

8 集合の考え

こんにちでは、集合とそれに関連する概念は数学的な研究対象を記述するための便利な「言葉」として、すべての数学的な分野の基礎になっています。集合の考え (や関連する概念) にそれぞれの分野に特有の概念や公理系を組み合わせることによって、1 つ 1 つの数学的な分野がつくられるといってもよいくらいです。

漠然とした「ものの集まり」という概念は古代からあったと思われます。しかし、数学的な研究の対象としての集合の考えは 19 世紀末期に発表されました。集合論 (集合や関連する概念そのものを研究の対象とする数学的な理論) は当初かなり強い反発を受けましたし、いろいろなパラドックス—— 一般に受け入れられる前提から妥当な推論によって導かれた一般には受け入れがたい結論のことで、逆理、背理ともいわれます —— が発見されもしました。

集合論にはギリシア以来の「無限」にかかわる部分が多いため、誤解や無理解がありました。また、集合論が数学の基礎部分であるという認識が進むにつれ、パラドックスの発生に伴う“基礎の危機”が出現し、その克服が叫ばれるようになりました。

無限は古来から議論されてきましたが、その姿は私たちには見えません。その無限の捉え方には 2 通りがあります。1 つは古代ギリシアにおいて論じられていた「仮無限」で、それはいくらかでも増大あるいは減少することができる進行的な無限です。過程的な無限といってもよいかも知れません。これは可能的無限ともいわれます。もう 1 つは近代になって扱われるようになった「実無限」で、1 つの完結した実体として捉えられる実在的な無限です。現実的無限ともいわれます。この実無限は近代に至るまで忌避されてきました。

こんにち無限を扱っている学問は哲学と数学です。そして数学において、実無限を正面から扱ったのが集合論という訳です。仮無限は極限操作という形で解析学に現れます。

“基礎の危機”を乗り切る方法としていくつかの考えが現れましたが、こんにちでは形式主義といわれる方法が主流です。簡単にいうと、数学を展開するための公理系を記号を用いて表し、数学的演繹をそれらの記号の配列とみなして、数学理論の無矛盾性を証明しようという考え方です。また、その考察に当たっては万人が認めうるような推論のみを用いるということが要請されます。それは眼前にきちんと示するという意味で有限の立場といわれることがあります。

間接的証明では排中律 (law of excluded middle) が基礎になっています。それは「A であるか、A でないか、のどちらかが成り立つ」と表現されます。例えば「ある範囲の中に、性質 P をもつものが存在する」という主張の否定は「ある範囲の中のすべてのものは性質 P をもたない」ということになります。このとき、排中律は成立しているのでしょうか。「存在する」かどうかは存在を示せばよいのですが、その範囲が無数個の要素をもっている場合に「すべてのものが性質 P をもたない」ことは示すことができるのでしょうか。無数個の対象に対して「すべて」を調べつくすのは不可能であろう、という批判が起こりました。対象がある性質をもつということはその性質を構成的に示すことであるという認識があったのです。

このあたりも“基礎の危機”に関するところですが、こんにちでは排中律は成り立つものとして議論を進めるのが普通です。

“基礎の危機”を乗り越えるために、論理法則や証明の概念、あるいは数学の構成法などに反省が加えられ、それらのことなどを研究する分野として数学基礎論が誕生しました。その辺の事情はここでの範囲を超えていますので割愛します。

まずは、高校で学習する集合に関する事項を、確認の意味で、まとめておきましょう。

集合とははっきりと区別できる「もの」の集まりで、集合を構成する1つ1つのものをその集合の「要素」あるいは「元」といいます。そして、もの a が集合 A の要素であることを $a \in A$ と表して、 a は A に「属する」(あるいは、「含まれる」) といいます。

集合を表すのに2つの方法があります。1つは要素をすべて書き並べて表わす方法で、他の1つはあるものがその集合の要素となり得る条件や性質を書いて表す方法です。例えば、

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ は } 10 \text{ 以下の素数}\}$$

などのように表されます。

集合 A の要素がすべて集合 B の要素になっているとき、 A は B の部分集合であるといって、 $A \subset B$ (あるいは $A \subseteq B$) と表します。集合 A と集合 B の要素が完全に一致するとき、 A と B は等しいといって、 $A = B$ と表します。[$A = B$ とは、 $A \subset B$ かつ $B \subset A$ ということです。]

