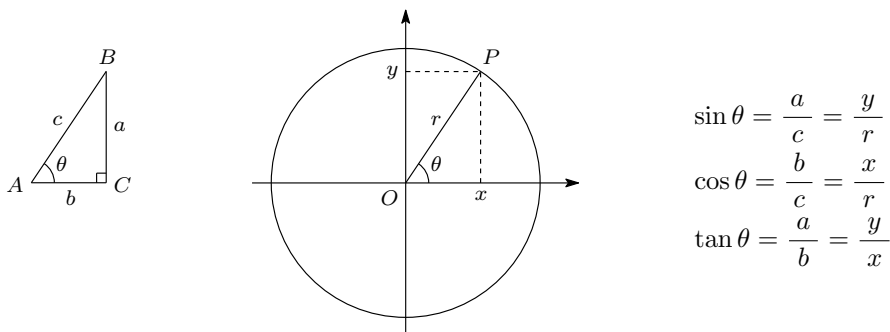


10 三角比の表

サイン、コサイン、タンジェント。記号で書くと、 \sin , \cos , \tan 。

高校に入って、三角比や三角関数としてこの3つの用語の意味やその性質について学びました。最初に学ぶときは直角三角形の2辺の長さの比として考えましたが、円との関係が深いことも学びました。そして、三角関数は角度 θ の関数である [すなわち、円の大きさには関係なく、角度 θ だけに対して値が定まる] ことを学習しました。



そもそも三角比・三角関数は古代ギリシアにおいて天文学上の要求から発明されました。

人々は古くから天体に関心をもっていて、いろいろな観測が行われていました。古代・中世においては、地球が宇宙の中心にあり、太陽や月あるいは恒星・惑星は天球上で円を描いて回っているものと考えられていました。ですから、太陽や月の大きさ、それらの地球からの相対距離、恒星や惑星の運行の規則性など、天文学的な事柄の数学的な解明には円弧と弦や中心角との関係を明らかにする必要がありました。その研究の成果の積み重ねが、こんにち三角法と呼ばれるようになったものです。

例えば、古代ギリシアの天文学者・数学者アリストアルコス (Aristarchus (Ἀρίσταρχος) : 前 310?-前 230?) は『太陽と月の大きさと距離について』(Περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων Ἡλίου καὶ Σελήνης : *On the Sizes and Distances of the Sun and Moon*) において、三角法の考え方や比の性質を駆使して、地球から太陽までの距離は地球から月までの距離の18倍よりは大きく20倍よりは小さいこと(命題7)や、太陽の直径は地球の直径に対して19:3よりは大きく43:6よりは小さいこと(命題15)、地球の直径は月の直径に対して108:43よりは大きく60:19よりは小さいこと(命題17)などを示しました ([1] pp.507-542)。

ちなみに、こんにち知られているそれぞれの天体の直径の平均値は太陽が 1,392,000 km, 地球が 12,756 km, 月が 3,474 km です。

また、地球から太陽までの距離は 149,597,870 km, 月までの距離は 384,400 km です。

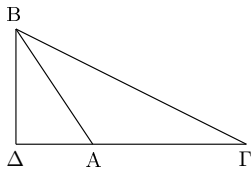
それでは、古代・中世の人たちが作った三角比の表を見てみましょう。

なお、こんにちでは三角比や三角関数を考えるときには単位円(半径が1の円:上の円で $r = 1$)を基にして標準化して考えることが多いのですが、古代においてはある一定の半径 (R) の円を基に考えていることに注意してください。例えば、 $R = 60$, $R = 3438$ などが使われました。以下では、このときの正弦値を $\text{Sin } \alpha (= R \sin \alpha)$, 余弦値を $\text{Cos } \alpha (= R \cos \alpha)$ と表すことにします。

(1) ユークリッド

三角比の表を見る前に、ここに余弦定理と呼んでいる定理がユークリッド (Euclid (Eukleides : Eὐκλείδης) : 前 300 頃) の『原論』(Στοιχείωσις) ではどのように表現されているかを見てみましょう ([2] p.46-47)。

「第 2 巻命題 12 鈍角三角形において鈍角の対辺の上の正方形は鈍角をはさむ 2 辺の上の正方形の和より、鈍角をはさむ辺の 1 つと、この辺へと垂線が下され、この鈍角への垂線によって外部に切り取られた線分とにかこまれた矩形の 2 倍だけ大きい。



ABΓ を鈍角 BAΓ をもつ鈍角三角形とし、点 B から ΓA に垂線 BΔ が引かれたとせよ。BΓ 上の正方形は BA, AΓ 上の正方形の和より ΓA, AΔ にかこまれた矩形の 2 倍だけ大きいと主張する。

線分 ΓΔ は点 A において任意に分けられたから、ΓΔ 上の正方形は ΓA, AΔ 上の正方形と ΓA, AΔ にかこまれた矩形の 2 倍との和に等しい。双方に ΔB 上の正方形が加えられたとせよ。そうすれば ΓΔ, ΔB 上の正方形の和は ΓA, AΔ, ΔB 上の正方形と矩形 ΓA, AΔ の 2 倍との和に等しい。ところが Δ における角は直角であるから、ΓB 上の正方形は ΓΔ, ΔB 上の正方形の和に等しい。そして AB 上の正方形は AΔ, ΔB 上の正方形の和に等しい。ゆえに ΓB 上の正方形は ΓA, AB 上の正方形と ΓA, AΔ によってかこまれた矩形の 2 倍との和に等しい。したがって ΓB 上の正方形は ΓA, AB 上の正方形の和より ΓA, AΔ にかこまれた矩形の 2 倍だけ大きい。

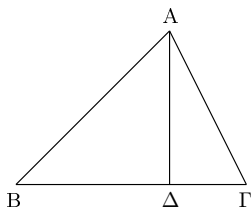
よって鈍角三角形において鈍角の対辺の上の正方形は鈍角をはさむ 2 辺の上の正方形の和より、鈍角をはさむ辺の 1 つと、この辺へと垂線が下され、この鈍角への垂線によって外部に切り取られた線分とにかこまれた矩形の 2 倍だけ大きい。これが証明すべきことであった。」

