11　対数の発明

そもそも，対数は三角関数のいろいろな計算を楽に行う方法として開発されました。そして，対数は天文現象の解析における三角関数の計算や航海術における各種の計算などを楽にしたため —— ラプラス (Pierre Simon Laplace : 1749–1827) は対数の発明について「骨折りを少なくして，天文学者の生命を 2 倍にした。」といったということです ——，直ちに多くの人たちに受け入れられましたが，それは理論的な考え方としてではなく計算術としてでした。

> コロンブス (Christopher Columbus : 1451–1506) やガマ (Vasco da Gama : 1469–1524) らに代表される，1400 年頃から 1650 年頃における「大航海時代」を待つまでもなく，人々は海に乗り出していきましたが，航海をするためには自船の位置を知ることが必要でした。それは多くの場合，基準となる地点との位置関係や天体の位置から割り出したのです。そのためには三角関数についての多くの計算が必要でした。

ここでは次の例を挙げましょう。

$1024\,(2^{10})\ \times 1048576\,(2^{20})$ の計算は $\cdots$

$$
\begin{array}{ccc}
1024 \times 1048576 & \longrightarrow & 1073741824 \\
{\scriptstyle \text{対数化}}\big\downarrow & & \big\uparrow \\
\log_2(1024 \times 1048576) & \longrightarrow & 2^{30} \\
10 + 20 & \xrightarrow{\text{対数計算}} & 30
\end{array}
$$

このように，「2^n の表」さえあれば簡単に［暗算でも!!］計算できることになります。対数には，

$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$	掛け算は足し算に
$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$	割り算は引き算に
$\log_a M^k = k \log_a M$	累乗は定数の掛け算に
$\log_a \sqrt[k]{M} = \log_a M^{\frac{1}{k}} = \dfrac{1}{k} \log_a M$	累乗根は定数での割り算に

という性質がありますから，正確な 表を利用することにより，各種の計算をより簡単な計算に置き換えることができるのです。これが対数の威力です。

でも，現代人にはパソコンという強い味方がありますから，この意味で対数を使うことは，もはやないかも知れませんね。

> こんにちでは指数関数と対数関数は逆関数［ $a^n = M \Longleftrightarrow \log_a M = n$ ］として“セット”で捉えられることが多いです。しかし，指数表示と対数計算とが，発明された当初からそのようにセットで捉えられていた訳ではありません。現代の目で見ればすぐに気付きそうなものですが，そういかないところが学問の発達の面白さ・不思議さでしょうか。

対数は，16 世紀末から 17 世紀前半にかけて，ネイピアやビュルギという人たちによって発明されましたが，それ以前から累乗とその指数との間の関係 $a^n \longleftrightarrow n$ には目が向けられていました。また，三角関数の積和の公式

$$\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right\} \quad \text{など}$$

に対数発明のヒントがあったともいわれています。

発明当時の対数を見る前に，現代において対数が使われている例を挙げましょう。

(i)　地震のエネルギーの大きさ・マグニチュード M

マグニチュードは物理的に明確な意味のある値ではないそうですが，地震の大きさを表すのによく用いられます。

マグニチュードにはいろいろな定め方がありますが，はじめアメリカの地震学者リヒター (C. F. Richter : 1900–1985) によって1935年に提唱されました。彼は震央から100 km の距離にある一定の規格 (倍率2800) の地震計で記録された最大振幅 A (単位 μm) から求めた値としてマグニチュードを定めました。このとき，

$$M_L = \log_{10} A$$

としたようです。これは，こんにちでは，リヒターマグニチュードといわれていますが，これ以外にも表面波マグニチュード，実体波マグニチュード，モーメントマグニチュードなどが定義されています。

こんにちの日本では，変位マグニチュード［地震時の地面の動き —— 変位 —— の最大値から計算される値］と速度マグニチュード［地面が動く速度 —— 速度 —— を基に計算した値］とを併用していて，気象庁マグニチュードといわれています。20世紀の日本での最大の地震は1933年の三陸沖地震で気象庁マグニチュード8.1でした。また，2011年の東日本大震災は最終的にはマグニチュード9.0とされました。

また，地震動 (ある場所での地震による地面の揺れ) の強さを表す数を震度といいます。マグニチュードと震度は異なるものです。

(ii)　水素イオン濃度・ペーハー pH

ペーハー pH は水溶液中の水素イオンの濃度を表す値です。mol/ℓ 単位で表した水溶液中の水素イオン濃度を $[\mathrm{H}^+]$ とするとき，

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+] = \log_{10}\frac{1}{[\mathrm{H}^+]}$$

と定義されます。これは1909年にデンマークの化学者セーレンセン (Søren Peter Lauritz Sørensen : 1868–1939) によって提案されました。

