{\text{右}\times 36} \boxed{\begin{array}{rrrc} 0 & 0 & 108 & \text{上} \\ 0 & 36 & 72 & \text{中} \\ 36 & 0 & 36 & \text{下} \\ 99 & 153 & 1404 & \text{実} \\ \text{左} & \text{中} & \text{右} & \end{array}} \xrightarrow{\text{右}-\text{中}\times 2-\text{左}} \boxed{\begin{array}{rrrc} 0 & 0 & 108 & \text{上} \\ 0 & 36 & 0 & \text{中} \\ 36 & 0 & 0 & \text{下} \\ 99 & 153 & 999 & \text{実} \\ \text{左} & \text{中} & \text{右} & \end{array}}$$

$$\xrightarrow[108\div 36=3]{\text{右}\div 3} \boxed{\begin{array}{rrrc} 0 & 0 & 36 & \text{上} \\ 0 & 36 & 0 & \text{中} \\ 36 & 0 & 0 & \text{下} \\ 99 & 153 & 333 & \text{実} \\ \text{左} & \text{中} & \text{右} & \end{array}}$$

ここで，実の量 333 が「上禾の実」となります。

そして，

$$\text{上禾} = \frac{333}{36} = 9 + \frac{9}{36}\ ,\quad \text{中禾} = \frac{153}{36} = 4 + \frac{9}{36}\ ,\quad \text{下禾} = \frac{99}{36} = 2 + \frac{27}{36}$$

となるのです。

上の「計算法」では最後の「表」を基に解を求めていますが，(上禾のたば数を x ，中禾のたば数を y ，下禾のたば数を z とします)

$$\boxed{\begin{array}{rrrc} 0 & 0 & 36 & \text{上} \\ 0 & 36 & 0 & \text{中} \\ 36 & 0 & 0 & \text{下} \\ 99 & 153 & 333 & \text{実} \\ \text{左} & \text{中} & \text{右} & \end{array}} \longrightarrow \begin{cases} 36x = 333 \\ 36y = 153 \\ 36z = 99 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{333}{36} \\ y = \frac{153}{36} \\ z = \frac{99}{36} \end{cases}$$

「法」と「下禾の実」を見つけた「表」のところから順次解を求めていくことができます。

$$\boxed{\begin{array}{rrrc} 0 & 0 & 3 & \text{上} \\ 0 & 5 & 2 & \text{中} \\ 36 & 1 & 1 & \text{下} \\ 99 & 24 & 39 & \text{実} \\ \text{左} & \text{中} & \text{右} & \end{array}} \longrightarrow \begin{cases} 3x + 2y + z = 39 & \cdots \text{①} \\ 5y + z = 24 & \cdots \text{②} \\ 36z = 99 & \cdots \text{③} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \text{③ から } z \\ \text{② から } y \\ \text{① から } x \end{cases}$$

古代中国の人たちはこのことには気づいていたのでしょうか。気づいていながら，あえて最後の「表」まで出したのでしょうか。

それでは,『九章算術』にある問題を実際に解いてみましょう。

問 3　「巻第 7 問題 1　いま共同で物を買う。各人が 8 銭出すと 3 銭余り，各人が 7 銭出すと 4 銭不足する。問う，人数と物の価格は，それぞれいくらか。」(［2］p.203)

問 4　「巻第 7 問題 6　いま共同で羊を買う。各人が 5 銭出すと 45 銭不足し，各人が 7 銭出すと 3 銭不足する。問う，人数と羊の価格は，それぞれいくらか。」(［2］p.205)

「＜計算法＞　おのおのが出した率を置き，その下に余り数，不足数を置く。余り数，不足数をたがいにおのおのが出した率に掛け，多い方から少ない方を引き，余りを「実」とする。2 個の余り数あるいは 2 個の不足数のうち，多い方から少ない方を引き，余りを「法」とする。「実」を「法」で割る。

もし分数部分があれば，先に通分しておく。

共同で物を買う場合は，おのおのが出した率を置き，多い方から少ない方を引く。その余りで「法」「実」を約すと,「実」は物の価格であり,「法」は人数である。

＜別の計算法＞　おのおのが出した率を置き，多い方から少ない方を引き，余りを「法」とする。2 個の余り数あるいは 2 個の不足数のうち，多い方から少ない方を引き，余りを「実」とする。「実」を「法」で割り，人数を得る。この値におのおのが出した率を掛け，余る場合では余り数を引き，不足する場合では不足数を加えると，物の価格である。」