△ABΓ において、 $\angle BA\Gamma = \theta$, $B\Gamma = a$, $A\Gamma = b$, $AB = c$ とすると、 $A\Delta = c \cos(180^\circ - \theta) = -c \cos \theta$ ですから、この命題の主張は

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b(-c \cos \theta) = b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta$$

ということです。

「第 2 巻命題 13 鋭角三角形において鋭角の対辺の上の正方形は鋭角をはさむ 2 辺の上の正方形の和より、鋭角をはさむ辺の 1 つと、この辺へと垂線が下され、この鋭角への垂線によって内部に切り取られた線分とにかこまれた矩形の 2 倍だけ小さい。



ABΓ を B における鋭角をもつ鋭角三角形とし、点 A から BΓ に垂線 AΔ が引かれたとせよ。AΓ 上の正方形は ΓB, BA 上の正方形の和より ΓB, BΔ にかこまれた矩形の 2 倍だけ小さいと主張する。」

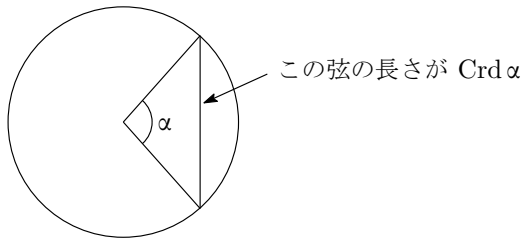
問 1 この「命題 13」の図において、 $\angle AB\Gamma = \theta$, $B\Gamma = a$, $A\Gamma = b$, $AB = c$ とするとき、「命題 13」の主張を現代的に表しなさい。

(2) プトレマイオス

プトレマイオス (Claudius Ptolemaios (Πτολεμαῖος) : 85?-165?) はアレクサンドリアで活動したギリシアの天文学者です。英語読みでトレミー (Ptolemy) ともいわれます。127年から151年にかけてアレクサンドリアで天文観測を行いました。大著『アルマゲスト』(Almagest)において天体運動に関して天動説を大成しました。なお、『アルマゲスト』のギリシア語の原題は『数学集成』(Μαθηματικῆς Συντάξεως)で“大集成”と呼ばれていました。それがアラビアに伝わったときにアラビア語で magiste とされたものが、ヨーロッパに伝わったときに「最も偉大なもの」という意味の言葉「アルマゲスト」と呼ばれるようになり、それが現在まで続いています。

史上最初に「弦の表」を作ったのはヒッパルコス (Hipparchus (Ἱππαρχος) : 前190?-前120?) のようです。しかし、彼の著作は残っていませんから、いつ頃どのようにして作ったのか分かりません。また、プトレマイオスがヒッパルコスの恒星表や弦の表を利用したことは十分に想像できますが、その辺の関係は明らかではありません。

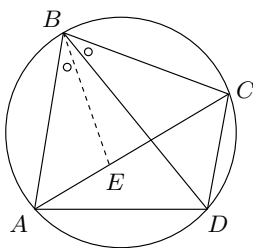
『アルマゲスト』にある弦の表は、中心角が α のときの弦の長さを示したもので、 $0^\circ 30'$ から 180° までの値が、 $30'$ 刻みで求められています [後出]。ここでは、慣習に従って、中心角 α のときの弦の長さを $\text{Crd } \alpha$ と表すことにします (右図)。



彼は円の半径を $R = 60$ としていましたから、例えば $\text{Crd } 180^\circ$ は (直径ですから) 120, $\text{Crd } 60^\circ$ は (半径と等しくなりますから) 60 と表すことになります。

なお、プトレマイオスの弦の長さ $\text{Crd } \alpha$ とこんにちの三角比との関係は $\text{Crd } \alpha = 2R \sin \frac{\alpha}{2}$ であることに注意してください。

さて、プトレマイオスが弦の計算の中心においたのは、こんにちプトレマイオスの定理あるいはトレミーの定理として知られている、次の定理です ([3] p.20)。



「四辺形 $ABCD$ が円に内接するならば、相對する辺の積の和は、対角線の積に等しい。」

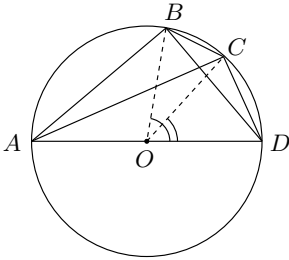
すなわち、左図で、

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

であるということです。

[証明には…… $\angle ABE = \angle CBD$ となるように補助線 BE を引くと、 $\triangle BCE \sim \triangle BDA$ より $BC \cdot AD = CE \cdot BD$ となります。また、 $\triangle BAE \sim \triangle BDC$ より $AB \cdot CD = AE \cdot BD$ となります。これら2式を辺々加えれば、定理の主張が得られます。]

それでは「弦の表」を作るときに用いる計算公式を求めてみましょう ([3] pp.20-22)。[ここで有用なのはプトレマイオスの定理で1辺(例えば, AD)が直径に当たるときです。公式の導出に当たってプトレマイオスの定理がうまく使われていることに注意してください。]

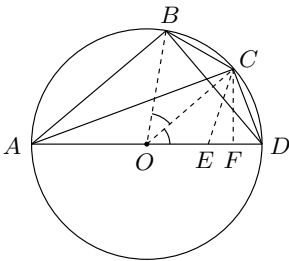


いま, $\angle BOD = \alpha$, $\angle COD = \beta$ とすると, $BD = \text{Crd } \alpha$, $CD = \text{Crd } \beta$, $BC = \text{Crd}(\alpha - \beta)$ となります。また, $AB = \text{Crd}(180^\circ - \alpha)$, $AC = \text{Crd}(180^\circ - \beta)$ ですから, プトレマイオスの定理により

$\text{Crd}(180^\circ - \alpha) \text{Crd } \beta + \text{Crd}(\alpha - \beta) \cdot 2R = \text{Crd}(180^\circ - \beta) \text{Crd } \alpha$ が成り立ちます。従って, 角の差について

$$\begin{aligned} \text{Crd}(\alpha - \beta) &= \frac{\text{Crd}(180^\circ - \beta) \text{Crd } \alpha - \text{Crd}(180^\circ - \alpha) \text{Crd } \beta}{2R} \\ &= \frac{\text{Crd}(180^\circ - \beta) \text{Crd } \alpha - \text{Crd}(180^\circ - \alpha) \text{Crd } \beta}{120} \end{aligned}$$