25°C のとき，純水の pH は理論上 7 に等しくなります。pH が 7 のときが中性で，pH が 7 より小さいとき酸性，pH が 7 より大きいときアルカリ性 (塩基性) となります。酸性かアルカリ性かを調べるのにリトマス試験紙がよく使われます。

レモンや食用の酢の pH は 2〜3，醤油は 5 付近，海水は約 8 だそうです。

(iii)　音圧レベルなど・デシベル dB

2つの仕事率 (電力，音響パワーなど) A，B の比 n (dB) は

$$n = 10\log_{10}\frac{B}{A}$$

として定められます。

仕事率の絶対レベルを表す場合，基準値 A に一定値を与えて考える場合が多いです。電気通信では 1 mW を基準とし，音響パワーレベルのときは 10^{-12} W を基準値にするようです。

(1)　ネイピア

ネイピア (John Napier : 1550–1617) はスコットランドの貴族・大地主で，マーチストン城 (Merchiston Castle) の主です。政治や宗教問題に関与しましたが，余暇に数学や自然科学を研究しました。その中で，三角関数の計算の簡素化を目的として対数を発明しましたが，1594 年頃にはその基本構想を得ていたようです。そして，それを初めて出版したのは 1614 年のことでした。

ネイピアは『驚くべき対数規則の構成』(*Mirifici logarithmorum canonis constructio* : 1619 年) で次のようにいいます (［3］pp.7–8，19–21)。

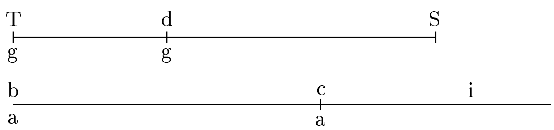
「1　対数の表は，それを使うことによって，我々が空間におけるすべての幾何学的な大きさおよび運動の知識を，非常に簡単な計算によって，得ることができるような小さな表である。

それが正当に非常に小さいといわれるのはそれが大きさにおいて正弦の表を超えないからであり，非常に簡単といわれるのはそれによってすべての乗法，除法およびより困難な根の開平が避けられるからである。なぜならば，非常に少数の最も簡単な加法，減法および 2 による除法だけによって，それはすべての図形および運動をまったく一般的に測定する。

それは連続的な比で進行している数から選ばれる。

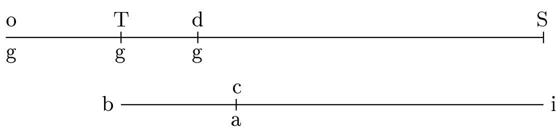
2　連続的な進行［数列］のうち，算術的なもの［等差数列］は等しい間隔で進行するものであり，幾何学的なもの［等比数列］は不等であり比例的に増加あるいは減少する間隔によって進むものである。」

「26　与えられた正弦の対数は，半径が幾何学的に減少し始めたときと同じ速度で，そして，半径が与えられた正弦にまで減少したのと同じ時間に，その間中ずっと算術的に増加した数である。



線 TS を半径，dS を同じ線上の与えられた正弦としよう。g はある特定の時間の瞬間に T から d まで幾何学的に動くとしよう。また， bi を，i の方に無限である，別の線とし，それに沿って a は g がはじめに T にあったときと同じ速度で算術的に動くとしよう。そして，固定点 b から i の方向に，a はちょうど同じ時間の瞬間に点 c まで進むとしよう。線 bc を測る数は与えられた正弦 dS の対数と呼ばれる。」

「28　そのため，さらに，任意に与えられた正弦の対数は，半径およびその与えられた正弦との間の差より大きく，半径および半径がその与えられた正弦に対する比でそれを超える量との間の差より小さい，ということが従う。そして，それゆえ，これらの差は対数の限界と呼ばれる。



それゆえ，前述の図が再び用いられ，ST が T を超えて o まで延長されて，oS が TS に対して TS が dS に対するようにしよう。私は，正弦 dS の対数 bc は Td より大きく，oT より

小さいという。なぜならば，(24 により) oT は Td が TS に対するような oS の部分であるから，g が o から T まで運ばれるのと同じ時間に g は T から d まで運ばれ，そして，同じ時間に (対数の定義により) a は b から c まで運ばれる。それゆえ，oT，Td および bc は等しい時間に動いた距離である。しかし，g は T および o の間を動いているときは T におけるよりも速く，T および d の間のときはより遅いが，しかし，T においては (26 により) a と等しい速さである。その中間の運動でちょうど同じ時間の瞬間に点 a が動いた距離 bc より，速く動いている g が動いた距離 oT は大きく，遅く動いている g が動いた距離 Td は小さい。その結果，前者［bc］は 2 つの後者［oT，Td］の間のある中間値である。

