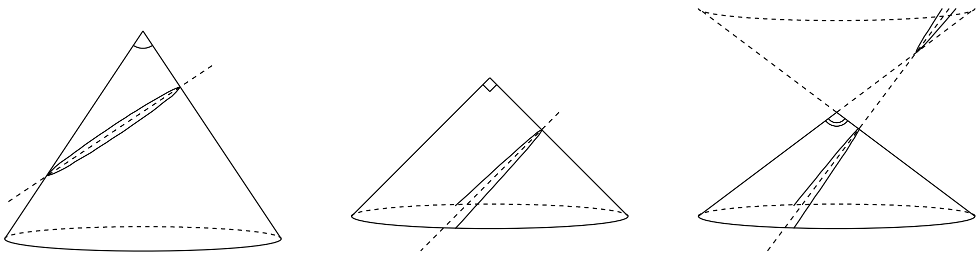
13　放物線・楕円・双曲線・ら線

放物線，楕円，双曲線は，円錐をある平面で切断したときに切断面に表れる図形として把握されていたため，円錐曲線と総称されます。解析幾何学的にはそれらの図形を表す方程式が 2 次式となることから 2 次曲線ともいわれます。

円錐曲線は，紀元前 4 世紀に活躍した古代ギリシアの数学者メナイクモス (Μέναιχμος (Menaichmos) が発見したといわれています。彼が立方体倍積問題［与えられた立方体の 2 倍の体積をもつ立方体を作図することで，$\sqrt[3]{2}$ の長さを作図することに相当します。］の解法に円錐曲線を用いたことが伝えられています。

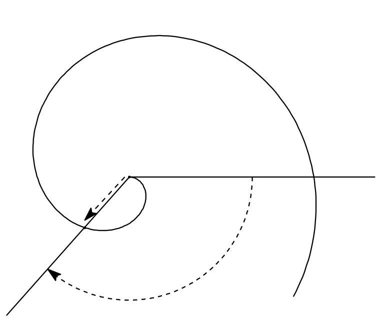
彼は頂角が鋭角，直角，鈍角である円錐を母線に垂直な平面で切断したときにできる切断面の図形として円錐曲線を捉えました。



上の図のように，鋭角円錐の切断面が楕円，直角円錐の切断面が放物線，鈍角円錐の切断面が双曲線となります。ただし，双曲線は対になった 1 組の曲線ではなく，(図では下にできている) 1 つの曲線のみが考えられていました。［すなわち，はじめは「双」ではありませんでした。］

これらの円錐曲線を統一的・一般的に捉え直したのがアポロニウスですが，それは次に見ていきましょう。

(アルキメデス (Ἀρχιμήδης (Archimēdēs)：前 287?–前 212) の) ら線は，等角速度運動をする動径上の点が等速度運動をしながら原点から遠ざかるときにできる軌跡です。



［平面上の点の位置を表すのに通常は直交座標 (x , y) が用いられます。これに対して，原点からの距離 r と動径の始線に対する角度 θ とを用いて (r , θ) と表す方法を極座標といい，極座標による方程式を極形式・極方程式といいます。直交座標と極座標の関係は $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ です。

(アルキメデスの) ら線は極形式で $r = a\theta$ と表されます。ただし，左の図では，アルキメデスの原図にあわせて，回転の向きが負の向きになっています。］

アルキメデスはこのら線の性質を調べていますが，その代表的なものを後で紹介しましょう。

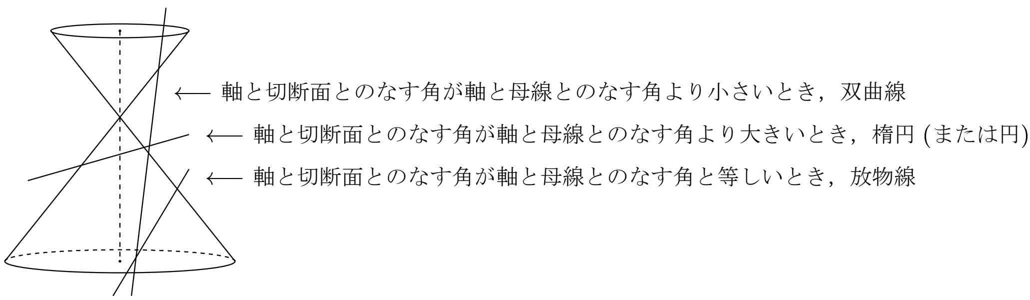
円錐曲線は 2 次曲線として解析幾何学的に高校でも扱いますが，ら線は高校では (ほとんど) 扱いません。そもそも極座標を扱うことが少なく，出てくるのは複素数の極形式表示くらいでしょうか。