問 5　「巻第 7 問題 8　いま共同で犬を買う。各人が 5 銭出すと 90 銭不足し，各人が 50 銭出すとちょうどである。問う，人数と犬の価格は，それぞれいくらか。」(［2］p.207)

「＜計算法＞　余り数あるいは不足数を「実」とする。おのおのが出した率を置き，多い方から少ない方を引き，余りを「法」とする。「実」を「法」で割り，人数を得る。物の価格を求めるには，ちょうどのときの出した率を人数に掛け，物の価格を得る。」

問 6　「巻第 8 問題 7　いま牛 5 匹と羊 2 匹の価格は，金 10 両である。また牛 2 匹と羊 5 匹の価格は，金 8 両である。問う，牛羊 1 匹の価格は，それぞれいくらか。」(［2］p.227)

問 7　「巻第 8 問題 2　いま上禾 7 たばから実 1 斗を損らし，これに下禾 2 たばを益すと，実 10 斗である。また下禾 8 たばに実 1 斗と上禾 2 たばを益すと，実 10 斗である。問う，上下禾の実は，1 たばそれぞれいくらか。」(［2］pp.222–223)

「劉徽註 —— 問の辞は損益で説くが，上禾 7 たばと下禾 2 たばでは，実は 11 斗であり，上禾 2 たばと下禾 8 たばでは，実は 9 斗であるというのに等しい。また「損らすのは益す」とは，実 1 斗を損らすと余りは 10 斗であり，いまその「実」全体を求めているのであるから，その損らした分を 10 斗に加えるということである。「益すのは損らす」とは，実 1 斗を益すと 10 斗であり，いま本来の「実」を求めているのであるから，その加えた分を 10 斗から引くということである。」

問 8　「巻第 8 問題 16　いま令 1 人と吏 5 人と従者 10 人では鶏 10 羽を食べ，令 10 人と吏 1 人と従者 5 人では鶏 8 羽を食べ，令 5 人と吏 10 人と従者 1 人では鶏 6 羽を食べる。問う，令，吏，従者は，それぞれ鶏をいくら食べるか。」(［2］p.231)

令が食べる鶏を x 羽，吏が食べる鶏を y 羽，従者が食べる鶏を z 羽とすると，

$$\begin{cases} x+5y+10z=10 & \cdots\ ① \\ 10x+y+5z=8 & \cdots\ ② \\ 5x+10y+z=6 & \cdots\ ③ \end{cases}$$

となりますが，「表」を使うときは式の順序を入れ換えて，次の表から始めると見やすいかも知れません。

1	5	10
5	10	1
10	1	5
10	6	8

(3)　インド

アールヤバタ (Āryabhaṭa : 476?–550?) の著した『アールヤバティーヤ』(*Āryabhaṭīya*) の第 2 章には次のような記述があります (［3］p.106)。

「第 2 章 30　(2 人の) 貨幣に換算された (商品と所持金の合計) が等しい時，商品 (の数) の差によって，2 人の金額の差を割る。(そこで) 得られる商は商品 (1 個の) 値段である。」

これは 1 次方程式に関する「公式」とみなすことができます。このことに関してバースカラ 1 世 (Bhāskara : 600?–680?) は，『アールヤバティーヤ』の注釈書『バーシャ』(*Bhāṣya* : 629 年) の中で次の例題を挙げているそうです (［3］pp.106–107)。

「ある人が 8 パラのサフランと 90 ルピーを，もう 1 人は 12 パラのサフランと 30 ルピーを持っていて，(2 人の手持ち財産が等しいとき) 2 人が同じ値段のサフランを買ったとすると，1 パラあたりの値段はいくらか。また 2 人の等しい財産はいくらか。」

この「例題」を現代の私たちが用いるような形で表すと ……

1 パラあたりの値段を x とすると，$8x + 90 = 12x + 30$ ということですから，

$$x = \frac{90 - 30}{12 - 8} = 15$$

となります。また各人の財産は $8 \times 15 + 90 = 210$ です。

以上のように，「2 人の金額の差」$(90 - 30)$ を，「商品 (の数) の差」$(12 - 8)$ で割れば，「商品 (1 個の) 値段」が分かることになります。