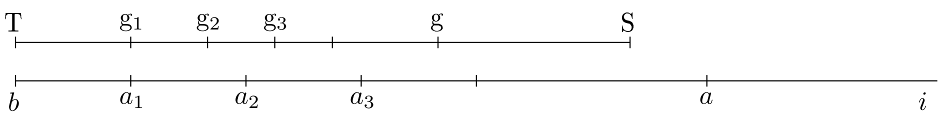
それゆえ，oT は bc が表す対数の大きな限界と呼ばれ，Td は小さな限界と呼ばれる。」

ネイピアは，「26」に見られるように，正弦の対数を求めようとしているのですが，円の半径として長さ 10^7 の線分 TS を，さらに対数を表示するための半直線 bi を用意します。そして，点 g は線分 TS 上を T から S に向けて，点 a は半直線 bi 上を b から i に向けて，はじめは同じ速度でそれぞれ T，b を同時に出発します。このとき，各単位時間経過後の点 g の位置を g_1，g_2，g_3，$\cdots\cdots$ とし，点 a の位置を a_1，a_2，a_3，$\cdots\cdots$ とするとき，

$$\mathrm{TS} : \mathrm{Tg}_1 = \mathrm{g}_1\mathrm{S} : \mathrm{g}_1\mathrm{g}_2 = \mathrm{g}_2\mathrm{S} : \mathrm{g}_3\mathrm{g}_3 = \cdots\cdots = r : 1 \qquad \text{［点 g は等比数列的に動き，］}$$

$$ba_1 = a_1a_2 = a_2a_3 = \cdots\cdots \qquad \text{［点 } a \text{ は等速度で動くのでした。］}$$

となるように動くものとします。



ある時間が経過した後の 2 点の位置をそれぞれ g，a とするとき，彼は，距離 ba を距離 gS［これが真数としての正弦値］の対数と呼びました。

さて，$\mathrm{TS} : \mathrm{Tg}_1 = r : 1$ ですから，$\mathrm{Tg}_1 = \dfrac{1}{r}\,\mathrm{TS}$ となります。従って，

$$\mathrm{g}_1\mathrm{S} = \mathrm{TS} - \mathrm{Tg}_1 = \mathrm{TS} - \frac{1}{r}\mathrm{TS} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\mathrm{TS}$$

ということになります。また，$\mathrm{g}_1\mathrm{g}_2 = \dfrac{1}{r}\,\mathrm{g}_1\mathrm{S}$ ですから，

$$\mathrm{g}_2\mathrm{S} = \mathrm{g}_1\mathrm{S} - \mathrm{g}_1\mathrm{g}_2 = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\mathrm{g}_1\mathrm{S} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)\left(1 - \frac{1}{r}\right)\mathrm{TS} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^2\mathrm{TS}$$

となります。

以下同様に考えると，n 単位時間が経過したときには

$$\mathrm{g}_n\mathrm{S} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)^n\mathrm{TS}$$

となっていることが分かります。

ここで，TS の長さは 10^7 でしたし，ネイピアは $r = 10^7$ としましたから，

$$\mathrm{g}_n\mathrm{S} = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^n$$

となります。このとき，点 a は a_n の位置にあり，$ba_n = n$ です。

すなわち，ネイピアは

$$10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^n \longmapsto n \qquad \left[\,10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^n \text{ の対数が } n\,\right]$$

という対応を考えたのです。

そこで，以下ではネイピアの意味の対数を Nog を用いて表すことにします。すなわち，

$$x = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^y \quad \text{のとき} \quad y = \operatorname{Nog} x$$

と表します。

さて，このネイピアの対数とこんにち私たちが使っている自然対数［$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 2.71828\cdots$ を底とする対数 $\log_e x$］とはどんな関係になっているのでしょうか。

まず，$x = 10^7\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)^y$ より $\dfrac{x}{10^7} = \left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)^y$ ですから，この両辺の自然対数を考えると，

$$\log_e\frac{x}{10^7} = \log_e\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^y = y\log_e\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$$

となります。

ところで一般に，$\log_e(1-t) = -t-\dfrac{t^2}{2}-\dfrac{t^3}{3}-\cdots$ ですから

$$\log_e\left(1-\frac{1}{10^7}\right) = -\frac{1}{10^7}-\frac{1}{2\cdot 10^{14}}-\frac{1}{3\cdot 10^{21}}\cdots \fallingdotseq -\frac{1}{10^7}$$

となります。

ですから，$\log_e\dfrac{x}{10^7} \fallingdotseq y\left(-\dfrac{1}{10^7}\right) = -\dfrac{y}{10^7}$ となります。