(1)　アポロニウス

アポロニウス (Ἀπολλώνιος (Apollonius) : 前 262–前 200?) は小アジア (現在のトルコ南部) の都市ペルゲに生まれた，古代ギリシアにおける最後の偉大な数学者の一人で，「偉大な幾何学者」といわれています。『平面軌跡論』(*On Plane Loci*),『比例切断』(*On the Cutting-off of a Ratio*),『接触』(*On Tangencies*) などいくつかの著作を残していますが，代表的なものは円錐曲線に関する著作『円錐曲線論』(*Conics*) です。

彼は，それまで鋭角円錐，直角円錐，鈍角円錐の切断面に現れる図形としての円錐曲線をはじめて統一的・一般的に扱いました。すなわち，1 つの円錐の切断の仕方によって楕円，放物線，双曲線の違いが現れることを示したのです。円錐をいろいろと変えるのではなく，切断の仕方をさまざまに変化させるということですね。

また，彼は円錐は直円錐だけでなく一般の斜円錐も導入しています。が，以下の図では直円錐を用いることにします。



さっそく，『円錐曲線論』における円錐の定義から見てみましょう。

「ある点から，その点と同じ平面上にない円の周に直線が引かれ，それがどちらの方向にも延長され，また，その点を固定したまま，その直線をその円の周に沿ってはじめの位置に戻るまで動かすとき，この直線によって描かれる表面を円錐面 (conical surface) という。それは互いに垂直な位置にある 2 つの表面からなり，直線が無限に延長されるとき無限に作られる。固定された点を頂点といい，この点と円の中心を通るように描かれる直線を軸という。

円と，頂点とその円の周との間の円錐面によって囲まれた図形を円錐 (cone) という。円錐の頂点とは円錐面の頂点のことであり，軸とは頂点から円の中心に引かれた直線のことであり，底面とは円のことである。

底面に対して直角をなす軸をもつ円錐を直円錐，底面に対して直角ではない軸をもつ円錐を斜円錐という。

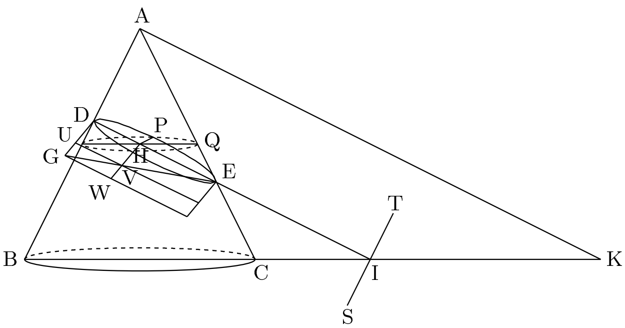
任意の平面曲線について，与えられた直線に平行に，その曲線内に引かれたすべての直線を 2 等分する，この曲線から引かれる直線を直径という。」

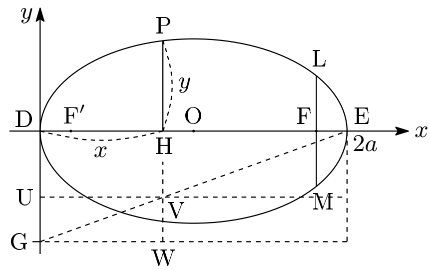
ここに見られるように，アポロニウスは円錐面を動直線の軌跡と捉え，それをある範囲に限定したものを円錐と呼びました。ですから，直円錐にこだわる必要はなくなったのでした。円錐が頂点をはさんで (通常は上下に) 対になっていることも彼によるものです。

それでは次に，円錐曲線について見ていきましょう。

楕円 (または円) は円錐の軸と切断面とのなす角が軸と母線とのなす角より大きいときに切断面に現れる図形です。(対になっている円錐のうちの片方の円錐の) すべての母線と交わるような平面で切断したときにできる図形といってもよいでしょう。

楕円のもつ性質［あるいは楕円という名前の由来］を示すために，アポロニウスは下の左のような図を用いました。(右の図は円錐から楕円を取り出して直交座標軸を入れたもので，F ，F′ は焦点を表します。)





上の左の図で，DPE は円錐 ABC を切断したときにできる楕円です。ST は円錐の底面と切断面との交線で，直線 BC と垂直になります。また，直線 AK は直線 DI に平行にとります。そして，DG は

$$\mathrm{AK}^2 : \mathrm{BK}\cdot\mathrm{KC} = \mathrm{DE} : \mathrm{DG} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