2つの集合 A, B について、

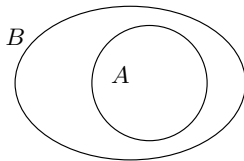
A にも B にも属する要素の全体を A と B の共通部分といって、 $A \cap B$

A または B に属する要素の全体を A と B の和集合といって、 $A \cup B$

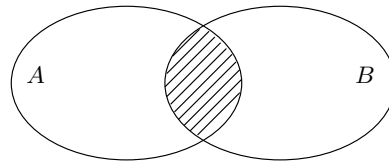
と表します。

全体集合 U において、集合 A に属さないものの全体を A の補集合といって、 \bar{A} (あるいは A^c) と表します。

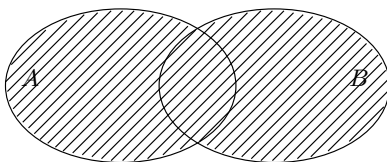
集合は図を用いて表すことが多いのですが、上のことはそれぞれ次のように表されます。



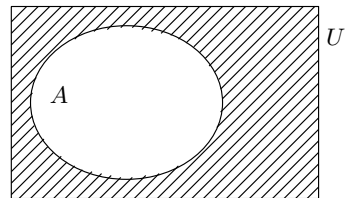
部分集合



共通部分



和集合



補集合

これらの集合に関する演算の間には次の性質があります (ド・モルガン (Augustus de Morgan : 1806-1871) の法則)。

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

また、有限集合 A の要素の個数を $n(A)$ と表すことにすると、有限集合 A, B について

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

が成り立ちます。

それでは、集合の考えに関することを見ていきましょう。

(1) ガリレオ

無限は有限とは異なる様相を呈します。有限の世界では「全体は部分より大きい」のですが、無限集合では部分が全体と対等になることがあります。その様子をガリレオ (Galileo Galilei : 1564–1642) の『新科学対話 (機械学と位置運動に関する二つの新科学についての論議と数学的証明)』 (*Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla meccanica & i movimenti locali* : 1638 年) から見てみましょう。

『新科学対話』はサグレート (ヴェネチアの市民), サルヴィアーティ (新しい科学者; ガリレオの代弁者), シンプリーチョ (アリストテレス哲学に通じた学者) の 3 人の対話の形で進行します。「第 1 日」から「第 4 日」までありますが, その「第 1 日」においてガリレオは無限集合に関して次のように述べています ([1] 上, pp.57–61。一部, 表現を改めました。)

「サルヴィアーティ いや言わなくてはならないことが 2, 3 あるのです。何より先ず, 今いったことを繰り返したいと思います。即ち無限にしても不可分 [注: 平面図形に対する線, 線に対する点など, 次元が 1 つ低いものを不可分者といいます。時間に対する不可分者は瞬間です。] にしても, 別々に理解できないということです。ですから 2 つを一緒に結び合わせて考えてみましょう。たとえば, 不可分な点で線を作ろうと思えば, 無限の点をもって来なくてはなりません。それで無限も不可分も同時に理解しなくてはならないのです。……

不可分に小さなものから連続的なものを作り上げる, ということに向けられる主な反対論の 1 つはこうです。不可分なものに不可分なものを加えても, 可分なものを作ることはできない。もしできるとしたら, 最初の不可分なものも分割できるということになる。何となれば, 今 2 つの不可分なもの, 例えば 2 つの点を結合してある量, 例えば分割できる線を作ることができるとすれば, 3 つ, 4 つ, 5 つ, 7 つあるいは任意の奇数個の点を結合して, もっと分割することができる線を作ることができま。ところがこれらの線は 2 つの等しい部分に分割できるのだから, そのちょうど真中にある不可分なものを分割することができるようになります。

これと同種類の反対論に対する答えとして, 我々は, 可分の量は不可分なものを 2 つ, 10, 100, あるいは 1000 寄せ集めて作られるものではなく, それらを無数に要するのだと答えます。

シンプリーチョ さあ解けそうにもない疑問が出てきました。異なる長さの線分が存在しうことは明らかです。しかもそれらはいずれも無数の点を含んでいます。それ故に同一種属の中に無限よりも大きなものが存在しうことを認めざるを得なくなります。何となれば, 長い線分の中に含まれた点の無限さは, 短い線分の中に含まれた点の無限さよりもその程度が大きいです。このある無限量が無限よりも大きな値をもつということは, 全く私の理解の及び得ざるどころです。

サルヴィアーティ それは我々が限られた智力をもって無限を論じ, 有限な限定されたものについて知っているいろいろな性質を無限に押しつけることから起こる困難の一つです。本当はそんなことをしてはいけないと思います。何となれば, 大きいとか, 小さいとか, あるいは相等しいとかいう言葉は無限なものには通用しないからです。それについて 1 つ例が浮かびましたから, この問題を提出したシンプリーチョ君に質問するという形式でそれをお話してみましょう。その方がはっきりするでしょうから。

もちろんあなたは平方数と平方数でない数との区別を御存じのことと思います?