従って，$y \fallingdotseq -10^7\log_e\dfrac{x}{10^7} = 10^7\log_e\dfrac{10^7}{x}$ となりますが，この y が $\operatorname{Nog} x$ ですから

$$\operatorname{Nog} x \fallingdotseq 10^7\log_e\frac{10^7}{x} = -10^7\log_e\frac{x}{10^7} = 10^7\log_{\frac{1}{e}}\frac{x}{10^7}$$

ということになります。

これから分かるように，こんにち的な言い方をすると，ネイピアは底が $\dfrac{1}{e} \fallingdotseq 0.36788$ の対数に似たものを考えていたことになります。

また，$\log_e\dfrac{x}{10^7} = y\log_e\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)$ でしたから

$$y = \operatorname{Nog} x = \frac{\log_e\dfrac{x}{10^7}}{\log_e\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)} = \frac{\log_e\dfrac{x}{10^7}}{\log_e\dfrac{10^7-1}{10^7}} = \frac{\log_e x-\log_e 10^7}{\log_e(10^7-1)-\log_e 10^7}$$

ということなります。

このように，ネイピアの対数はこんにちの対数と比べるとスマートな形とはいいがたいものになっています。そして次に見るように，計算についてもこんにちのものほどスッキリとしたものにはなっていません。

ネイピアの対数では，$10^7 = 10^7\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)^0$ ですから，

$$\mathrm{Nog}\,10^7 = 0$$

となります。

また，$10^7 - 1 = 10^7\left(1-\dfrac{1}{10^7}\right)^1$ ですから，$\mathrm{Nog}(10^7-1) = 1$ です。

いま，$\mathrm{Nog}\,L = x$ ，$\mathrm{Nog}\,M = y$ ，$\mathrm{Nog}\,N = z$ とすると，

$$L = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^x,\quad M = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^y,\quad N = 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^z$$

ですから，

$$\frac{MN}{L} = \frac{10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^y\cdot 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^z}{10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^x} = \frac{10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^y\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^z}{\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^x}$$

$$= 10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{y+z-x}$$

となります。従って，$\mathrm{Nog}\,\dfrac{MN}{L} = y+z-x$ すなわち，

$$\mathrm{Nog}\,\frac{MN}{L} = \mathrm{Nog}\,M + \mathrm{Nog}\,N - \mathrm{Nog}\,L$$

が成り立つことになります。

ここで，$L = 10^7$ とすると $x = 0$ ですから

$$\mathrm{Nog}\,\frac{MN}{10^7} = \mathrm{Nog}\,M + \mathrm{Nog}\,N$$

となり，$M = 10^7$ とすると $y = 0$ ですから

$$\mathrm{Nog}\left(10^7\times\frac{N}{L}\right) = \mathrm{Nog}\,N - \mathrm{Nog}\,L$$

となります。

また，$\mathrm{Nog}\,\dfrac{M^2}{10^7} = \mathrm{Nog}\,\dfrac{MM}{10^7} = \mathrm{Nog}\,M + \mathrm{Nog}\,M = 2\,\mathrm{Nog}\,M$ であり，$\mathrm{Nog}\,\dfrac{M^3}{10^7\cdot 10^7} = \mathrm{Nog}\,\dfrac{M^2}{10^7} + \mathrm{Nog}\,M = 2\,\mathrm{Nog}\,M + \mathrm{Nog}\,M = 3\,\mathrm{Nog}\,M$ ですから，帰納的に

$$\mathrm{Nog}\,\frac{M^k}{10^{7(k-1)}} = k\,\mathrm{Nog}\,M$$

が成り立つことが分かります。

このように，ネイピアの対数では「掛け算 $\longleftrightarrow$ 足し算」，「割り算 $\longleftrightarrow$ 引き算」という対応は完全には成り立っていません。すなわち，

$$\mathrm{Nog}\,MN = \mathrm{Nog}\,M + \mathrm{Nog}\,N\ ,\quad \mathrm{Nog}\,\frac{M}{N} = \mathrm{Nog}\,M - \mathrm{Nog}\,N$$

は正しくありません。

いずれも 10^7 が絡んでしまうのですが，これは小数点の移動ということですから，あまり本質的な部分ではないのかも知れません。それでもやはり，不便さは否めません。

また，ネイピアははじめ正弦値 sin の対数化を目指していて，一般的な対数を考えようとした訳ではないため，底の概念は明確ではありません。このあたりにも改良の余地がありました。

ネイピアは『驚くべき対数規則の記述』(*Mirifici logarithmorum canonis descriptio* : 1614 年) の中で，次のような対数の表を示しています（［4］)。