が成り立つこととなります。



次に, 点 C を弧 BD の中点とし, $\angle BOC = \angle COD = \alpha/2$, $AE = AB$, $CF \perp AD$ とすると, $\triangle CDE$ は二等辺三角形になり, $DF = (2R - AE)/2 = (2R - AB)/2$ となります。一方, $\triangle ACD \sim \triangle CFD$ ですから, $CD^2 = AD \cdot DF$ が成り立ち, $CD^2 = R(2R - AB)$ すなわち

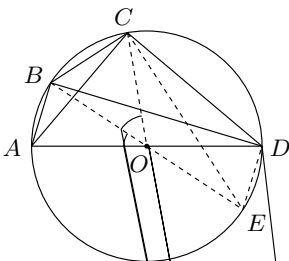
$$\begin{aligned} \left(\text{Crd } \frac{\alpha}{2}\right)^2 &= R(2R - \text{Crd}(180^\circ - \alpha)) \\ &= 60(120 - \text{Crd}(180^\circ - \alpha)) \end{aligned}$$

が成り立つこととなります。[Crd に関する半角の公式]

また, 三平方の定理から

$$\text{Crd}(180^\circ - \alpha) = \sqrt{4R^2 - (\text{Crd } \alpha)^2} = \sqrt{14400 - (\text{Crd } \alpha)^2}$$

が成り立ちます。これから補角の弦が求められます。



さらに, $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$ とすると, $AB = DE = \text{Crd } \alpha$, $BC = \text{Crd } \beta$, $AC = \text{Crd}(\alpha + \beta)$ となります。また, $BD = \text{Crd}(180^\circ - \alpha)$, $CE = \text{Crd}(180^\circ - \beta)$, $CD = \text{Crd}(180^\circ - (\alpha + \beta))$ ですから, 4 辺形 $BCDE$ にプトレマイオスの定理を用いると $BC \cdot DE + BE \cdot CD = BD \cdot CE$ となって, $BE \cdot CD = BD \cdot CE - BC \cdot DE$ すなわち

$$\begin{aligned} &120 \text{Crd}(180^\circ - (\alpha + \beta)) \\ &= \text{Crd}(180^\circ - \alpha) \text{Crd}(180^\circ - \beta) - \text{Crd } \beta \text{Crd } \alpha \end{aligned}$$

が成り立ちます。従って, 角の和について

$$\text{Crd}(180^\circ - (\alpha + \beta)) = \frac{\text{Crd}(180^\circ - \alpha) \text{Crd}(180^\circ - \beta) - \text{Crd } \alpha \text{Crd } \beta}{120}$$

が成り立つこととなります。

プトレマイオスは角の差，半角，補角，角の和についての公式を得ました。これらを基に「弦の表」（の一部）を求めてみましょう。このとき $R = 60$ であることに注意してください。

(i) 60° , 180°

$\text{Crd } 60^\circ = 60$, $\text{Crd } 180^\circ = 120$ は，円の半径，直径から，明らかです。

(ii) 90°

90° に対する弦の長さは，等辺の長さが R の直角二等辺三角形の底辺の長さですから，

$$\text{Crd } 90^\circ = \sqrt{2} R = 60\sqrt{2} \doteq 84.85281374$$

となります。

(iii) 36° , 72°

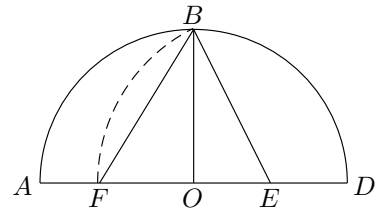
右の図で， AD は中心 O の円の直径，

OB は AD に垂直な半径， E は OD の中点で，

$EB = EF$ です。このとき， $OF = \text{Crd } 36^\circ$,

$BF = \text{Crd } 72^\circ$ となります。

[OF , BF がそれぞれ正十角形，正五角形の 1 辺となることは，ユークリッド『原論』の第 13 巻命題 9 , 10 などから分かります。]



$$OE = \frac{1}{2} R , EF = EB = \frac{\sqrt{5}}{2} R \text{ ですから,}$$

$$OF = EF - OE = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} R = 30(\sqrt{5} - 1) \text{ となります。}$$

また， $BF^2 = OF^2 + OB^2$ ですから， $BF = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} R = 30\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ となります。従って，

$$OF = \text{Crd } 36^\circ = 30(\sqrt{5} - 1) \doteq 37.08203932$$

$$BF = \text{Crd } 72^\circ = 30\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \doteq 70.53423028$$

となります。

(iv) 12° [角の差の公式の例]

$$\begin{aligned} \text{Crd } 108^\circ &= \sqrt{14400 - (\text{Crd } 72^\circ)^2} = \sqrt{14400 - (30\sqrt{10 - 2\sqrt{5}})^2} \\ &= \sqrt{14400 - 900(10 - 2\sqrt{5})} = \sqrt{5400 + 1800\sqrt{5}} \doteq 97.08203932 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Crd } 120^\circ &= \sqrt{14400 - (\text{Crd } 60^\circ)^2} = \sqrt{14400 - 60^2} = \sqrt{10800} = 60\sqrt{3} \\ &\doteq 103.92304845 \end{aligned}$$

ですから，

$$\begin{aligned} \text{Crd } 12^\circ &= \text{Crd}(72^\circ - 60^\circ) = \frac{\text{Crd } 120^\circ \text{Crd } 72^\circ - \text{Crd } 108^\circ \text{Crd } 60^\circ}{120} \\ &= \frac{60\sqrt{3} \times 30\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{5400 + 1800\sqrt{5}} \times 60}{120} \end{aligned}$$

$$\doteq 12.54341559$$

となります。

(v) 18° [半角の公式の例]

$$\begin{aligned}\text{Crd } 144^\circ &= \sqrt{14400 - (\text{Crd } 36^\circ)^2} = \sqrt{14400 - \{30(\sqrt{5} - 1)\}^2} \\ &= \sqrt{14400 - 900(6 - 2\sqrt{5})} = \sqrt{9000 + 1800\sqrt{5}} \doteq 114.12678196\end{aligned}$$