シンプリーチョ よく知っていますとも。平方数は任意の数にそれ自身を掛け合わせてできる数です。例えば, 4, 9 はそれぞれ 2, 3 から作られる平方数です。

サルヴィアーティ よろしい。ではその積を平方数と呼ぶとともにその因数を辺または根と呼ぶこと, また 2 つの同じ因数の積でない数は平方数と呼ばないということも知っているでしょう。そこで平方数と非平方数とを含めたすべての数は平方数だけよりも多いと断言して嘘ではないでしょうね。

シンプリーチョ そうですとも。

サルヴィアーティ もしさらに私が, 平方数はいくつあるか, と質問したとすれば, あなたは, その対応した根の数だけある, と答えるでしょう? 正にその通りです。どの平方数も自分の根をもち, どの

の根も自分の平方数を持ち、かつ1つ以上の根をもっている平方数はなく、1つ以上の平方数をもっている根はないからです。

シンプルリーチョ 本当にそうです。

サルヴィアーティ だが、根はいくつあるかといえば、いかなる数もある平方数の根と考えられるから、それは数の全体と同じだけ、と言わざるを得ません。そうだとすれば、平方数は根とちょうど同じだけあり、またすべての数は根であるから、平方数は数と同じだけあると言わなくてはなりません。だが最初私たちは、数の大部分は平方数でないと申しました。のみならず、平方数の密度は範囲を大きくすればする程小さくなります。例えば、100 までの間には 10 個の平方数があり、それは 100 までの数全体の $\frac{1}{10}$ を占めています。ところが 10000 までの間では単に全体の $\frac{1}{100}$ だけが平方数であり、そして 100 万までの間ではそれはたった $\frac{1}{1000}$ しかないのです。これに反して、無限数までの間には、もしその個数を考え得たとすれば数全体と同じだけの平方数があることを認めざるを得ないのです。

サグレード そうなると一体、結論はどうなるのでしょうか。

サルヴィアーティ 私にはすべての数の総体は無限であり、平方数の数も無限であり、その根の数も無限であり、平方数の数がすべての数の総体より少ないということも、また後者が前者より多いということもなく、最後に「等しい」、「多い」、「少ない」という属性はただ有限量にのみあって、無限量にはない、としか言い得ません。ですからシンプルリーチョ君が教本の長さの異なる線分を持ってきて、長い方が短い方よりも多くの点を含まないというようなことがどうして可能であるか、ときいた場合に、私は1つの線分は他の線分より多くの、あるいは少ない、あるいは等しい点を含んではいない、しかし各線分は無数の点を含んでいる、と答えます。あるいはもし私が、1つの線分は平方数の数だけの点を、他のそれより長い線分は数の総体に等しい点を、そしてそれより短い線分は立方数の数だけの点を含んでいると答えたとしたら、私は一方の線分には他方より多くの点を、しかも双方とも無数に置いたことになり、それによってシンプルリーチョ君を満足させることができたでしょう。最初の難点についてはそれだけです。

サグレード ちょっと待って。今思いついた考えをあなたの言葉に付け加えて言わせて下さい。今までのことが正しいとすると、私にはある無限数が他の無限数より大ということのみならず、それが有有限数より大ということさえできないように思われます。仮にその無限数が、例えば 100 万より大としてごらん下さい。そうするとその 100 万から上の方へ段々と進んで行けば、私たちは「無限」に近づいていくこととなります。ところが実はそうではないのです。反対に大きな数に進んでいけばいく程、ますます無限から遠ざかるのです。つまり、1 から始まって多くの数をとればとるほど、その中に含まれている平方数の割合はより小さくなります。しかるに無限の中に含まれている平方数の数は既に認めたように、数の総体より少なくはありません。それ故、ますます大きな数に近づけば、それだけ無限から遠ざかるのです。

サルヴィアーティ そうです。そしてその巧みな例証から「より大」、「より小」、「等しい」という言葉が、無限同士を比較したり、あるいはそれと有限量とを比較するときには使えないという結論が出てくるのです。……」

