6　高次方程式の解法

まずは，例題からやってみましょう。

例題：方程式 $2x^5-11x^4+8x^3+31x^2-24x-18=0$ を解きなさい。

$f(x)=2x^5-11x^4+8x^3+31x^2-24x-18$ とおくと，
$f(3)=0$ となるから因数定理により $f(x)$ は $(x-3)$ で割り切れる。

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 3 & 2 & -11 & 8 & 31 & -24 & -18 \\ & & 6 & -15 & -21 & 30 & 18 \\ \hline & 2 & -5 & -7 & 10 & 6 & 0 \end{array}$$

このとき，$f(x)=(x-3)(2x^4-5x^3-7x^2+10x+6)$ となる。
そこで，$g(x)=2x^4-5x^3-7x^2+10x+6$ とおくと，
$g(3)=0$ より $g(x)$ は $(x-3)$ で割り切れて $g(x)=(x-3)(2x^3+x^2-4x-2)$ となる。

$$\begin{array}{r|rrrrr} 3 & 2 & -5 & -7 & 10 & 6 \\ & & 6 & 3 & -12 & -6 \\ \hline & 2 & 1 & -4 & -2 & 0 \end{array}$$

さらに，$h(x)=2x^3+x^2-4x-2$ とおくと，
$h\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ より $h(x)$ は $(2x+1)$ で割り切れて $h(x)=(2x+1)(x^2-2)$ となる。

$$\begin{array}{r|rrrr} -\dfrac{1}{2} & 2 & 1 & -4 & -2 \\ & & -1 & 0 & 2 \\ \hline & 2 & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

以上により，$f(x)=(x-3)(x-3)(2x+1)(x^2-2)$ となるから，$f(x)=0$ すなわち

$$2x^5-11x^4+8x^3+31x^2-24x-18=0$$
$$[\ (x-3)(x-3)(2x+1)(x^2-2)=0\ ]$$

の解は，$x=3$ (重解)，$-\dfrac{1}{2}$，$\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$ である。

高校では，この例題のように，因数分解に帰着できるような高次方程式の解法を学習します。その基礎となっているのは，次の因数定理です。

［**因数定理**］ x に関する整式 $f(x)$ について，

$$f\left(-\frac{b}{a}\right)=0 \iff f(x) \text{ は } ax+b \text{ で割り切れる}$$

2 次方程式には「解の公式」があって，どんな 2 次方程式もそれを利用すれば解くことができました。しかし，3 次方程式や 4 次方程式などの高次方程式に関しては「解の公式」を学習することはありません。

2 次方程式に関しては解の公式に相当する解法がバビロニアの時代から知られていました。ですから，人々が高次方程式の解の公式を探求することは当然といえば当然の成り行きです。

では，高次方程式の解の公式は見つけられたのでしょうか。

近世の様子を見る前に，結論をいってしまいましょう。

未知数 x についての方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

を n 次の代数方程式といいます。［係数 a_0，a_1，$\cdots$，a_n は，一般には複素数ですが，高校では主に有理数の場合を扱います。］そして，3 次以上の代数方程式を高次方程式といいます。また，代数方程式を満たす未知数 x の値をその代数方程式の解あるいは根といいます。

問題は，代数方程式の係数 a_0 ，a_1 ，$\cdots$ ，a_n を用いて，その代数方程式の解を「代数的に」計算することができる公式を見つけることです。

> 「代数的に」というのは，四則演算 (足し算，引き算，掛け算，割り算) 及び累乗根 (平方根，立方根，4 乗根，$\cdots$) のみを用いて，という意味です。ここのところが重要です。

そもそも代数方程式には必ず解があるのでしょうか。解が存在しないのならば公式ももちろん存在しない訳ですから，探求の意味がありません。でも，それは大丈夫で，それを保証するのが次の「代数学の基本定理」です。(解の公式の探求が盛んに行われていた頃にはこの事実は明らかになってはいませんでしたが $\cdots\cdots$。)

［**代数学の基本定理**］　複素数を係数とする (1 変数の) 代数方程式 $z^n + a_1z^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}z + a_n = 0$ は必ず複素数の解をもつ

この定理の厳密な証明はガウス (Carl Friedrich Gauss : 1777–1855) によって初めて得られましたので，この定理はガウスの定理といわれることがあります。

代数方程式 $z^n + a_1z^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}z + a_n = 0$ の解を α_1 ，α_2 ，$\cdots\cdots$ とするとき，その中に同じ値のものがあることがあります。そのような解を重解といいます。そして，m 個の同じ値があるとき，その解の重複度は m であるといいます。また，重複度が m の重解を m 重解ということがあります。［例えば，上の例題では $x = 3$ が重解で，その重複度は 2 ということです。］このとき，

複素数を係数とする n 次の代数方程式は重複度も含めてちょうど n 個の解をもつ

が成り立ちます。

さて，解の公式ですが $\cdots\cdots$

① 3 次方程式には解の公式が存在します。

これはカルダノ (Gerolamo Cardano : 1501–1576) が，タルタリア (Nicolō Tartaglia : 1500?–1557) から教えられたもの (から導いたもの) を，『大技法，あるいは代数の諸規則 (アルス・マグナ)』(*Artis Magnæ, sive de regulis algebraicis* : 1545 年) の中で公にしました。

