7　論理と証明

数学は論理的なあるいは演繹的な学問です。

> 数学が演繹的な体系であることはユークリッド (Euclid (Eukleides : Εὐκλείδης) : 前 300 頃) の『原論』(Στοιχείωσις) に見事に具現されています。紀元前 3 世紀頃に著された『原論』は，長い間論理的な著作の規範とされてきましたし，(そのすべてではないにしても) 学校教育の中で用いられもしました。
> 演繹的な体系ですから，数学的な言明は証明なしには認められないものです。[ただし，学校における数学ではその論理性を強調することはあまりありませんが ⋯⋯。] しかし，「証明」ということ自体やその基となっている論理体系についての考察が『原論』当時から行われていた訳ではありません。数学の基礎となる部分についての，すなわち「数学における」ではなく「数学についての」，研究が行われるようになったのは 19 世紀以降のことです。それは非ユークリッド幾何の発見や集合論におけるパラドックスの発生を契機とするものですが，そのことをここで詳しく述べる余裕はありません。また，(数学に関するのではなく) 一般的な論理学について調べていくと，哲学に関する要素が大きくなってきます。そのことについてもここでは触れません。

ブルバキ (Nicolas Bourbaki) の『数学原論』(*Éléments de Mathématique*) の第 1 巻『集合論』(*Théorie des ensembles* : 1966 年) は次のように始まります (［1］p.1)。

> 「ギリシャ人以来，数学とはすなわち証明である (qui dit mathématique dit démonstration : 文字通りなら,「数学を語るものは証明を語る」) ; 或る人々によれば，証明というものは，この言葉がギリシャ人から付与されたところの，そしてまたわれわれがここでそれに与えようとしている正確にしてかつ厳密なる意味においては，数学以外には見いだし得ないものなのではあるまいかとさえ考えられている。
>
> ⋯⋯
>
> 十分明晳(めいせき)な数学の文章はつねに，少数の規則のみによって規制を受ける構文法にしたがって並べられるほんの少数の確定した«言葉»のみを許容する或る約束的な言語の中に表現し得る : かかる文章は形式化されているといわれる。」

また，デデキント (Julius Wilhelm Richard Dedekind : 1831–1916) は『数とは何か，何であるべきか』(*Was sind und was sollen die Zahlen ?* : 1887 年) の「序文」において次のように述べています (［2］p.41)。

> 「証明できることは，科学においては証明なしに信頼すべきではない。この要請がこんなにも明白であるように思われるのに，私の信ずるところでは，もっとも単純な科学，すなわち数の理論を取り扱う論理学の部分，の基礎を研究するに当たってさえも，最近の叙述によってさえも決して満たされているとは見なせないのである。」

このように，数学において「証明」とは最も重要な概念の 1 つです。数学を数学たらしめているものといってもよいかも知れません。

学校における数学では，初等幾何における証明や等式・不等式の証明，命題とその真偽，必要条件・十分条件などについて学習します。しかし，証明の仕方や証明の仕組みなどについて系統的に学ぶことはありません。［唯一あるとすれば，数学的帰納法による証明の仕方でしょうか。］

証明と関係の深い「命題」についても，逆・裏・対偶という言葉は出てきますが，それらについて深く調べるということはあまりしません。

> 基礎となる事柄を明らかにして，それらを基に 1 つ 1 つの事実を演繹的に組み立てていくというのが数学のいき方です。そのときにどのような論理体系を用いるかが問題となります。その論理体系を研究するのが数理論理学という分野です。[数学的研究の対象としての論理学ももちろん記号化・形式化された状態で研究されますから，記号論理学ともいわれます。] そして，論理体系における証明の構造を研究する分野を特に証明論といっています。証明論は「数学についての」研究であるため，超数学 (metamathematics) といわれることがあります。
> また，現代の数学は多くの場合，集合の考えを基にしています。その集合について研究するのが集合論です。証明論や集合論などをあわせて数学基礎論と呼んでいます。(数学基礎論に数理論理学を含めることもあります。)

論理展開の例として，(あまり適切とはいえないかも知れませんが)「風が吹けば桶屋が儲かる」という言い回しを取り上げましょう。

風が吹くと砂ぼこりが舞い上がる
砂ぼこりが目に入って盲人が増える
盲人が三味線を買う
三味線に使うために猫の皮が必要で，猫が減る
猫が減るとネズミが増える
ネズミが桶をかじる
桶の修理が増え桶屋が儲かる

なんともヒドイ論理ですが，これを落語でやったらきっと面白いのでしょう。それはともかく，仮定となる事柄を基に，結論を導いていくというのが証明といわれるものです。

(ちゃんとした) 論証の例として，今度は等式の証明を挙げましょう。この事実は「加比の理」といわれ，比例に関する問題では結構よく使われます。

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}$ のとき，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\dfrac{pa+qc}{pb+qd}=\dfrac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}$ が成り立つ

〔証明〕 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=k\,(\neq 0)$ とおくと，$a=bk$ ，$c=dk$ ，$e=fk$

このとき，$\dfrac{pa+qc}{pb+qd}=\dfrac{p(bk)+q(dk)}{pb+qd}=\dfrac{(pb+qd)k}{pb+qd}=k$

また，$\dfrac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}=\dfrac{p(bk)+q(dk)+r(fk)}{pb+qd+rf}=\dfrac{(pb+qd+rf)k}{pb+qd+rf}=k$

となり，すべて k に等しくなるから，

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{e}{f}=\dfrac{pa+qc}{pb+qd}=\dfrac{pa+qc+re}{pb+qd+rf}$ が成り立つ〔証明終〕

それでは，論理や証明に関することを見ていきましょう。

(1)　古代ギリシア

数学は演繹的な体系ですが，数学が発生した頃からそうであった訳ではありません。今では古代ギリシアに先立って古代エジプトやバビロニアには高度な数学が存在していたことが明らかになっていますが，そこには「証明」の痕跡らしいものすら見つかっていません。

古代インドや古代中国にも数学が発達していましたが，それらの地域でも「証明」は見られません。証明という考え方が起こったのは古代ギリシアにおいてのみです。このことは「ギリシアの奇跡」といわれることがあるくらいです。