ですから

$$\begin{aligned}(\text{Crd } 18^\circ)^2 &= \left(\text{Crd } \frac{36^\circ}{2}\right)^2 = 60(120 - \text{Crd } 144^\circ) \\ &= 60\left(120 - \sqrt{9000 + 1800\sqrt{5}}\right) \doteq 352.39308267\end{aligned}$$

より

$$\text{Crd } 18^\circ = \sqrt{60\left(120 - \sqrt{9000 + 1800\sqrt{5}}\right)} \doteq 18.77213580$$

となります。

(vi) その他

以上のことから、半角の公式を用いれば $30^\circ = \frac{60^\circ}{2}$, $45^\circ = \frac{90^\circ}{2}$ として、おなじみの角に対する弦が求まります。

$$\begin{aligned}\text{Crd } 30^\circ &= \text{Crd } \frac{60^\circ}{2} = \sqrt{60(120 - \text{Crd } 120^\circ)} = \sqrt{60(120 - 60\sqrt{3})} \\ &= 60\sqrt{2 - \sqrt{3}} \doteq 31.05828541\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Crd } 45^\circ &= \text{Crd } \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{60(120 - \text{Crd } 90^\circ)} = \sqrt{60(120 - 60\sqrt{2})} \\ &= 60\sqrt{2 - \sqrt{2}} \doteq 45.92201188\end{aligned}$$

同様にして、 $12^\circ \rightarrow 6^\circ \rightarrow 3^\circ \rightarrow 1.5^\circ$ から $\text{Crd } 1.5^\circ$ の値が求められます。

近似値によって計算すると、

$$\text{Crd } 168^\circ = \sqrt{14400 - (\text{Crd } 12^\circ)^2} \doteq \sqrt{14400 - (12.54341559)^2} \doteq 119.34262744$$

$$\begin{aligned}\text{Crd } 6^\circ &= \text{Crd } \frac{12^\circ}{2} = \sqrt{60(120 - \text{Crd } 168^\circ)} \\ &\doteq \sqrt{60(120 - 119.34262744)} \doteq 6.28031477\end{aligned}$$

$$\text{Crd } 174^\circ = \sqrt{14400 - (\text{Crd } 6^\circ)^2} \doteq \sqrt{14400 - (6.28031477)^2} \doteq 119.83554417$$

$$\begin{aligned}\text{Crd } 3^\circ &= \text{Crd } \frac{6^\circ}{2} = \sqrt{60(120 - \text{Crd } 174^\circ)} \\ &\doteq \sqrt{60(120 - 119.83554417)} \doteq 3.14123380\end{aligned}$$

$$\text{Crd } 177^\circ = \sqrt{14400 - (\text{Crd } 3^\circ)^2} \doteq \sqrt{14400 - (3.14123380)^2} \doteq 119.9588790$$

$$\begin{aligned}\text{Crd } 1.5^\circ &= \text{Crd } \frac{3^\circ}{2} = \sqrt{60(120 - \text{Crd } 177^\circ)} \\ &\doteq \sqrt{60(120 - 119.9588790)} \doteq 1.57075141\end{aligned}$$

さて、「弦の表」をより詳しくするには 1° の弦の値を求める必要があります。実はこれはそう簡単ではないのですが、プトレマイオスは 1° の弦の値を

$$\text{Crd } 1^\circ \doteq \frac{2}{3} \text{Crd } 1.5^\circ \doteq 1.04716761$$

として求めました。

それでは実際の「弦の表」(Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν) を見てみましょう ([3] pp.26-29)。
 なお、プトレマイオスが用いていた記数法は位取り六十進記数法 [バビロニア風の記数法] であったことに注意してください。

弧	弦	差の 1/30	弧	弦	差の 1/30
0° 30′	0° 31′ 25″	0° 1′ 2″ 50'''	∴	∴	∴
1 0	1 2 50	0 1 2 50	164° 0′	118° 49′ 56″	0° 0′ 8″ 37'''
1 30	1 34 15	0 1 2 50	164 30	118 54 15	0 0 8 20
2 0	2 5 40	0 1 2 50	165 0	118 58 25	0 0 8 4
2 30	2 37 4	0 1 2 48	165 30	119 2 26	0 0 7 48
3 0	3 8 28	0 1 2 48	166 0	119 6 20	0 0 7 31
3 30	3 39 52	0 1 2 48	166 30	119 10 6	0 0 7 15
4 0	4 11 16	0 1 2 47	167 0	119 13 44	0 0 6 59
4 30	4 42 40	0 1 2 47	167 30	119 17 13	0 0 6 42
5 0	5 14 4	0 1 2 46	168 0	119 20 34	0 0 6 26
5 30	5 45 27	0 1 2 45	168 30	119 23 47	0 0 6 10
6 0	6 19 49	0 1 2 44	169 0	119 26 52	0 0 5 54
6 30	6 48 11	0 1 2 43	169 30	119 29 49	0 0 5 37
7 0	7 19 33	0 1 2 42	170 0	119 32 37	0 0 5 20
7 30	7 50 54	0 1 2 41	170 30	119 35 17	0 0 5 4
8 0	8 22 15	0 1 2 40	171 0	119 37 49	0 0 4 48
8 30	8 53 35	0 1 2 39	171 30	119 40 13	0 0 4 31
9 0	9 24 51	0 1 2 38	172 0	119 42 29	0 0 4 14
9 30	9 56 13	0 1 2 37	172 30	119 44 36	0 0 3 58
10 0	10 27 32	0 1 2 35	173 0	119 46 35	0 0 3 42
10 30	10 58 49	0 1 2 33	173 30	119 48 26	0 0 3 26
11 0	11 30 5	0 1 2 32	174 0	119 50 9	0 0 3 9
11 30	12 1 21	0 1 2 30	174 30	119 51 43	0 0 2 53
12 0	12 32 36	0 1 2 28	175 0	119 53 10	0 0 2 36
12 30	13 3 50	0 1 2 27	175 30	119 54 27	0 0 2 20
13 0	13 35 4	0 1 2 25	176 0	119 55 38	0 0 2 3
13 30	14 6 16	0 1 2 23	176 30	119 56 39	0 0 1 47
14 0	14 37 27	0 1 2 21	177 0	119 57 32	0 0 1 30
14 30	15 8 38	0 1 2 19	177 30	119 58 18	0 0 1 14
15 0	15 39 47	0 1 2 17	178 0	119 58 55	0 0 0 57
15 30	16 10 56	0 1 2 15	178 30	119 59 24	0 0 0 41
16 0	16 42 3	0 1 2 13	179 0	119 59 44	0 0 0 25
16 30	17 13 9	0 1 2 10	179 30	119 59 56	0 0 0 9
∴	∴	∴	180 0	120 0 0	0 0 0 0

