

12 解析幾何学の起こり

数と図形との間には密接な関係があり、平面や空間に座標を設けて図形を数の間の関係によって表し、また逆に、数の間の関係を図形で表現することができます。このように、座標によって図形の問題を数の間の問題に書き改め、代数的計算によって幾何学の問題を処理する方法を解析幾何学と呼んでいます。

解析幾何学に対して、座標や代数的手法を用いずに、図形を直接考察する方法を総合幾何学あるいは純粋幾何学とっています。ユークリッド (Euclid (Eukleides : Εὐκλείδης) : 前 300 頃) の『原論』(Στοιχείωσις) に見られるような方法が総合幾何学です。

中学校では総合幾何学的な手法で図形の性質について学びます。そこでは“証明”を通して、論理的な考え方を学ぶこととなります。これは高校にも受け継がれて、三角形や円の性質を学習します。

一方、解析幾何学的な面では、中学校で直線や放物線について学び、高校ではさらに円や円錐曲線といわれる曲線 (放物線、楕円、双曲線) などについて学習することとなります。ここでは、直線や曲線の交点の座標、2 直線の平行・垂直、接線の方程式、点の軌跡などが出てきます。また高校では、微分積分法との関連で、サイクロイドなどの曲線も扱います。

中学・高校での数学では総合幾何学よりも解析幾何学の方にやや重きがおかれているように感じます。

古代ギリシアにおいては、数学的な内容はほとんどが幾何学的に表現されていました。無理量 (無理数) を表す代数的手段を持っていなかったことや未知数・既知数の記号化ができていなかったことなどがその理由として挙げられます。

中世にはアラビアで代数学が成長しました。2 次方程式の解法など、証明には幾何学が用いられてはいましたが、取扱い方は代数学でした。しかし、ここでもまだ記号化は進んでいませんでした。

ヨーロッパにおいて、ヴィエートに見られるような記号化が起ってくるのは 16 世紀のことです。既知数の記号化によって“一般の”式が扱えるようになりました。一方で、3 次方程式の解法の探求など、代数学の進展が見られました。

そのような状況の中で、幾何学と代数学との連携が意識されるようになり、代数的な内容をも幾何学的に表現するという態度に加えて、幾何学の問題に代数学を利用するという姿勢が見られるようになってきたのです。

解析幾何学の考えを導入・確立したのはデカルトとフェルマで、それは 17 世紀前半のことでした。それより先、ヴィエートの著作には幾何学と代数学の融合の試みが見られますし、解析幾何学に不可欠な座標もその萌芽は古代ギリシアに見ることができます。

18 世紀になって、オイラーの『無限解析入門』(Introductio in Analysin Infinitorum : 1748 年) ではこんにちの私たちのものとほとんど同様な扱い方がなされています。

デカルト、フェルマからオイラーに至る約 120 年の間に、解析幾何学は整理されてきたということができるとでしょう。

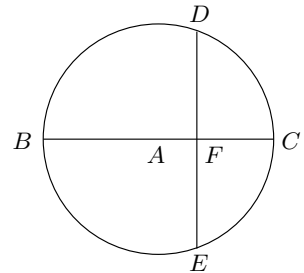
それでは、解析幾何学の発見当時の様子を見てみましょう。

(1) ヴィエート

ヴィエート (François Viète : 1540–1603) の 1593 年の著作『幾何学的作図の規範的査定』(*Effectuum Geometricarum Canonica Recensio*) は「それによって 2 次を超えないすべての方程式が容易に解けるような幾何学的な作図」の概要を述べたものです。これは方程式の解法を幾何学的に表現しようとするもので、例えば次のようなことが出てきます ([1] p.372, pp.377-378)。ここには座標の考えはまったく出てきませんから、解析幾何学とは言い難い面があります。しかし、幾何学と代数学との融合についての考えは見出すことができます。

「比例する 3 つの直線を引くこと。

A を中心として、あなたが定めた距離で円を描き、直径 BAC を引きなさい。弧 CD と CE は円周上で反対の位置にあり、長さが等しいとしなさい。 DE を結ぶ直線が BC を F で切るものとしなさい。これで要求されたことがなされたとは私は言う。なぜなら、 BF 、 FD と FC は比例するから。」(命題 3)



円の半径を $AB = r$ とし、 $AF = x$ とすると、 $BF = r + x$ 、 $FD = \sqrt{r^2 - x^2}$ 、 $FC = r - x$ となりますから、 $BF \times FC = FD^2$ すなわち $BF : FD = FD : FC$ となります。

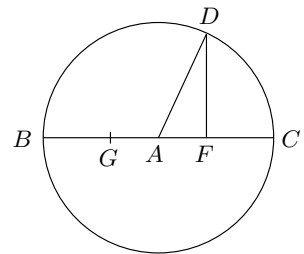
[弧 CD と CE が等しいことから、 $BC \perp DE$ となり、 $\triangle ADF$ は直角三角形になります。]

「比例する 3 数の中項と外項同士の差が与えられたときに、その外項を見いだすこと。

これは平方根に基づく平方の幾何学的解法を含んでいる。

FD を比例する 3 数の中項とし、 GF をその外項の差としなさい。その外項が見いだされる。

GF と FD が直角をなし、 GF が A で半分に切られるものとしなさい。 A を中心として、距離 AD を半径とする円を描き、 AG 、 AF を円周と B 、 C で交わるように延長しなさい。



これで要求されたことがなされたとは私は言う。なぜなら FD が中項となるような外項は BF と FC として見いだされるから。さらに、作図法から AF と AG が等しく、 AC と AB が等しいから、 BF と FC は異なる。したがって、等しい AB 、 AC から AG 、 AF を引けば、等しい差 BG 、 FC が残される。さらに、 GF は BF と BG あるいは FC との差であり、これで証明された。」(命題 12)

比例する 3 数を $x : y = y : z$ とし、外項の差を $x - z = d$ とすると、 $FD = y$ であることから、円の半径は $r = \sqrt{y^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$ となります。このとき明らかに、 $x = BF = r + \frac{d}{2} =$