だいぶ長い引用になりましたが、ガリレオは自然数全体の無限集合とその真部分集合である平方数全体の無限集合との要素の「個数」が同じになることに注目したのです。

平方数	:	1^2	2^2	3^2	n^2
		↕	↕	↕		↕	
自然数	:	1	2	3	n

このことは、現代の私たちから見れば、無限集合の特徴的な性質 [というより、無限集合を定義づける性質] として、不思議なことではないのですが、ガリレオにしてみれば奇妙に思えたでしょう。ですから彼は、無限集合に関する大小比較は有限集合同士のようににはできない、と結論づけたのでした。

(2) カントル

カントル (Georg Cantor : 1845-1918) は、ペテルスブルグ生まれのドイツの数学者、哲学者です。三角級数に関する研究に端を発して集合論を創始しました。そして、1874年に超越数——代数方程式 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ を満たす数を代数的数といい、代数的数ではない数を超越数といいます。例えば、 $\sqrt{2}$ は $x^2 - 2 = 0$ を満たしますから代数的数です。超越数としては、円周率 π や自然対数の底 e などが知られています。—— が代数的数よりも多いことを証明しました。しかし、このことは当時の数学界にセンセーションを起こすとともに、強い反論も受けました。集合論の他には、数列の極限の考えを基にした実数論の基礎付けなどの業績があります。1884年以降は強度の憂鬱に見舞われ、死ぬまで入院を繰り返しました。また、1890年にはドイツ数学会初代会長になっています。

それでは、カントルの創始した集合論を覗いてみましょう。

カントルの集合論に関する研究は1870年代に始まるようです。1878年には「集合論への寄与」(*Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*) が発表されますが、主要な論文は1895年の「超限集合論の基礎に対する寄与」(*Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*) です。それは次のように始まります ([2] pp.1-2)。

「**集合**」なる術語によって、われわれはいかなる物であれ、われわれの思惟または直観の対象であり、十分に確定され、かつたがいに区別される物 m (これらの物はこの集合の“要素”と名づけられる) の、全体への総括 M を言うとして理解する。

記号としてはわれわれはこれを次のように表す：

$$M = \{m\} \tag{1}$$

また、互いに共通な要素のない多くの集合 M, N, P, \dots の合併を

$$(M, N, P, \dots) \tag{2}$$

と表す。したがって、この集合の要素は、 M, N, P, \dots などの各集合の要素の全部を一つにまとめたものである。

集合 M の“(真)部分”または“(真)部分集合”という名によって、われわれは、その要素がまた M の要素であるところの (M とは) 別の任意の集合 M_1 を示すものとする。

もし M_2 が M_1 の部分であり、かつ M_1 が M の部分であるならば、 M_2 はまた M の部分である。」

すなわち、1つ1つのものが互いに識別され得るような、いくつかのものの集まりを「集合」(Menge) と呼ぶことにしようというのです。この定義には曖昧性が残されていて、いくつかのパラドックスが発生することになります。

集合に関するパラドックスとしては、例えば次のラッセル (Bertrand Arthur Russell : 1872-1970) のパラドックスがあります。

すべての集合を、自分自身を要素とする第1種の集合と、自分自身を要素としない第2種の集合に分類するとき、第2種の集合の全体 M は第1種であろうか、第2種であろうか。

いま M を第1種の集合だとすると、その定義により M は M の要素となります。しかし、 M は第2種の集合の全体ですから、 M は M に含まれることはありません。

また M を第2種の集合だとすると、 M は M の要素ではありません。ですから、 M は M に属することになってしまいます。

すなわち、「 $M \in M$ ならば $M \notin M$ 」, 「 $M \notin M$ ならば $M \in M$ 」となってしまいます。

カントルは続けて「われわれの思考能力によって、集合 M から M の各要素のもつ個々の性格とこれら要素の置かれている順序関係を捨棄した場合に把握される一般的概念につけられた名称である」([2] p.2) として、集合 M の濃度またはカルジナル数を定義します。

また、2つの集合 M, N について「もし或る一つの法則により、相互に一方の集合の各要素に他方の集合の一つか一つに限る要素が対応するような関係に両者を置くことができる」([2] pp.2-3) とき、それらの集合は対等であるとします。

