9　関数の考え

現代では「関数」は次のように定義されるのが普通です。

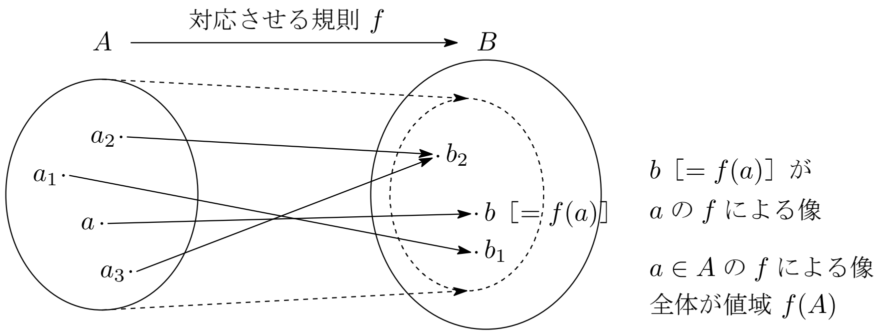
「集合 A ，B において，A の各元に B の元を 1 つずつ対応させる規則が定まっているとき，A から B への**写像** (mapping) が定まっているという。写像を**関数** (function) とか変換 (transformation) ともいう。写像を表すのに普通 f ，g ，φ ，ψ などが用いられ，A から B への写像 f を $f : A \to B$ ，あるいは $A \xrightarrow{f} B$ などと表す。f によって A の元 a に B の元 b が対応するとき $b = f(a)$ と書き，b を a の f による像 (image) という。写像 (関数) $f : A \to B$ において，A を定義域 (domain) といい，$f(A) = \{f(a)|a \in A\}$ を値域 (range) という。

写像 $f : A \to B$ において，$f(A) = B$ のとき，f を A から B の上への写像 (onto-mapping) または全射という。写像 $f : A \to B$ において，A のことなる 2 元 a_1 ，a_2 に対して $f(a_1) \neq f(a_2)$ であるとき，すなわち f の値域の元 b に対して $f(a) = b$ となる A の元 a がただ 1 つに限るとき，f を 1-1 (1 対 1) 写像 (one-to-one mapping) または単射という。

写像 $f : A \to B$ において，$A \times B$ の部分集合 $G = \{(a, f(a))|a \in A\}$ を，f のグラフ (graph) という。写像 f のグラフ G は，

(i) A の各元 a に対し $(a, b) \in G$ となる $A \times B$ の元 (a, b) が存在し，

(ii) $(a, b) \in G$ および $(a, b') \in G$ ならば $b = b'$ である。」



この定義の仕方は集合論に基づくもので，この形のままでは高校では通常扱いません。高校では，関数はその表示式 (その関数の対応関係を表す式) によって定義するのが普通です。高校までに学習する関数には次のようなものがあります。