$\sqrt{y^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} + \frac{d}{2}$ 、 $z = FC = r - \frac{d}{2} = \sqrt{y^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} - \frac{d}{2}$ となります。

一方で、 $xz = y^2$ となりますから、求めるべき外項 x 、 z が見つかったこととなります。

(2) デカルト

デカルト (René Descartes : 1596-1650) は 1637 年に『方法序説 (自分の理性を正しく導き、いろいろな学問において真理を求めるための方法について述べる話)』 (*Discours de la méthode. Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences*) を出版しました。そこには 3 つの「試論」として、『屈折光学』 (*La Dioptrique*) , 『気象学』 (*Les Meteores*) および『幾何学』 (*La Géométrie*) が収められています。そして、この『幾何学』においてデカルトは解析幾何学を導入したのです。

『幾何学』は 3 巻からなっていますが、まずは算術の計算と幾何学の操作との関連について述べた部分 (第 1 巻「円と直線だけを用いて作図しうる問題について」冒頭) を見てみましょう ([2] pp.3-5)。

「幾何学のすべての問題は、いくつかの直線の長ささえ知れば作図し得るような諸項へと、容易に分解することができる。

[算術の計算は幾何学の操作にどのように関係するか]

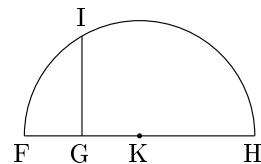
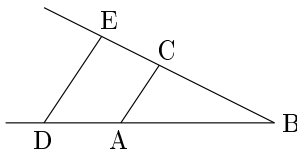
そして、全算術がただ 4 種か 5 種の演算、すなわち、加法、減法、乗法、除法、そして一種の除法と見なし得る巾根の抽出によって作られているのと同様に、幾何学においても、求める線が知られるようにするためには、それに他の線を加えるか、それから他の線を除くか、あるいはある線があり ——— これを数にいつそうよく関係づけるために私は単位と呼ぶが、普通は任意にとることのできるものである ——— さらに他の 2 つの線があるとき、この 2 線の一方に対して、他方が単位に対する比をもつ第 4 の線を見出すか ——— これは乗法と同じである ——— または、2 線の一方に対して単位が他方に対する比をもつ第 4 の線を見出すか ——— これは除法と同じである ——— あるいは最後に、単位とある線との間に、1 個、2 個、またはそれ以上の比例中項を見出すか ——— これは平方根、立方根などを出すのと同じである ——— すればよい。私の意のあるところをよりわかりやすくするため、このような算術の用語をあえて幾何学に導入しようとするのである。

[乗法]

たとえば、AB を単位とし、BD に BC を掛けねばならぬとすれば、点 A と C を結び、CA に平行に DE を引けばよい。BE はこの乗法の積である (下図左)。

[除法]

また、BE を BD で割らねばならぬとすれば、点 E と D を結んだうえで、DE に平行に AC を引く。BC はこの除法の結果である。



[平方根の抽出]

また、GH の平方根を出さねばならぬとすれば、それと一直線上に単位である FG を加え、FH を点 K で二等分して、K を中心とする円 FIH を描き、点 G から FH と直角に直線を I まで立てる。GI は求める根である (上図右)。立方根その他については後で述べる方が都合がよいから、いまは何も言わないでおく。

[幾何学においてどのように記号を用いるか]

しかし多くの場合、こうして紙に線を引く必要はない。各々の線の一つずつの文字で示せば足りるのである。たとえば、線 BD を GH に加える場合は、一方を a 、他方を b と名づけて、 $a + b$ と書く。 a から b を引く場合は $a - b$ と書く。また、これらを掛け合わせる場合は ab と書く。 a を b で割る場合は $\frac{a}{b}$ と書く。 a にそれ自身を掛ける場合は aa または a^2 と書き、これにもう一度 a を掛ける場合は a^3 と書き、以下どこまでも進む。 $a^2 + b^2$ の平方根を出す場合は $\sqrt{a^2 + b^2}$ と書く。 $a^3 - b^3 + abb$ の立方根を出す場合は $\sqrt[3]{C.a^3 - b^3 + abb}$ と書き、他の場合も同様である。

ここで注意してほしいが、 a^2 、 b^3 、そのほか類似の書き方をするとき、私も代数学で用いられている語を使って、これを平方、立方などと呼びはするが、普通は単なる線しか考えていないのである。

同じく注意してほしいことであるが、問題中に単位が定められていないときは、同じ線のすべての部分は、普通はどれも同じ次元によって表現されるべきで、たとえば上の a^3 は、私が $\sqrt[3]{C.a^3 - b^3 + abb}$ と名づけた線を構成する abb や b^3 と同じ次元を含んでいる。しかし、単位が定められたときはそうではない。次元が多すぎたり少なすぎたりする場合はいつも、言外に単位を考えればよいからである。たとえば、 $aabb - b$ の立方根を出すという場合には、量 $aabb$ は 1 度単位で割られており、他の量 b には 2 度単位が掛かっていると考えねばならない。

そのうえ、これらの線の名を忘れないように、それを決めたり変えたりするたびに、いつもそれを別に書き出しておかねばならない。たとえば、次のように書く。

$AB \propto 1$ 、すなわち AB は 1 に等しい。

$GH \propto a$ 、

$BD \propto b$ 、など。」

このように、デカルトは、実際に曲線を描くのではなく、直線 (線分) に文字をあてはめることによって、幾何学の操作が算術の演算に関連付けられ、曲線を代数的に処理できることを述べています。これは、直線や曲線の交点を求めたり、線分の長さを求めたりするときに、現代の私たちが行っている方法そのものです。

このように算術の演算と幾何学の操作とが関連付けられ、算術の演算の結果も直線などで表し得るということは、すべての次元の量が 1 次元の量 (直線・線分) として表し得ることを意味しています。

当時の代数学では、同次元の量だけが互いに比較でき、長さや面積のように、異なる次元の量は加えたり引いたりすることはできないという考え方が支配的でした。(ヴィエトやフェルマはこの考え方に従っていました。)