Gr. 0［0°］

分	正弦	対数	差	対数	正弦	
			+ | −			
0	0	無限	無限	0	10000000	60
1	2909	81425310	81425310	0	10000000	59
2	5818	74493838	74493836	2	9999998	58
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
27	78539	48467450	48467142	308	9999692	33
28	81448	48103756	48103424	332	9999668	32
29	84357	47752826	47752470	356	9999644	31
30	87265	47413909	47413528	381	9999619	30

Gr. 0［0°］

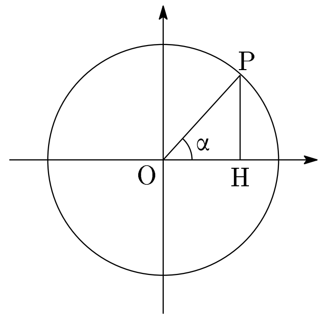
分	正弦	対数	差	対数	正弦	
			+ | −			
30	87265	47413909	47413528	381	9999619	30
31	90174	47085992	47085585	407	9999593	29
32	93083	46768488	46768055	433	9999567	28
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
57	165799	40995641	40994266	1375	9998625	3
58	168707	40821769	40820346	1423	9998577	2
59	171616	40650809	40649336	1473	9998527	1
60	174524	40482781	40481258	1523	9998477	0

⋮

Gr. 44［44°］

分	正弦	対数	差	対数	正弦	
			+ | −			
30	7009093	3553768	174541	3379227	7132504	30
31	7011167	3550809	168723	3382086	7130465	29
32	7013241	3547852	162906	3384946	7128426	28
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
57	7064894	3474471	17454	3457017	7077236	3
58	7066953	3471557	11635	3459922	7075180	2
59	7069011	3468645	5817	3462828	7073124	1
60	7071068	3465736	0	3465736	7071068	0

この表が正弦の自然対数［を定数倍したもの］の表になっていることを確認しましょう ……



右の図で，半径が $r = 10^7$ の円 O の周上の点 P から横軸におろした垂線の足を H とし，$\angle\mathrm{POH} = \alpha$ とします。

上の表で，「正弦」とは $\mathrm{PH} = x$ で，「対数」はそのネイピアの対数です。また「差」はその左右にある対数の値の差を表しています。さらに「分」は $\angle\mathrm{POH} = \alpha$ の度 (°) 以下の値です。

このとき，対数 $= \mathrm{Nog}\,x \fallingdotseq -10^7 \log_e \dfrac{x}{10^7} = -r \log_e \dfrac{\mathrm{PH}}{\mathrm{OP}} = -r \log_e \sin\alpha$ となります。すなわち，$\mathrm{Nog}\,x$ は正弦 $\sin\alpha$ の自然対数を $-r$ 倍したものになっていることが分かります。［円の半径が 10^7 と異様に大きいのは小数点を避けるためだそうです。］

いくつかの角をもとに，ネイピアの対数 $\mathrm{Nog}\,x$ を求めてみましょう。

30° については ……

$\sin 30° = 0.5$ より 正弦 $x = 10^7 \sin 30° = 5000000$ となります。

よって，$5000000 = 10^7 \left(1 - \dfrac{1}{10^7}\right)^x$ より

対数 $= \mathrm{Nog}\,5000000 \fallingdotseq 6931471.459 \fallingdotseq 6931471$

［実際，$-10^7 \log_e \sin 30° \fallingdotseq 6931471.806$ です。］

45° については ……

$\sin 45° \fallingdotseq 0.7071067811$ より 正弦 $x = 10^7 \sin 45° \fallingdotseq 7071068$ となります。

よって，$7071068 = 10^7 \left(1 - \dfrac{1}{10^7}\right)^x$ より

対数 $= \mathrm{Nog}\,7071068 \fallingdotseq 3465735.463 \fallingdotseq 3465735$ ［上の表では **3465736** ］

［実際，$-10^7 \log_e \sin 45° \fallingdotseq 3465735.903$ です。］

60° については ……

$\sin 60° \fallingdotseq 0.8660254038$ より 正弦 $x = 10^7 \sin 60° \fallingdotseq 8660254$ となります。

よって，$8660254 = 10^7 \left(1 - \dfrac{1}{10^7}\right)^x$ より

対数 $= \mathrm{Nog}\,8660254 \fallingdotseq 1438410.338 \fallingdotseq 1438410$

［実際，$-10^7 \log_e \sin 60° \fallingdotseq 1438410.362$ です。］

$\mathrm{Nog}\,x = \dfrac{\log_e x - \log_e 10^7}{\log_e(10^7 - 1) - \log_e 10^7}$ を基に，パソコンを活用して，いろいろな角について $\mathrm{Nog}\,x$ を求めてみるとよいでしょう。