① 1 次関数 $\cdots$ $y = ax + b$

② 2 次関数 $\cdots$ $y = ax^2 + bx + c$

③ 3 次関数 $\cdots$ $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

④ 指数関数 $\cdots$ $y = a^x$

⑤ 対数関数 $\cdots$ $y = \log_a x$

⑥ 三角関数 $\cdots$ $y = \sin x$ ，$y = \cos x$ ，$y = \tan x$

⑦ 分数関数 $\cdots$ $y = \dfrac{cx + d}{ax + b}$

⑧ 無理関数 $\cdots$ $y = \sqrt{ax + b}$

(1)　関数以前

数量の間の対応関係 (集合間の要素の対応関係) が関数で，その様子を視覚化したものがグラフです。歴史的には関数概念の認識より先にグラフの方が現れました。

> 運動そのものはここでの議論とは直接の関係はありませんが，アリストテレス (Ἀριστοτέλης (Aristoteles) : 前 384–前 322) は『自然学』(Φυσικη Ακροασις : *Physica*) において次のように述べています。
> すなわち，彼は「自然は運動の原理でありまた (一般に) 転化の原理であり，そしてわれわれの研究はこの自然についてであるからして，それゆえに，われわれは運動のなにであるか［本質］の考察を忘れてはならない。」とした上で，運動を広義に捉えて
>
> $$\text{転化}\left\{\begin{array}{l}\text{生成と消滅 (実体に関する)}\\ \left.\begin{array}{l}\text{変化 (性質に関する)}\\ \text{増大と減小 (量に関する)}\\ \text{移動 (場所に関する)}\end{array}\right\}\text{運動}\end{array}\right.$$
>
> としています。
> 私たちが運動というとき，普通はこれらのうちの第 4 のもの，すなわち場所の運動である移動を指しています。

フランスの僧侶ニコル・オレーム (Nicole Oresme : 1320?–1382) は分数指数を考え，これを記号化しているだけではなく，質の強度変化をグラフ的に示して座標軸と関数概念に近づいています。グラフの考えに思い至ったのは 1361 年以前であろうと思われ，数量の間の対応関係をグラフという形で明確に捉えはじめた最初の一人といえるでしょう。

彼は運動体の様子を表すためにグラフを利用したのですが，水平線によって運動の通過した距離または時間の拡がりを表し，水平軸に垂直な線分によって与えられた点における速度などの強度を示すようにしました。

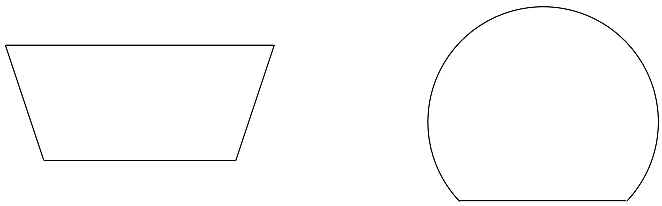
彼には『質と運動の図形化』(*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* : 1350 年代) という著作があります。これは「内包量 (intensio) の均一性と非均一性についての考えを私が秩序づけ始めたとき，この主題に対して寄与すべき新しい事柄が頭に浮かんだので」著述したもので，その冒頭で次のように述べています (［1］pp.462–463)。

> 「測定されうるものは，数を除けばすべて，連続量の態様に即して把握される。それゆえ，そのようなものの測定のために，点，線，面，あるいはそれらのものの固有性を把握しなければならない。ところで，こうした幾何学的なものにおいてこそ，哲学者が主張するように，測定または比が存在する。そして他のものにおいては，それらが幾何学的なものへ知性によって関係づけられるときに初めて，測定あるいは比が認識される。たとえ点や線が実在しないとしても，ものを測定したり測定量間の比を認識するために，それらを数学的に仮定しなければならない。それゆえ，連続的に獲得されうるすべての内包量は，基体 (subiectum) の上に垂直に立てられた直線によって把握されなければならない。実際，同じ種の内包量と内包量のあいだにどのような比があろうとも，線と線のあいだに同様の比が見出されるし，逆も同様である。…… それゆえ，内包量の測定は，線の測定で考えればよいであろう。……
> 　…… 内包量は，ただ一つの仕方によってのみ分割可能で，それも連続的なものの態様に即して無限に分割可能であるので，第一義的にそしてただ一つの仕方でのみ分割されうる連続的なもの，つまり線を用いる以上に適切な表現方法は考えられない。」(第 1 部第 1 章)

『質と運動の図形化』の中で，オレームは内包量 (連続量) を線分で表そうという考え方を提示します。内包量とは「あるものがそれに従ってより白いとかより速いと言われるもの」(［1］p.462) なのですが，これを言葉で説明するよりも図形で表現した方が認識しやすいと考えたからに他なりません。彼は次のように言います (［1］p.466)。