デカルトは単位の導入によってこの考え方から一歩進み、代数式の表現の自由度を高めたのでした。式が幾何学的背景をもっているとはいえ、式そのものは次元を考慮せずに扱うことができることとなりますから、このことは、解析幾何学において大きな意義を持っています。

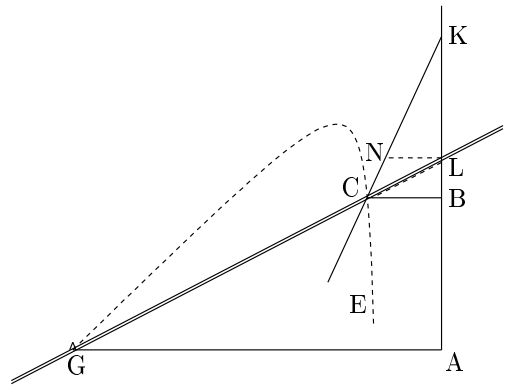
なお、デカルトは a^2 、 a^3 などの指数表現を用いていることにも留意してください。また、彼においては演算記号は現代のものほとんど変わらないものが使われています。この頃には記号法がかなり整理されてきたということでしょう。

解析幾何学では座標が重要な役割を果たします。現代の私たちは、平面上では、 x 軸、 y 軸という (直交する) 2つの座標軸を用いています。しかし、デカルトの『幾何学』にはそういう意味での座標は出てきません。

「曲線の性質について」と題された『幾何学』第2巻には、「すべての曲線をいくつかの類に分け、そのすべての点が直線の点に対してもつ関係を知る方法」について次のような記述があります ([2] pp.18-20)。

「次々と複雑さを増して限りなく進む曲線を描きまた考える手段は、他にもいくつか示すことができる。しかし、自然のなかにあるすべての曲線を包括し、それらを順序正しくいくつかの類に分けるためには、次のように述べるのが最もよいと私は考えるのである。幾何学的と名づけ得る線、すなわち、何らかの的確で精密な計測を受け得る線のすべての点は、必ず、1つの直線のすべての点に対してある関係をもち、この関係は線のすべての点に関して同一の方程式によって表され得る。そして、この方程式が2個の未定量による矩形あるいは同一の未定量による正方形までしかのぼらないとき、曲線は第1の最も単純な類に属し、そこに含まれるものは円と放物線と双曲線と楕円しかない。しかし、方程式が2個の未定量——— というのは、ここでは1点と他の点との関係を説明するのに2個の未定量が必要だからであるが——— の双方または一方の第3ないし第4次元までのぼるときは、曲線は第2類に属する。方程式が第5ないし第6次元までのぼるときは、線は第3類に属し、以下同様にどこまでも進む。

例えば、定木 GL と直線に囲まれた平面 $CNKL$ ——— その辺 KN は C の方に際限なく伸びている ——— との交わりによって、線 EC が描かれたと想像し、その線は第何類に属するかを知りたいとしよう。ここに $CNKL$ は下にある平面の上を直線的に、というのは、その直径 KL がどちらにも伸びた線 BA の何らかの場所に常に重なっているように動かされ、定木 GL を点 G のまわりに



回転させるとする。定木は常に点 L を通るように $CNKL$ に結びつけられているためである。私は AB のような直線を選び、曲線 EC のすべての点をその様々な点に関係づける。この線 AB 上に A のような1点を選び、そこから計算を始める。これら双方を選ぶと私が言うのは、もともとこれらは好きなようにとってよいものだからである。というのも、方程式をより短く、より扱いやすいものにするためには大いに選択の余地があるけれども、どのような取り方をしても、線を常に同じ類のものとして表し得るからであり、その証明は容易である。さて、曲線上に C のような1点を任意にとり、曲線を描くに用いる器具がそこにあてはめられたと仮定して、この点 C から GA に平行に線 CB を引く。 CB と BA は未定で未知の量であるから、その一方を y 、他方を x と名づける。しかし、両者の間の関係を見出すため、この曲線の形を定める既知の量をも考慮し、 GA を a 、 KL を b 、 GA に平行な NL を c と名づける。そして、 NL 対 LK 、すなわち c 対 b は、 CB すなわち y 対 BK であるから、 BK は $\frac{b}{c}y$ であ

ると主張する。BL は $\frac{b}{c}y - b$ であり、AL は $x + \frac{b}{c}y - b$ である。そのうえ、CB 対 LB，すなわち y 対 $\frac{b}{c}y - c$ は、 a すなわち GA 対 LA すなわち $x + \frac{b}{c}y - b$ であるから、第 2 項に第 3 項を掛けて $\frac{ab}{c}y - ab$ を作れば、これは第 1 項と最終項を掛けて作った $xy + \frac{b}{c}yy - by$ に等しい。そこで求める方程式は

$$yy \propto cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$$

であり、ここから線 EC は第 1 類に属することを知る。実際これは双曲線にほかならない。

この曲線を描くのに使う器具で、平面 CNKL を限るものが直線 CNK でなく、この双曲線、あるいは第 1 類の他の何らかの曲線であるようにすれば、この線と定木 GL との交わりは、双曲線 EC のかわりに、第 2 類に属する他の曲線を描くであろう。たとえば、CNK が L を中心とする円であれば、古代人の第 1 コンコイドが描かれるであろうし、KB を直径とする放物線であれば、私がさきほどパプス (Πάππος (Pappos) : 320 頃) の問題に関して最初の最も単純な線と言ったもの、つまり位置に関して与えられた直線が 5 本しかない場合の〔或る〕線が描かれるのである。」

デカルトは、まず、曲線を分類します。すなわち、

2 次までの次数の方程式で表される曲線を第 1 類の曲線

3 次、4 次の次数の方程式で表される曲線を第 2 類の曲線

5 次、6 次の次数の方程式で表される曲線を第 3 類の曲線

と呼びます。

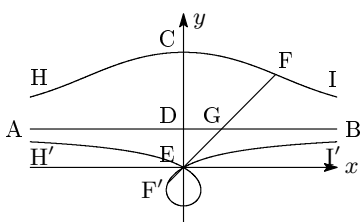
そして、例として双曲線の方程式 $y^2 = cy - \frac{c}{b}xy + ay - ac$ を挙げます。この方程式の導き方は引用文中から明らかでしょう。