古代ギリシアにおいて，証明を伴った論証的な数学を始めたのはタレス (Thales (Θαλῆς)：前 640?–前 548?) であるといわれ，

円は直径によって 2 等分される。
二等辺三角形の両底角は相等しい。
2 直線が相交わるとき，その対頂角は相等しい。
2 角と 1 辺が互いに相等しい 2 つの三角形は合同である。
半円内の角は直角である。

などの業績が彼に帰されています (［3］pp.98–99)。また，ピュタゴラス (Pythagoras (Πυθαγόρας)：前 572–前 492) 学派の貢献も忘れる訳にはいきません。それは紀元前 6〜5 世紀頃のことです。

しかし，本当の意味での論証数学が成立するきっかけとなったのは，間接証明法の定型化であると考えられています。そこにはパルメニデス (Parmenidēs (Παρμενίδης)：前 544–前 501) やゼノン (Zenon (Ζήνων)：前 490?–前 429?) に代表されるエレア学派の人々が大きくかかわっていたのではないか，と思われています。

そして，それらがユークリッドの『原論』やアリストテレス (Aristotelēs (Ἀριστοτέλης)：前 384–前 322) の論理学に結実したのであろうと推測されています。

この辺の流れを伊東 俊太郎 (［3］p.191) は次のように図式化しています。

	↗	前 5 世紀の論証数学 ⟶	テアイテトス エウドクソス	の数学 ⟶		ユークリッド の『原論』
エレアの弁証法			↓		↘	↓
	↘	ソフィストの論争術 ⟶	プラトンの弁証法	⟶		アリストテレス の論理学

このエレア派が大きくかかわるという推測はハンガリーの数学史家サボー (Árpád Szabó：1913–2001) によって提唱されたものですが，成立の直接の契機を議論と説得が重要な意味を持ったギリシアの民主制社会に求める意見もあります (というか，こちらの方が有力だそうです)。

ユークリッド『原論』に見られる間接証明の例は後ほど挙げることにして，まずアリストテレスの論理学について見てみましょう。推論ということについて，彼は『分析論前書』(*Αναλυτικα Προτερα*) で次のように述べています (［4］pp.181–184)。

「前提［議論の出発点として論者が前に展開提示する陳述すなわち命題のこと］とは，まずなにかあるもの〔甲〕についてなにかあること〔乙〕を肯定しまたは否定する陳述であるが，またこの陳述は全

称［全体についての，普遍の］か，特称［ある部分においてだけの］か，不定称［全称とも特称ともいずれとも決定できないの］か，である。……

つぎに項とわたしが呼ぶのは，前提がそれへと分解されるもの，すなわち述語と，それについて述語が述べられる当のもの〔主語〕であって，(前提の形となるには，さらにこれらに)「である」とか「でない」とかが，付け加えられるものである。

また推論とは，そこにおいて，なにかあることどもが (前提として) 措定された場合に，これら措定されてあることどもより別のなにかあること〔結論〕が，これらがしかじかであるというまさにそのことに伴う結果として，必然に生じてくる論理方式である。……

さらに完全な推論とわたしが呼ぶのは，(推論の) 必然が (一目瞭然に) 明白にされるために，はじめに容認されたままのこと［前提］ども以外になにひとつ付け足す必要のない推論であるが，不完全な推論とは，(推論の必然が一目瞭然となるために) 一つないしはもっと多くのことどもを付け足して必要とする推論で，しかもこれらが，もともと設定して置かれていた項どもによって必然に導出されはするものの，前提どもによっては (前提としては) まだ容認されていない場合を言うのである。」(第 1 章)

このように述べた後，彼は推論の様式を分類していきます。(それはここでは割愛します。)

また，『分析論後書』($A\nu\alpha\lambda\upsilon\tau\iota\kappa\alpha\ \Upsilon\sigma\tau\epsilon\rho\alpha$) では，論証の構造などについて述べられています (［4］p.613，p.633)。［なお，彼は「論証とは知識的な推論をいう」(［4］p.617) として，推論と論証を区別しています。］

「思考のはたらきによる，すべての教授，すべての学習は，(学習者の内に) 予め存する認識から生まれてくる。これはそのすべての事例をひとつひとつ眺める時，明瞭である。実際，数学的な諸科学はこの方式で得られてくるし，その他の技術のそれぞれもまた同じである。(弁証論の) 論法も，それが推論によるものであるにせよ，帰納によるものであるにせよ，同じである。とうのは，これらの論法はいずれも予めひとに知られているところを用いて知を授けるものであって，前者，すなわち，推論によるものは (前提とするものを) 相手がすでに弁えているものと見なして，これを摂取，容認し，後者，すなわち，帰納によるものは個々のものが明白であるという理由によって，(個々のものに亙る) 全体的なものを証明するからである。」(第 1 章)

「論証的な知識が，こうして，必然なる原理から出発するものであるとし (何となれば，それについて知識があるものは，他ではありえないから)，また他面において，事物にそのもの自体に即してあるものが，その事物にとって必然なるものであるとすれば (事物にそのもの自体に即してあるものとは，或る場合には，事物の『何であるか〔本質〕』に内含されるものとしてその事物についてあるもののことであり，或る場合には，事物に述語される述語であって，この述語の『何であるか〔本質〕』の内に当の事物そのものが含まれているところのものであり，(この場合) 互いに対立する (二つの) 述語の内のどちらか一つが当の事物についてあることが必然なるもののことである)，論証的な推論が，このような (事物それ自体に即してある) 或る幾つかの原理から出発するものであろうということは明白である。」(第 6 章)

アリストテレスの頃には，論証はいくつかの基本的な事柄を出発点として推論を重ねていくという姿勢が確立していました。数学においてそれを具現化したものがユークリッドの『原論』です。

『原論』は，前書きなどなくいきなり，23 個の「定義」から始まります ([5] pp.1–2)。

「1　点とは部分をもたないものである。
2　線とは幅のない長さである。
3　線の端は点である。
4　直線とはその上にある点について一様に横たわる線である。
5　面とは長さと幅のみをもつものである。
6　面の端は線である。
……
23　平行線とは，同一の平面上にあって，両方向に限りなく延長しても，いずれの方向においても互いに交わらない直線である。」