そして、それらの概念の間には「集合間の対等性が、そわらの集合のカルジナル数が相等しいための必要・十分なる条件を形成する」([2] p.3) という関係があるといえます。カントルに従って、集合 M の濃度を \overline{M} と表し、2つの集合 M, N が対等であることを $M \sim N$ と表すことにすると、

$$\overline{M} = \overline{N} \iff M \sim N$$

が成り立つということです。

2つの集合が対等であるとは、それらの集合の要素の間に1対1の対応関係が存在する[すなわち、過不足なく要素間の対をつくることができる]ということです。1対1の対応関係が認められるならば、2つの集合の要素の「個数」が“同じ”になることは容易に想像できるでしょう。

さて、集合間の対等という関係には

- (i) $M \sim M$
- (ii) $M \sim N$ ならば $N \sim M$
- (iii) $M \sim P$ かつ $P \sim N$ ならば $M \sim N$

という性質がありますから、集合全体を“対等である”という関係で分類することができます。

そして、集合全体を対等であるという関係で分類したときにできる1つ1つの集まり(同値類といえます。)に濃度という「数」をつけてしまおうというのです。

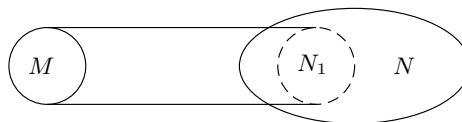
濃度は有限集合の要素の個数の一般化[無限集合への対応]になっています。

ガリレオが見たことは、自然数全体の集合 \mathbb{N} と平方数全体の集合 H とが対等であるということでした。ですから、 \mathbb{N} と H は濃度が等しくなります。自然数全体の集合の濃度のことを、こんにちでは、可算の濃度あるいは可付番の濃度といっています。

濃度の大小関係については次の2つの条件が成り立つとき、 $\overline{M} < \overline{N}$ であると定めます。(§2)

- (1) M のいかなる部分(集合)も N と対等でない。
- (2) N の部分(集合) N_1 が存在して、 $N_1 \sim M$ である。

すなわち、2つの集合 M, N について、 M と N の間には対等関係は成立しないが、 N の部分集合 N_1 と M との間には対等関係が成立するとき、 M の濃度の方が N の濃度より小さいということにするのです。



ガリレオの例のように、 $M \subset N$ でも $\overline{M} = \overline{N}$ となることがあります。いま、実数全体の集合を \mathbb{R} と表すと、 $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ で、このときは本当に $\overline{\mathbb{N}} < \overline{\mathbb{R}}$ となっています。なお、実数全体の集合の濃度のことを連続の濃度あるいは連続体の濃度といっています。

カントルは無限集合 (カントルの言葉では超限集合) を次のように定義します。

「ただ一個の物 e_0 に対し、もしわれわれがそれを集合 $E_0 = (e_0)$ の概念のもとに含ませるならば、それには、われわれが“一個”と名づけ記号 1 をもって表すものが、カルジナル数として対応する；すなわち $1 = \overline{E_0}$ 。

さて、次にはこの E_0 に一個の別のもの e_1 を付加して、その和集合を E_1 と名づけよう。すなわち $E_1 = (E_0, e_1) = (e_0, e_1)$ 。 E_1 のカルジナル数は“二個”とよばれ、2 をもってこれを表すことにする： $2 = \overline{E_1}$ 。」 (§5, [2] pp.11-12)

として「有限カルジナル数を無限系列」1, 2, 3, 4, …… を定めた後、§6 ([2] p.16) で

「有限のカルジナル数をもつ集合を有限集合と言い、他のすべての集合を超限集合、そしてこれら後者が与えるカルジナル数を超限カルジナル数と名づけよう。

あらゆる有限カルジナル数 ν の全体より成る集合が超限集合のもっとも手近の例を提供する；この集合の与えるカルジナル数をアレフ零と名づけ、 \aleph_0 [\aleph はヘブライ語のアルファベットの最初の文字で「アレフ」と読みます。] と記すことにする。」

この後で順序数と呼ばれるものを定義して集合論を展開していくのですが、それはここでの範囲を超えていますから割愛することにします。

さて、カントルは自然数全体の集合より実数全体の集合の方が濃度が大きい [“個数”が多い] ことを示したのですが、そのときに用いられたのがこんにち対角線論法 (diagonal method) といっているものです。それを紹介しましょう。

ここで示すのは、0 と 1 の間にある実数全体の方が自然数全体より濃度が大きいということです。そのために実数はすべて無限小数で表すことにします。例えば、0.3 は 0.2999999… と表すことにします。