このとき、曲線上の任意の点 C に対して、 $AB = x$ 、 $BC = y$ としたということは、現代的にいうと、点 A を原点 (ですから、AK が x 軸、AG が y 軸) とし、点 C の座標を (x, y) としたということです。

デカルトは、座標という言葉を使っていませんし、現代の私たちが使っているような座標の形にはもちろんなっていませんが、ここでの記述からは座標の考え方が十分に読み取れます。

さらに、2 次不定方程式と 2 次曲線とが対応すること、座標軸は任意に設定してもよいことや曲線を表す方程式の次数は不変であることが述べられています。それらのことから見て、ここに、解析幾何学の基礎が確立されたといってもよいでしょう。

そして、デカルトが『幾何学』の中で示したことは、標語的には、作図問題を中心に、図形の関係を式の関係に移し、逆に、代数演算に幾何学的表現を与えて見やすくした、といえるでしょう。



左図のように、直交する 2 直線 AB および CDE に対して、直線 CDE を点 E の周りに回転させ、D はつねに直線 AB 上にあり、CD の長さはつねに一定であるようにすると、点 C は曲線 HCI を描きます。このように描かれた曲線 HCI をコンコイドといいます。

左図のように座標軸を選ぶと、コンコイドは $(y - a)^2(x^2 + y^2) = b^2y^2$ と表せます。このとき、 $DE = a$ 、 $CD = b$ となります。

さらに、デカルトは、作図ができたものとしてそこから未知量、既知量の間を導くという、現代的な考え方をしていたことに注目してください。彼以前では、与えられた問題をとにかく解こうとするのが一般的な方法でした。すなわち、結果を推測することはあっても、結果をも与えてそこから何らかの関係を導くということはしていませんでした。

『幾何学』第1巻で次のようにいいます ([2] p.5)。

「[問題を解くに役立つ等式にどのようにして到達すべきか]

そこで、何らかの問題を解こうとする場合、まず、それがすでに解かれたものと見なし、未知の線もそれ以外の線も含めて、問題を作図するに必要なと思われるすべての線に名を与えるべきである。次に、これら既知の線と未知の線の間は何の区別も設けずに、それらがどのように相互に依存しているかを最も自然に示すような順序に従って難点を調べあげて、ある同一の量をふたつの仕方であらわす手段を見いだすようにすべきである。この最後のものは等式[方程式]と呼ばれる。なぜならば、これらふたつの仕方の一方の諸項は他方の諸項に等しいからである。そして、仮定した未知の線と同じ数だけ、このような等式を見いだすべきである。それだけの等式が見つからず、しかも、問題中に望まれるものを何ひとつ省略していないのであれば、それは問題が完全には限定されていない証拠である。この場合は、どのような等式も対応しないすべての未知の線として、任意に既知の線をとることができる。それでもなおいくつかの未知の線が残るとすれば、これらの未知の線の各々を説明するために、同じく残った等式を別々に考察したり、互いに比較したりしながら、各等式を順序正しく使い、それらを整理して、ただひとつの線だけが残るようにせねばならない。この線は他の既知の線に等しいか、または、その平方、立方、平方の平方、超立体、立方の平方などが、2個またはそれ以上の他の量——そのうち1個は既知であり、他は単位とこの平方、立方、平方の平方などの間のある比例中項に他の既知量を掛けたもので作られている——の加法か減法によって生ずるものに等しいのである。」

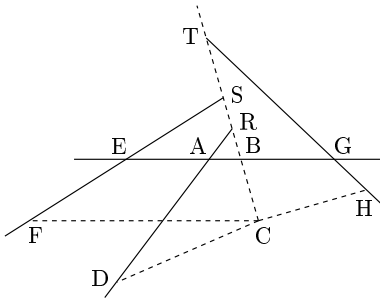
デカルトは、彼が「パプスの問題」と呼ぶ問題の解法を述べるのですが、パプスの問題は次のようなものです ([2] p.10) が、元々はアポロニウス (Ἀπολλώνιος (Apollonius) : 前 262–前 200?) によって提出されたものです。

「3本、4本、またはそれ以上の直線が位置に関して与えられたとする。まず1点から与えられた線の各々に1本ずつ、それらと与えられた角をなす同数の線をひき、線が3本しかない場合は、この点からひいた線のうち2本に囲まれた矩形が第3の線による正方形と与えられた比をもつようにする。4線の場合は、残る2線による矩形との比をとる。5線の場合は、3線によって作られた平行六面体が残る2線と他の与えられた線とによって作られた平行六面体と与えられた比をもつようにする。…… こうして、この問題は何本の線にでも拡張されうる。それに、常に無限個の異なる点が問題の条件を満足しうるから、それらの点がすべて見いだされるべき線を知り、それを描くことが要求される。」

そして、それに関連して方程式のつくり方を説明しています ([2] pp.12–13)。

「AB, AD, EF, GH [次ページ図]などを位置に関して与えられた線とし、Cのような1点から与えられた線に、角CBG, CDA, CFE, CHGなどが与えられたものとなるように、CB, CD, CF, CHのような直線をひいて、これらの線の1部分の相乗によって生ずるものが、他

の線の相乗によって生ずるものに等しい、あるいはこれにたいして与えられた他の何らかの比をもつようにするとき、この点を見いださねばならないでしょう。あとの場合に問題がより困難になるわけではないのである。



【この例において方程式に達するためには、どのように項を立てるべきか】

まず私は、問題がすでに解決されたと仮定し、これらすべての線の紛糾を避けるために、与えられた線のひとつと、見いださねばならぬ線のひとつ、たとえば AB と CB を主要な線とみなし、他のすべての線をこれらに関係づけるようにする。線 AB の点 A, B の間にある部分を x と名づけ、BC を y と