② 4 次方程式には解の公式が存在します。

フェラリ (Lodovico Ferrari : 1522–1565) の発見したものが『大技法』に掲載されています。

③ 5 次以上の代数方程式には代数的な解の公式は存在しません。

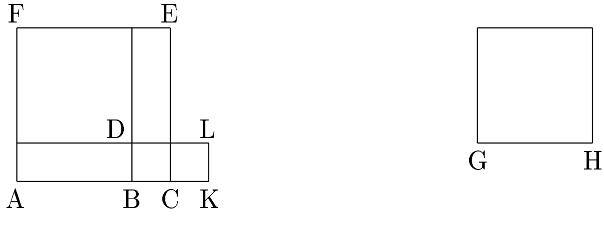
このことは 1824 年にアーベル (Niels Henrik Abel : 1802–1829) によって示されました。ガロア (Évariste Galois : 1811–1832) も，アーベルと独立に，1831 年の日付の論文でこのことを述べています。

(1)　カルダノ

カルダノはイタリアの内科医，自然哲学者，数学者で，「占いのための占星術は実践した。必要以上にしたし，困ったことには信じもした」(［8］p.155) ということです。また，「チェスやさいころ遊びに没頭しすぎた」(［8］p.74) ようです。数学，自然学などに関する著作を出版していますし，ヒポクラテス (Ἱπποκράτης (Hippokratēs)：前 460?–前 370?) の医学書についての注釈書も残しています。

3 次方程式の一般的解法を得ていたようですが，それは基本的にはタルタリアに負うものでした。『大技法』にはフェラリが発見した 4 次方程式の解法も掲載されています。

それでは，さっそく，3 次方程式の解法に関する部分を見てみましょう。(『大技法』第 11 章，［1］pp.112–115，［7］pp.96–99)

> 「ボロニアのスキピオ・デル・フェルロ (Scipione del Ferro：1465–1526) が 30 年ほどまえに，この章の 3 次方程式の解法を発見して，これをベニスのアントニオ・マリア・フィオル (Antonio Maria Fior：ラテン名フロリドス Antonius Maria Floridus) に伝えた。この人はかつてブレスキアのニコロ・タルタリアと論争をしたとき，ニコロもまたこの解法を発見していたということを言明している。われわれがニコロ・タルタリアにその解法の教示を乞うたとき，タルタリアはその解法を教えてくれたが，その証明は除かれていた。これを手がかりとして，われわれはその証明を探求し，そしてきわめてむずかしかったが，それを見出すことができた。それは次に述べるようなものである。
>
> 証明
>
> たとえば，GH の立方と辺 GH の辺の 6 倍が 20 に等しいとしよう。2 つの立方体 AE と CL をとり，その (体積の) 差が 20 に等しく，またその辺 AC と辺 CK との積が 2，すなわち未知数 (res) の係数の 3 分の 1，であるようにする。CK に等しく CB をとれば，残りの線分 AB が GH，すなわち「未知数」の値に等しいことを証明しようと思う。
>
> 
>
>
> 本書第 6 章定理 1 によって，1 辺 AC の立方体を，立体 AD，DC，DE，DF に分ければ，DC は BC の立方，DF は AB の立方，DA は CB と AB の平方との積の 3 倍，DE は AB と BC の平方との積の 3 倍である。AC と CK との積は 2 であるから，AC と CK の 3 倍との積は 6 であり，これは「未知数」の係数に等しい。したがって，AB と積 AC，CK の 3 倍との積は 6 res，すなわち AB の 6 倍に等しい。したがって AB，BC の積の 3 倍と AC との和は AB の 6 倍に等しい。しかし，AC の立方と CK の立方の差，同様に AC の立方と BC の立方との差 (仮定から BC は KC に等しい) は 20 である。そして第 6 章の定理 1 にもとづき，この差は立体 DA，DE と DF の和に等しく，この 3 つの立体の和が 20 に等しいこととなる。しかし BC を minus にとれば，AB の立方は，AC の立方，AC と CB の平方と

の積の 3 倍，BC の立方の minus，BC と AC の平方との積の 3 倍の minus との和に等しい。この証明の場合に，CB と AC の平方の積の 3 倍と AC と BC の平方の積の 3 倍との差は AB，BC，AC の積の 3 倍である。そしてすでに証明したことからこれは AB の 6 倍に等しい。AB の 6 倍に AC と BC の平方の 3 倍との積を加えたものは BC と AC の平方との積の 3 倍となる。さて CB と AC の平方の 3 倍との積は minus であるから，それに等しい残りは plus である。したがって CB と AC の平方の積の 3 倍，AC と CB の平方との積の 3 倍，AB の 6 倍との和は 0 となる。したがって明らかに立方 AC と立方 BC との差は，AC の立方，AC と CB の平方との積の 3 倍，CB と AC の平方との積の 3 倍 (minus)，BC の立方 (minus) と AB の 6 倍との和に等しい。立方 AC と CB の差が 30 であったから，上述の和が 20 に等しい。さらに，第 6 章の定理 2 によって，BC を minus とおけば，AB の立方は AC の立方，AC と BC の平方との積の 3 倍，minus BC の立方，minus BC と AC の平方との積の 3 倍の和に等しい。それゆえ，AB の立方と AB の 6 倍との和は 20 に等しい。何となれば，AB の立方と AB の 6 倍との和は AC の立方，AC と CB の平方との積の 3 倍，minus CB と AC の平方との積の 3 倍，minus CB の立方，AB の 6 倍の和に等しく，これはまた 20 に等しいからである。したがって，AB の立方と AB の 6 倍との和が 20 に等しく，また GH の立方と GH の 6 倍との和も 20 に等しい。したがって通常に考えても，またユークリッド (Euclid (Eukleides : Εὐκλείδης) : 前 300 頃) 原論 (Στοιχείωσις) 第 1 巻の命題 35 および第 11 巻の命題 31 からも，GH は AB に等しくなる。したがって GH は AC と CB との差にほかならない。しかし AC と CB，すなわち AC と CK は，それを 2 辺とする長方形の面積は，未知数の係数の 3 分の 1 に等しく，またこれらの 2 数の立方の差は方程式の数 (定数項) に等しい。以上のことから次の規則が成り立つ。