この後，5 つの「公準 (要請)」と 9 つ (ないしは 5 つ) の「公理 (共通概念)」へと続き ([5] p.2)，膨大な定理の証明が行われます。

「次のことが要請されているとせよ。
1　任意の点から任意の点へ直線をひくこと。
2　および有限直線を連続して一直線に延長すること。
3　および任意の点と距離 (半径) とをもって円を描くこと。
4　およびすべての直角は互いに等しいこと。
5　および 1 直線が 2 直線に交わり同じ側の内角の和を 2 直角より小さくするならば，この 2 直線は限りなく延長されると 2 直角より小さい角のある側において交わること。」

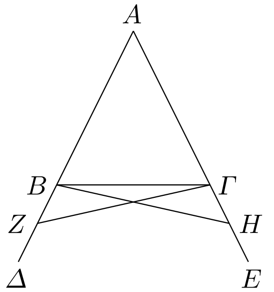
「1　同じものに等しいものはまた互いに等しい。
2　また等しいものに等しいものが加えられれば，全体は等しい。
3　また等しいものから等しいものがひかれれば，残りは等しい。
4　また不等なものに等しいものが加えられれば，全体は不等である。
5　また同じものの 2 倍は互いに等しい。
6　また同じものの半分は互いに等しい。
7　また互いに重なり合うものは互いに等しい。
8　また全体は部分より大きい。
9　また 2 線分は面積をかこまない。」

その内容を見れば分かるとおり，公準は数学に特有のものでアリストテレスのいう「個々の科学に固有の原理」であり，公理は (9 以外は) 一般的な内容でアリストテレスの「すべての科学に共有の原理」です。

これらの公準，公理のうち，第 5 公準［平行線公準］は他のものと比べて異常に複雑な表現になっています。そのため，これを他の公準・公理を基に証明しようという試みがなされました。その結果として，非ユークリッド幾何学が発見されたのは 18〜19 世紀のことでした。

「証明」の例として，『原論』におけるいくつかの定理を取り上げましょう。証明の様式に注意して読んでみてください。まずは，直接証明の例です（［5］pp.5–6)。

「第 1 巻命題 5　二等辺三角形の底辺の上にある角は互いに等しく，等しい辺が延長されるとき，底辺の下の角は互いに等しいであろう。



$AB\Gamma$ を辺 AB が辺 $A\Gamma$ に等しい二等辺三角形とし，線分 $B\Delta$，ΓE が AB，$A\Gamma$ と一直線をなして延長されたとせよ。角 $AB\Gamma$ は角 $A\Gamma B$ に，角 $\Gamma B\Delta$ は角 $B\Gamma E$ に等しいと主張する。

$B\Delta$ 上に任意の点 Z がとられ，大きい線分 AE から小さい線分 AZ に等しい AH が切り取られ，線分 $Z\Gamma$，HB が結ばれたとせよ。

そうすれば AZ は AH に，AB は $A\Gamma$ に等しいから，2 辺 ZA，$A\Gamma$ は 2 辺 HA，AB にそれぞれ等しい。そして共通の角 ZAH をはさむ。それゆえ底辺 $Z\Gamma$ は底辺 HB に等しく，三角形 $AZ\Gamma$ は三角形 AHB に等しく，残りの角は残りの角に，等しい辺が対する角は等しくなる，すなわち角 $A\Gamma Z$ は角 ABH に，角 $AZ\Gamma$ は角 AHB に等しいであろう。そして AZ 全体は AH 全体に等しく，そのうち AB は $A\Gamma$ に等しいから，残りの BZ は残りの ΓH に等しい。ところが $Z\Gamma$ が HB に等しいことも先に証明された。かくて 2 辺 BZ，$Z\Gamma$ は 2 辺 ΓH，HB にそれぞれ等しい。しかも角 $BZ\Gamma$ は角 ΓHB に等しく，底辺 $B\Gamma$ はそれらに共通である。それゆえ三角形 $BZ\Gamma$ も三角形 ΓHB に等しく，残りの角は残りの角に，すなわち等しい辺が対する角はそれぞれ等しいであろう。したがって角 $ZB\Gamma$ は角 $H\Gamma B$ に，角 $B\Gamma Z$ は角 ΓBH に等しい。すると角 ABH 全体が角 $A\Gamma Z$ 全体に等しいことは先に証明されており，そのうち角 ΓBH は角 $B\Gamma Z$ に等しいから，残りの角 $AB\Gamma$ は残りの角 $A\Gamma B$ に等しい。そしてそれらは三角形 $AB\Gamma$ の底辺の上にある。また角 $ZB\Gamma$ が角 $H\Gamma B$ に等しいことも先に証明された。そしてこれらは底辺の下にある。

よって二等辺三角形の底辺の上にある角は互いに等しく，等しい辺が延長されるとき，底辺の下の角は互いに等しいであろう。これが証明すべきことであった。」

ユークリッドの証明の様式は，

① 証明したい内容を一般的に表現する。[命題]
② 具体的な図形を用いて，証明したい内容を表す。[特述]
③ 具体的な内容に即して証明を行う。[証明]
④ 証明できた内容を一般的な形で述べる。[結論]

ということになります。［最後に出てくる「これが証明すべきことであった」(ὅπερ ἔδει δεῖξαι : quod erat demonstrandum) はユークリッドが用いる常套句（じょうとうく）で，ユークリッド以後「証明終」の意味として Q.E.D. と略記して使われていました。］

『原論』には定理以外に作図題もありますが，その場合は ③ のところで作図法とその証明が示されます。［作図題のときは「これが作図すべきものであった」(ὅπερ ἔδει ποιῆσαι) で締めくくられます。］

直接的な証明では定義・公準・公理および既に証明された定理を用いて (通常，三段論法によって) 証明が行われます。一方，間接的な証明では，用いるものは同じですが，その方法が異なります。すなわち，