名づけよう。他の与えられた線がどれもこの 2 線と平行でないならば、これを切るまで延長する (2 線も必要なだけ延長して)。図においては、これらの線は線 AB を点 A, E, G において切り、BC を点 R, S, T において切る。すると、三角形 ARB のすべての角は与えられているから、辺 AB, BR の間の比もまた与えられている。これを z 対 b とおく。すると、AB は x であるから、RB は $\frac{bx}{z}$ となり、点 B は C と R の間に来ているから、全体 CR は $y + \frac{bx}{z}$ となるであろう。R が C と B の間に来れば、CR は $y - \frac{bx}{z}$ となるであろうし、C が B と R の間に来れば、CR は $-y + \frac{bx}{z}$ となるであろう。同様に、三角形 DRC の三つの角は与えられており、したがって辺 CR と CD の間の比も与えられている。これを z 対 c とおけば、CR は $y + \frac{bx}{z}$ であるから、CD は $\frac{cy}{z} + \frac{bcx}{zz}$ となるであろう。次に、線 AB, AD, EF は位置に関して与えられているから、点 A, E の間の距離も与えられており、これを k と名づけることにすれば、EB は $k + x$ に等しいであろう。しかし点 B が E と A の間に来れば $k - x$ となるであろうし、E が A と B の間に来れば、 $-k + x$ となるであろう。ところが、三角形 ESB の角はすべて与えられているから、BE 対 BS の比もまた与えられており、これを z 対 d とおけば、BS は $\frac{dk + dx}{z}$ となり、全体 CS は $\frac{zy + dk + dx}{z}$ となる。しかし、点 S が B と C の間に来れば、 $\frac{zy - dk - dx}{z}$ となるであろうし、C が B と S の間に来れば、 $\frac{-zy + dk + dx}{z}$ となるであろう。そのうえ、三角形 FSC の三つの角は与えられており、したがって、CS 対 CF の比も与えられていて、これを z 対 e とすれば、全体 CF は $\frac{ezy + dek + dex}{zz}$ となるであろう。同様に、AG も与えられていて、これを l と名づければ、BG は $l - x$ であり、三角形 BGT の性質から、BG 対 BT の比も与えられている。これを z 対 f とすれば、BT は $\frac{fl - gx}{z}$ であり、 $CT \propto \frac{zy + fl - fx}{z}$ となるであろう。次にまた、三角形 TCH の性質から、TC 対 CH の比は与えられており、これを z 対 g とおけば、 $CH \propto \frac{gzy + fgl - fgx}{zz}$ を得るであろう。

このようにして、位置に関して与えられた線が何本であっても、点 C から問題の内容に応じてそれらに与えられた角をもってひいたすべての線は、常に 3 個の項で表わしうることがわかる。」

デカルトによるパプスの問題の実際の解法は『幾何学』などを見てください。

(3) フェルマ

フェルマ (Pierre de Fermat : 1601-1665) は軌跡を求める問題に対して代数学を応用する方法を考察しました。彼の『平面および立体の軌跡論入門』(*Ad locos planos et solidos isagoge* : 1629 年頃) を見てみましょう ([6] p.128)。

「最終の段階の方程式に未知量が 2 つ含まれている場合には、そのうちの 1 つの量 (線分) の端点が直線あるいは曲線を描き、かくして軌跡が得られる。直線はただ 1 種類でかつ単純である。曲線の種類は無数にあり、円、放物線、双曲線、楕円などがある。

未知量の端点が直線または円を描くとき、この軌跡を「平面的」といい、放物線、双曲線、楕円を描くとき「立体的」という。その他の曲線を描くとき、これを「曲線的」(*locus linearis*) という。そしてこの最後の場合に、われわれは何も付加するものはない。なぜならば、曲線的な軌跡は、きわめて容易に、平面および立体的の軌跡に帰着させることができるからである。

方程式を立てるために、2 つの未知量を定まった角をなすようにするのが便利である。そして普通には、角としては直角をとり、かつその位置が与えられたものとし、また 2 つの未知量のうち的一方についてはその端点の 1 つは定点であるとする。2 つの未知量のいずれもが平方を超えないときは、後で明らかにされるように、軌跡は平面的または立体的となる。」

ここでは、フェルマが軌跡問題を扱うに際して、直角座標系を考えていることがはっきりと読み取れます。デカルトはこれほどはっきりとは述べていませんでした。

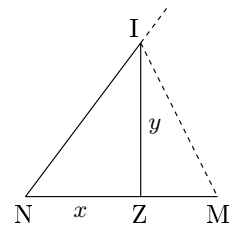
この後、フェルマは具体例を取り上げます ([6] pp.128-129)。

「NZM を位置の与えられた直線とし、N をその上の定点とする。NZ を未知量 x に等しくとり、NZI を与えられた角にとり、線分 ZI を引き、これを他方の未知量 y に等しくとる。

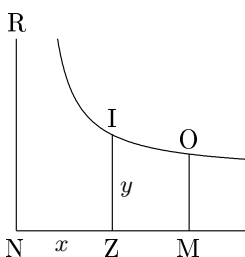
$dx = by$ とすれば、I は位置の定まった直線となるであろう。実際、 $b : d = x : y$ であるから、 x の y に対する比は一定である。したがって、三角形 NIZ は形が定まっており、角

INZ も定まる。N は定点、NZ は位置の定まった直線であるから、NI は位置が定まった直線となる。そして総合も容易にできる。

既知量および未知量について 1 次であるか、あるいは未知量に既知量を掛けた項からなるすべての方程式は、この方程式に帰着させることができる。」



ここでは、1 次不定方程式が直線を表すことが述べられています。続いて、2 次不定方程式が 2 次曲線を表すことを示します ([6] pp.129-130)。



「第 2 類の方程式は $xy = k^2$ であるが、このとき I は双曲線を描く。

NR を ZI に平行に引き、NZ 上に任意の点 M をとり、MO を ZI に平行に引く。そして長方形 NMO を (面積が) k^2 に等しくなるようにする。点 O を通り、漸近線 NR, NM の間に双曲線を描けば、これは位置が与えられたものであり、長方形

xy すなわち NZI が長方形 NMO に等しいとするとき、この曲線は点 I を通る。

既知量の項、 x の項、 y の項および xy の項からなるすべての方程式 $d^2 + xy = rx + sy$ は、上の方程式に帰着させることができる。」

そして、 $k^2 + xy = rx + sy$ という方程式は、 $X = x - s$ 、 $Y = r - y$ によって、 $XY = k^2 - rs$ と変形され、すなわち双曲線を表すことを述べています。ここでは、座標軸の平行移動の考えが見られます。