> 「われわれが質をこのように把握しなければならないのは，質の状態を容易に認識するためであることは明らかである。なぜなら質の状態によく似たものが可感的な形で描かれるとき，そして可視的な例において説き明かされるとき，質の均一性と非均一性を速く，容易にそして明晰に検討することができるからである。実際，均一的な仕方で非均一的な質が何であるかを理解することは，ある人々には非常に困難なように思える。しかし，直角三角形の高さが均一的な仕方で非均一的であるということ以上に理解の容易なことがあろうか。」(第 1 部第 4 章)

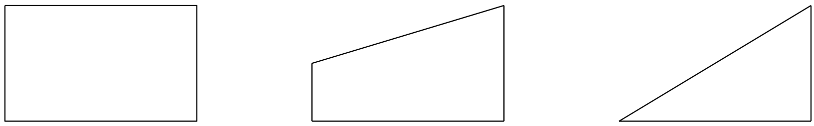
彼は基体を横線で，そのときどきに現れる「質」の内包量を縦線で表します。このとき，その縦線の上端を結んでできる平面がその質の状態を表していることになります。ですから，下の図のような「底辺の一点の角が直角より大きい形」や「円周の半分より大きい円弧」によって表される図形は，内包量が基体の外にはみ出してしまうため，あり得ないといいます (［1］p.467)。



彼は質の状態を「均一的」という基準で区分します。そして，それぞれの状態に対応する図形を明らかにしていきます。すなわち，

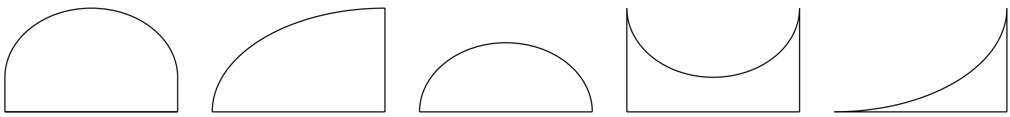
> 「均一な質とは基体のすべての部分において等しい内包量を持つ質のことであるし，均一的な仕方で非均一な質とは，三つの点のうちの第一点と第二点のあいだの距離の，第二点と第三点のあいだの距離に対する比が，内包量に関して第一点の第二点に対する超過の，第二点の第三点に対する超過に対する比と等しいような質である。ただし第一点が最大の内包量をもつものと決める。
>
> ……
>
> 上述の質とは別の仕方で処理される質は，すべて非均一的な仕方で非均一と言われ，否定語を使って記述される。つまり，基体のすべての部分において等しい内包量をもつものでもなく，質の任意の三点のうち第一点の第二点に対する超過が第二点の第三点に対する超過に対してもつ比が，それらの点のあいだの距離の比とは等しいとは言えないような質であると記述される。」(第 1 部第 11 章。(［1］pp.475–477))

さて，均一な質はすべての部分で等しい内包量をもつのですから，長方形で表されます。また，均一的な仕方で非均一な質のうち，両方の側とも一定の高さで終わる均一的な仕方で非均一な質は台形で表され，均一的な仕方で零に終わる非均一な質は直角三角形で表されます。



均一な質　　　　　　均一的な仕方で非均一な質

そして「単純なほうの非均一的な仕方での非均一性は，(1) 円弧でもなく，高さにおいて円弧に比例してもおらず，頂上が非円弧状の曲がりぐあいをもつ図形によって把握されるか，あるいは (2) 頂上が円弧状の曲がりぐあいをもつ図形，つまり円弧かあるいは高さにおいて円弧に比例した曲がりぐあいをもつ図形によって把握されるかである。」(第 1 部第 15 章。（［1］pp.481–482))



非均一な仕方で非均一な質

さらに，複合された非均一的な仕方で非均一な質はそれらの図形を複合した図形で表されることになります。

以上のことを運動の表現に応用する場合，横線が時間を表し，縦線がそのときどきの速度の大きさを表すことになって，そこから得られる図形の面積が通過距離を表すことになります。例えば，等速度運動は均一な質ですから長方形で表され，その面積の算出方法から