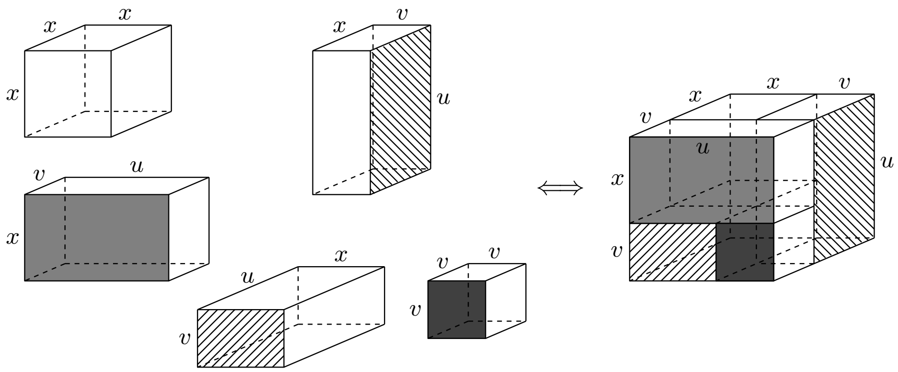
規則

未知数 (res) の係数の 3 分の 1 を立方し，これに方程式の数 (定数項) の半分の平方を加える。そしてその和の平方根を作る。方程式の数の半分を平方根に加えたもの，すなわち binomium と，同じ数を平方根から引いたもの，すなわち apotome をつくる。apotome の立方根を binomium の立方根から引けば，その残数が未知数の値である。

cubus & 6 positione，aequantur 20 [$x^3+6x=20$] という実例についていえば，6 の 3 分の 1 である 2 を立方し，8 とする。定数の半分である 10 を平方し，100 とする。100 と 8 とを加え，108 を得る。平方根 R 108 をつくる。定数の半分である 10 をこれに加えたものと，10 を引いたものとをつくる。すなわち binomium として R 108 p : 10，apotome として R 108 m : 10 を作る。そしてこれらの数の立方根をとり，apotome の立方根を，binomium の立方根から引けば，未知数の値として，次の式が得られる。R v : cub : R 108 p : 10 m : R v : cubica R 108 m : 10 [$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$]

ユークリッド『原論』第 1 巻命題 35 とは，
「同じ底辺の上にありかつ同じ平行線の間にある平行四辺形は互いに等しい。」
また，第 11 巻命題 31 とは，
「等しい底面上にある同じ高さの平行六面体は互いに等しい。」
なお，binomium (ἐκ δύο ὀνομάτων : 二項線分) は 2 線分の和の形で表される無理線分のこと (命題 36) で，apotome (ἀποτομή : 余線分) は 2 線分の差の形で表される無理線分のこと (命題 73) です。これらは『原論』第 10 巻に現れる用語 (のラテン語訳) です。

カルダノは $x^3+6x=20$ という実例に基づいて，3 次方程式の解の公式を幾何学的に「証明」し，次いで一般的な解法の「規則」を述べています。この解法を記号化してみましょう。



提示された 3 次方程式 $x^3+px=q$ に対して，$x=u-v$ とすると，$x+v=u$ ですから，

$$\begin{aligned} u^3 &= (x+v)^3 = x^3+3x^2v+3xv^2+v^3 = x^3+3xv(x+v)+v^3 \\ &= x^3+3xvu+v^3 \end{aligned}$$

となります。すなわち，1 辺 x の立方体 1 つ，3 辺が x ，v ，u である直方体 3 つ，および 1 辺が v の立方体 1 つで，1 辺が u の大きな立方体を 1 つつくることができます (上図参照)。

さて，$x^3+3xuv=u^3-v^3$ となりますから，与方程式 $x^3+px=q$ と比較すると，連立方程式

$$\begin{cases} 3uv=p \\ u^3-v^3=q \end{cases} \qquad \cdots\cdots \ (*)$$

から u ，v を求めれば，解 $x=u-v$ が得られることになります。

そこで，$X=u^3$ ，$Y=v^3$ とおくと，

$$\begin{cases} XY=\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 \\ X-Y=q \end{cases} \qquad \cdots\cdots \ (**)$$

となります。

まず，第 2 式より $Y=X-q$ ですから，これを第 1 式に代入すれば 2 次方程式 $X(X-q)=X^2-qX=\left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ となって

$$u^3=X=\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}+\frac{q}{2}$$

が得られます。これが「未知数の係数の 3 分の 1 を立方し，これに方程式の数 (定数項) の半分の平方を加え」て「方程式の数の半分を平方根に加えたもの」です。

次に，同じく第 2 式から $X=Y+q$ とすれば，

$$v^3=Y=\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}-\frac{q}{2}$$

が得られます。これが「同じ数を平方根から引いたもの」です。

従って，

$$x=u-v=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}-\frac{q}{2}}$$

となります。

以上がカルダノの解法の内容です。

カルダノの例 $x^3+6x=20$ では，$p=6$ ，$q=20$ ですから，

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{6}{3}\right)^3+\left(\frac{20}{2}\right)^2}+\frac{20}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{6}{3}\right)^3+\left(\frac{20}{2}\right)^2}-\frac{20}{2}}$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt{2^3+10^2}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{2^3+10^2}-10}$$

$$=\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

$$\left[=\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}+1\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{3}-1\right)^3}=\left(\sqrt{3}+1\right)-\left(\sqrt{3}-1\right)=2\ \right]$$