次に、 $x^2 = y^2$ は直線 (ただし、 $y = x$ のみ) を、

$x^2 = dy$ 、 $y^2 = dx$ 、 $b^2 - x^2 = dy$ 、 $b^2 + x^2 = dy$ は放物線を、

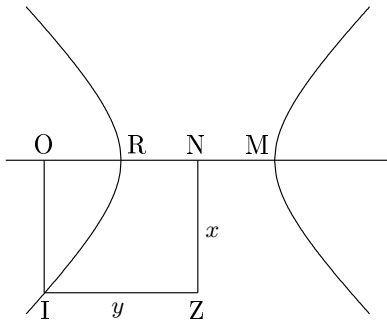
$b^2 - 2dx - x^2 = y^2 + 2ry$ は円を、

$b^2 - x^2 = ky^2$ は楕円を、

$x^2 + b^2 = ky^2$ は双曲線を、

それぞれ表すことを示していきます。

例えば、双曲線については次のようにします。



$(x^2 + b^2) : y^2$ を与えられた比とします。[すなわち $x^2 + b^2 = ky^2$ とします。]

NO を ZI に平行に引き、与えられた比が $b^2 : NR^2$ と等しいとします。点 R は定まりますから、R を頂点、RO を直径、N を中心として、軸が NZ と平行な双曲線を描き、MR と RO の積と RO^2 との和と OI^2 との比が $NR^2 : b^2$ と等しくなるようにします。

このとき、 $MR \times RO + RO^2 = RO \times (MR + RO) = RO \times MO$ ですから、 $(MR \times RO + RO^2) : OI^2 = NR^2 : b^2$ より、 $MO \times OR : OI^2 = NR^2 : b^2$ となります。

従って、加比の理により、 $(MO \times OR + NR^2) : (OI^2 + b^2) = NR^2 : b^2$ となります。

ところで、 $MN = NR$ ですから、 $MO = MR + RO = NR + NR + RO = NR + NO$ となり、

$$\begin{aligned} MO \times OR + NR^2 &= (NR + NO) \times OR + NR^2 \\ &= NR \times OR + NO \times OR + NR \times NR \\ &= NR \times (OR + NR) + NO \times OR \\ &= NR \times NO + NO \times OR = NO \times (NR + OR) \\ &= NO \times NO = NO^2 = ZI^2 \\ &= y^2 \end{aligned}$$

で、 $OI^2 + b^2 = NZ^2 + b^2 = x^2 + b^2$ ですから、 $y^2 : (x^2 + b^2) = NR^2 : b^2$ となります。

また、与えられた比は $NR^2 : b^2$ と等しいとしましたから、 $(OI^2 + b^2) : (MO \times OR + NR^2)$ は与えられた比 $(x^2 + b^2) : y^2$ となります。

よって、点 I は位置が定まった双曲線の上にあることとなります。

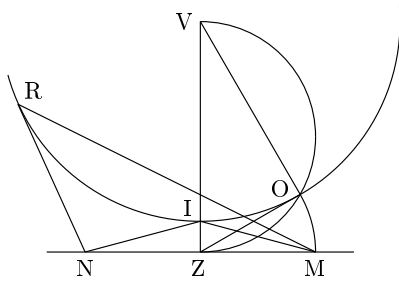
このように、フェルマは求めるべき曲線を描き、与えられた条件を満たす点はその曲線上にあることを示したのです。

フェルマは『平面および立体の軌跡論入門』の最後でアポロニウスが提出した問題を取り上げます ([3] pp.102-103)。

「それゆえ、私たちは、どのようなものであれ古代人が解かずに残しておいた平面的なおよび立体的な軌跡を、簡潔なそして明瞭な説明に含めておいた。そのため、アポロニウスの『平面軌跡論』第1巻の最後の命題についてのすべての場合に役立つであろうこと、およびこの主題に関係するすべてのことが苦勞なしに完全に暴かれるであろうことは周知のことであろう。

しかし、この論文の最後に、その簡単さがすぐに知られるようになるであろう、非常に美しいこの命題を付け加えることは好ましいことである。

もし、位置において与えられた任意個の線について、1つの同じ点からそれぞれ [の与えられた線] まで与えられた角度をもって線が引かれ、引かれたすべてのものによる平方の和が与えられた広さに等しいとすると、その点は位置において与えられた立体的な軌跡を描く。



ただ1つの例によって、一般のものについての方法 [を示すこと] になる。2つの点 N, M が与えられたとき、もし直線 IN, IM を結ぶならば、直線 IN, IM の平方 [の和] が三角形 INM [の面積] に対して与えられた比をもつような点の位置を見出すこと。

NM = b とし、[それと] 直角をなす、ZI が e と呼ばれ、NZ が a と呼ばれるとしよう。ゆえに、

指定された技法により

$$2a^2 + b^2 - 2ba + 2e^2 \text{ は長方形 } be \text{ に対して}$$

与えられた比をもつ。そして、本質はすでに述べられた規則によって解かれるであろうから、作図は次のように進むであろう。

NM が Z で2つの部分に切断され [2等分され]、点 Z から垂線 ZV が立てられ、ZV の4倍が NM に対して与えられた同じ比になるとしよう。VZ の上に半円 VOZ が描かれ、ZO が ZM に等しくされるとして、結ばれた VO によって、中心 V、半径 VO で円 OIR が描かれるとする。この円上の任意の点、例えば R、が選ばれ、直線 RN, RM が結ばれると、私は、RN, RM の平方 [の和] は三角形 RNM に対して与えられた比にあると断言する。」