「距離 $=$ 時間 $\times$ 速さ」

が図形化されることになります。

また，等加速度運動は均一的な仕方で非均一な質ですから台形または直角三角形で表されます。このとき，それらの図形の面積は，所要時間の中央時における速度の大きさを高さとする長方形の面積と等しいことがいえますから，「等加速度運動における通過距離は初速度と終速度の平均速度をもつ等速度運動が同じ時間に通過する距離に等しい」ことが示されたことになります。このことは『質と運動の図形化』では第 3 部で議論されています。

時間と速度の関係をオレームがしたように表すことは現代の私たちもよく使う方法です。このように図形化することによって確かに理解しやすくなりますね。

ところで，(複合された) 非均一的な仕方で非均一な質は図形の上部が曲線となります。このときの図形の面積［運動ならば，通過距離］を正確に算出するには積分法を待たなくてはなりません。人類がその方法を獲得するまでにはまだ 300 年ほどの時間が必要でした。

なお，史上初めてグラフが現れたのは『マクロビウスとボエティウス入門』という本の中に出てくる「黄道帯を通るコースについて」というグラフで，10 世紀頃，写本の際に書き加えられたものといわれています。このグラフは，水平目盛りが経度，垂直目盛りが惑星の緯度で，金星・水星・土星・太陽・火星・木星・月の経度変化が描かれているそうです。

(2)　ライプニッツ

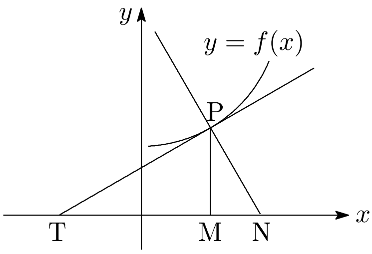
17 世紀当時の公用語であったラテン語の functio を数学的に定まった意味をもつ言葉として初めて使ったのはライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz : 1646–1716) でした。当初はこんにちの関数という意味にまではなっていません。彼は,

(i) 曲線の方程式から，その曲線の接線・法線などの線分の変化の法則を導くこと,

(ii) 接線・法線などの線分の変化の法則から，元の曲線の変化の法則や方程式を導くこと,

を明らかにしていく過程で関数概念を深めていきました。

「逆接線法または functiones について」(*Methodus tangentium inversa, seu de functionibus* : 1673 年 8 月) という手稿の中で彼は，1 つの曲線を与えるとき，それから定まる接線，法線，接線影，法線影等の図形を functio と呼びました。この時点ではまだ「機能」という意味合いが強いのですが，ともかくも，これが史上初めて現れた functio です。



左図で，
PT は曲線 $y=f(x)$ の点 P における接線,
PT ⊥ PN のとき，PN は点 P における法線,
PM が x 軸に垂直のとき,
線分 TM が接線影，線分 NM が法線影

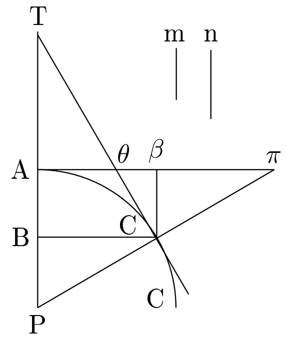
この頃には，ヴィエート (François Viète : 1540–1603) らに始まりデカルト (René Descartes : 1596–1650) らによって整理されてきた記号法に基づいて，曲線を方程式で表すということが行われていました。ライプニッツにとっては，方程式は x (横線 abscissa) と y (縦線 ordinata) との関係を示すものでした。そして彼は，横線と縦線とをあわせて「座標」(coordinatae) と呼び，x と y を等価値として扱うようにしました。

逆接線問題 (上に挙げた (ii) の問題) に取り組んでいる中，1693 年 9 月の論文「計量幾何学についての補遺，あるいは，あらゆる求積を運動によって最も一般的に遂行すること，また同様にして接線の与えられた条件から曲線を多様に作図すること」(*Supplementum geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum : similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentium conditione*) においてライプニッツは次のように述べています (［3］pp.42–43)。