この「弦の表」によれば、

$$\text{Crd } 6^\circ = 6^\circ 19' 49''$$

ですから、十進法で表すと、

$$\text{Crd } 6^\circ = 6 + \frac{19}{60} + \frac{49}{3600} \doteq 6.3302778$$

ということになります。

また、

$$\sin \theta = \frac{1}{2R} \text{Crd } 2\theta = \frac{1}{120} \text{Crd } 2\theta$$

という関係がありますから、

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{120} \text{Crd } 90^\circ = \frac{1}{120} \left(84 + \frac{51}{60} + \frac{10}{3600} \right) \doteq 0.70710648$$

ということになります。[前ページの「弦の表」には $\text{Crd } 90^\circ$ の値は載せていませんが、プトレマイオスは $84^\circ 51' 10''$ としています。なお、 $\sin 45^\circ$ の真の値は $0.70710678\dots$ でしたね。]

問 2 先の計算により「弦の表」は次のようになる。

α	計算値	プトレマイオスの値
12°	$\frac{60\sqrt{3} \times 30\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - \sqrt{5400 + 1800\sqrt{5}} \times 60}{120}$	$12^\circ 32' 36''$
18°	$\sqrt{60(120 - \sqrt{9000 + 1800\sqrt{5}})}$	18 46 19
30°	$60\sqrt{2 - \sqrt{3}}$	31 3 30
36°	$30(\sqrt{5} - 1)$	37 4 55
45°	$60\sqrt{2 - \sqrt{2}}$	45 55 19
60°	60	60 0 0
72°	$30\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$	70 32 3
90°	$60\sqrt{2}$	84 51 10
108°	$\sqrt{5400 + 1800\sqrt{5}}$	97 4 56
120°	$60\sqrt{3}$	103 55 23
144°	$\sqrt{9000 + 1800\sqrt{5}}$	114 7 37
180°	120	120 0 0

これらの値を基に $\text{Crd } 15^\circ$, $\text{Crd } 22.5^\circ$, $\text{Crd } 75^\circ$, $\text{Crd } 150^\circ$ の値を求めなさい。また、プトレマイオスの値を基に $\sin 60^\circ$ の値を求めなさい。

(3) アールヤバタ

アールヤバタ ($\bar{A}ryabhata : 476?-550?$) はアシュマカ地方に生まれ、パータリプトラで活躍したインドの天文学者です。499年(一説には510年頃)に天文学と数学の綱要書『アールヤバティーヤ』($\bar{A}ryabhatīya$)を著しました。

『アールヤバティーヤ』は全4章からなり、第2章が数学に当てられています。そして、第2章は全部で33の詩節から成っています。

グプタ朝(320-550)以降のインドでは、数学や天文学でもオリジナルな作品はサンスクリットの韻文(詩)で著され、それに対する注釈書は散文で著されることが多かったようです。『アールヤバティーヤ』も詩の形式で書かれていますから、私たちにとってはちょっと分かりづらいものになっています。

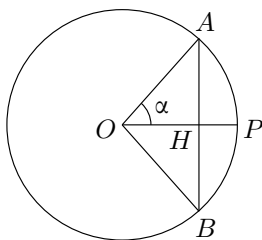
三角比に関しては次のような詩節があります([6] pp.98-100)。

「詩節 9cd 円周の六分の一(に張る)弦は、半径と等しい。」

「詩節 11 円の周囲の四分の一を(等しい部分に)分割するがよい。(四分円内に生ずる)三辺形と四辺形から、望みにしたがって、半径上に、偶数(部分に分けられた弧の)半弦が(得られる)。」

「詩節 12 第一番目の半弦値よりも、第二番目の部分半弦値はある(量)だけ小さい。(一般にある部分半弦値は先行する部分半弦値よりも小さいがそれについていうと)残り[第三部分半弦値等]は、それぞれ(先行する半弦値を)第一半弦値で割った(商に相応する分だけ)それ[先行する部分半弦値]より小さい。」

ここに見られるように、ギリシア(プトレマイオス)の「弦」に対して、インド(アールヤバタ)では「半弦」が用いられます。こちらの方が現在の三角比の定義に近いものになっています。[下の図で、半径 R の半弦 AH の長さが $\text{Sin } \alpha (= R \sin \alpha)$ ということになります。]



直線 AB が弦 ($jyā$)

直線 AH が半弦 ($jyārdha$, $jiba$)

弧 AB が弓 ($kāṣṭha$, $cāpa$)

直線 HP が正矢 ($iṣu$, $śara$)

それでは順に見ていきましょう。なお、アールヤバタは $R = 3438$ としていました。

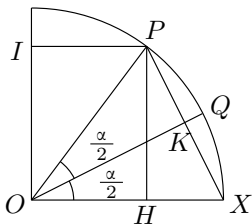
まず、詩節 9cd は、円周の6分の1、すなわち円に内接する正六角形の1辺は半径に等しいということです。

すなわち上の図で、 $\angle AOB = 60^\circ$ のとき、 $AB = R = 3438$ ということですから、 $\angle AOH = 30^\circ$ で、 $AH = \frac{AB}{2} = \frac{R}{2}$ となって、

$$\text{Sin } 30^\circ = \frac{R}{2} = 1719$$

となることが分かります。

次に、詩節 11 は半弦値を求めるための幾何学的方法を述べたものです。



左図で、 $OP = OX = R$, $PH = OI = \sin \alpha$,
 $OH = IP = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$ ですから、
 $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \sqrt{R^2 - (\sin \alpha)^2}$
 $= \sqrt{11819844 - (\sin \alpha)^2}$