(2)　ブリッグス

ブリッグス (Henry Briggs : 1556?–1630) はイングランドの数学者で，1596 年にグレシャム・カレッジの初代幾何学教授になりました。1619 年にはオクスフォード大学のサヴィル幾何学教授職 —— イングランドの学者サヴィル (Sir Henry Savile : 1549–1622) によって 1619 年に創設された幾何学の講座で，サヴィルは同時に天文学の講座も創設しています。—— の初代教授になっています。イギリスに本格的に数学を導入した最初の数学者の一人として知られています。

1615 年および 1616 年に，ブリッグスはスコットランドにネイピアを訪ね，対数表の改良の話をしました。その結果，1 の対数は 0 ，10 の対数は 1 であるようにすべきであるという結論に達しました。すなわち，こんにちいうところの常用対数 (底が 10 の対数) の成立が話し合われたのです。しかし，ネイピアはその完成を見ることなく亡くなりましたから，最終的にはブリッグスが 1 人で仕上げることになりました。

彼の結果は 1617 年の『最初の 1000 個の数の対数』(*Logarithmorum chilias prima*) および 1624 年の『対数の算術』(*Arithmetica logarithmica*) で発表されています。

『対数の算術』の第 1 章「対数の定義および名前の由来」で次のようにいいます (［5］p.1)。

「対数は，比例的［な数］に結び付けられている，等しい差が保たれる数である。

何であれ与えられた数に対して，それらとは異なり，不都合にではなく一般的な対数の定義に適合する，別の数が結び付けられるであろうし，［それらの数は計算においては］不愉快ではない何らかの利点を与えることができるであろう。例えば，もし連続的に比例する数が 1，2，4，8，16，32，64,128［，···］であったならば，ここ［下の表］に見るように，A，あるいは B，あるいは C，あるいは D の印をつけられた数は，あるいは，差が，それらに結び付けられた数が比例している［数である］たびごとに増加あるいは減少する，対数の［値の］1 つと等しくなるために，このただ 1 つの仕方が保たれるべきである，別の［数は］，それらの対数として結び付けられることができるであろう。ゆえに，不都合にではなく，対数は比例する数の等差の付随数ということができる。それゆえ，それらの［数の］間に保たれている比を私たちに示すのであるから，最も明確な発明者［ネイピアのこと］によって対数［対数を意味するラテン語 logarithmus はギリシア語の λόγος (比) と ἀριθμός (数) からの造語です。］と名づけられたと思われる。」

	A	B	C	D
1	1	5	5	35
2	2	6	8	32
4	3	7	11	29
8	4	8	14	26
16	5	9	17	23
32	6	10	20	20
64	7	11	23	17
128	8	12	26	14
比例する数	対数	対数	対数	対数

そして，ブリッグスの対数 Log［ここでは，ブリッグスの考えた対数を Log で表すことにします。］はネイピアの対数 Nog を用いて

$$\mathrm{Log}\,x = \frac{\mathrm{Nog}\,1 - \mathrm{Nog}\,x}{\mathrm{Nog}\,1 - \mathrm{Nog}\,10} \quad [\,= \log_{10} x\,]$$

と定義されます。

$$\mathrm{Nog}\,1 - \mathrm{Nog}\,x = \mathrm{Nog}\left(10^7 \times \frac{1}{x}\right) = k \text{ とすると } 10^7 \times \frac{1}{x} = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^k \text{ ですから，}$$

$$\log_{10}\frac{1}{x}=\log_{10}\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^k \quad \text{より} \quad -\log_{10}x=k\log_{10}\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$$

となります。

また，$\mathrm{Nog}\,1-\mathrm{Nog}\,10=\mathrm{Nog}\left(10^7\times\frac{1}{10}\right)=l$ とすると $10^7\times\frac{1}{10}=10^7\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^l$ ですから，

$$\log_{10}\frac{1}{10}=\log_{10}\left(1-\frac{1}{10^7}\right)^l \quad \text{より} \quad -1=l\log_{10}\left(1-\frac{1}{10^7}\right)$$

となります。

従って，$\mathrm{Log}\,x=\dfrac{k}{l}=\dfrac{-\log_{10}x}{\log_{10}\left(1-\frac{1}{10^7}\right)}\div\dfrac{-1}{\log_{10}\left(1-\frac{1}{10^7}\right)}=\log_{10}x$ となります。