ということになります。

実際，$x^3+6x-20=(x-2)(x^2+2x+10)$ ですから，$x^3+6x-20=0$ の解は $x=2$ ，$-1\pm 3i$ となります。

カルダノが $\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$ を 2 と認識していたかどうか不明ですが，2 が解であることはすぐに分かりますから，そうと認識していただろうと思われます。

『大技法』第 12 章では，3 次方程式 $x^3=px+q$ が扱われています。そこでは，次のような「規則」が述べられます (［7］p.103)。

「x の係数の 3 分の 1 の立方が方程式の数の半分の平方より大きくないとき，後者から前者を引き，［引き去った］残りの平方根に方程式の数の半分を加え，また，同じ半分からそれ［残りの平方根］を引くと，いわゆる binomium および apotome が得られ，それらの立方根の和が x の値である。」

すなわち，3 次方程式 $x^3=px+q$ の解を

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

としています。はじめに述べられた条件は根号内が負数にならないための注意ですね。

その「証明」は $\cdots\cdots$

$x=u+v$ とすれば

$$u^3=(x-v)^3=x^3-3x^2v+3xv^2-v^3=x^3-3xv(x-v)-v^3=x^3-3xvu-v^3$$

となりますから，$x^3+px=q$ の場合と同様に［$(*)$ の代わりに $3uv=p$ ，$u^3+v^3=q$ となります。］，上述の「規則」が導かれます。

例えば，$x^3=6x+40$ の解は

$$x=\sqrt[3]{\frac{40}{2}+\sqrt{\left(\frac{40}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{40}{2}-\sqrt{\left(\frac{40}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{3}\right)^3}}$$

$$=\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\quad(=4)$$

となります。

カルダノは,『大技法』第 13 章で $x^3+q=px$ の形の 3 次方程式の解法を扱っています。このときの「規則」は次のようになっています ([7] p.106)。

> 「立方および [方程式の] 数 [の和] が 1 次の項に等しいとき，立方が同じ数の y および同じ [方程式の] 数 [の和] に等しい [方程式の] 解を見出す。これの半分の平方の 3 倍をとり，それを 1 次の項の係数から引くと，立方が y 足す [方程式の] 数に等しい [方程式の] 解の半分が加えられた [引き去られた] 残りの平方根，あるいは，それ [解 y の半分] から引かれた残りの平方根は，立方および [方程式の] 数 [の和] が x に等しい [方程式の] 解を与える。」

すなわち，方程式 $x^3+q=px$ に対して $y^3=py+q$ を考えます。これら 2 式の辺々を加えて整理すれば

$$x^3+y^3=p(x+y)$$

となりますが，この左辺を因数分解すれば

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=p(x+y)$$

となります。

ですから，$x+y\neq 0$ ならば $x^2-xy+y^2=p$ [すなわち $x^2-xy+y^2-p=0$] という 2 次方程式が得られますから，これから x が求められるという訳です。

すなわち，$y^3=py+q$ の解が分かっていれば，$x^3+q=px$ の解はそれを用いて

$$x=\frac{y}{2}\pm\sqrt{p-3\left(\frac{y}{2}\right)^2}$$

と導かれます。

例えば，$x^3+12=10x$ に対して $y^3=10y+12$ をつくり，その解 (の 1 つ) が $y=-2$ であると分かれば，$x^3+12=10x$ の解は

$$x=\frac{-2}{2}\pm\sqrt{10-3\left(\frac{-2}{2}\right)^2}=-1\pm\sqrt{10-3}=-1\pm\sqrt{7}$$

と求められるのです。[実際，$x^3+12=10x$ の解は $x=2$ ， $-1\pm\sqrt{7}$ です。]

続いて，カルダノは 3 次方程式の解を次のようにタイプ別に調べています。

(第 14 章)	$x^3=px^2+q$	(第 19 章)	$x^3+px^2=qx+r$
(第 15 章)	$x^3+px^2=q$	(第 20 章)	$x^3=px^2+qx+r$
(第 16 章)	$x^3+q=px^2$	(第 21 章)	$x^3+r=px^2+qx$
(第 17 章)	$x^3+px^2+qx=r$	(第 22 章)	$x^3+qx+r=px^2$
(第 18 章)	$x^3+qx=px^2+r$	(第 23 章)	$x^3+px^2+r=qx$

問 1　カルダノの方法で，$x^3+3x=10$ ， $x^3=6x+6$ の解を (それぞれ 1 つ) 求めなさい。

3 次方程式 $x^3+px^2+qx=r$ (第 17 章) については，

(1) $\dfrac{p^2}{3}=q$ ならば，$y^3=\left(\dfrac{p}{3}\right)^3+r$

(2) $\dfrac{p^2}{3}<q$ ならば，$y^3+\left(q-\dfrac{p^2}{3}\right)y=\left(q-\dfrac{p^2}{3}\right)\dfrac{p}{3}+\left(\dfrac{p}{3}\right)^3+r$

(3) $\dfrac{p^2}{3}>q$ ならば，

(i) $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3+r=\left(\dfrac{p^2}{3}-q\right)\dfrac{p}{3}$ ならば，$y^3=\left(\dfrac{p^2}{3}-q\right)y$

(ii) $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3+r>\left(\dfrac{p^2}{3}-q\right)\dfrac{p}{3}$ ならば，

$$y^3=\left(\frac{p^2}{3}-q\right)y+\left(\frac{p}{3}\right)^3+r-\left(\frac{p^2}{3}-q\right)\frac{p}{3}$$

(iii) $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3+r<\left(\dfrac{p^2}{3}-q\right)\dfrac{p}{3}$ ならば，

$$y^3+\left(\frac{p^2}{3}-q\right)\frac{p}{3}-\left\{\left(\frac{p}{3}\right)^3+r\right\}=\left(\frac{p^2}{3}-q\right)y$$