となります。これはアールヤバタ風の余角の公式です。

ですから、

$$\sin 60^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \sqrt{3438^2 - (\sin 30^\circ)^2} = 1719\sqrt{3} \doteq 2977.39533821$$

となります。

また、 $PK = KX = \sin \frac{\alpha}{2}$, $HX = R - \cos \alpha$ ですから、三平方の定理を用いて
 $PX^2 = HX^2 + PH^2 = (R - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2$ より

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} = PK &= \frac{\sqrt{(R - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2}}{2} = \sqrt{\left(\frac{R - \cos \alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin \alpha}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3438 - \cos \alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin \alpha}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

となります。これは、半弦の長さに関する半角の公式です。

さて、 $\sin 90^\circ = R = 3438$ はすぐに分かりますから、 $\cos 90^\circ = 0$ も分かります。従って、

$$\begin{aligned} \sin 45^\circ = \sin \frac{90^\circ}{2} &= \sqrt{\left(\frac{3438 - \cos 90^\circ}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin 90^\circ}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3438 - 0}{2}\right)^2 + \left(\frac{3438}{2}\right)^2} = \sqrt{1719^2 + 1719^2} = 1719\sqrt{2} \\ &\doteq 2431.03311372 \end{aligned}$$

となります。

また、 $\sin 30^\circ = 1719$, $\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = 1719\sqrt{3}$ ですから、

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ = \sin \frac{30^\circ}{2} &= \sqrt{\left(\frac{3438 - \cos 30^\circ}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin 30^\circ}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3438 - 1719\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1719}{2}\right)^2} = 1719\sqrt{2 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{1719\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{2} \doteq 889.81987706 \end{aligned}$$

となります。

が成り立つこととなります。詩節 12 はこの公式を述べたものであると解釈されています。

『アールヤバティーヤ』には部分半弦値 T_i について次のような記述があります ([6] p.93)。

「第 1 章詩節 10 (四分円を 24 に分割してできる) 秒 (単位の) 半弦 (の長さの差) は (順に)
225, 224, 222, 219, 215, 210, 205, 199, 191, 183, 174, 164, 154, 142,
131, 119, 106, 93, 79, 65, 51, 37, 22, 7 である。」

すなわち, $T_1 = 225$, $T_2 = 224$ であるといっています。このとき, $T_1 - T_2 = 225 - 224 = 1$ ですから, 上の公式 ① は

$$T_{i+1} = T_i - \frac{S_i}{S_1} \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

ということになります。[ただし, 林 [7] は詩節 12 を公式②のように読むことは「文法的にも数学的にも正しくない」といっています。]

さて, $T_{i+1} = S_{i+1} - S_i$ より $S_1 = T_1 + S_0 = 225 + 0 = 225$ となりますが, S_1 は 4 分円 90° を 24 等分した角 3.75° に対する値ですから, $\sin 3.75^\circ = 225$ ということになります。

第 1 章詩節 10 は次に

$$\sin 7.5^\circ = S_2 = T_2 + S_1 = 224 + 225 = 449$$

になるといっています。

さらに第 1 章詩節 10 では, $T_3 = 222$ となっていますが, これを ② によって確かめると

$$T_3 = T_2 - \frac{S_2}{S_1} = 224 - \frac{449}{225} = \frac{49951}{225} \doteq 222.00444444$$

となります。ですから,

$$\sin 11.25^\circ = S_3 = T_3 + S_2 = \frac{49951}{225} + 449 = \frac{150976}{225} \doteq 671.00444444$$

ということになります。

また,

$$T_4 = T_3 - \frac{S_3}{S_1} = \frac{49951}{225} - \frac{150976}{225} = \frac{11087999}{50625} \doteq 219.02220247$$

で, 第 1 章詩節 10 の値が確かめられます。このとき,

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ = S_4 = T_4 + S_3 &= \frac{11087999}{50625} + \frac{150976}{225} = \frac{45057599}{50625} \\ &\doteq 890.02664691 \end{aligned}$$

となります。[この値は先に詩節 11 による半角の公式を用いて得た値とは多少異なりますが, 小数点以下を四捨五入すれば同じ値になりますよね。]

第 1 章詩節 10 によれば,

$$S_1 = 225 \xrightarrow{T_2=224} S_2 = 449 \xrightarrow{T_3=222} S_3 = 671 \xrightarrow{T_4=219} S_4 = 890 \xrightarrow{T_5=215} \dots\dots$$

として, 3.75° おきの半弦値が得られます。

アールヤバタは $\sin 90^\circ = 3438$, $\sin 30^\circ = 1719$ を出発点としてこれらの値を求めたものと想像されています。

なお, 半弦値 S_i そのものではなく部分半弦値 T_i を載せているのは作詞上の理由によるものと考えられています。

(4) アル・ビールーニー

アル・ビールーニー (al-Bīrūnī : 973-1048?) はホラズム生まれのペルシア人科学者、哲学者、旅行家です。本名は Abu Rayḥān Muḥammad ibn Aḥmad al-Bīrūnī といいます。インドなど各地を遍歴して諸学に通じ、天文、数学、地理、歴史、薬学、鉱物学など、幅広い分野に著作を残しています。彼の旺盛な知的好奇心と鋭い批判的精神は中世を通じて並ぶ者がいないほどだそうです。彼の主著『天文百科のマスウード宝典』(al-Qānūn al-Mas'ūdī fī-l-hay'a wa-l-nujūm : 1030 年) はアラビア天文学を代表する天文学的百科全書です。

『マスウード宝典』は 1030 年にガズニ朝のスルタン [sulṭān. イスラム世界の君主の称号。11 世紀以降、主にスンナ派の王朝 (セルジューク朝、オスマン朝など) の君主が用いていました。なお、イスラムでは最高権威者はカリフと呼ばれますが、カリフが宗教的権威であるのに対して、スルタンは世俗的権威を示すものです。] であるマスウード (Mas'ūd : 在位 1030-1041) に捧げられたもので、全 11 巻からなる天文学関係の百科全書ですが、その第 3 巻は三角法に割かれていて、そこではプトレマイオスの「弦の表」、インドの「正弦の表」、日時計の影の長さとして示される正接表などについて述べられているということです。

