

14 数列の扱い

問題： n 段の階段があります。この階段を 1 回に 1 段または 2 段ずつ登るとき、次の問いに答えなさい。

- (1) n 段の階段の異なる登り方を a_n 通りとするとき、 a_n の満たす漸化式を求めなさい。
 (2) a_n の一般項を n の式で表しなさい。

[解]

(1) について

最初の一步を踏み出すとき、

1 段登るものとするとき残りは $(n - 1)$ 段あるから、

このときの登り方は a_{n-1} 通りである。

また、最初の一步を踏み出すとき、

2 段登るものとするとき残りは $(n - 2)$ 段あるから、

このときの登り方は a_{n-2} 通りである。

最初の登り方はこれら 2 通りに限られるから、 $n \geq 3$ のとき、 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ となる。

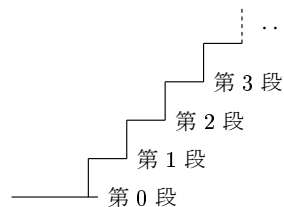
また、 $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 2$ は明らか。

(2) について

漸化式 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ を満たす数列の一般項は (計算の途中は省略すると)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}$$

となる。



この問題に出てきた漸化式 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ (ただし、 $a_1 = 1$ 、 $a_2 = 2$) によって定められる数列 $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ はフィボナッチ数列といわれます。 [$a_1 = 1$ 、 $a_2 = 1$ として、 $1, 1, 2, 3, 5, \dots$ とすることもあります。このときは、もちろん、一般項に現れる指数がちょっと変わります。] フィボナッチ数列が高校での数学で取り上げられることはあまりありません。漸化式の例として出てくるくらいでしょうか。

高校で「数列」として学習する内容は、主に、

等差数列、等比数列の一般項や和を求めること

いろいろな数列の和を求めること

階差数列を利用して数列の一般項を求めること

漸化式で定められる数列の一般項を求めること

数学的帰納法を用いて自然数にかかわる命題を証明すること

数列の極限を求めること

などです。

数列は古くから扱われていましたが、ここではその様子を見てみることにしましょう。

(1) 古代エジプト

古代エジプトの『リンド・パピルス』(*Rhind Mathematical Papyrus*)には次のような問題が載っています ([1] pp.120–121)。

「例題 40 パン 100 個を 5 人に分けるのに、等差数列をなすように分け、多い分け前を取った 3 人の和の $\frac{1}{7}$ が少ない分け前を取った 2 人の和に等しくしようとする。分け前の差を求めよ。」

『リンド・パピルス』はこの問題を、こんにち仮定法と呼ぶ方法で、次のように解いています。

「分け前の差を $5\frac{1}{2}$ とせよ。そうすると 5 人の人々の取り前は [最も少ない人の分け前を 1 とするとき]

$$23, 17\frac{1}{2}, 12, 6\frac{1}{2}, 1, \text{合計 } 60$$

100 になるように 60 を何倍かしなければならない。そしてその倍する数を上の各数に乗ずれば真の数列を作ることができる。

和は 60 の $1\frac{2}{3}$ 倍で 100 となる。

$1\frac{2}{3}$ を掛けよ。

23 は $38\frac{1}{3}$ となり、 $17\frac{1}{2}$ は $29\frac{1}{6}$ となり、12 は 20 となり、 $6\frac{1}{2}$ は $10\frac{2}{3}\frac{1}{6}$ となり、1 は $1\frac{2}{3}$ となる。

和 60 は 100 となる。

[また、分け前の差は $5\frac{1}{2}$ に $1\frac{2}{3}$ を掛けて $9\frac{1}{6}$ である。]

私たちならば次のように解くでしょう。

問題の等差数列の初項を a 、公差を d とすると、

$$\begin{cases} \frac{1}{7} \{(a+2d) + (a+3d) + (a+4d)\} = a + (a+d) \\ a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + (a+4d) = 100 \end{cases}$$

これら 2 式から $a = \frac{5}{3}$ 、 $d = \frac{55}{6}$ 、すなわち求める「分け前の差」は $\frac{55}{6}$

問 1 次の問題を解きなさい。

「例題 64 大麦 10 ヘカトを 10 人に分配するのに、各人の分け前が等差数列をなし、その公差が $\frac{1}{8}$ ヘカトであるようにしたい。各人の分け前はいくらか。」 ([1] p.161)

(2) 古代ギリシア

サモスのピュタゴラス (Πυθαγόρας (Pythagoras) : 前 572?-前 497?) は、ピュタゴラス学派といわれる人々と協力して、三角数、四角数などの図形数を研究しました。[図形数の考察のほか、無理量の発見、ピタゴラスの定理の発見、正十二面体の発見などでも知られています。]