> 「同様の手続きをさまざまな方法で逆接線法の問題に応用することができる。例えば，もし点 T が (直線 AT のかわりに) 曲線 TT の上を動くならば，座標軸 HC (すなわち横線 AB) も計算に関係してくる。そして実際，すべての逆接線問題は 3 つの直線，すなわち座標軸 CB, CH と線 CT の間の関係，あるいは代わりとなる別の函数［関数］の間の関係に還元しうる。しかし，運動を利用すれば問題をさらに簡単に解決しうることが多い。」

ここでもライプニッツにとって関数とは，接線や法線あるいはそれらに関連した線分を意味していたことが分かります。

彼は「微分算の新しい適用と，接線に関して与えられた条件から線をさまざまな形で作図することへのその応用」(*Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione* : 1694 年 7 月) で次のようにいいます (［3］p.67)。



「さて，一般的な問題は以下のように把握することができる。2 つの函数の間の比が与えられた時に線を見出すこと。与えられた比とは，例えば m と n といった，2 つの与えられたものの間の比であると考える。函数と私が呼ぶのは，固定された点と自身の湾曲を持った曲線の与えられた点だけによって直線が引かれる時に，切り取られる直線の部分のことである。以下のようなものがそれである。横線 AB あるいは Aβ (左図)，縦線 BC あるいは βC，接線 CT あるいは Cθ，法線 CP あるいは Cπ，接線影 BT あるいは βθ，法線影 BP あるいは βπ，接線によって分割された AT あるいは Aθ，法線によって分割された AP あるいは Aπ，2 つの分割されたものが合わさった PT あるいは πθ，接合すなわち湾曲の径 CP，そしてその他数えきれないほど多くのもの。」

ここでは，ライプニッツにとっての「関数」が列挙されています。［functio が現れたのはこれが 3 回目です。］依然として接線や法線などの線分を表す言葉として関数が用いられていることに変わりはありません。この後，彼は幾何学的な関数概念から解析的な関数概念へと進んでいくのですが，それにはヤコブ (Jakob Bernoulli : 1654–1705) とヨハン (Johann Bernoulli : 1667–1748) のベルヌーイ兄弟との文通が大きな役割を果たしたようです。1698 年 8 月の日付がある，ライプニッツからヨハンへの手紙には「function」が「変数 x と変数 y との関係」または「変数 x の任意の式」というような表現があるとのことです。

「微分算の歴史と起源」(*Historia et origo calculi differentialis*) は 1714 年頃の執筆ですが，公表されたのは 1848 年です。その中に次のような一節があり，ここには解析的な関数の考えが見られます (［3］pp.307–308)。

「ライプニッツの新しい算法によって，幾何学のこのような全体が解析的計算の対象となるのであり，デカルトがいったあの機械的曲線，すなわち超越曲線にしても，微分 dx，ddx など，また微分の逆である積分を x 自体のある函数と見て，計算中に入れることにより，やはり軌跡方程式にとりこまれている —— それ以前に量の函数として用いられたものは x，xx，x^3，$\sqrt{x}$ など，すなわち冪(べき)と根以外になかったのであるが。だから，フェルマやデカルト，また 16$\cdots$ 年に刊行された『プリンキピア』中での例の競争者のように，これらの量を 0 で表した人々は，なお微分算からは極めて遠くにあったことが理解される。なぜならば，これでは微分の階数も，異なる量の微分函数も区別しえないからである。」

このように，関数は，17 世紀の後半に接線や法線などの線分を指していたものが 18 世紀へと変わる頃に解析的な表示式を意味するものへと変わっていきました。

(3)　オイラー

オイラー (Leonhard Euler : 1707–1783) はスイスに生まれ，ペテルスブルグやベルリンで活躍した数学者です。18 世紀の数学の中心に立つ数学者で，数学解析，偏微分方程式，楕円関数論，変分法，代数学などほとんど全ての部門にわたって功績を残しました。また，トポロジーの発端を開きました。数学史上最大の多作家です。