となるように，線分 DE に垂直にとられた線分です。このとき，線分 PH の 2 乗は，DH と DG から作られる面積より DE ，DG から作られる長方形に相似な図形の分だけ不足している，ことがいえます。(『円錐曲線論』第 1 巻命題 13)

アポロニウスの考えに従って，ただし現代風に表して，確かめてみましょう。

図のように，直線 HW ，UV を HW // DG ，UV // DE となるように定めます。(点 V は EG と HW の交点です。) また，底面 BC に平行で点 P ，H を含む平面で切断したときにできる円を PQR とします。(ただし，点 R は図中には示されていませんが，点 H に対する点 Q の対点とします。すなわち，線分 QR はこの円の直径となります。)

三角形の相似の性質を用いると，

$$\mathrm{AK} : \mathrm{BK} = \mathrm{DI} : \mathrm{BI} = \mathrm{DH} : \mathrm{RH}$$

$$\mathrm{AK} : \mathrm{KC} = \mathrm{EI} : \mathrm{IC} = \mathrm{EH} : \mathrm{QH}$$

が分かりますから，

$$\begin{aligned} \mathrm{DE} : \mathrm{DG} &= \mathrm{AK}^2 : \mathrm{BK}\cdot\mathrm{KC} = \mathrm{AK}\cdot\mathrm{AK} : \mathrm{BK}\cdot\mathrm{KC} \\ &= (\mathrm{AK} : \mathrm{BK})\cdot(\mathrm{AK} : \mathrm{KC}) = (\mathrm{DH} : \mathrm{RH})\cdot(\mathrm{EH} : \mathrm{QH}) \\ &= \mathrm{DH}\cdot\mathrm{EH} : \mathrm{RH}\cdot\mathrm{QH} \end{aligned}$$

となりますが，$\mathrm{DE} : \mathrm{DG} = \mathrm{EH} : \mathrm{HV} = \mathrm{DH}\cdot\mathrm{EH} : \mathrm{DH}\cdot\mathrm{HV}$ であることから，

$$\mathrm{DH}\cdot\mathrm{EH} : \mathrm{RH}\cdot\mathrm{QH} = \mathrm{DE} : \mathrm{DG} = \mathrm{DH}\cdot\mathrm{EH} : \mathrm{DH}\cdot\mathrm{HV}$$

となって，

$$\mathrm{RH}\cdot\mathrm{QH} = \mathrm{DH}\cdot\mathrm{HV}$$

が成り立ちます。

ところで，線分 QR は円 PQR の直径で PH ⊥ QR ですから，$\mathrm{PH}^2 = \mathrm{RH}\cdot\mathrm{QH}$ が成り立ち，従って，

$$\mathrm{PH}^2 = \mathrm{DH}\cdot\mathrm{HV} \qquad \cdots\cdots\ (*)$$

ということになります。

すなわち，PH の 2 乗は DH，DG が作る長方形より UV，UG が作る長方形［これは DE，DG が作る長方形に相似です。］の分だけ不足することになります。

上の右の図のように座標軸を設定して，解析幾何学的に調べてみると ……

楕円 DPE を表す方程式は $\dfrac{(x-a)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ですから，この式を変形すると

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{(x-a)^2}{a^2}\right) = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2 \qquad \cdots\cdots\ ②$$

が得られます。

ここで，線分 DG を $\mathrm{DG} = \dfrac{2b^2}{a}$ となるようにとれば，DE : DG = UV : UG であることから，

$$\mathrm{UG} = \frac{b^2}{a^2}x$$

となります。すなわち，式 ② は

$$\mathrm{PH}\ \text{の 2 乗} = \text{長方形 DH} \times \mathrm{DG} - \text{長方形 UV} \times \mathrm{UG}$$

$$\left[\ x \times \frac{2b^2}{a} - x \times \frac{b^2}{a^2}x\ \right]$$

を示していると解釈できます。これが上の命題の内容ということです。

ところで，焦点 F，F′ の座標は ($a \pm \sqrt{a^2-b^2}$ ，0) ですから，

$$\frac{\{(a \pm \sqrt{a^2-b^2}) - a\}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \text{であることから，}$$

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{a^2} \ \text{より}\ \mathrm{FL} = y = \frac{b^2}{a}$$

となって，この $p = 2b^2/a$ は焦点を通る線分 LM の長さを表していることになります。すなわち，この長さは 1 つの楕円に対して定まった［すなわち，点 P の位置に依存しない］長さで，その長さを規定するのが先に出てきた比例式 ① なのです。円錐に “へその緒” のような線分をつけることにはそれなりの意味があったのですね。