また，『対数の算術』には次のような表が載せられています（［5］）。

完全な数	対数	完全な数	対数
1	0,00000,00000,0000	⋮	⋮
			43431,8370
2	0,30102,99956,6398	99995	4,99997,82847,3302
	17609,12590,5568		43431,4026
3	0,47712,12547,1966	99996	4,99998,26278,7328
	12493,87366,0830		43430,9683
4	0,60205,99913,2796	99997	4,99998,69709,7011
	9691,00130,0806		43430,5340
5	0,69897,00043,3602	99998	4,99999,13140,2351
	7918,12460,4762		43430,0996
6	0,77815,12503,8364	99999	4,99999,56570,3347
	6694,67896,3062		43429,6653
⋮	⋮	100000	5,00000,00000,0000

0.3010 や 0.4771 という見慣れた値が出ていたり［3 つあるコンマ (,) のうち一番左のものは小数点］，100000 の対数が 5 であったりすることから，この表が 14 桁の常用対数表であることはすぐに分かりますね。

そして，ブリッグスの対数については，それは結局こんにちの常用対数なのですから，

$$\mathrm{Log}\,MN=\mathrm{Log}\,M+\mathrm{Log}\,N$$
$$\mathrm{Log}\,\frac{M}{N}=\mathrm{Log}\,M-\mathrm{Log}\,N$$
$$\mathrm{Log}\,M^k=k\,\mathrm{Log}\,M$$
$$\mathrm{Log}\,10^nM=n+\mathrm{Log}\,M$$

が成り立ちます。

このように，ブリッグスの対数では掛け算がそのまま足し算に対応することになります。

なお，対数の値について，整数部分をその対数の指標といい，小数部分を仮数といいますが，上の第 4 の性質により，対数の指標と仮数が分離されるようになります。この指標，仮数という用語は『対数の算術』から使われるようになりました。

(3) ビュルギ

スイスの時計技師・計算家ビュルギ (Jost Bürgi : 1552–1632) は，ネイピアとは独立に対数計算の考えに達し，1588 年には対数の計算を行っているようです。彼は等差数列と等比数列との対比 —— ブリッグスもいっているように対数は等差数列，真数は等比数列です —— から対数の考えを得たのですが，その成果は1620 年の『等差および等比数列の表』(*Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen*) において発表されました。

ネイピアが $1-10^{-7}$ という 1 より少し小さい数を基にしたのに対し，ビュルギは $1+10^{-4}$ という 1 よりちょっと大きい数を基にしました。また，ネイピアの 10^7 に対してビュルギは 10^8 をとりましたが，ビュルギの対数とネイピアの対数は基本的原理は同じものでした。

すなわち，ビュルギの考えた対数を Bog と表すことにすると，

$$x = 10^8(1+10^{-4})^y = 10^8\left(1+\frac{1}{10^4}\right)^y \quad のとき \quad y = \mathrm{Bog}\,x$$

となります。このとき，彼は真数 x を“黒い”数，対数の 10 倍である $10y$ を“赤い”数と呼びました。

『等差および等比数列の表』には，赤い数が 0 〜 230000 の範囲について，次のような表が載せられています ([7])。この表では，赤い数 $10y$ を外側に，黒い数 x を内側に書いてあります。[印刷物では赤い数は赤い文字で書かれていたのではないかと想像されますが，実際 [7] ではそのようにしてあります。] ですから，この表は逆対数表 (真数表) ということになります。

	0	500	1000	⋯	2500	3000	3500
0	100000000	100501227	101004966	⋯	102531384	103045299	103561790
10	⋯⋯ 10000	⋯⋯ 11277	⋯⋯ 15067	⋯	⋯⋯ 41637	⋯⋯ 55603	⋯⋯ 72146
20	⋯⋯ 20001	⋯⋯ 21328	⋯⋯ 25168	⋯	⋯⋯ 51891	⋯⋯ 65909	⋯⋯ 82503
30	⋯⋯ 30003	⋯⋯ 31380	⋯⋯ 35271	⋯	⋯⋯ 62146	⋯⋯ 76216	⋯⋯ 92861
40	⋯⋯ 40006	⋯⋯ 41433	⋯⋯ 45374	⋯	⋯⋯ 72403	⋯⋯ 86523	103603221
50	⋯⋯ 50010	⋯⋯ 51488	⋯⋯ 55479	⋯	⋯⋯ 82660	⋯⋯ 96832	⋯⋯ 13581
⋮	⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮	⋮
450	⋯⋯ 50991	⋯⋯ 54479	⋯⋯ 60490	⋯	⋯⋯ 93792	103510024	⋯⋯ 28844
460	⋯⋯ 61037	⋯⋯ 64574	⋯⋯ 70636	⋯	103004091	⋯⋯ 20375	⋯⋯ 39247
470	⋯⋯ 71083	⋯⋯ 74671	⋯⋯ 80783	⋯	⋯⋯ 14391	⋯⋯ 30727	⋯⋯ 49651
480	⋯⋯ 81130	⋯⋯ 84768	⋯⋯ 90931	⋯	⋯⋯ 24693	⋯⋯ 41080	⋯⋯ 60056
490	⋯⋯ 91178	⋯⋯ 94867	101501080	⋯	⋯⋯ 34995	⋯⋯ 51435	⋯⋯ 70462
500	100501227	101004966	⋯⋯ 11230	⋯	⋯⋯ 45299	⋯⋯ 61790	⋯⋯ 80869