「P である」という命題を示したいのだが，「P でない」と仮定すると矛盾が生じる

というのが証明の基本的な筋道です。［矛盾の内容としては，いろいろな用語の定義，前提としている公準・公理，既に証明されている他の定理など，いろいろな場合があります。］この証明法は背理法あるいは帰謬法といわれています。

間接的な証明法には，背理法のほかに，同一法［証明しようとする命題の内容の唯一性を用いる方法］，転換法［一群の命題について，それらの仮定がすべての場合を尽くし，それらの結論がどの 2 つも両立することがないとき，この一群の命題の逆はすべて正しいとする論法］があります。

それでは，間接証明の例を挙げましょう (［5］pp.150–151)。

ここで取り上げるのは，2 数の最大公約数の求めるための「ユークリッドの互除法」といわれる方法の基礎となる命題です。

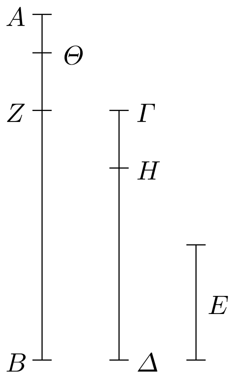
なお，数に関するユークリッドによる定義 (第 7 巻) は次のようになっています (［5］p.149)。

1　単位とは存在するもののおのおのがそれによって 1 とよばれるものである。

2　数とは単位から成る多である。

13　互いに素である数とは共通の尺度としての単位によってのみ割り切られる数である。

15　互いに合成的な［素でない］数とは共通な尺度としての何らかの数によって割り切られる数である。



「第 7 巻命題 1　二つの不等な数が定められ，常に大きい数から小さい数が引き去られるとき，もし単位が残されるまで，残された数が自分の前の数を割り切らないならば，最初の 2 数は互いに素であろう。

二つの不等な数 AB，ΓΔ のうち常に大きい数から小さい数が引き去られるとき，単位が残されるまで，残された数が自分の前の数を割り切らないとせよ。AB，ΓΔ は互いに素である，すなわち単位のみが AB，ΓΔ を割り切ると主張する。」

ユークリッドはこの命題を次のように証明します。(右部はその現代風の解説です。)

「もし AB，$\Gamma\Delta$ が互いに素でないならば，何らかの数がそれらを割り切るであろう。割り切るとし，それを E とせよ。$\Gamma\Delta$ が BZ を割り切り，自分より小さい ZA を残すとし，AZ が ΔH を割り切り，自分より小さい $H\Gamma$ を残すとし，$H\Gamma$ が $Z\Theta$ を割り切り，単位 ΘA を残すとせよ。

まず「a と b が互いに素ではない」と仮定します。

―「P でない」と仮定しました。―

そうすると，a，b をともに割り切る数 e $(\neq 1)$ が存在します。

そこで，

$$\begin{cases} a - pb = c \ \ (< b) \\ b - qc = d \ \ (< c) \\ c - rd = 1 \end{cases}$$

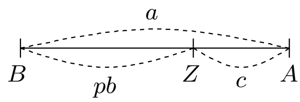
であるとします。

そうすれば E が $\Gamma\Delta$ を割り切り，$\Gamma\Delta$ が BZ を割り切るから，E も BZ を割り切る。ところが E は BA 全体をも割り切る。それゆえ残りの AZ をも割り切るであろう。ところが AZ は ΔH を割り切る。ゆえに E は ΔH をも割り切る。ところが E は $\Delta\Gamma$ 全体をも割り切る。したがって残りの ΓH をも割り切るであろう。ところが ΓH は $Z\Theta$ を割り切る。それゆえ E も $Z\Theta$ を割り切る。ところが ZA 全体をも割り切る。ゆえに E は数でありながら残りの単位 $A\Theta$ をも割り切るであろう。これは不可能である。したがっていかなる数も数 AB ，$\Gamma\Delta$ を割り切ることはないであろう。よって AB ，$\Gamma\Delta$ は互いに素である。これが証明すべきことであった。」

このとき，a ，b がともに e で割り切れるのですから，$a = ek$ ，$b = el$ となって，

$$c = a - pb = ek - p(el) = e(k - pl)$$

も e で割り切れることになります。



同様に，b ，c がともに e で割り切れることから，$d = b - qc$ も e で割り切れることになります。

さらに，c ，d がともに e で割り切れることになりますから，$1 = c - rd$ も e で割り切れることになります。

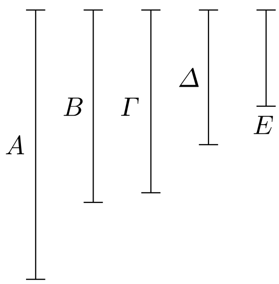
ところが，$e\ (\neq 1)$ が 1 を割り切ることは不可能です。

— 矛盾［数の定義］が起きました。 —

この矛盾 (不可能性) は「a と b が互いに素ではない」と仮定したことに起因するものですから，矛盾が起きないようにするには，「a と b が互いに素である」とせざるを得ないという訳です。

間接証明の例をもう 1 つ挙げましょう (［5］pp.164–165)。

「第 7 巻命題 21　互いに素である 2 数はそれらと同じ比をもつ 2 数のうち最小である。



A ，B を互いに素である 2 数とせよ。A ，B はそれらと同じ比をもつ 2 数のうち最小であると主張する。

もしそうでなければ，A ，B より小さく，A ，B と同じ比をなす何らかの数があるであろう。それを Γ ，Δ とせよ。そうすれば同じ比をもつ 2 数のうち最小の数はそれらと同じ比をもつ 2 数を，大きい数が大きい数を，小さい数が小さい数を，すなわち前項が前項を，後項が後項を割り切り，その商は等しいから，Γ が A を，Δ が B を割り切り，その商は等しい。そして Γ が A を割った商に等しい個数の単位が E のなかにあるとせよ。そうすれば Δ が B を割った商も E のなかにある単位の個数である。そして Γ が A を割った商が E のなかにある単位の個数であるから，E が A を割った商も Γ のなかにある単位の個数である。そうすれば同じ理由で E が B を割った商も Δ のなかにある単位の個数である。それゆえ E は，互いに素である A ，B を割り切ることになる。これは不可能である。ゆえに A ，B より小さく，A ，B と同じ比をなすいかなる数もないであろう。よって A ，B はそれらと同じ比をもつ 2 数のうち最小である。これが証明すべきことであった。」