彼は『無限小解析入門』(*Introductio in Analysin Infinitorum* : 1748 年) の第 1 巻第 1 章において，関数を次のように定義しました (［4］pp.1–3)。

「1　定量とは，一貫して同一の値を保持し続けるという性質をもつ，明確に定められた量のことをいう。 ······

2　変化量とは，一般にあらゆる定値をその中に包摂している不確定量，言い換えると，普遍的な性格を備えている量のことをいう。 ······

4　ある変化量の関数というのは，その変化量といくつかの数，すなわち定量を用いて何らかの仕方で組み立てられた解析的表示式のことをいう。

それゆえ，もしある解析的表示式において，その表示式を構成する量は，変化量 z は別にするとすべて定量であるとするなら，そのような解析的表示式はどれも z の関数である。たとえば,

$$a+3z\ ,\ az-4zz\ ,\ az+b\sqrt{aa-zz}\ ,\ c^z$$

などは z の関数であることになる。

5　それゆえ，ある変化量の関数はそれ自身，変化量である。

実際，変化量にはあらゆる定値を代入することが許されるのであるから，関数は無限に多くの定値を受け入れる。しかもまた，たとえ関数が受け入れることのできない定値であっても，除外されることはない。なぜなら，変化量には虚値も包摂されているからである。たとえば関数

$$\sqrt{9-zz}$$

は，z に実数値を代入しても，決して 3 よりも大きな値を獲得することはない。だが，それはそうとしても，z に対して虚値，たとえば $5\sqrt{-1}$ のような虚値を与えることにするならば，式 $\sqrt{9-zz}$ から取り出すことのできない定値を指摘するのは不可能になってしまうのである。ただし，たとえば

$$z^0\ ,\ 1^z\ ,\ \frac{aa-az}{a-z}$$

のように，変化量がどのように変化しようとも，一貫して同じ値を保持し続ける見かけ倒しの関数がしばしば姿を見せることがある。これらは関数のような外見を装ってはいるが，本当のところは定量なのである。

6　変化量と定量を用いて関数が形成される際の構成様式に関連して，まず初めに行われるべき関数の区別が確立される。

この区別は，諸量を相互に組み合わせたり混ぜ合わせたりすることを可能にする演算の様式に基づいて遂行される。そのような演算とは，加法と減法，乗法と除法，それに冪 (べき) を作ることと根号を開くことを指すが，これに加えて方程式を解くことも考えに入れておかなけ

ればならない。これらの演算は代数的と称される習わしになっているが，これらのほかにも，たとえば指数，対数，それに積分計算が供給してくれる他の無数の演算のように，多くの超越的演算が存在する。

ここで，積

$$2z\ ,\ 3z\ ,\ \frac{3}{5}z\ ,\ az$$

や，z の冪

$$z^2\ ,\ z^3\ ,\ z^{\frac{1}{2}}\ ,\ z^{-1}$$

のような，二，三の特定の種類の関数に着目するとよいと思う。これらの関数の場合には，単独の演算に基づいて作られるものが選択されたのである。そこでいくつかの任意の演算に由来して生じる表示式の場合には，関数という呼称を用いて明示する必要が出てくるわけである。」

続けて，オイラーは関数を次のように分類します。

$$\begin{cases} \text{代数関数} \begin{cases} \text{有理関数} \begin{cases} \text{整関数} \\ \text{分数関数} \end{cases} \\ \\ \text{非有理関数} \begin{cases} \text{陽関数} \\ \text{陰関数} \end{cases} \end{cases} \\ \\ \text{超越関数} \end{cases}$$

代数関数とは，「代数的演算のみを用いて組み立てられる関数」のことです。例えば，多項式で表される関数，分数式で表される関数，根号を用いて表される関数などが代数関数です。そして，代数関数ではない関数を超越関数と呼びます。例えば，$y=e^z$ ，$y=\sin z$ などは超越関数です。
こんにちでは，代数方程式 $F(x\,,\,y)=0$ によって定められる関数 $x\mapsto y$ を代数関数といいます。y が x の整式で表されるとき整関数，有理式で表されるとき有理関数といい，どちらも代数関数です。そして，代数関数，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数，及びこれらの関数の有限回の合成で得られる関数のことを初等関数といっています。また，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数は初等超越関数と呼ばれます。