なお、アラビアの三角法は、もともとはインド系の三角法に基づくものが使われていましたが、プトレマイオスの『アルマゲスト』が入ってきてからはほとんどがプトレマイオス的になりました。しかし、「弦の表」ではプトレマイオスの“弦”ではなく、インドの“半弦 (正弦)” が用いられました。

当時、各種 [倍弧、半弧、和弧、差弧] の弦を求める公式は既に知られていましたから、 1° に対する (半) 弦の値が分かれば、他の角度に対する値も (原理的には簡単に) 見つけられます。しかし、 1° に対する値を求めることはそう簡単ではなく、いろいろな工夫が必要です。[プトレマイオスは $(2/3)\text{Crd } 1.5^\circ$ としたのでしたね。]

アル・ビールーニーは 1° の弦を求めるための方法を 4 つ示しています。

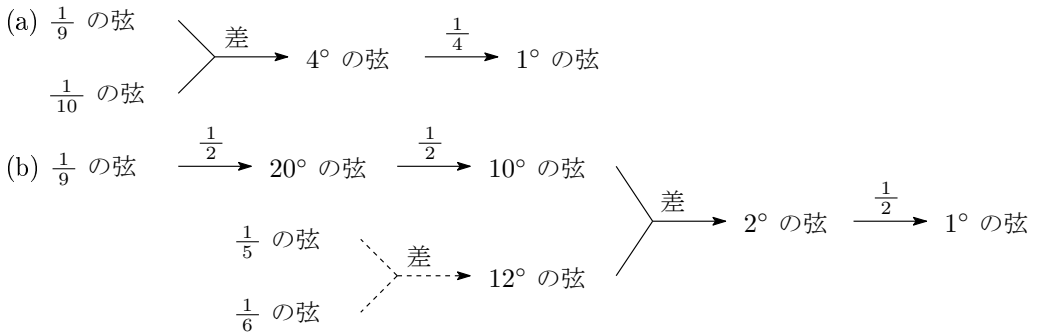
- ① $\frac{1}{9}$ の弦を用いる方法
- ② 角の 3 等分を利用する方法
- ③ プトレマイオスの方法
- ④ アッ = シジュジー (Ya'qūb al-Sijzī) の方法

また、 $\frac{1}{9}$ の弦を用いる方法に関して、彼は $\frac{1}{9}$ の弦を 3 つの方法を用いて求めています。

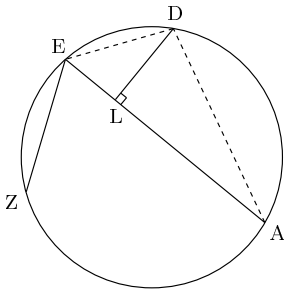
- (i) $\frac{1}{9}$ の弦と $\frac{1}{3}$ の弦の比を利用する。
- (ii) $\frac{1}{18}$ の弦から、倍弧の公式を用いて求める。
- (iii) 30° および 12° の弦を基に、近似計算を繰り返す。

ここでは、(i) の方法を紹介します ([8] pp.349-375)。円の半径 r が指定されれば、 $\frac{1}{3}$ の弦 [すなわち 120° の弦] は $\sqrt{3}r$ と容易に求められますから、 $\frac{1}{9}$ の弦と $\frac{1}{3}$ の弦の比が分かれば、 $\frac{1}{9}$ の弦が求められるという訳です。

$\frac{1}{9}$ の弦から 1° の弦を求めるのに、アル・ビールーニーは次のような 2 つの手順を示しています。



それでは、 $\frac{1}{9}$ の弦を求めましょう。



まず、左図(上)で、点 D は弧 AEZ の中点です。この点 D から弦 AE に垂線 DL を下ろすと、

$$(*) \quad AL = LE + EZ$$

$$(**) \quad AE \cdot EZ + DE^2 = AD^2$$

が成り立ちます。

この事実はアルキメデス (Archimēdēs (Ἀρχιμήδης) : 前 287?-前 212) の補助定理として知られていて、『マスウード宝典』では第 3 巻第 1 章で述べられています。

さて、左図(下)で、A, B, G, D, E, W, Z, H, T は円周を 9 等分した点です。弧 AEZ の中点 D から弦 AE に垂線 DL を下ろすと $AL = LE + EZ$ ですから、

$$LE = \frac{AE - EZ}{2}$$

となります。ここで、 $LE = LM$ となる点 M をとると、 $AM = EZ$ となります。また、 $\angle DEL$ は円周の $\frac{3}{9}$ の弧 AD に対する円周角ですから $\angle DEL = 60^\circ$ となり、 $LE = LM$ である

ことから $\triangle DEM$ は正三角形となって、 $DE = EM$ となります。

いま、 $DE = 1$ 、 $EZ = x$ とすると、 $AM = EZ$ であることから $AE = EZ + EM = x + 1$ となります。このとき、アルキメデスの補助定理(**)により

$$AD^2 = AE \cdot EZ + DE^2 = (x + 1)x + 1^2 = x^2 + x + 1$$

となります。

一方、再びアルキメデスの補助定理(**)により $AD \cdot DE + DG^2 = AG^2$ 、 $DG = DE = 1$ 、 $AG = EZ = x$ ですから、

$$AD^2 = \{(AG^2 - DG^2)/DE\}^2 = (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$$

となります。

以上の 2 式から、 $x \neq 0$ より、

$$x^2 + x + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 \quad \text{すなわち} \quad x^3 - 3x - 1 = 0$$

が得られます。

この 3 次方程式の解 x から、 $\frac{1}{9}$ の弦 AD の 2 乗の値が得られることとなります。

3次方程式 $x^3 - 3x - 1 = 0$ の解はカルダノ (Gerolamo Cardano : 1501-1576) の方法によれば

$$x = \sqrt[3]{\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1 - \sqrt{-3}}{2}}$$

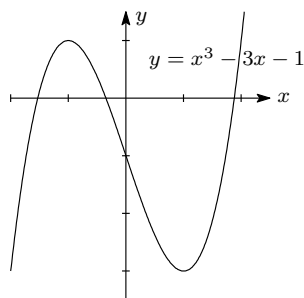
となり, その近似値は $x \doteq 1.87938524157181677$ です。