ここに見られる証明では，互いに素である 2 数 a ，b を割り切る数 e が存在してしまうことになります。それは互いに素であることの定義に抵触するため，最初の仮定「最小でないとする」に問題があったという論法です。

(2)　近世ヨーロッパ

17 世紀の数学者・哲学者デカルト (René Descartes：1596–1650) には主著『方法序説 (自分の理性を正しく導き，いろいろな学問において真理を求めるための方法について述べる話)』(*Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences*：1637 年) の他に，未完の論稿『精神指導の規則』(*Regulae ad directionem ingenii*：1628 年頃執筆) があります。［この『精神指導の規則』には，デカルトのキーワードである，“方法” に関することが述べられていて，『方法序説』を補完するものと位置づけることができます。］

『精神指導の規則』は次の「第 1 規則」から始まります (［7］p.11，p.23)。

「第 1 規則　もろもろの研究の目的は，発生するすべての事柄に関して，確固とした真の判断を下すことができるように，精神 (ingenium) を導くことでなければならぬ。」

「第 4 規則　事物の真理の探究には「方法」(Methodus) が必要である。」

そして，その方法の規範として数論 (Arithmetica) と幾何学 (Geometria) が取り上げられます。また，事物の認識に到達するには経験 (experientia) と演繹 (deductio) の 2 つの方法，直観 (intuitus) と帰納 (inductio) の 2 つの作用があることが示されます。

「数論と幾何学だけがひじょうに純粋かつ単純な対象を扱っているので，それらは経験が不確実なものとするかもしれぬどんなものをもまったく前提することなく，完全に合理的に演繹された多くの帰結だけから成りたっているからである。そこで，それらはあらゆる学問のうちで，もっとも容易で，もっとも明瞭な学問なのであり，まさしくわれわれがたずね求めているものを対象としている，なぜなら，不注意によるのでなければ，人間がそれらにおいて誤りを犯すとはほとんど考えられないからである。」(第 2 規則説明，［7］p.17)

「私の考えでは，方法とは次のような確実で容易な諸規則のことをいう，すなわち，それらの規則を正確に守った人は誰でも，けっして偽りを真と思い誤ることはなく，また精神の努力を浪費せずに，常に一歩一歩知識を増しながら，認識可能なかぎりでのすべての事物の真なる認識に到達するであろうような規則である。

　ここで，次の二つの点に注意せねばならない，すなわち，疑いもなく偽りであるものをけっして真なるものと思い誤らないこと，および，すべてのものの認識に到達するということ，の二点である。」(第 4 規則説明，［7］p.24)

方法を適用するに当たっての留意事項として次のことが挙げられます (［7］p.31，p.33，p.39，p.44)。

「第 5 規則　方法は，挙げて，われわれがある真理を発見すべく，精神の洞察力が向けられるべき諸対象の順序と配列 (dispositio) とに存する。そこで，もしわれわれが，入り組みかつ不明瞭な諸命題を，段階的により単純なものに還元し，ついですべてのうちでもっとも単純なものの直観から他のすべてのものの認識へと同じ段階を経てのぼってゆこうと試みるならば，われわれはこの方法を厳密に遵守することとなろう。」

「第 6 規則　もっとも単純な事物を複雑な事物から区別しかつ順序だって探求するためには，諸事物の，われわれがあるいくつかの真理を他の真理から直接的に演繹した系列の各々において，何がもっとも単純であるか，また，このもっとも単純なものからのそれ以外のすべてのものの隔たりの大・小・相等を観察せねばならぬ。」

「第 7 規則　知識を完成するためには，われわれの目的と関連するすべてのものおよび個々のものを，連続的かついずこにおいても中断されることのない思考の運動によって検討しつくし，かくして，それらを十分なかつ順序づけられた枚挙によって総括せねばならぬ。」

「第 8 規則　もし探求されるべき事物の系列のうちにわれわれの知性が十分に正しく直観できぬようななにかが生ずるならば，そこで停止すべきである，そしてまた，それに続く他のものも考察されるべきではなくして，余計な仕事は差し控えられねばならぬ。」

デカルトは「若いころ，哲学のいろいろな部門のうちでは論理学を，数学のうちでは幾何学者たちの解析と代数学を少しは熱心に勉強しました。」それらには多くの準則［規則］があり，「精神のはたらきを妨げる，あいまいでわかりにくい技術」であると感じていました。そこで「これら三つの学問の利点をふくんでいながら，その欠点を抜きにした，なにかほかの方法を求めなければならない」と思うようになり，準則を次の 4 つに整理しました。(『方法序説』第 2 部，［6］p.26)

「第一の準則は，どんなことでも，ほんとうだと明白に認識しないかぎり，けっしてほんとうとは受けとらないということでした。それはつまり速断と先入観を注意ぶかく避けることであり，またどんなことでも，まったく疑いをさしはさむきっかけがないほど私の精神にはっきりとまぎれなく姿をあらわすもの以外は，何ひとつ自分の判断に取り入れないということです。

第二は，私が検討するむずかしい問題のひとつひとつを，できるだけ多くの，しかもいっそううまく解決するために要求されるだけの小部分に分けること。

第三は，いちばん単純でいちばん認識しやすい対象からはじめて，少しずつ，階段を登るようにしてついには複合度のいちばん高いものまで認識するために，順序をおって私の考えを導くこと。しかも，もともとおたがいに前後に並ばない対象にも，順所を想定しながらそうすること。

そして最後は，どこででもひとつ残らず数えあげ，満遍なく見なおしたうえで，何も落としたものがないと確信が持てるようにすることでした。」

そして彼は，「どんなものでも，たまたま人間の認識のもとにはいってくる可能性のあるものは，同じぐあいにつながりあっているということであり，またほんとうでないものは何ひとつほんとうのものとして受けとるのをさしひかえ，ひとつのことから他のことを演繹するために，必要な順序をいつも守りさえすれば，どんなに遠いものでも，しまいにたどりつくことができないものはないし，どんなに隠されたものでも発見できないものはない」(『方法序説』第 2 部，［6］p.26) と考えるようになったのでした。