さらに，関数の別の分類を示します (［4］pp.5–6)。

「10　続いて，わけても関数の，一価関数と多価関数への区分けを行わなければならない。

(変化量 z の) 一価関数というのは，変化量 z に対してある任意の定値が与えられるとき，やはり 1 個の定値を獲得するような関数のことである。これに対して，多価関数というのは，変化量 z にある定値を代入するとき，そのつどいくつかの定値をもたらす関数のことである。

それゆえ有理関数は，整関数でも分数関数でも，ことごとくみな一価関数である。それに対して，非有理関数はすべて多価である。なぜなら，冪根記号は多義的であり，そこにはいくつもの値が包摂されているからである。他方，超越関数の中には，一価関数も多価関数も存在する。たとえば $\sin z$ に所属する円弧のように，無限多価関数さえ存在する。というのは，すべて同一の正弦をもつ，無限に多くの円弧が存在するからである。

z の個々の一価関数を表示するには，P ，Q ，R ，S ，T ，$\cdots$ という文字を用いる。」

ここに見られるように，オイラーにとって関数とは「解析的表示式」のことでした。ライプニッツが明確に意識しはじめてから約 70 年くらいの間に，「関数」はこのような形に整理されてきたということです。

(4)　その後

ライプニッツによって，はじめ，ある曲線に対応する線分 (接線や法線あるいは接線影など) として捉えられていた関数は，曲線に従属する (曲線の様子に伴って変化する) 量となり，後期のライプニッツやオイラーにおいては図形を離れ，何かに従属して変動する量あるいはそれを表す解析的な式となっていきました。しかし，いまだ関数は数 a に対して数 $f(a)$ が対応するという，数の間の対応関係でした。現代の私たちがもっている「関数」の定義には数からの脱却が必要ですが，それにはもう少し時間がかかることになります。

> なお，オイラーは次のようにもいいます (［5］p.4)。
> 「点の連続的な運動により曲線が機械的に描かれていき，そのようにして曲線の全容が全体として目に見えるように与えられることがある。$\cdots\cdots$ そうすると x の任意の関数はある種の線を与えることになる，その線はまっすぐかもしれないし，曲がっているかもしれない。逆に，曲線を関数に帰着させていくことも可能になる。$\cdots\cdots$ 曲線の性質は，そのような x の関数の性質に基づいて記述されていく。」

関数概念の形成やその周辺について，オイラー以後を概観しましょう。

フランスの数学者・哲学者ダランベール (Jean le Rond d'Alembert : 1717–1783) は，1747 年に，弦の振動方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の解 $u(t\,,\,x)$ が，境界条件 $u(t\,,\,0) = u(t\,,\,L) = 0$ の下で

$$u(t\,,\,x) = f(t+x) - f(t-x)$$

で与えられることを示しました。ここで，f は周期 $2L$ の「任意の」周期関数です。

> $(n+1)$ 個の独立変数に関する偏微分方程式 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} - \cdots - \dfrac{\partial^2 u}{\partial {x_n}^2} = 0$ を波動方程式といい，関連する物理現象から，$n=1$ のとき弦の振動方程式，$n=2$ のとき膜の振動方程式，$n=3$ のとき音の伝播方程式といいます。
> また，微分方程式が定義されている領域の境界において，その微分方程式の解あるいはその導関数に対して課される条件を境界条件といいます。

また，スイスの物理学者・数学者ダニエル・ベルヌーイ (Daniel Bernoulli : 1700–1782) は，上の弦の振動方程式の解が三角級数を使って表せることを示しました。