いま、0 と 1 の間の実数全体の集合の濃度が自然数全体の集合の濃度と等しいと仮定すると、それら 2 つの集合には 1 対 1 の対応が存在しますから、0 と 1 の間の実数全体を対応する自然数の順に並べることができます。

$$\begin{array}{lcl}
 \alpha_1 & \longleftrightarrow & 0. a_{11} a_{12} a_{13} a_{14} a_{15} \dots\dots \\
 \alpha_2 & \longleftrightarrow & 0. a_{21} a_{22} a_{23} a_{24} a_{25} \dots\dots \\
 \alpha_3 & \longleftrightarrow & 0. a_{31} a_{32} a_{33} a_{34} a_{35} \dots\dots \\
 \alpha_4 & \longleftrightarrow & 0. a_{41} a_{42} a_{43} a_{44} a_{45} \dots\dots \\
 & & \dots\dots\dots \\
 \alpha_n & \longleftrightarrow & 0. a_{n1} a_{n2} a_{n3} a_{n4} a_{n5} \dots\dots \\
 & & \dots\dots\dots
 \end{array}$$

さて、上の対応で a_{nm} はすべて 0 から 9 までの間の自然数です。そこで、次のようにして新しい実数 β を作ります。すなわち、

小数第 1 位 b_1 は, $a_{11} = 1$ ならば $b_1 = 9$, $a_{11} \neq 1$ ならば $b_1 = 1$

小数第 2 位 b_2 は, $a_{22} = 1$ ならば $b_2 = 9$, $a_{22} \neq 1$ ならば $b_2 = 1$

小数第 3 位 b_3 は, $a_{33} = 1$ ならば $b_3 = 9$, $a_{33} \neq 1$ ならば $b_3 = 1$

小数第 4 位 b_4 は, $a_{44} = 1$ ならば $b_4 = 9$, $a_{44} \neq 1$ ならば $b_4 = 1$

.....

小数第 n 位 b_n は, $a_{nn} = 1$ ならば $b_n = 9$, $a_{nn} \neq 1$ ならば $b_n = 1$

.....

この新しい実数 $\beta = 0.b_1b_2b_3b_4 \cdots b_n \cdots$ は明らかに 0 から 1 までの間の実数になります。しかし, この実数は小数第 n 位において α_n と異なりますから, どの α_n とも等しくはありません。すなわち, 上で対応づけられたどの実数とも等しくないのですから, 1 対 1 に対応づけられたとすることと矛盾します。

従って, 0 と 1 の間の実数全体の集合の濃度と自然数全体の集合の濃度とは等しくはありません。また, 自然数全体の集合の濃度の方が小さいことは明らかですから, 0 と 1 の間の実数全体の集合の濃度の方が自然数全体の集合の濃度より本当に大きくなります。

実数を小数表示にして“1 列に”並べたとき, 対角線にあたる位の数字に目をつけて考えていく手法ですから対角線論法というのです。なかなかうまい方法だと思いませんか。

ところで, 数の集合の間には

自然数全体の集合 $\mathbb{N} \subset$ 整数全体の集合 $\mathbb{Z} \subset$ 有理数全体の集合 $\mathbb{Q} \subset$ 実数全体の集合 \mathbb{R}

という関係があります。

そして, 上に述べたように $\overline{\mathbb{N}} < \overline{\mathbb{R}}$ となっています。では, それら以外の集合の濃度の間の関係はどうなっているのでしょうか。実は, 有理数全体の集合 \mathbb{Q} の濃度は自然数全体の集合 \mathbb{N} の濃度と同じく可算の濃度なのです。

そのことを示すには \mathbb{Q} と \mathbb{N} との間に相互に 1 対 1 の対応づけがつかれることをいえばよいのです。

そこで, 正の有理数を分数 $\frac{n}{m}$ で表すことにします。[整数 n は $\frac{n}{1}$ とします。] そして例えば,

$$k = \frac{1}{2}(n+m)(n+m+1) + n$$

とすれば, 正の有理数 $\frac{n}{m}$ から自然数 k への 1 対 1 の対応づけができます。[この対応を対関数といいます。]