デカルトは『原論』に見られるような定義・公理については何も述べてはいません。しかし彼は，問題を細分化し順序立てて考察することの重要性に注意するよう促しています。

デカルトと同時代人であるパスカル (Blaise Pascal : 1623–1662) は「幾何学的精神について」(*De l'esprit géométrique* : 1657–58 年頃執筆) において次のように述べています。

まず冒頭部で，研究の目的とそこにおける幾何学的方法の絶対性が述べられます（［8］pp.116–117)。

> 「真理の研究には三つの主要な目的がありうる。第一は真理を追究する時には，それを発見すること，第二は真理を所有する時には，それを論証すること，第三は真理を吟味する時には，真を偽から識別することである。
>
> わたしは第一については語らない。特に第二を取り扱いたい。そうすれば，それは第三をも包含する。なぜなら，われわれは真理を証明する方法を知れば，同時に，それを識別する方法をも知りうるであろう。そのゆえは，真理について与えられた証明が，既知の規則と一致するかどうかを吟味すれば，その真理が確実に論証されているかどうかもわかるからである。
>
> これらの三つの分野においてすぐれている幾何学は，未知の真理を発見する術を明らかにした。それは幾何学が解析と呼んでいるものである。……
>
> この術は二つの重要なこと，すなわち，各命題を個々に証明することと，あらゆる命題を最善の秩序に排列することとから成り立っているので，わたしもそれを二つの部分に分けたいと思う。一つは，幾何学的な，すなわち，方法論的な完全な論証をするための規則を含むであろうし，他は，幾何学的な，すなわち，方法論的な完結した秩序の規則を含むであろう。そして両者を合わせれば，真理を証明し識別する推理の筋道に必要な一切を含むことになろう。」

そして，「第 1 部　幾何学的，すなわち，方法論的な完全な論証の方法について」において，論証の際に留意すべきこととして次のことを挙げます（［8］p.118)。

> 「もっとも卓越した論証を形成すべきこの真の方法［幾何学における論証の方法］は，それに到達することが可能であるとしたら，二つの主要なことがらから成り立つであろう。一つは，あらかじめその意味を明確に説明しなかった用語はひとつも用いないこと，他は，既知の真理によって証明されなかった命題は決して提出しないこと，つまり，約言すれば，あらゆる用語を定義し，あらゆる命題を証明するということである。」

しかしこのことは，「最初の用語を定義しようとすると，それを説明するのに用いる，それに先行する用語を予想させるであろうし，同様に，最初の命題を証明しようとすると，それに先行する他の命題を予想させるであろうことは，明白で」すから，「絶対に不可能」です。

そこで，幾何学では「第一の既知の真理に到達すると，そこで立ちどまり，それらの真理を証明するさらに明白なものがないところから，人々がそれらを真理として認めることを要求」します。

それらが，ユークリッドが定義・公準・公理と呼んだものなのです。そうすれば，「幾何学の提出する一切のものは，自然の光によってか，証明によってか，完全に論証される」ことになるのです。

「第 2 部　説得術について」では，「堅実不変な証明にかんするあらゆる訓戒を含む」規則として，次のことを挙げます（［8］pp.140–141)。

「«定義のための規則»

一　自明であって，それらを説明するのにより明白な用語がないようなものは，いっさい定義しようと企てないこと。

二　少しでも不分明な，もしくは曖昧な術語は，すべて定義せずには置かないこと。

三　用語の定義にあたっては，完全に知られた，またはすでに説明された語のみを用いること。

«公理のための規則»

一　必要な原理は，それがどんなに明白で判然としていても，果たして承認されうるかどうかを問わずには置かないこと。

二　公理においては，完全に明白なことがらのみを要請すること。

«論証のための規則»

一　自明であって，それらを証明するのにより明白な何物もないようなものは，いっさい論証しようと企てないこと。

二　少しでも不分明な命題はすべて証明し，それらの証明にあたっては，きわめて明白な公理，もしくはすでに承認されまたは論証された命題のみを用いること。

三　定義によって限定された用語の曖昧さによって誤られないために，定義されたものの代わりに定義そのものを常に心の中で置きかえること。」

そして，これら 8 つの規則のうち，それぞれの項目の「一」に述べられているものは「必ずしも必要ではなく」「常に厳密に守ることは，困難であり，ほとんど不可能である」といいます。

しかし，残りの 5 つの規則，すなわち定義の二，三，公理の二，論証の二，三は「絶対に必要」なものであるとしています。

ここに見られるように，パスカルの証明論は

① すべての用語を明確に定義すること

② すべての命題を厳密に証明すること

を基本原理としています。しかし，そこには無定義用語や無証明命題が存在することをはっきりと認識しています。そして，それらは「自明」であったり「明白」であったりするものであることが求められています。

さらにパスカルは，次のように述べています (［8］p.145)。

「決して誤ることのない方法を，すべての人は求めている。論理学者はそこに案内すると公言し，幾何学者だけがそこに到達する。彼らの学問 (幾何学) とそれを模倣するもの以外には，真の論証はない。その術のすべては，われわれが述べた訓戒の中にのみ含まれる。それらだけで十分であり，それらだけが証明する。他のすべての規則は無益であるか，有害である。

これはわたしがあらゆる種類の書物と人物とに長く親しんで知ったことである。

それについて，幾何学者はこれらの規則によって別に新らしいものをも寄与しない，われわれは実際それらを持っており，ただそれらを無益な，または虚偽の多くの規則と混同して，両者を識別することができなかったのだという人々は，高価なダイヤモンドを多数の偽物の中でさがしまわり，それらをどうして見分けたらよいかわからず，全部をつかみ，それでいて，多数のつまらないものには目もくれないでその手を宝石の上に置いている人と同様，本物を持っていると自慢し，実は宝石をさがしているだけで他のつまらないものを手離さずにいる人々と，同じようなものだとわたしは断定する。」