フェルマの主張を確認してみましょう。

まず、NM = b, ZI = e, NZ = MZ = a とすると、 $IN^2 = a^2 + e^2$, $IM^2 = (b - a)^2 + e^2$ ですから、 $(2a^2 + b^2 - 2ba + 2e^2) : be$ が与えられた比 $k : 1$ をもつものとします。

ここで、 $4ZV : NM = k : 1$ にとると、 $ZV = \frac{1}{4}bk$ ということになります。それゆえ、 $VO^2 = VZ^2 - ZO^2 = \left(\frac{1}{4}bk\right)^2 - a^2 = \frac{1}{16}b^2k^2 - a^2$ となります。

さらに、V を中心として、半径 VO の円を描くと、NM を x 軸、ZI を y 軸と考えて、この円の方程式は $x^2 + \left(y - \frac{1}{4}bk\right)^2 = \frac{1}{16}b^2k^2 - a^2$ です。そこで、この円周上の任意の点を R (x, y) とすると、 $x^2 + y^2 - \frac{1}{2}bky + \frac{1}{16}b^2k^2 = \frac{1}{16}b^2k^2 - a^2$ より、 $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}bky - a^2$ となり

ます。

ところで、 $RN^2 + RM^2 = \{(x - a)^2 + y^2\} + \{(x + a)^2 + y^2\} = 2x^2 + 2y^2 + 2a^2$ ですから、上の式と合わせると、 $RN^2 + RM^2 = 2\left(\frac{1}{2}bky - a^2\right) + 2a^2 = bky$ となります。

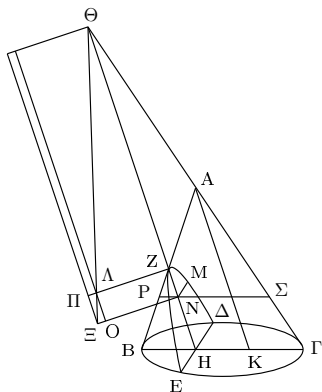
一方、長方形 RNM は by ですから、 $(RN^2 + RM^2) : RNM = bky : by = k : 1$ となります。

そして、フェルマは『平面および立体の軌跡論入門』の結語として次のように述べます ([6] p.130)。なお、彼はアポロニウスの『平面軌跡論 2 巻』(Τόποι ἐπίπεδοι : *De Locis Planis*) の復元を試みていて、『ペルガのアポロニウスの平面軌跡論 2 巻の復元』(*Apolloni Pergaei libri duo de locis planis restituti*) という論文を残しています。そして、実は、『平面および立体の軌跡論入門』は『平面軌跡論 2 巻』の代数的書き換えを図ったものなのです。

「この軌跡論の発見が、先頃われわれが再建したアポロニウスの平面軌跡論 2 巻よりもまえであったならば、軌跡の諸定理を構成するのも、もっとエレガントにできたと思う。しかしこの古典理論が完璧でなかったとしても、それについて私は悲しんだことは今日にいたるまで少しもなかった。人が学問に従うときに、学問の初期の素朴、単純な結果が、後人の発見によって確固なものとなり、またその成果も豊かになるということに対して、後の人々を恐れるということはない。まことに学問への関心というものが、かくされている精神の進歩を、また進歩を可能ならしめる技法をその根底から見抜くのである。」

見てきたように、解析幾何学はデカルト、フェルマという 2 人の天才によって確立されたのですが、一方のデカルトは作図に力点を置いており、他方のフェルマは軌跡を主題にしていました。このあたりが座標に関する 2 人の扱い方の違いにも表れているように思われます。

ところで、解析幾何学には座標の概念が不可欠ですが、その萌芽ということならアポロニウスに見ることができます。彼は『円錐曲線論』(*Conics*) において円錐曲線の性質を研究しています。その第 1 巻命題 11, 12 [下図参照], 13 で円錐曲線の特徴づける関係式 [もちろん、当時はまだ「式」にはなっていませんが] を導くのですが、そのときに彼は



「この切り口の曲線は双曲線と呼ばれ、そして、 ΛZ は ZH の上に決まった仕方によって平方をつくるための線分と呼ばれる。この線分はまた直交する辺と呼ばれ、 $Z\Theta$ は横断する辺と呼ばれる。」
 といっています ([8] pp.316-317, [7] p.53)。

この「直交する辺」は、後にラテン語で *latus rectum* (通径、直立辺) といわれるようになる、円錐曲線の特徴づけるパラメーターです。そして、曲線上の点 M に対して、 ΔE ($\perp B\Gamma$) に平行な NM が縦線 (*linea ordinatim applicata* —— 規則正しく結び付けられた線 —— : *linea ordinata*) と呼ばれ、直径 ZH が縦線によって切り取られる部分 ZN が横線 (*linea abscissa* —— 切断された線 ——) と呼ばれます。このように、曲線上の任意の点に対して、縦線および横線という、2 つの線分が対応することになりますから、これらの 2 線分を座

標の萌芽とみることができるのです。

なお、縦線、横線を座標線 (*lineae coordinatae*) と総称したのはライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz : 1646-1716) で、彼は遅くとも 1692 年までにはこの用語を使っています。

(4) オイラー

オイラー (Leonhard Euler : 1707-1783) はまず、こんにち数直線と呼んでいるような直線を考え、軸あるいは基準線と名づけました。これが私たちの x 軸に相当するのですが、原点にあたる定点 A を切除の始点と呼び、特定の値を表す線分 AP を切除線と呼びました ([5] p.1)。また、 x の各値に対する関数值 y を表す線分 [切除線の端点 P から曲線に向かって伸びて行って曲線に達する垂直線分 PM] を向軸線といいました (『無限解析入門』第 2 巻第 1 章)。