逆に, 自然数 k に対しては (n を超えない最大の整数を記号 $[n]$ で表わすことにして)

$$u = \left[\frac{\sqrt{8k+1} - 1}{2} \right] \quad v = \frac{1}{2}(u^2 + u)$$

として

$$\begin{cases} n = k - v \\ m = u - n \end{cases}$$

とすれば, 自然数 k から正の有理数 $\frac{n}{m}$ への 1 対 1 の対応づけができます。

これで, 自然数全体の集合と正の有理数全体の集合とが対等であることになりました。有理数全体では, 正の有理数 \rightarrow 負の有理数 \rightarrow 正の有理数 \rightarrow 負の有理数 $\rightarrow \cdots$ として, 対応づけをちょっと変更すればよいですから, 有理数全体の集合は自然数全体の集合と対等になり, 有理数全体の集合 \mathbb{Q} の濃度は可算の濃度ということになります。すなわち,

$$\overline{\mathbb{N}} = \overline{\mathbb{Z}} = \overline{\mathbb{Q}} < \overline{\mathbb{R}}$$

となっています。

では, 可算の濃度と連続体の濃度との間にはそれらの中間の濃度があるのでしょうか。それとも, 可算の濃度の次の濃度は連続体の濃度なのでしょうか。[この問題をこんにちでは連続体問題といっています。] カントルは $\overline{\mathbb{N}} < a < \overline{\mathbb{R}}$ となる濃度 a は存在しないと考えましたが, それを証明することはできませんでした。

(3) デデキント

デデキント (Julius Wilhelm Richard Dedekind : 1831-1916) はドイツの数学者です。整数論、代数学に関して大きな業績があるほか、数の体系の基礎づけや集合を活用する手法によって現代数学の性格の形成に重要な役割を果たしました。集合一元論的な現代数学の創始者とも考えられます。カントルの集合論に対しては当初から理解的・協力的でした。

デデキントは『数とは何か、何であるべきか』(*Was Sind und Was Sollen die Zahlen ?* : 1887年) において、カントル流の集合の考えを次のように展開しています ([3] pp.59-61)。

「1 以下に述べる「事物」とはわれわれの思考の対象となるものなら何でもよいという意味である。事物について話がよく運ぶように、これを記号、たとえばアルファベットの文字で表し、手短かに事物 a とか単に a とかいうことにする。これは本当は a によって表される事物という意味で、文字 a 自身のことではない。1つの事物は、それについて述べ得られることまたは考え得られることすべてによって決定される。1つの事物 a が b と同じである (b と合同である)、または b は a と同じであるというのは、 a について考えられることはすべてまた b についても考えられるし、 b について成立するあらゆることが、 a についても考え得られるということである。 a と b とが同一の事物の記号または名前に過ぎないことを、記号 $a = b$ により、また $b = a$ とも示す。そのうへ $b = c$ ならば、 c は a のように、記号 b で表された事物に対する記号であるから、 $a = c$ でもある。 a によって表された事物と b によって表された事物との間に上述の一致が起こらないならば、これらの事物 a 、 b は相異なる、 a は b とは別の事物である、 b は a とは別の事物であるという。これは一方のものには適合するが、もう一方には適合しないという何らかの性質があるということである。

2 相異なる事物 a 、 b 、 c 、 \dots を何らかの理由から1つの共通な見地からとらえて、頭の中で総括するということがよく起こってくる。このときこれらの事物は「集合」 S を作るという。事物 a 、 b 、 c 、 \dots を集合 S の「要素」と呼び、これらは S に「含まれ」、逆に S はこれらの要素から「構成される」という。このような集合 (または全体、多様体、総体) はわれわれの思考の対象としてやはり1つの事物である。これは、1つ1つの事物が S の要素であるかないかが確定すれば、あますところなく確定する。従って集合 S が集合 T と同じであるというのは、記号 $S = T$ と書くが、 S の1つ1つの要素がまた T の要素でもあり、また T の1つ1つの要素が S の要素でもあることである。表現の仕方を等しい形にするために、集合 S がただ1つの (1つで1つに限る) 要素 a から成るという特別の場合も許すことにすると都合がよい。これは事物 a は S の要素であるが、 a と異なるどんな事物も S の要素でないという場合である。これに反して空の集合、要素を含まない集合は、別の研究に対してはこういうものを作ると便利なことがあるけれども、ある根拠からしてここには全く除外する。

3 説明 1つの集合 A が1つの集合 S の「部分集合」であるとは、 A のどの要素もまた S の要素になっていることである。集合 A と集合 S との間のこの関係は以下には、いつでも繰り返して述べられるから、このことを簡約して記号 $A \subset S$ で表すことにしよう。逆の記号 $S \supset A$ でも同じ事実を示すこともできるであろうが、判明と簡単のためにこの記号は全く避けることにする。あらゆる A の要素が S の要素のうちに見いだされるときに、もっとよい言葉がないので、 S は A の「全体集合」であるというときもある。集合 S の1つ1つの要素 s は2によってそれ自身が集合と理解されるから、これに対して記号 $s \subset S$ を適用することができる。」