シリア生まれの風刺作家であるルキアノス (Loukianos (Lucianos) : 120?-180?) は次のような会話を伝えています ([7] pp.90-91)。

「ピュタゴラス 次に、あなたは数えなければなりません。

アゴラステス ああ、私はそれを行う方法をすでに知っています。

ピュタゴラス どのように数えるのですか？

アゴラステス 一、二、三、四。

ピュタゴラス 分かりますか？ あなたが四だと思っているものは十で、それは完全三角形であり、私たちの誓言なのです。」

小石を正三角形状に配置したときの小石の個数が三角数 [下図参照] で、正方形状に配置したときの小石の個数が四角数です。同様に、五角数、六角数などが考えられますが、それらを総称して図形数といっています。

図形数に関して、ニコマコス (Νικόμαχος (Nicomachus) : 60?-120?) は『数論入門』 (*Introductio Arithmetica*) で次のように言っています ([2] p.35)。

「それゆえ、点は拡がりをつくりだすもとであるが、しかし拡がりではない。それはまた線をつくりだすもとであるが、線ではない。そして面をつくりだすもとではあるが、面ではない。それはまた2次元の拡がりをつくるもとではあるが、それ自身2次元の拡がりではない。また当然面は立体のもとであるが、立体ではない。そしてそれは3次元の拡がりのもとであるが、それ自身3次元の拡がりではない。同様に数のなかで単位1はすべての数をつくりだすもとであり、それ(すべての数)は1次的に1ずつ前進させられる。そしてこの線(の)数は平面(の)数のもとであり、それ(平面の数)は面的にもう一つの次元上に拡げられる。そして面の数は立体(の)数のもとであり、それは面の次元に加えて第3の次元において深さを獲得する。それをこまかく言えば、線の数は一様に2からはじまって単位1を同一次元上につけ加えつつ進んでゆき、平面の数は、一番初めの根である3からはじまり、規則的な数の系列によって進んでゆき、その配列に従って名前がつけられる。すなわち初めは三角数(τρίγωνοι), その次が正方形(τετράγωνοι), その次が五角数(πεντάγωνοι), その次が六角数(έξάγωνοι), 七角数(έπτάγωνοι)など、限りなく続く。」

例えば、三角数は次の図のとおりですから、1, 3, 6, 10, …… となります。これは、1から始めてnまでの自然数の和といっても同じことで、その和が $\frac{1}{2}n(n+1)$ であることは知っていますね。



また、ニコマコスと同じく『数論入門』の中に次の表を載せています ([7] pp.98-99)。

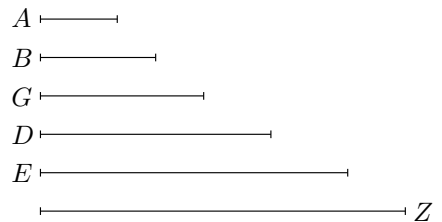
三角数	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
四角数	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
五角数	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
六角数	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
七角数	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235

問 2 上の表を参考にして、四角数、五角数、六角数、七角数の一般項を求めなさい。

ユークリッド (Εὐκλείδης (Eukleides : Euclid) : 前 300 頃) の『原論』 (Στοιχείωσις) には等比数列に関することが出てきます。ただし、『原論』ではすべてが幾何学的に処理されていますから、数列に関する内容も幾何学的に証明されます。第 9 巻命題 8 は次のとおりです ([3] pp.206-207)。

「第 9 巻命題 8 もし任意個の数が単位から始まり順次に比例するならば、単位から数えて 3 番目は平方数であり、一つおきにすべてそうであろう。また 4 番目は立方数であり、二つおきにすべてそうであろう。そして 7 番目は立方数で同時に平方数であり、五つおきにすべてそうであろう。

単位から始まり順次に比例する任意個の数 A , B , Γ , Δ , E , Z があるとせよ。単位から数えて 3 番目の B は平方数であり、一つおきにすべてそうであり、4 番目の Γ は立方数であり、二つおきにすべてそうであり、7 番目の Z は立方数で同時に平方数であり、五つおきにすべてそうであると主張する。