とした y についての 3 次方程式の解 y を用いて，$x=y-\dfrac{p}{3}$ とします（［7］p.123)。

例えば，$x^3+3x^2+9x=171$ については $\cdots\cdots$

$\dfrac{p^2}{3}=3<9=q$ ですから，$y^3+\left(9-\dfrac{3^2}{3}\right)y=\left(9-\dfrac{3^2}{3}\right)\dfrac{3}{3}+\left(\dfrac{3}{3}\right)^3+171$ ，すなわち $y^3+6y=178$ とします。

これは $y^3+py=q$ のタイプの方程式ですから，その解は

$$y=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{6}{3}\right)^3+\left(\frac{178}{2}\right)^2}+\frac{178}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{6}{3}\right)^3+\left(\frac{178}{2}\right)^2}-\frac{178}{2}}$$
$$=\sqrt[3]{\sqrt{7929}+89}-\sqrt[3]{\sqrt{7929}-89}$$

となります。

それゆえ，求める解は

$$x=y-\frac{p}{3}=\sqrt[3]{\sqrt{7929}+89}-\sqrt[3]{\sqrt{7929}-89}-1$$

となります。

また，カルダノは 3 次方程式 $x^3+21x=9x^2+5$ について，$x=5$ ，$2+\sqrt{3}$ ，$2-\sqrt{3}$ の 3 つの解をきちんと示しています（［7］p.133)。

すなわち，

$$\frac{p^2}{3}-q=\frac{9^2}{3}-21=6\ ,\ \ \frac{pq}{3}-\left\{r+2\left(\frac{p}{3}\right)^3\right\}=\frac{9\times 21}{3}-\left\{5+2\left(\frac{9}{3}\right)^3\right\}=4$$

より，補助的な 3 次方程式を $y^3+4=6y$ とします。

そして，この y についての 3 次方程式の解を $y=2$ ，$\sqrt{3}-1$ ，$-(\sqrt{3}+1)$ として，これらに $\dfrac{p}{3}=\dfrac{9}{3}=3$ を加えて，元の 3 次方程式の解を $x=5$ ，$2+\sqrt{3}$ ，$2-\sqrt{3}$ としています。

(2)　ヴィエート

ヴィエート (François Viète : 1540–1603) の『方程式の再検討および改良に関する 2 論文』(*De Aequationum Recognitione et Emendatione Tractus duo* : 1591 年) に述べられている 3 次方程式の解法を，現代表記によって，見てみましょう。

彼はこの論文の第 2 部にあたる『方程式の改良に関する第 2 の論文』(*De Emendatione Aequationum Tractatus Secundus*) の第 7 章で，3 次方程式 $x^3+3b^2x=2c^3$ および $x^3-3b^2x=2c^3$ を取り上げます (［6］pp.286–289)。

まず，$x^3+3b^2x=2c^3$ について ……

$x^3+3b^2x = 2c^3$ に対して，$y^2+xy=b^2$ とすると $x=\dfrac{b^2-y^2}{y}$ となりますから，

$\left(\dfrac{b^2-y^2}{y}\right)^3+3b^2\left(\dfrac{b^2-y^2}{y}\right)=2c^3$ より

$$\frac{b^6-3b^4y^2+3b^2y^4-y^6}{y^3}+\frac{3b^4-3b^2y^2}{y}=2c^3$$

となります。

この両辺に y^3 を掛けて整理すれば，$y^6+2c^3y^3=b^6$ となります。

このようにつくられた方程式は 2 次方程式 $(y^3)^2+2c^3(y^3)=(b^3)^2$ として表せますから，この 2 次方程式を解けば立方 y^3 の値が得られます。

すなわち，ヴィエートは $x^2+2px=q^2$ の解を $x=\sqrt{q^2+p^2}-p$ としていましたから，

$$d^3=\sqrt{(b^3)^2+(c^3)^2}-c^3$$

が得られます。

また，y の定め方から，この d について $x=\dfrac{b^2-d^2}{d}$ となります。

次に，$y^2-xy=b^2$ とすると，$\left(\dfrac{y^2-b^2}{y}\right)^3+3b^2\left(\dfrac{y^2-b^2}{y}\right)=2c^3$ となりますから，$y^6-2c^3y^3=b^6$ が得られます。

そして，この 2 次方程式 $(y^3)^2-2c^3(y^3)=(b^3)^2$ から，

$$g^3=\sqrt{(b^3)^2+(c^3)^2}+c^3$$

が得られます。［ヴィエートは $x^2-2px=q^2$ の解を $x=\sqrt{q^2+p^2}+p$ としていました。］

また，この g について $x=\dfrac{g^2-b^2}{g}$ となります。

さて，$x=\dfrac{b^2-d^2}{d}$ から $d^2+dx=b^2$ で，$x=\dfrac{g^2-b^2}{g}$ から $g^2-gx=b^2$ ですから，これら 2 式の辺々を引いて整理すれば，$(g+d)x=g^2-d^2$ となります。これから，$x=g-d$ という関係式が得られます。

以上のことから，$x^3+3b^2x=2c^3$ の解は

$$\begin{aligned}x&=\sqrt[3]{\sqrt{(b^3)^2+(c^3)^2}+c^3}-\sqrt[3]{\sqrt{(b^3)^2+(c^3)^2}-c^3}\\&=\sqrt[3]{\sqrt{(b^2)^3+(c^3)^2}+c^3}-\sqrt[3]{\sqrt{(b^2)^3+(c^3)^2}-c^3}\end{aligned}$$