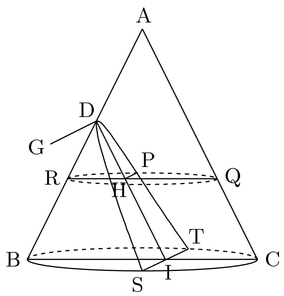
この線分 DG (あるいはその長さ) はラテン語では latus rectum といわれ，通径，直立辺などと訳されています。こんにちの言葉ではパラメーターということです。

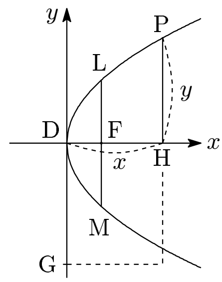
このように解釈すると，アポロニウスが導いた関係式 (∗) はあたかも楕円を表す方程式 ② のように見えてきますが，ここから解析幾何学が始まったということにはなりません。アポロニウスには図形の性質を代数的に調べていこうとする態度は見られませんから，彼から解析幾何学が始まったとすることは現代の数学を反映しすぎているといわざるを得ません。ただ解析幾何学の匂いを感じ取ることはできますが …… 。

楕円は定長線分 DG を基に作られる長方形の面積に何がしかの分だけ「不足する」という性質をもつことから，「不足する」という意味のギリシア語を使って ἔλλειψις といわれ，こんにちでも ellipsis といっています。

放物線は円錐の軸と切断面とのなす角が軸と母線とのなす角と等しいときに切断面に現れる図形です。(2 本ある母線のうち片方の) 母線と平行な平面で切断したときにできる図形ということもできます。

アポロニウスが用いた図は下の左のような図で，下の右の図は放物線を取り出して座標軸を入れたものです。





このときは，通径 DG は

$$\mathrm{BC}^2 : \mathrm{BA}\cdot\mathrm{AC} = \mathrm{DG} : \mathrm{DA}$$

によって規定される線分で，

$$\mathrm{PH}^2 = \mathrm{DG}\cdot\mathrm{DH} \quad \cdots\cdots ③$$

となることが示されます。(『円錐曲線論』第 1 巻命題 11)

ここで，$\mathrm{DH} = x$，$\mathrm{PH} = y$，$\mathrm{DG} = p$ とすれば，③ 式は $y^2 = px$ ということを示しており，p は焦点 F を通る線分 LM の長さになっています。

放物線を表す方程式を $y^2 = px$ とすると，焦点の座標は $\left(\dfrac{p}{4}\,,\ 0\right)$ ですから，FL の長さは

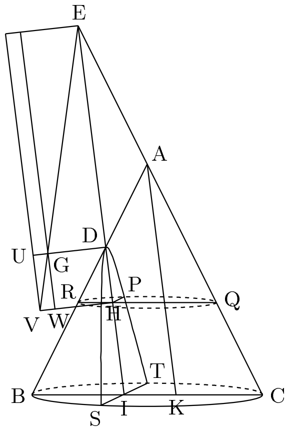
$$y^2 = p\cdot\frac{p}{4} = \frac{p^2}{4} \text{ より } \mathrm{FL} = y = \frac{p}{2}$$

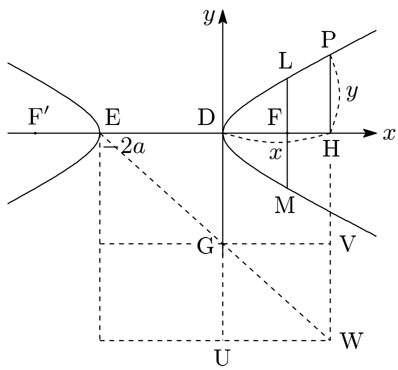
となって，$\mathrm{LM} = p$ となります。

PH の 2 乗は DH，DG が作る長方形の面積にちょうど等しいということですから，放物線は「あてはまる」という意味の語を用いて παλαβολή (こんにちでは parabola) といわれます。

問 1　上の左の図で，$\mathrm{ST} \perp \mathrm{BC}$，$\mathrm{DI} /\!/ \mathrm{AC}$，$\mathrm{DG} \perp \mathrm{DI}$，$\mathrm{PH} /\!/ \mathrm{TS}$，$\mathrm{RQ} /\!/ \mathrm{BC}$ で，$\mathrm{BC}^2 : \mathrm{BA}\cdot\mathrm{AC} = \mathrm{DG} : \mathrm{DA}$ です。このとき，式 ③ を示しなさい。

双曲線は円錐の軸と切断面とのなす角が軸と母線とのなす角より小さいときに切断面に現れる図形です。対になっている円錐の両方に交わる平面で切断したときにできる図形といえます。