ここに見られるように、デデキントはいくつかの事物を総括したものを集合と呼び、空集合は、便利さは認めてはいますが、用いないとしています。もちろん現代の私たちは空集合も集合の一例として扱っています。また、1つの事物がある集合の要素かどうかを確定させる仕方を知っているかどうかは、議論の展開にはどうでもよいことであると断っています。すなわち、要素の所属関係は具体性を伴わない超越的なものでもよいということです。

そして、この後で集合間の「相似」関係を定めて、それを基に無限集合を定義します。

「21 説明 1つの集合 S の「写像」 φ とは、1つの法則のことであって、この法則に従って S の1つ1つの確定した要素 s に確定した事物が「属し」、これを s の「像」といい、 $\varphi(s)$ で表す。また $\varphi(s)$ は要素 s に「対応する」とも、 $\varphi(s)$ は写像 φ により s から「生じた」または「生成された」とも、 s は写像 φ によって $\varphi(s)$ に「移行した」ともいう。さて T が S の任意の部分集合ならば、 S の写像 φ のうちには同時に T の確定した写像を含んでいる。これを簡単のために同じ記号 φ で表してもよいし、これは集合 T の1つ1つの要素 t に、 S の要素としての t の有する像と同じ像 $\varphi(t)$ を対応させることによって成立する。同時にあらゆる像 $\varphi(t)$ から構成される集合を T の像と呼び、 $\varphi(T)$ で表すことにする。これによって $\varphi(S)$ の意味も明らかになる。集合の写像の例としては、その要素に確定した記号または名前を付けるだけでもよい。集合の最も簡単な写像は、どの要素もそれ自身へ移行させる写像で、これを集合の「合同写像」と呼ぶことにする。」([3] pp.65-66)

「26 説明 1つの集合 S の写像 φ は、もし集合 S の相異なる要素 a, b がいつでも相異なる像 $a' = \varphi(a), b' = \varphi(b)$ に対応するならば、「相似」(または「区別のつく」) 写像だということ。ところでこの場合逆に $s' = t'$ からいつでも $s = t$ が出てくるから、集合 $S' = \varphi(S)$ の1つ1つの要素像 s' は、集合 S の1つの、ただ1つの、全く確定した要素 s の像である。このことから S の写像 φ には、集合 S' の $\bar{\varphi}$ と表すべき「逆の」写像が対立する。これは S' の1つ1つの要素 s' に像 $\bar{\varphi}(s') = s$ が対応し、明らかにやはり相似である。 $\bar{\varphi}(S') = S$ であること、さらに φ は $\bar{\varphi}$ に属する逆の写像であること、25によって φ と $\bar{\varphi}$ とを合併した写像 $\bar{\varphi}\varphi$ は S の合同写像であること、はいずれも明らかである。」([3] p.69)

「32 説明 集合 R, S は、もし S の相似写像で $\varphi(S) = R$ になるものが存在すれば、「相似」と呼ばれる。このとき従って $\bar{\varphi}(R) = S$ である。30により1つ1つの集合は自分自身と相似であることは明らかである。」([3] p.71)

「64 説明 集合 S は、もしそれ自身の真部分集合に相似ならば、「無限」であるといい、そうでない場合には S を「有限」集合であるという。」([3] pp.80-81)

カントルやデデキントの研究状況によれば、17世紀前半にガリレオが見た無限集合の不思議さは、19世紀末には彼らによって無限集合の定義としてしっかりと把握されていたこととなります。なお、デデキントのいう相似写像はこんにちでは「1対1の写像」あるいは「1対1の対応」というような言い方が普通です。

問1 無限集合に対する、ガリレオとカントルやデデキントとの扱い方の違いをいいなさい。

参考文献

- [1] G. ガリレオ (今野 武雄, 日田 節次・訳) 「新科学対話」(上下2冊), 岩波書店 (岩波文庫), 1937, 1948 (昭和12, 23)
- [2] G. カントル (功力 金二郎, 村田 全・訳) 「超限集合論」, 共立出版 (現代数学の系譜8), 1979 (昭和54)
- [3] R. デデキント (河野 伊三郎・訳) 「数について」, 岩波書店 (岩波文庫), 1961 (昭和36)
- [4] 「世界大百科事典 第2版」, 日立システムアンドサービス, 2004 (平成16)