「1 変化量というのは一般的な視点に立って考察された大きさのことであり、その中にはありとあらゆる定量が包み込まれている。それゆえ、幾何学の場合に移行すると、変化量は不定直線 RS を用いることによりきわめて適切に表示される。……」

「2 そこで x は変化量として、それは不定直線 RS で表示されるとしよう。すると明らかに、 x の定値であって、しかも実値でもあるものはことごとくみな、直線 RS において切り取られた部分によって表示される。このあたりの事情をもう少し詳しく言うと、もし点 P が点 A と重なるなら区間 AP は消失するが、この区間は値 $x = 0$ を表している。また、点 P が点 A から遠ざかっていけばいくほど、区間 AP はそれだけ大きな x の定値を表すことになる。

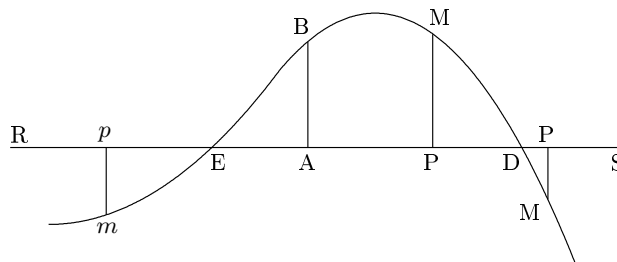
この区間 AP は切除線と呼ばれる。

したがって、切除線は変化量 x の定値を表しているのである。」

彼は、直線 RS 上の定点 A を原点とし、点 P の位置に応じて AP が変化量 $x = AP$ の値を表すものとしました。そして、点 P が点 A より右方向にあるとき正の値を、左方向にあるとき負の値を表すとしたのです。

次に、関数のグラフ表示を取り上げます ([5] p.2, p.3, p.5, p.6)。

「4 こうして不定直線は変化量 x を表示する。そこで今度は、 x の任意の関数を幾何学的に見てもっとも適切に表示する様子を観察したいと思う。 y は x の任意の関数としよう。 x に対してある定値が指定されると、それに対応して y はある定値を受け入れる。 x の値を表示するために不定直線 RS を採用しよう。 x の任意の定値 AP に対し、対応する y の値に等しい線分 PM が線分 AP と垂直に描かれる。……」



「6 …… それゆえ x の任意の関数はこんなふうにして幾何学の領域へと移されて、ある種の線を定める。その線はまっすぐかもしれないし、曲がっているかもしれないが、その性質は関数 y の性質に依存する。」

「12 そこで任意の切除線 AP を変化量 x で明示して $AP = x$ となるようにしておくと、そのとき関数 y は向軸線の長さを示すことになり、 $PM = y$ となる。それゆえ曲線の性質は、も

し連続曲線なら、関数 y の属性を基礎にして記述される。言い換えると、 y が x と諸定量を素材に用いて組み立てられる様式に基づいて記述される。……」

「14 …… どの曲線の性質も、2 個の変化量 x と y の間に成立する何らかの方程式を通じて明示されることになる。一方の変化量 x は、あらかじめ与えられた点 A を始点として軸上に取った切除線を表し、もうひとつの変化量 y は、軸に垂直な向軸線を表す。……」

ここまでくれば、直線 RS が x 軸で、直線 AB が y 軸ということですから、 y 軸が明確に表示されていないだけで、扱いは私たちのものとほとんど変わらないものであることが分かります。例えば、ある曲線と x 軸との交点の x 座標はその曲線を表す方程式において $y = 0$ とすれば得られることについて、次のようにいいます ([5] p.37)。

「67 …… 切除線 x と向軸線 y の間の方程式が与えられたとき、その方程式で表される曲線が軸上の点に出会う地点では、向軸線 y は $= 0$ となる。そこで、与えられた方程式において $y = 0$ と置くと、そこから帰結する方程式には x の姿のみしか見られない。するとその方程式は x の値を与え、それらの x の値に基づいて、曲線と軸との交点が軸上に指定される。……」

オイラーは「ある曲線について考えると、軸と切除線の始点と座標の傾きがどのように変化しようとも、その曲線の方程式はつねに同一の次数を保持し続ける」ことから、曲線を表す方程式の次数によって曲線を分類することにします。そして、次数に応じて分類された「種属」をそれぞれ「目(もく)」と呼ぶことにします。

第 1 目の一般方程式は $0 = \alpha + \beta x + \gamma y$ で、これは直線を表します。

第 2 目の一般方程式は $0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2$ で、これは円錐曲線 [円, 楕円, 放物線, 双曲線] を表します。

などなど。

そして、いろいろな曲線の性質を調べていきます。さらに、「その切除線と向軸線の間が代数方程式では書き表されない曲線」すなわち超越曲線についても取り上げます。[詳細は割愛することにします。]

参考文献

- [1] F. Viète(transl. by T. R. Witmer), *The Analytic Art*, Dover, 2006
- [2] R. デカルト(原 亨吉・訳)『幾何学』, 白水社(デカルト著作集 1 所収), 1973 (昭和 48)
- [3] P. Tannery and C. Henry(ed.), *Œuvres de Fermat*, Gauthier-Villars et Fils, 1891
- [4] D. E. Smith, *A Source Book in Mathematics*, Dover, 1959
- [5] L. オイラー(高瀬 正仁・訳)「オイラーの解析幾何」, 海鳴社, 2005 (平成 17)
- [6] 中村 幸四郎「数学史 - 形成の立場から -」, 共立出版(共立全書 236), 1971 (昭和 46)
- [7] 中村 幸四郎「近世数学の歴史 微積分の形成をめぐる」, 日本評論社, 1980 (昭和 55)
- [8] I. Thomas(transl.), *Greek Mathematical Works II*, Harvard U. P.(Loeb Classical Library), 2005 (1941)
- [9] 安藤 洋美「高校数学史演習」, 現代数学社, 1999 (平成 11)
- [10] 大矢 真一, 片野 善一郎「数字と数学記号の歴史」, 裳華房(基礎数学選書 18), 1978 (昭和 53)
- [11] 「世界大百科事典 第 2 版」, 日立システムアンドサービス, 2004 (平成 16)