双曲線に対してアポロニウスは上の左のような図［ST ⊥ BC，DG ⊥ DI，AK // DI，PH // TS，GW // DH，UV // DH，HV // DG，RQ // BC，PH ⊥ RQ となっています。］を用い，通径 DG を $\mathrm{AK}^2 : \mathrm{BK}\cdot\mathrm{KC} = \mathrm{DE} : \mathrm{DG}$ となるように定めました。

このとき，$\mathrm{PH}^2 = \mathrm{DH}\cdot\mathrm{HV}$ となることが示されます。(『円錐曲線論』第 1 巻命題 12)

$\mathrm{AK} : \mathrm{BK} = \mathrm{DI} : \mathrm{BI} = \mathrm{DH} : \mathrm{RH}$，$\mathrm{AK} : \mathrm{KC} = \mathrm{EI} : \mathrm{IC} = \mathrm{EH} : \mathrm{HQ}$ ですから，

$$\mathrm{DE} : \mathrm{DG} = \mathrm{AK}^2 : \mathrm{BK}\cdot\mathrm{KC} = \mathrm{DH}\cdot\mathrm{EH} : \mathrm{RH}\cdot\mathrm{HQ} = \mathrm{DH}\cdot\mathrm{EH} : \mathrm{PH}^2$$

が成り立ちます。

一方，$\mathrm{DE} : \mathrm{DG} = \mathrm{EH} : \mathrm{HV} = \mathrm{DH}\cdot\mathrm{EH} : \mathrm{DH}\cdot\mathrm{HV}$ ですから，$\mathrm{DH}\cdot\mathrm{EH} : \mathrm{PH}^2 = \mathrm{DH}\cdot\mathrm{EH} : \mathrm{DH}\cdot\mathrm{HV}$ となって，

$$\mathrm{PH}^2 = \mathrm{DH}\cdot\mathrm{HV}$$

が示されます。

上の右の図のように座標軸をとると，双曲線を表す方程式は $\dfrac{(x+a)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ となりますから，

$$y^2 = b^2\left(\frac{(x+a)^2}{a^2} - 1\right) = \frac{2b^2}{a}x + \frac{b^2}{a^2}x^2 \quad ［長方形 \mathrm{DH}\times\mathrm{DG} + 長方形 \mathrm{UV}\times\mathrm{UG}］$$

となります。(この $\dfrac{2b^2}{a}$ は焦点 F を通る線分 LM の長さです。)

このことは PH の 2 乗が DH，DG が作る長方形より UV，UG が作る長方形の分だけ超過していることを意味しています。そのため，双曲線は「超過する」という意味のギリシア語を用いて ὑπερβολή (こんにちでは hyperbola) といわれます。

アポロニウスは楕円，放物線，双曲線を同一の円錐から作り出せることを提示したうえ，通径 DG を基に統一的な関係［PH の 2 乗 = 長方形の面積］を導きました。そして，その関係は現代的に解釈すると円錐曲線を表す方程式に通じるものでした。

全 8 巻［第 1 巻から第 4 巻まではギリシア語原文が復元され，第 5 巻から第 7 巻まではアラビア語訳のみが存在します。第 8 巻は失われてしまっています。］からなる『円錐曲線論』では，双曲線の漸近線，円錐曲線の接線など，円錐曲線のいろいろな性質が調べられていますが，それらについてはここでは割愛します。

(2)　アルキメデス

こんにちアルキメデスのら線といわれている曲線は，アルキメデスの友人であった数学者コノン (Conon of Samos : B.C.280?–B.C.220?) によって角の 3 等分問題の解決のために導入されたといわれています。

アルキメデスによれば

> 「もし 1 つの直線の一端を固定したまま，その直線を一平面上を一様な割合で回転させて，それが出発した位置に再びもどってくるとし，直線が回転すると同時に，もし 1 点がその直線上を，固定された端点から出発して一様な割合で運動するならば，その点は平面上に 1 つのら線を描くでしょう。」(『ら線について』序文)

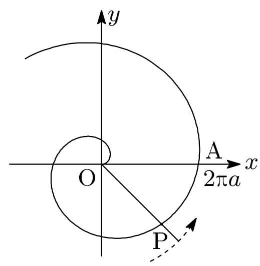
ということです。

こんにちではアルキメデスのら線は極形式を用いて $r = a\theta$ とあらわされるのが普通で，このときグラフは右の図のようになります。直交座標を用いて表すと，角度を意味するパラメーター θ を用いて

$$\begin{cases} x = a\theta\cos\theta \\ y = a\theta\sin\theta \end{cases}$$

となります。

ただし，アルキメデスは，こんにちとは逆に，回転は時計回りにとっていますから，$x = a\theta\cos\theta$，$y = -a\theta\sin\theta$ ということになります。