ここで，「任意の」関数の意味や三角級数の収束の意味などが問題となりました。また，すべての関数が三角級数で表せるかどうかにも関心が集まりました。

フランスの数学者フーリエ (Jean Baptiste Joseph Fourier : 1768–1830) は 1800 年頃から熱伝導の研究を始めましたが，熱伝導の方程式を導き，それをいろいろな境界条件の下で解きました。その際に，「任意の」関数は三角級数で表されることを発見しました (1807 年) 。これはこんにちではフーリエ級数といわれています。すなわち，$f(x)$ を区間 $(-\pi\,,\,\pi)$ で積分可能な関数とするとき，

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$\text{ここに，}\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt \qquad (k = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \cdots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt \qquad (k = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \cdots)$$

が成り立ちます。

このフーリエの発見は，当時の数学者に対して関数や級数に対する注意を喚起しました。

19 世紀のフランス最大の数学者コーシー (Augustin Louis Cauchy : 1789–1857) は，級数の収束や関数の連続性などの概念を導入して，微分積分学の厳密な基礎付けに貢献しました。そして，1823 年には次のように述べています。

「多くの変数の間にある関係があり，そのうちの 1 つの値とともに，他のものの値が定まるときは，通常その 1 つの変数によって他のものを表して考える。そのとき，この 1 つの変数を独立変数と呼び，他のものはその関数である。」

ドイツの数学者ディリクレ (Peter Gustav Lejeune Dirichlet : 1805–1859) は，まったく「任意」の関数の三角級数による表現に関する 1837 年の論文中で，連続関数に関連して，次のようにいっています。

「a , b を定まった 2 つの値とし，x を a と b の間をとる変数とする。各々の x の値にそれぞれただ 1 つの有限値 y が対応し，x が区間 $(a\,,b)$ を連続的に動くとき，$y=f(x)$ なる y が同じく連続的に変わるならば，y をこの区間の値 x の連続関数という。この場合に y が全区間の x に対して同じ法則に従って x に関係することを要しないばかりでなく，またこの x と y の関係が 1 つの定まった数学的算法で表される必要もない。」

ここには，加減乗除その他の数学的演算から解き放たれた「対応」としての関数の姿が見て取れます。オイラーが関数とは表示式であるといってから 90 年経って，関数とは対応のことであるという認識を獲得したのです。

ディリクレのこの言明が「関数 = 対応」という定義の最初のものとなります。しかし，この頃にはまだ集合の概念は形成されていませんでしたから，これ以上の抽象化には至りませんでした。

そして，19 世紀末にカントルによって創始された集合論に基づいて，冒頭に挙げたような現代の私たちが用いている定義にたどり着くことになるのです。

参考文献

［1］ N. オレーム (中村 治・訳)「質と運動の図形化」，平凡社 (中世思想原典集成 19「中世末期の言語・自然哲学」所収)，1994 (平成 6)
［2］ G. W. ライプニッツ (原 亨吉，佐々木 力，三浦 伸夫，馬場 郁，斎藤 憲，安藤 正人，倉田 隆・訳)「ライプニッツ著作集 2 数学論・数学」，工作舎，1997 (平成 9)
［3］ G. W. ライプニッツ (原 亨吉，横山 雅彦，三浦 伸夫，馬場 郁，倉田 隆，西 敬尚，長島 秀男・訳)「ライプニッツ著作集 3 数学・自然学」，工作舎，1999 (平成 11)
［4］ L. オイラー (高瀬 正仁・訳)「オイラーの無限解析」，海鳴社，2001 (平成 13)
［5］ L. オイラー (高瀬 正仁・訳)「オイラーの解析幾何」，海鳴社，2005 (平成 17)
［6］ 中村 幸四郎「数学史 — 形成の立場から —」，共立出版 (共立全書 236)，1981 (昭和 56)
［7］ 安藤 洋美「高校数学史演習」，現代数学社，1999 (平成 11)
［8］ 「世界大百科事典 第 2 版」，日立システムアンドサービス，2004 (平成 16)