例えば，1020 [$=10y$] の欄 (1000 と 20 の交わった，上から 3 行目で左から 3 列目の位置) の値 101025168 [$=x$] は $\mathrm{Bog}\,101025168 = 102$ であることを表しています。実際, $10^8(1+10^{-4})^{102} = 101025168.212579\cdots \fallingdotseq 101025168$ です。

ところで，$e \fallingdotseq 2.7182818284590452354$ ですから，黒い数 $x = 271814593$ を 10^8 で割り，赤

い数 $10y = 100000$ を 10^5 で割れば，$\mathrm{Bog}(e \times 10^8) \fallingdotseq 1 \times 10^4$ となって，ビュルギは自然対数 $[\log_e e = 1]$ に近いものを考えていたとみることができます。

$\left(1 + \dfrac{1}{10^4}\right)^y$ を $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ と比べると，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ であることから，ビュルギの対数と自然対数との関連が何となく感じられます。

さらに, この表から, 例えば, $\mathrm{Bog}\,100521328 = 52$, $\mathrm{Bog}\,103004091 = 296$, $\mathrm{Bog}\,103541080 = 348$ で，$100521328 \times 103004091 = 10354108016752848$ ですから，

$$\mathrm{Bog}\,\frac{MN}{10^8} = \mathrm{Bog}\,M + \mathrm{Bog}\,N$$

であることが分かります。

また，ビュルギは，対数の発明に当たって，利息計算が念頭にあったのではないかといわれています。そのために，対数表ではなく，逆対数表をつくったというのです。

実際，元金 a を利率 r で預けたとき，期間 n が経過したときの元利合計 N は $N = a(1 + r)^n$ となります。ですから，上の表は $a = 10^8$ ，$r = 10^{-4}$ としたときの n と N の対応表とみることができます。

あるいは，例えば，150 の欄の値 100150105［上の表には出ていません］を 1.00150105 のような小数と捉えるならば，利率 10^{-4} で 15 単位期間預けたときの元利合計は元金の 1.00150105 倍である，と読むことができます。実際には，$(1 + 10^{-4})^{15} = 1.001501050455\cdots$ です。［年利 0.01% だと，100 万円を 15 年間預けても，1,001,501 円にしかならないということですね。］

参考文献

［1］ D. E. Smith(ed.)，*A Source Book in Mathematics*，Dover，1959

［2］ D. J. Struik(ed.)，*A Source Book in Mathematics, 1200 – 1800*，Princeton U. P.，1969

［3］ J. Napier(transl. by W. R. Macdonald)，*The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms*，William Blackwood and Sons，1889

［4］ D. Roegel，*A reconstruction of the tables of Napier's descriptio (1614)*，The LOCOMAT project(`http://locomat.loria.fr`)，11 January 2011

［5］ H. Briggs，*Arithmetica Logarithmica*，Gulielmus Iones，1624

［6］ D. Roegel，*A reconstruction of Briggs' Logarithmorum chilias proma (1617)*，The LOCOMAT project(`http://locomat.loria.fr`)，11 January 2011

［7］ D. Roegel，*Bürgi's "Progress Tabulen" (1620) : logarithmic tables without logarithms*，The LOCOMAT project(`http://locomat.loria.fr`)，26 November 2011

［8］ 近藤 洋逸「近代数学史論」，白東書館，1948 (昭和 23)

［9］ 安藤 洋美「高校数学史演習」，現代数学社，1999 (平成 11)

［10］ 家 正則，木村 龍治，杉村 新，三輪 主彦「地球と宇宙の小事典」，岩波書店 (岩波ジュニア新書 348)，2000 (平成 12)

［11］ 上野 英一，小谷 正博，諏訪 恵治，玉虫 伶太，千々和 栄子，山岸 悦子，渡辺 範夫「化学の小事典」，岩波書店 (岩波ジュニア新書 341)，1999 (平成 11)

［12］ 「世界大百科事典 第 2 版」，日立システムアンドサービス，2004 (平成 16)

［13］ 気象庁・報道発表資料，「気象庁マグニチュード算出方法の改訂について」，平成 15(2003) 年 9 月 17 日