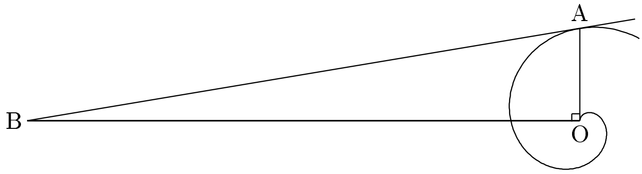
上の図で点 O をら線の原点，直線 OA を回転の始線といいます。また，動径 OP が回転の始線 OA に対して n 回転したときに始線と交わる点を C［この点を第 n 回転の終端ということにします。］とするとき，ら線の原点 O を中心とし線分 OC を半径とする円を第 n 円といいます。例えば，第 1 円は O を中心とする半径 $2\pi a$ の円です。

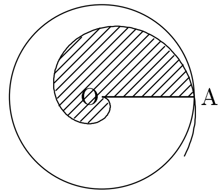
アルキメデスが示したことは

(i)　第 1 回転の終端における接線が，始線に垂直な直線と交わるとき，その交点とら線の原点との距離は第 1 円の円周に等しい。［下の左の図で，線分 OB の長さは OA を半径とする円の円周に等しい。］(『ら線について』命題 18)

(ii)　動径が始線に対して 1 回転するまでに描く部分［始線と，原点から第 1 回転の終端までのら線とによって囲まれた部分］の面積は第 1 円の面積の $\dfrac{1}{3}$ である。［下の右の図で，斜線部の面積は OA を半径とする円の面積の 1/3 である。］(同命題 24)

などです。





アルキメデスによる幾何学的な証明ではなく，ここでは解析的に検証してみましょう。

(i) について

OA を x 軸，OB を y 軸として，ら線を表す方程式を $\begin{cases} x = a\theta\cos\theta \\ y = -a\theta\sin\theta \end{cases}$ とすると，

$$\frac{dx}{d\theta} = a(\cos\theta - \theta\sin\theta)\ ,\ \ \frac{dy}{d\theta} = -a(\sin\theta + \theta\cos\theta)\ \text{より}\ \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta}$$

ですから，$\theta = 2\pi$ に対応する点 A ($2\pi a$, 0) における接線の方程式は

$$y = -\frac{\sin 2\pi + 2\pi\cos 2\pi}{\cos 2\pi - 2\pi\sin 2\pi}(x - 2\pi a) + 0\ \text{より}\ y = -2\pi x + 4\pi^2 a$$

となります。

よって，y 軸との交点 B の座標は (0 , $4\pi^2 a$) となり，$\mathrm{OB} = 4\pi^2 a$ です。

一方，$\mathrm{OA} = 2\pi a$ ですから，円 O の円周は $l = 2\pi \times 2\pi a = 4\pi^2 a$ です。

従って，OB は半径 OA の円の円周に等しいことがいえます。

曲線 $y = f(x)$ 上の点 (x_0 , $f(x_0)$) における，この曲線の接線を表す方程式は $y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0)$ となりますね。これは曲線が媒介変数表示されている場合でも同様です。
曲線を表す方程式を上のように媒介変数を用いて表したとき，$\theta = \alpha$ に対応する点における接線を表す方程式を求めるには，$\theta = \alpha$ のときの x の値 x_0 ，y の値 y_0 ，微分係数の値 φ_0 が必要です。これらの値により $y = \varphi_0(x - x_0) + y_0$ が接線を表す方程式を与えます。

ここでは，$\alpha = 2\pi$ で，$x_0 = 2\pi a$ ，$y_0 = 0$ ，$\varphi_0 = -2\pi$ となります。

(ii) について

アルキメデスのら線とは回転が逆になりますが内容は同じですから，ら線を表す方程式を $r = a\theta$ とします。このとき，斜線部の面積 S は

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (a\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}a^2\theta^3\right]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2$$

となります。

一方，円 O の面積 C は $\mathrm{C} = \pi(2\pi a)^2 = 4\pi^3 a^2$ です。

これから，斜線部の面積は第 1 円の面積の $\dfrac{1}{3}$ であることがいえます。

曲線を極形式で表して $r = f(\theta)$ とするとき，曲線の $\theta = \alpha$ から $\theta = \beta$ までの部分と，$\theta = \alpha$ ，$\theta = \beta$ に対応する 2 つの動径とに囲まれた部分の面積は $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta (f(\theta))^2\,d\theta$ で与えられます。