このような計算法が「第 2 章 30」の表す意味だというのです。

また，バースカラ 2 世 (Bhāskara : 1114?–1185?) の著した『リーラーヴァティー』(*Līlāvatī*) には，次のような記述があります (［3］pp.229–230)。

「第 4「種々の算法」II「任意数算法」

任意数算法 (における，可視類・残余類・差類等) に関する術則

［51］ 原数を任意に取り，出題の陳述通り，掛けたり割ったり，(自分または原数の) 部分を引いたり加えたりする。これ［その結果］で，顕現数に任意数を掛けたものを割れば，原数となる。これが任意数算法とよばれる。

［52］例題　(ある数を) 5 倍し自分の 3 分の 1 を引き，10 で割り，原数の 3 分の 1・半分・4 分の 1 を加えると，2 だけ少ない 70 になる。原数は何か。

書置 —— 乗数 5 自己部分・減 $\frac{1}{3}$ 除数 10 原数の部分・付加 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$ 顕現数 68

ここでは任意原数を 3 とする。5 を掛けると 15，自分の 3 分の 1 を引くと 10，10 で割ると 1 である。ここで，想定される原数 3 の 3 分の 1，半分，4 分の 1 (すなわち) $\frac{3}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{3}{4}$ を加えると $\frac{17}{4}$ になる。これで，顕現数 68 に任意数 3 を掛けたものを割ると，原数 48 が生ずる。

このように，例題において (未知の) 原数が何らかの数で掛けられたり割られたり，あるいは原数の部分が引かれたり加えられたりして (その結果として) 見えて［顕現して］いる場合，任意数を原数と想定したあと，そこ［問題］における出題の陳述通りに計算を行い，生じた数で，見えている数［顕現数］に任意数を掛けたものを割れば，商が (求める) 原数となる。」

ここでも「仮定法」が採られていることに注意してください。この解法を追ってみると ……

まず原数を 3 と仮定して，指示通りに計算してみると，

$$3 \xrightarrow{\times 5} 15 \xrightarrow{-15\times(1/3)} 10 \xrightarrow{\div 10} 1 \xrightarrow{+3\times(1/3)+3\times(1/2)+3\times(1/4)} \frac{17}{4}$$

この最後の値が 68 になるようにするのですから，$x : 68 = 3 : \dfrac{17}{4}$ より，

$x = 68 \times 3 \div \dfrac{17}{4} = 48$

一方，この問題を文字式によって表してみると ……

求める数 < 原数 > を x とすると，$\left(5x - \dfrac{1}{3} \times (5x)\right) \div 10 + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}x = 68$ 。

この方程式を解けば $x = 48$ 。

問 9　次の例題を解きなさい (［3］p.231)。

「［53］　ある人が，(自分の所有する) ある量の清らかな蓮の内から 3 分の 1 ，5 分の 1 ，6 分の 1 で (それぞれ) 三眼神，ハリ，太陽神を供養し，4 分の 1 でアールヤーを供養して，残った蓮 6 本を尊師の脚元に捧げた。彼の所有していたすべての蓮の本数をすぐに述べなさい。」

問 10　次の例題を解きなさい (［3］p.231)。

「［54］　ある巡礼人が，プラヤーガ［ヒンズー教の聖地］で所持金の半分を，またカーシーで残りから 9 分の 2 を (それぞれ) 布施し，道で (通行) 税のために残りの 4 分の 1 を与え，さらにガヤーで残りから 10 分の 6 を布施したら，63 ニシュカが残った。彼はそれをもって自分の家に向かった。彼の (最初の) 所持金の量を述べなさい。」

参考文献

［1］ 高崎 昇「古代エジプトの数学」，総合科学出版，1977 (昭和 52)
［2］ 藪内 清 (責任編集)「中国天文学・数学集」，朝日出版社 (科学の名著 2)，1980 (昭和 55)
［3］ 矢野 道雄 (責任編集)「インド天文学・数学集」，朝日出版社 (科学の名著 1)，1980 (昭和 55)
［4］ 「世界大百科事典 第 2 版」，日立システムアンドサービス，2004 (平成 16)