となります。

次に，3 次方程式 $x^3-3b^2x=2c^3$ $(c \geqq b)$ について $\cdots\cdots$

係数についての条件は「提示された方程式の作用された［1 次の項の］係数の 3 分の 1 の立方は，定数［項］の平方の 4 分の 1 より小さくなければならない」と表現されています。

$x^3-3b^2x=2c^3$ に対して，$xy-y^2=b^2$ とすると $x=\dfrac{y^2+b^2}{y}$ となりますから，

$$\frac{y^6+3y^4b^2+3y^2b^4+b^6}{y^3}-\frac{3b^2y^2+3b^4}{y}=2c^3$$

となります。

この両辺に y^3 を掛けて整理すれば，$y^6+b^6=2c^3y^3$ となります。

このとき，この 2 次方程式 $(y^3)^2+(b^3)^2=2c^3(y^3)$ から，

$$y^3=c^3\pm\sqrt{(c^3)^2-(b^3)^2}$$

が得られます。［ヴィエートは $2px-x^2=q^2$ の解を $x=p\pm\sqrt{p^2-q^2}$ としていました。］

そこで，$d^3=c^3+\sqrt{(c^3)^2-(b^3)^2}$ ，$g^3=c^3-\sqrt{(c^3)^2-(b^3)^2}$ とすると，$x=\dfrac{d^2+b^2}{d}$ ，$x=\dfrac{g^2+b^2}{g}$ ですから，$dx=d^2+b^2$ ，$gx=g^2+b^2$ となります。

これら 2 式の辺々を引けば，$(d-g)x=d^2-g^2$ が得られます。

それゆえ，$d\neq g$ ならば，$x=d+g$ となります。

以上により，$x^3-3b^2x=2c^3$ $(c \geqq b)$ の解は

$$x=\sqrt[3]{c^3+\sqrt{\left(c^3\right)^2-\left(b^2\right)^3}}+\sqrt[3]{c^3-\sqrt{\left(c^3\right)^2-\left(b^2\right)^3}}$$

となります。

なお，$d=g$ ならば，$b=c$ ということですから，解は $x=2b$ となります。

例えば，$x^3+27x=16$ ［ $b=3$ ，$c=2$ ］について

$(b^2)^3=(9)^3=729$ ，$(c^3)^2=(8)^2=64$ ですから，解は

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{729+64}+8}-\sqrt[3]{\sqrt{729+64}-8}\quad[\fallingdotseq 0.5852]$$

となります。［実際，$x^3+27x=16$ の解の近似値は 0.585171 ，$-0.292586\pm5.220806\,i$ です。］

また例えば，$x^3-12x=54$ ［ $b=2$ ，$c=3$ ］について

$(b^2)^3=(4)^3=64$ ，$(c^3)^2=(27)^2=729$ ですから，解は

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{729-64}+27}-\sqrt[3]{\sqrt{729-64}-27}\quad[\fallingdotseq 4.8176]$$

となります。［実際，$x^3-12x=54$ の解の近似値は 4.817569 ，$-2.408785\pm2.325237\,i$ です。］

問 2　ヴィエートの公式に従って，$x^3+6x=2$ ，$x^3-81x=756$ の解を (それぞれ 1 つ) 求めなさい。

(3)　3 次方程式，4 次方程式の解法

それでは，カルダノの解法を基に一般の 3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0\ (a\neq 0)$ の「**解の公式**」を導いてみましょう。

その手順は次のとおりです：［ステップ 1］ 2 次の項を消去する（ $x\to z$ ）
［ステップ 2］ 新しい変数 u ， v を導入する（ $z=u+v$ ）
［ステップ 3］ 2 次方程式に帰着させる（ u ， $v\to X$ ， Y ）
［ステップ 4］ 解の公式を導く

［ステップ 1］

まず，$x=z-\dfrac{b}{3a}$ とおくと，$x^3=\left(z-\dfrac{b}{3a}\right)^3=z^3-\dfrac{b}{a}z^2+\dfrac{b^2}{3a^2}z-\dfrac{b^3}{27a^3}$ より，

$$ax^3=az^3-bz^2+\frac{b^2}{3a}z-\frac{b^3}{27a^2}$$

また，$x^2=\left(z-\dfrac{b}{3a}\right)^2=z^2-\dfrac{2b}{3a}z+\dfrac{b^2}{9a^2}$ より，$bx^2=bz^2-\dfrac{2b^2}{3a}z+\dfrac{b^3}{9a^2}$

それゆえ，
$$\begin{aligned}ax^3+bx^2+cx+d&=az^3-bz^2+\frac{b^2}{3a}z-\frac{b^3}{27a^2}\\&\quad+bz^2-\frac{2b^2}{3a}z+\frac{b^3}{9a^2}+cz-\frac{bc}{3a}+d\\&=az^3+\left(-\frac{b^2}{3a}+c\right)z+\left(\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d\right)\end{aligned}$$

です。ここで，

$$3p=\left(-\frac{b^2}{3a}+c\right)\div a=\frac{3ac-b^2}{3a^2}\qquad\left[\text{すなわち，}\ p=\frac{3ac-b^2}{9a^2}\right]$$

$$q=\left(\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d\right)\div a=\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}$$

とおけば，$ax^3+bx^2+cx+d=0$ は，$z^3+3pz+q=0$ となりますから，この 3 次方程式が解ければよいことになります。

［ステップ 2］

$z^3+3pz+q=0$ において，$z=u+v$ とおくと，

$$z^3=(u+v)^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3=u^3+3uv(u+v)+v^3=u^3+3uvz+v^3$$

より，$z^3-3uvz-(u^3+v^3)=0$ となります。

2 つの 3 次方程式 $z^3+3pz+q=0$ ，$z^3-3uvz-(u^3+v^3)=0$ の係数を比較すると，

$$\begin{cases}uv=-p & \cdots\cdots\ ①\\ u^3+v^3=-q & \cdots\cdots\ ②\end{cases}$$