(3)　近代

ユークリッドはもちろんのこと，デカルトやパスカルにおいても，公準・公理は“自明の真理”と考えられていました。しかし，ユークリッドの平行線公準については古代からその自明性に疑問がもたれていました。

19 世紀末にはカントル (Georg Cantor : 1845–1918) によって集合論が発表されました。そして，集合は数学における概念形成に大いに利用されました。しかし，その定義にはあいまい性があったため，いくつかのパラドックス［常識的見解と矛盾するように見える見解，あるいは，真理に矛盾するように見えて，実はそうではない説のことをいいます。］が発生しました。それが引き金となって，数学の基礎部分に当たる公理や数学における概念構成法に注意が払われるようになり，論理・論法・証明の構造などの数学の基礎づけに関する研究が行われるようになりました。そして，公理は数学を展開する上での“仮定”と見なされるようになったのです。

そのような中で，20 世紀前半の指導的数学者であるヒルベルト (David Hilbert : 1862–1943) は「幾何学に対し完全な，できうるかぎり簡単な公理系を設け，これらから最も重要な幾何学の諸定理を導くと同時に，その際，種々の公理群の意義と各個の公理から導かれる結論の限界とを明確にしよう」とする試みの 1 つとして『幾何学の基礎』(*Grundlagen der Geometrie* : 1899 年初版) を著しました。

そこに付された「付録 VI　数概念について」で彼は次のように述べています (［9］p.203)。

「数論における種々の定理や，幾何学における種々の公理についての数多い文献をくらべてみるとき，数論と幾何学とには多くの似た点が認められるのであるが，方法論的にいって，そこにはハッキリとした一つの違いが存在している。

　まず数概念の導入の仕方について考えてみよう。最初に 1 から出発して，2，3，4，$\cdots$ と数をかぞえていくと，自然数の列が作られ，そしてそれらの間の演算が考えられる。引き算がいつもできるようにするためには，0 および負の整数が必要とされる。次にたとえば，整数の対として分数を導入する (すると整係数の 1 次方程式はつねに根をもつことになる)。最後に切断または基本列として，実数を定義する (すると定符号でない整式，一般に定符号でない連続関数を 0 とおく方程式は，つねに根をもつことになる)。以上のような数概念の導入の仕方は，生成的な方法といってよい。つまり簡単な数から出発して，次々と広い範囲の数を生成してゆくのである。

　これに対して幾何学におけるやり方はまったく違う。すなわち点，直線，平面という 3 種類の対象の全体が，初めから存在しているものと仮定して，それら相互間の関係を，ユークリッド以来の伝統にしたがって，結合，順序，合同および連続の公理のかたちで規定するのが普通である。このときこの公理系の無矛盾性と完全性，つまりこれらの公理から決して矛盾が導かれないこと，またこれらの公理からすべての幾何学の定理が導かれること，この二つのことが証明されなければならない。このような方法をここでは公理的な方法とよぶことにする。」

そして彼は証明論の基本的な考え方を次のように表します。(「付録 IX　数学の基礎」，［9］p.244)

「数学を構成する命題は式によって表現される。その結果，数学の本体は式の集まりとなる。

ここでいう式は数学における普通の式と比べて，通常の記号の他に論理記号

$$\begin{array}{cccccc} \to & \& & \vee & \overline{} & (x) & (Ex) \\ \text{(ならば)} & \text{(かつ)} & \text{(または)} & \text{(でない)} & \text{(すべての)} & \text{(存在する)} \end{array}$$

を含む点だけが異なる。形式化された数学において，その骨組みとなるある種の式を公理とよぶ。証明とは直観的にそれとわかるべき図式であって，

$$\begin{array}{c} \mathfrak{S} \\ \mathfrak{S} \to \mathfrak{T} \\ \hline \mathfrak{T} \end{array}$$

という形の推論図によって行ういくつかの推論から構成される。ここに仮定，すなわち $\mathfrak{S}$ および $\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$ はいずれも，公理であるか，公理に代入を行って得られたものか，またはすでに証明のなかに現れた式と一致するか，あるいは代入によって得られたものか，でなければならない。公理自身であるか，またはある証明の最後の式であるような式を，証明可能な式という。

証明可能な定理，すなわち以上の操作によって得られた式の全体が，これまでの普通の数学が形成してきた思考の映像である。」

このように，ヒルベルトは数学に厳密性をもたせるために数学的内容を形式化して考えることにしました。すなわち，使用可能な記号を準備し，「式」の構成法を定め，使用可能な推論規則を与えて，いくつかの公理［初めから使用することを許された式］を基に，有限回の操作による推論図によって得られるものだけを考察の対象にしようという訳です。

ヒルベルトのこの考え方はこんにちでは形式主義といわれていて，数学の基礎の研究での主流になっています。ここでは有限回の操作あるいは有限個の対象のみを扱うことが重要で，それを有限の立場といっています。そして，無限個の対象を扱うときには帰納的な定義を用います。それは次のように表されます。

1　初めに存在を認める対象を定める。
2　既に存在を確かめられた対象を基に，使用を認められている法則のみによって得られたものを対象とする。
3　以上の 1，2 によるもののみを対象とする。

証明論の実際の展開については，例えば

竹内 外史・八杉 満利子『数学基礎論〔増補版〕』(共立出版・現代数学講座 1，1974 年)

などを見てください。また，数学を基礎から組み立てていく例としては

島内 剛一『数学の基礎』(日本評論社，1971 年)

が参考になります。

ヒルベルトは「公理的な方法を用いるかぎり，公理系の無矛盾性はどうしても証明されなければならない。幾何学や理論物理学では，無矛盾性の証明は数論の公理の無矛盾性に帰着されるが，数論自体にとっては明らかにそういうことは許されない。」(付録 IX，［9］p.253) といって無矛盾性の証明を最重要視しています。そして自身，それが可能であると思っていたようです。

しかし，1931 年に発表されたゲーデル (Kurt Gödel : 1906–1978) の不完全性定理［初等的な自然数論を含む理論が無矛盾ならば，その理論の無矛盾性を表す命題はその体系では証明できない，という定理］によって，無矛盾性の証明の難しさが明らかになりました。