[アル・ビールーニーはこの値をバビロニア式の六十進法で

1;52, 45, 47, 13 としています。

また, 他の近似解は -0.347296355 , -1.532088886 です。

右図参照。]



$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} {}_m C_n x^n \text{ で, } {}_m C_n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-(n-1))}{n!} \text{ ですから, } m = \frac{1}{3},$$

$$x = \sqrt[3]{i} \text{ とすると,}$$

$$\begin{aligned} (1 + \sqrt[3]{i})^{\frac{1}{3}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} {}_m C_n (\sqrt[3]{i})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3n-4)}{3^n \cdot n!} (\sqrt[3]{i})^n \\ &= 1 + \frac{1}{3} (\sqrt[3]{i}) - \frac{1}{9} (\sqrt[3]{i})^2 + \frac{5}{81} (\sqrt[3]{i})^3 - \frac{10}{243} (\sqrt[3]{i})^4 + \cdots \end{aligned}$$

となつて, $(1 + \sqrt[3]{i})^{\frac{1}{3}} + (1 - \sqrt[3]{i})^{\frac{1}{3}}$ から $\sqrt[3]{i}$ の奇数乗の項, すなわち i を含む項が消えて, 上の方程式の解 x は実数となります。

さて, DE は円周の $\frac{1}{9}$ の弦, AD は円周の $\frac{1}{3}$ の弦ですから, $AD^2 = x^2 + x + 1$ に上の値 $x \doteq 1.87938524157181677$ を代入して, AD^2 の値を求めれば,

$$\left(\frac{1}{9} \text{ の弦}\right)^2 : \left(\frac{1}{3} \text{ の弦}\right)^2 = DE^2 : AD^2 = 1^2 : 6.4114741278097728$$

ということになります。

ここで, 円の半径を 1 としてみると, AD は $\sqrt{3}$ となりますから, $DE = y$ とすると,

$$y^2 : (\sqrt{3})^2 = y^2 : 3 = 1 : 6.4114741278097728$$

ということになり, これから $y \doteq 0.68404028665133747$ が得られます。

以上で, 半径 1 の円における $\frac{1}{9}$ の弦の値が求められました。[アル・ビールーニーはこの値を六十進法表記で 0; 41, 2, 32, 41, 55 $\doteq 0.6840402713$ としています。]

アル・ビールーニーは『マスワード宝典』第 3 巻第 1 章で, 基本となる弦として $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, \dots , $\frac{1}{10}$ の弦を挙げ, それらを母弦 (ummahāt al-awtār) と呼んでいました。そして, 円の直径を d とするとき, それらの値を次のように計算していたということです。

$$\frac{1}{2} \text{ の弦} = d$$

$$\frac{1}{3} \text{ の弦} = \sqrt{d \times \frac{1}{2} \left(d + \frac{d}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ の弦} = \sqrt{\frac{d^2}{2}}$$

$$\frac{1}{5} \text{ の弦} = \sqrt{m^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} \quad \left(\text{ただし, } m = \sqrt{\frac{5d^2}{16} - \frac{d}{4}}\right)$$

$$\frac{1}{6} \text{ の弦} = \frac{d}{2}$$

$$\frac{1}{8} \text{ の弦} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \frac{d}{2} \left(w_4 - \frac{d}{2}\right)} \quad (\text{ただし, } w_4 \text{ は } \frac{1}{4} \text{ の弦})$$

$$\frac{1}{10} \text{ の弦} = m$$

$$\frac{1}{7} \text{ の弦および } \frac{1}{9} \text{ の弦は第 1 章では「未知」}$$

補弧, 倍弧, 半弧, 四分弧, 和弧, 差弧の弦の求め方は第 3 巻第 2 章で証明されていますから, 「円周の $\frac{1}{9}$ と $\frac{1}{10}$ の差は 4 度である。これら [2 つの弧] が弦の知られているものであるとき, それらの差とその $\frac{1}{4}$ もまた, 弦の知られたものとなる。したがって, 1 度の弦も知られる。」ことになります。

そして, 彼は 1° の弦を, 半径 1 の円について $0; 1, 2, 49, 51, 35 \doteq 0.01745305427$ としています。

ところで, 円周の $\frac{1}{9}$ の弦 y は中心角 40° に対する弦ですから,

$$y = 2 \sin 20^\circ \doteq 0.68404028665133747$$

となります。ですから, アル・ビールーニーの得た値 0.6840402713 はかなり正確といえます。また, 1° の弦についても

$$1^\circ \text{ の弦} = 2 \sin 0.5^\circ \doteq 0.01745307099674787$$

で, こちらもかなり正確です。

なお, アラビアではアル・ビールーニー以前に, 840 年頃アル・フワーリズミー (al-Khwārizmī : 850 頃没) によって $\sin \theta$ の表 (1° ごと, 3 桁) がつくられていたということです。

参考文献

- [1] アリスタルコス (種山 恭子・訳) 「太陽と月の大きさと距離について」, 中央公論社 (世界の名著 9 「ギリシアの科学」所収), 1972 (昭和 47)
- [2] ユークリッド (中村 幸四郎, 寺阪 英孝, 伊東 俊太郎, 池田 美恵・訳・解説) 「ユークリッド 原論」, 共立出版, 1971 (昭和 46)
- [3] プトレマイオス (藪内 清・訳) 「アルマゲスト」 (上下 2 巻), 恒星社厚生閣, 1958 (昭和 33)
- [4] A. アーポー (中村 幸四郎・訳) 「古代の数学」, 河出書房新社, 1971 (昭和 46)
- [5] 近藤 洋逸 「数学の誕生 - 古代数学史入門 -」, 現代数学社, 1977 (昭和 52)
- [6] 矢野 道雄 (責任編集) 「インド天文学・数学集」, 朝日出版社 (科学の名著 1), 1980 (昭和 55)
- [7] 林 隆夫 「インドの数学 ゼロの発明」, 中央公論社 (中公新書 1155), 1993 (平成 5)
- [8] 伊東 俊太郎 (編) 「中世の数学」, 共立出版 (数学の歴史 2), 1987 (昭和 62)
- [9] 矢島 祐利 「アラビア科学史序説」, 岩波書店, 1977 (昭和 52)