また，媒介変数表示で $x = f(t)$ ，$y = g(t)$ とされたとき，$a = f(\alpha)$ ，$b = f(\beta)$ であって，$a \leqq x \leqq b$ と $\alpha \leqq t \leqq \beta$ が対応し，$\alpha \leqq t \leqq \beta$ において $g(t) \geqq 0$ ，$f'(t) \geqq$ とすると，この曲線と x 軸，直線 $x = a$ ，$x = b$ とで囲まれた部分の面積は

$$\int_a^b y\,dx = \int_\alpha^\beta y\,\frac{dx}{dt}\,dt = \int_\alpha^\beta g(t)\,f'(t)\,dt$$

で与えられます。[でもこの場合，この方法では大変な計算になってしまいます。]

アルキメデスは二重の背理法を用いてそれらを証明しました。［例えば (i) では $\mathrm{OB} \neq l$ とすると，$\mathrm{OB} > l$ か $\mathrm{OB} < l$ ということになりますが，そのいずれの場合でも矛盾が生じ，従って $\mathrm{OB} = l$ が結論づけられるという論法です。］その証明を遂行するためには，はじめに証明すべき結論が分かっていなければなりません。アルキメデスはどうやってそれを見つけたのでしょうか。［アルキメデスが幾何学に運動の考えを持ち込んだことには驚かされますが，結論となる事実をどう推測したのかが気になるところです。］

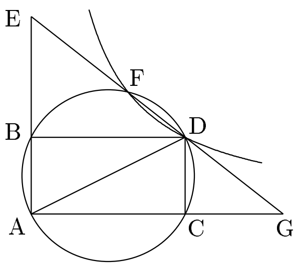
(3)　作図問題への対応

円錐曲線はアポロニウスによって美しい形に構成されましたが，そもそもはある種の問題の解決のために考えられたものでした。ら線もまた同様で，アルキメデスが深い考察を行いましたが，導入の契機は問題解決のためでした。

ここでは，それらが問題解決にどう使われるのかをちょっと見てみましょう。

(i)　立方体倍積問題

この問題は 2 つの線分 $\mathrm{AB}=a$ ，$\mathrm{AC}=2a$ の間の 2 つの比例中項を作図する問題に還元されます。[与えられた立方体の 1 辺の長さを a とするとき，求めるべき立方体の 1 辺の長さ x は $x^3=2a^3$ から求められます。この方程式は比例式 $a:x=x:y=y:2a$ から y を消去して得られますから，比例中項を求める問題に還元されるのです。]



左の図は，AB $(=a)$ ，AC $(=2a)$ をとなりあう 2 辺とする長方形の対角線 AD を直径とする円と，AB ，AC を漸近線とする双曲線を描いたものです。この円と双曲線との交点を D ，F とし，直線 DF と直線 AB ，AC との交点をそれぞれ E ，G とします。

このとき，『円錐曲線論』第 2 巻命題 8 により $\mathrm{FE}=\mathrm{DG}$ となりますから， $\mathrm{DE}=\mathrm{FG}$ がいえます。

また，5 点 A ，B ，C ，D ，F は同一円周上にありますから，円の性質 (方べきの定理) により $\mathrm{GA}\cdot\mathrm{GC}=\mathrm{GF}\cdot\mathrm{GD}$ ，$\mathrm{EA}\cdot\mathrm{EB}=\mathrm{ED}\cdot\mathrm{EF}$ が成り立ちます。従って，$\mathrm{GA}\cdot\mathrm{GC}=\mathrm{GF}\cdot\mathrm{GD}=\mathrm{ED}\cdot\mathrm{EF}=\mathrm{EA}\cdot\mathrm{EB}$ となりますから，$\mathrm{GA}:\mathrm{EA}=\mathrm{EB}:\mathrm{GC}$ となります。

一方，三角形の相似から $\mathrm{GA}:\mathrm{EA}=\mathrm{DB}:\mathrm{BE}=\mathrm{AC}:\mathrm{BE}$ ，$\mathrm{GA}:\mathrm{EA}=\mathrm{GC}:\mathrm{DC}=\mathrm{GC}:\mathrm{AB}$ がいえます。

よって，$\mathrm{AC}:\mathrm{BE}=\mathrm{GA}:\mathrm{EA}=\mathrm{BE}:\mathrm{CG}$ と $\mathrm{GA}:\mathrm{EA}=\mathrm{CG}:\mathrm{AB}$ とから

$$\mathrm{AC}:\mathrm{BE}=\mathrm{BE}:\mathrm{CG}=\mathrm{CG}:\mathrm{AB}$$

が成り立ち，2 つの比例中項 BE $(=y)$ ，CG $(=x)$ が求められることになります。

解析幾何学的には次のように解決できます。

すなわち， $a:x=x:y=y:2a$ ですから，2 つの放物線 $y=\dfrac{1}{a}x^2$ ，$y^2=2ax$ の交点の x 座標を求めればよいのです。