です［これがカルダノの $(*)$ に相当する式です。］から，この 2 式 ① ，② を満たす u ，v が求められればよいことになります。

［ステップ 3］

そこで，$X=u^3$ ，$Y=v^3$ とおくと，

$$\begin{cases} XY = -p^3 & \cdots\cdots ③ \quad (①を3乗した) \\ X+Y = -q & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

となります［これがカルダノの (**) に相当する式です。］から，③，④ より X，Y は (解と係数の関係により) 2 次方程式 $t^2+qt-p^3=0$ の解となります。

この 2 次方程式を解くと $t=\dfrac{-q\pm\sqrt{q^2+4p^3}}{2}$ ですから，$X=\dfrac{-q+\sqrt{q^2+4p^3}}{2}$，$Y=\dfrac{-q-\sqrt{q^2+4p^3}}{2}$ とすることができます。

ところで，$u=\sqrt[3]{X}$，$v=\sqrt[3]{Y}$ ですから，

$$u=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}\ ,\ v=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}$$

となります。

［ステップ 4］

ステップ 3 より，

$$z=u+z=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}$$

ですから，これで［ステップ 1］の $z^3+3pz+q=0$ の解が求められたことになって，一般の 3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の (1 つの) 解

$$x=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}-\frac{b}{3a}$$

が得られます。$\left[\ p=\dfrac{3ac-b^2}{9a^2}\ ,\ q=\dfrac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}\ \right]$

この方法で 3 次方程式の解が 1 つ求められますが，実は，3 次方程式には解が 3 つあります。

残りの 2 つは 1 の立方根 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ を用いて，$\left(このとき\ \omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\ となります。\right)$

$\omega u+\omega^2 v-\dfrac{b}{3a}$，$\omega^2 u+\omega v-\dfrac{b}{3a}$ で与えられます。

例：$x^3-9x^2+39x-51=0$

$a=1$，$b=-9$，$c=39$，$d=-51$ ですから，

$$p=\frac{3ac-b^2}{9a^2}=\frac{3\cdot1\cdot39-(-9)^2}{9\cdot1^2}=4$$

$$q=\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}=\frac{2\cdot(-9)^3-9\cdot1\cdot(-9)\cdot39+27\cdot1^2\cdot(-51)}{27\cdot1^3}=12$$

したがって $\sqrt{q^2+4p^3}=\sqrt{12^2+4\times4^3}=20$ より，

$$u=\sqrt[3]{\tfrac{-12+20}{2}}=\sqrt[3]{4}\ ,\ v=\sqrt[3]{\tfrac{-12-20}{2}}=\sqrt[3]{-16}=-\sqrt[3]{16}$$

以上から，$x=z-\dfrac{b}{3a}=u+v-\dfrac{-9}{3\cdot1}=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{16}+3$ ［$\fallingdotseq 2.06756$］

［他の解は $\sqrt[3]{4}\,\omega-\sqrt[3]{16}\,\omega^2+3$，$\sqrt[3]{4}\,\omega^2-\sqrt[3]{16}\,\omega+3$ です。］

4 次方程式は『大技法』では第 39 章で扱われており，そこでカルダノは 4 次方程式を次のように分類しています (［7］p.237)。

1	$x^4 = bx^2 + ax + N$	11	$x^4 + bx^2 + ax = N$
2	$x^4 = bx^2 + cx^3 + N$	12	$x^4 + bx^2 + cx^3 = N$
3	$x^4 = cx^3 + N$	13	$x^4 + bx^2 + N = cx^3$
4	$x^4 = ax + N$	14	$x^4 + bx^2 + N = ax$
5	$x^4 + cx^3 = bx^2 + N$	15	$x^4 + N = cx^3 + bx^2$
6	$x^4 + ax = bx^2 + N$	16	$x^4 + N = cx^3$
7	$x^4 + cx^3 = N$	17	$x^4 + N = ax + bx^2$
8	$x^4 + ax = N$	18	$x^4 + N = ax$
9	$x^4 + bx^2 = cx^3 + N$	19	$x^4 + cx^3 + N = bx^2$
10	$x^4 + bx^2 = ax + N$	20	$x^4 + ax + N = bx^2$

そして，いくつかの例題を挙げて，その解法を示しています。また，その解法はフェラリによるものであることが明示されています。

ここでは，フェラリの考え方に基づいて，4 次方程式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ $(a \neq 0)$ の「**解の公式**」を導いてみましょう。まず，3 次の項を消去した上で，完全平方式を作り，2 つの 2 次方程式に帰着させるというのが大まかな流れです。

［ステップ 1］　$x = z - \dfrac{b}{4a}$ として，3 次の項を消去する。

$x = z - \dfrac{b}{4a}$ を $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ に代入すると

$$a\left(z - \frac{b}{4a}\right)^4 + b\left(z - \frac{b}{4a}\right)^3 + c\left(z - \frac{b}{4a}\right)^2 + d\left(z - \frac{b}{4a}\right) + e = 0$$