(4)　その他

証明の例として「無限集合の存在証明」を挙げましょう。

まず，デデキントによる「証明」です。(『数とは何か，何であるべきか』§5，〔2〕pp.81–82)

「66　定理　無限集合は存在する。

証明　私の思考の世界，すなわち私の思考の対象となり得るあらゆる事物の全体 S は無限である。なぜかというと，もし s が S の要素とすると，s が私の思考の対象であり得るという考え s' はそれ自身 S の 1 つの要素である。これを要素 s の像 $\varphi(s)$ と見なせば，これによって確定する S の写像 φ は，その像 S' が S の部分集合であるという性質を有している。しかも S' は S の真部分集合である，というのは S のうちには，このようなどの考え s' とも異なり，従って S' のうちには含まれないような要素 (たとえば，私本来の「我」) が存在しているからである。最後にもう 1 つ，a，b が S の相異なる要素ならば，その像 a'，b' は相異なることは明らかだから，従って写像 φ は区別のつく (相似) 写像である。よって S は無限である。証明終わり。」

また，ボルツァーノ (Bernard Bolzano : 1781–1848) は『無限の逆説』(*Paradoxien des Unendlichen* : 1851 年) 第 13 節において次のように「証明」しています (〔10〕pp.15–16)。

「現実性どころか，可能性すら要求しないものの領域にも確かに無限な集合は存在する。命題自体及び真理自体の集合が無限であることはきわめて容易に理解される。なぜなら，何らかの真理，例えば一般に真理が存在するという命題か，或いは他の何か任意の命題を考え，これを A で表せば，「A は真である」ということばで表される命題は，命題 A そのものとは異なる命題であることがわかる。後者は明らかに前者とは違った主語を持つからである。即ちこの主語は初めの命題全体を表す A 自身である。そこで，この A とは異なる命題，これを B と名づけると，B から更に，これが命題 A から導かれた時と同じ法則に従って第 3 の命題 C が導かれ，こうして果てしなく進行する。これら後続の命題はどれもその直前の命題に対して，これをその主語とし，これが真なる命題であることを述べるという前述の関係にある。それ故これら凡ての命題の集合体こそは部分 (諸命題) の集合を含み，如何なる有限集合よりも大なる集合であると言い得るのである。なぜなら，私が指摘するまでもなく，前述のような構成法則に従って成立するこれらの命題の系列は先に第 8 節で考察した数列と類似していることに諸君は気付くであろう。この類似点は，後者〔数列〕の各項に対応する前者〔命題の系列〕の項が存在するということ，従ってどんなに大きい数をとっても，これと同数の異なった諸命題が存在し，かつ更に新しい命題を作り続けることができるということ，もっと適切に言えば，我々が命題を作ると作らないとに関係なく，このような命題がそれ自体で存在するということにある。そして実にここから，これら凡ての命題の集合体は，如何なる数よりも大なる多数性を持つ，即ち無限であるということが帰結されるのである。」

これらの「証明」は，ヒルベルトのいうような意味での証明ではありませんが，興味深い「証明」だと思いませんか。

最後に，論理的思考の練習として問題を挙げておきます (［11］pp.3–6，p.11，p.15)。ちょっと考えてみてください。(答はあえて書かないことにします。)

① 4 枚カードの問題

どのカードにも片方の面にはアルファベットが，もう一方の面には数字が書いてあるカードが何枚かあります。このとき，「母音の裏側には，必ず偶数がある」という規則が成りたっているかどうかを確かめるには次の 4 枚のカードのうち，どのカードをめくってみる必要がありますか。

A	K	4	7

もちろん 4 枚全部を調べてみるのが一番ですが，それでは問題になりません。めくるカードの枚数を最小にするにはどのカードをめくりますか，ということです。

あなたはどのカードをめくりますか。

② 推論は正しいか？

次の推論は正しいでしょうか。

(1) 彼と結婚すれば私は絶対幸せになれるわ。
でも，彼とは結婚できないの。
だから私は，幸せになれないんだわ。

(2) 人間の健康にとってビタミン C は不可欠である。
野菜にはたくさんのビタミン C が含まれている。
だから，人間は野菜を食べなくてはいけない。

参考文献

［1］ N. ブルバキ (前原 昭二・訳)「集合論 1」，東京図書 (ブルバキ数学原論)，1968 (昭和 43)
［2］ R. デーデキント (河野 伊三郎・訳)「数について — 連続性と数の本質 —」，岩波書店 (岩波文庫)，1961 (昭和 36)
［3］ 伊東 俊太郎「ギリシア人の数学」，講談社 (講談社学術文庫)，1990 (平成 2)
［4］ アリストテレス (井上 忠・訳)「分析論前書」，(加藤 信朗・訳)「分析論後書」，岩波書店 (「アリストテレス全集 1」所収)，1971 (昭和 46)
［5］ ユークリッド (中村 幸四郎，寺阪 英孝，伊東 俊太郎，池田 美恵・訳・解説)「ユークリッド 原論」，共立出版，1971 (昭和 46)
［6］ R. デカルト (三宅 徳嘉，小池 健男・訳)「方法序説」，白水社 (「デカルト著作集 1」所収)，1973 (昭和 48)
［7］ R. デカルト (大出 晁，有働 勤吉・訳)「精神指導の規則」，白水社 (「デカルト著作集 4」所収)，1973 (昭和 48)
［8］ B. パスカル (前田 陽一，由木 康，津田 穣・訳)「幾何学的精神について」，人文書院 (「パスカル全集 1」所収)，1959 (昭和 34)
［9］ D. ヒルベルト (寺阪 英孝，大西 正男・訳)「幾何学の基礎」，共立出版 (現代数学の系譜 7 所収)，1970 (昭和 45)
［10］ B. ボルツァーノ (藤田 伊吉・訳)「無限の逆説」，みすず書房，1978 (昭和 53)
［11］ 市川 伸一「考えることの科学」，中央公論社 (中公新書 1345)，1997 (平成 9)