一般には，$a:x=x:y=y:b$ から，$ay=x^2$ ，$bx=y^2$ ，$xy=ab$ となりますから，これらのうちの 2 つの曲線の交点の座標を求めればよいことになります。

(ii)　角の 3 等分問題

与えられた任意の角を 3 等分することがこの問題です。

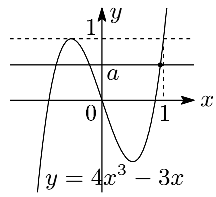
直角は容易に 3 等分できます。また，「鈍角 $=$ 直角 $+$ 鋭角」と考えられますから，問題にする角は鋭角としてよいことになります。

3 等分すべき角を 3α とし $x=\cos\alpha$ とすると，3 倍角の公式 $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ により $4x^3-3x-\cos 3\alpha=0$ という 3 次方程式が得られます。(3α は与えられた値ですから $\cos 3\alpha$ は定数です。)

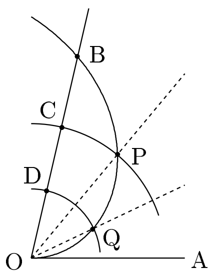
ですから角の 3 等分問題は，代数的には 3 次方程式 $4x^3-3x-a=0$ を解くことに相当します。カルダノ (Gerolamo Cardano : 1501–1576) の方法によれば，この 3 次方程式の解は

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2-1}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2-1}}\right)$$

となります。



3 等分すべき角 3α は鋭角ですから $0<a=\cos 3\alpha<1$ となります。
$y=4x^3-3x$ ，$y=a$ のグラフはを右のようになりますから，
方程式 $4x^3-3x=a$ は正の解を 1 つだけもつことになります。



アルキメデスのら線を使うと角の 3 等分問題は簡単に解けます。左の図で，角 AOB は 3 等分すべき与えられた角で，曲線 OB は OA を始線とするら線［ただし，回転の向きはアルキメデスのものとは逆にしてあります。］です。

いま，動径とら線との交点とら線の原点との距離を動径の長さということにすると，「回転した角の大きさ = 動径の長さ」ですから，次のようにすれば角の 3 等分ができます。

すなわち，線分 OB を 3 等分する点を C ，D とし，O を中心とする半径 OC ，OD の円とら線との交点をそれぞれ P ，Q とすれば，動径 OP ，OQ によって角 AOB は 3 等分されます。［線分 OQ は線分 OB の 3 分の 1 ですから，角 AOQ は角 AOB の 3 分の 1 です。］

この方法を用いれば，線分 OB を等分するだけですから，角の任意等分ができます。

古代ギリシアにおいて，作図問題では与えられた 2 点を通る直線を引くための定規と与えられた点を中心として与えられた長さを半径とする円を描くためのコンパスしか使用が認められていませんでした。ですから，ここに示した解法はその意味での問題解決にはなっていません。［円錐曲線やら線は定規とコンパスだけでは書けません。なお，ここに挙げた 2 つの問題が定規とコンパスだけでは解けないことが証明されたのは 19 世紀になってのことです。］

1 つの問題が新しいものを生み出していくという好例でしょうか。

参考文献

［1］ 近藤 洋逸「数学の誕生 – 古代数学史入門 – 」，現代数学社，1977 (昭和 52)
［2］ 安藤 洋美「高校数学史演習」，現代数学社，1999 (平成 11)
［3］ S. ホリングデール (岡部 恒治・監訳)「数学を築いた天才たち」(上下 2 冊)，講談社 (講談社ブルーバックス)，1993 (平成 5)
［4］ 田村 松平 (責任編集)「ギリシアの科学」，中央公論社 (世界の名著 9)，1972 (昭和 47)
［5］ ヴィクター J. カッツ (上野 健嗣，三浦 伸夫・監訳)「カッツ 数学の歴史」，共立出版，2005 (平成 17)
［6］ I. Thomas(trans.)，*Greek Mathematical Works* II，Harvard U. P.(Loeb Classical Library)，1941(2005)
［7］ I. L. Heiberg(ed. by E. S. Stamatis)，*Archimedis Opera Omnia*，Teubner，1972
［8］ T. L. Heath，*The Works of Archimedes*，Dover，1953(2002)
［9］ 「世界大百科事典 第 2 版」，日立システムアンドサービス，2004 (平成 16)