ですから，これを展開して整理すれば，

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0 \quad \cdots \quad ①$$

となります。ここで，p，q，r はそれぞれ次のとおりです。

$$p = \frac{-3b^2 + 8ac}{8a^2} \qquad q = \frac{b^3 - 4abc + 8a^2d}{8a^3}$$

$$r = \frac{-3b^4 + 16ab^2c - 64a^2bd + 256a^3e}{256a^4}$$

［ステップ 2］　① 式を完全平方の形になるようにする。

① 式を $z^4 = -pz^2 - qz - r$ と変形して，両辺に $2tz^2 + t^2$ (t は任意定数) を加えると，$z^4 + 2tz^2 + t^2 = -pz^2 - qz - r + 2tz^2 + t^2$ となりますから

$$(z^2 + t)^2 = (2t - p)z^2 - qz + (t^2 - r) \quad \cdots \quad ②$$

となります。

この右辺が完全平方式になるように t を選ぶには，右辺の 2 次式について 判別式 $= 0$ とすればよいですから，$D = q^2 - 4(2t - p)(t^2 - r) = 0$ として，この式を展開して整理すると

$$8t^3 - 4pt^2 - 8rt + (4pr - q^2) = 0 \quad \cdots \quad ③$$

となります。［この 3 次方程式 ③ を，4 次方程式 ① の **3 次分解方程式**といいます。］

［ステップ 3］　2 つの 2 次方程式に帰着させる。

3 次分解方程式 ③ の解を 1 つ求め，それを t_0 とすると，②より

$$(z^2+t_0)^2=(2t_0-p)z^2-qz+({t_0}^2-r)$$

ですから，

$$(z^2+t_0)^2=(2t_0-p)\left(z^2-\frac{q}{2t_0-p}z+\frac{{t_0}^2-r}{2t_0-p}\right)=(2t_0-p)\left(z-\frac{q}{2(2t_0-p)}\right)^2$$

となって，2 つの 2 次方程式

$$z^2+t_0=\pm\sqrt{2t_0-p}\left(z-\frac{q}{2(2t_0-p)}\right)$$

が得られます。

［ステップ 4］　2 次方程式の解から 4 次方程式の解を導く。

［ステップ 3］で得られた (z に関する) 2 次方程式

$$z^2+t_0=\sqrt{2t_0-p}\left(z-\frac{q}{2(2t_0-p)}\right)$$

$$z^2+t_0=-\sqrt{2t_0-p}\left(z-\frac{q}{2(2t_0-p)}\right)$$

をそれぞれ解いて z を求め，$x=z-\dfrac{b}{4a}$ とすれば，元の 4 次方程式の解が得られます。

例：$x^4-8x^3+25x^2-40x+25=0$

$a=1$ ，$b=-8$ ，$c=25$ ，$d=-40$ ，$e=25$ ですから，

$$p=\frac{8\times1\times25-3\times(-8)^2}{8\times1^2}=1$$

$$q=\frac{(-8)^3-4\times1\times(-8)\times25+8\times1^2\times(-40)}{8\times1^3}=-4$$

$$r=\frac{-3\times(-8)^4+16\times1\times(-8)^2\times25-64\times1^2\times(-8)\times(-40)+256\times1^3\times25}{256\times1^4}$$

$$=-3$$

となって，z に関する 4 次方程式 $z^4+z^2-4z-3=0$ が得られます。

この 4 次方程式の 3 次分解方程式は $8t^3-4t^2+24t-28=0$ です。

両辺を 4 で割った $2t^3-t^2+6t-7=0$ について解を求めると，$t_0=1$ が得られます。

この $t_0=1$ を用いて，$z^2+1=\pm\sqrt{2\times1-1}\left(z-\dfrac{-4}{2(2\times1-1)}\right)$ より，

$z^2+1=\pm(z+2)$ が得られます。

これらの 2 次方程式について，

まず，$z^2+1=z+2$ は $z^2-z-1=0$ より，$z=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}$

次に，$z^2+1=-(z+2)$ は $z^2+z+3=0$ より，$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}\,i}{2}$

よって，$x=z-\dfrac{-8}{4}=z+2$ ですから，

$$x=\frac{1\pm\sqrt5}{2}+2=\frac{5\pm\sqrt5}{2}\ ,\ x=\frac{-1\pm\sqrt{11}\,i}{2}+2=\frac{3\pm\sqrt{11}\,i}{2}$$

それでは実際に，3 次方程式，4 次方程式を解いてみましょう。

問 3　$x^3 - 30x^2 + 236x = 360$ を解きなさい。

問 4　$10x^2 + 20x - x^3 = 8$ を解きなさい。

問 5　$x^3 - 9x^2 + 36x - 80 = 0$ を解きなさい。

問 6　$x^3 + 6x^2 + 3x + 2 = 0$ の解を 1 つ求めなさい。

問 7　$x^4 + x^3 = 6x^2 + 15x + 9$ を解きなさい。

問 8　$x^4 + 4x + 8 = 10x^2$ を解きなさい。

問 9　$x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 4x + 7 = 0$ を解きなさい。

参考文献

[1] 中村 幸四郎「数学史 − 形成の立場から − 」，共立出版 (共立全書)，1981 (昭和 56)

[2] 中村 幸四郎「近世数学の歴史 − 微積分の形成をめぐって − 」，日本評論社，1980 (昭和 55)

[3] 安藤 洋美「高校数学史演習」，現代数学社，1999 (平成 11)

[4] 木村 俊一「天才数学者はこう解いた，こう生きた　方程式四千年の歴史」，講談社 (講談社選書メチエ 225)，2001 (平成 13)

[5] ユークリッド (中村 幸四郎，寺阪 英孝，伊東 俊太郎，池田 美恵・訳・解説)「ユークリッド原論」，共立出版，1971 (昭和 46)

[6] F. Viète (transl. by T. R. Witmer)，*The Analytic Art*，Dover，2006

[7] G. Cardano (transl. and ed. by T. R. Witmer)，*The Rules of Algebra* (*Ars Magna*)，Dover，2007

[8] G. カルダーノ (青木 靖三，榎本 恵美子・訳)「わが人生の書　— ルネサンス人間の数奇な生涯 —」，社会思想社 (現代教養文庫 1310)，1989 (平成元)