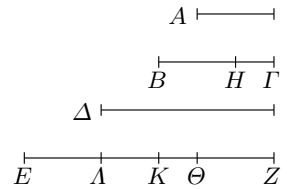


単位が A に対するように、 A が B に対するから、単位が数 A を、 A が B を割った商は等しい。ところが単位が数 A を割った商は A のなかにある単位の個数である。それゆえ A が B を割った商も A のなかにある単位の個数である。ゆえに A は 2 乗して B をつくった。したがって B は平方数である。そして B , Γ , Δ は順次に比例し、 B は平方数であるから、 Δ も平方数である。同じ理由で Z も平方数である。同様に一つおきにすべて平方数であることを証明しうる。次に単位から数えて 4 番目の Γ は立方数であり、二つおきにすべて立方数であると主張する。単位が A に対するように、 B が Γ に対するから、単位が数 A を、 B が Γ を割った商は等しい。ところが単位が数 A を割った商は A のなかにある単位の個数である。それゆえ B が Γ を割った商も A のなかにある単位の個数である。ゆえに A は B にかけて Γ をつくった。そこで A は 2 乗して B をつくり、 B にかけて Γ をつくったから、 Γ は立方数である。そして Γ , Δ , E , Z は順次に比例し、 Γ は立方数であるから、 Z も立方数である。ところが平方数であることも証明された。したがって単位から数えて 7 番目は立方数かつ平方数である。同様に一つおきにすべて立方数かつ平方数であることを証明しうる。これが証明すべきことであつた。」

『原論』には等比数列の和に関することも出てきます ([3] pp.224-225)。

「第9巻命題35 もし任意個の数順次に比例し、第2項と末項からそれぞれ初項に等しい数が引き去られるならば、第2項と初項との差が初項に対するように、末項と初項との差が末項より前のすべての項の和に対するであろう。

最小の数である A から始まり、順次に比例する任意個の数 $A, B\Gamma, \Delta, EZ$ があると、 $B\Gamma, EZ$ から A に等しい $BH, Z\Theta$ がそれぞれ引き去られたとせよ。 $H\Gamma$ が A に対するように、 $E\Theta$ が $A, B\Gamma, \Delta$ の和に対すると主張する。



ZK を $B\Gamma$ に等しく、 $Z\Lambda$ を Δ に等しくせよ。そうすれば ZK は $B\Gamma$ に等しく、そのうち $Z\Theta$ は BH に等しいから、残りの ΘK は残りの $H\Gamma$ に等しい。そして EZ が Δ に対するように、 Δ が $B\Gamma$ に、 $B\Gamma$ が A に対し、 Δ は $Z\Lambda$ に、 $B\Gamma$ は ZK に、 A は $Z\Theta$ に等しいから、 EZ が $Z\Lambda$ に対するように、 AZ が ZK に、 ZK が $Z\Theta$ に対する。分割比により EA が AZ に対するように、 AK が ZK に、 $K\Theta$ が $Z\Theta$ に対する。それゆえ前項の一つが後項の一つに対するように、前項の総和が後項の総和に対する。ゆえに $K\Theta$ が $Z\Theta$ に対するように、 $EA, AK, K\Theta$ の和が $AZ, ZK, \Theta Z$ の和に対する。ところが $K\Theta$ は $H\Gamma$ に、 $Z\Theta$ は A に、 $AZ, ZK, \Theta Z$ の和は $\Delta, B\Gamma, A$ の和に等しい。したがって $H\Gamma$ が A に対するように、 $E\Theta$ が $\Delta, B\Gamma, A$ の和に対する。それゆえ第2項と初項との差が初項に対するように、末項と初項との差が末項より前のすべての項の和に対する。これが証明すべきことであつた。」

この定理は、数列を $\{a_n\}$ とすると、 $a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = a_3 : a_4 = \dots = a_n : a_{n+1}$ ならば

$$(a_2 - a_1) : a_1 = (a_{n+1} - a_1) : (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

が成り立つということを主張しています。すなわち、

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a_1(a_{n+1} - a_1)}{a_2 - a_1} \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

がいえるということです。

数列の各項が「順次に比例」するというはその数列が等比数列であるということですから、こゝにちの記法にあわせて、初項を a 、公比を r とすれば

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{a(ar^n - a)}{ar - a} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

ということになり、この定理の主張である $\textcircled{1}$ 式は等比数列の和の公式を表しているものといえます。[私たちの公式 $\textcircled{2}$ では初項、公比、項数が必要ですが、式 $\textcircled{1}$ では項数は不要であることに注意してください。]

問3 ユークリッドの方法で、等比数列 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1458 の和を求めなさい。

アルキメデス (Ἀρχιμήδης (Archimēdēs) : 前 287?-前 212) は図形に関する幾多の性質を証明しましたが、その補助定理のような形で数列に関することを述べています。

『放物線の求積』(*Quadrature of the Parabola*) では、公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列の和に関することが出てきます ([4] p.418)。

「もし 4 倍比で漸減する諸量の系列が与えられるならば、それらの量の総体と最小の量の $\frac{1}{3}$ との結合されたものは、最大の量の $\frac{4}{3}$ になる。」(命題 23)

彼がいつているのは、公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列 $\{a_n\}$ について、 $(a_1+a_2+\cdots+a_n)+\frac{1}{3}a_n = \frac{4}{3}a_1$ が成り立つということです。

こんにちの方法で確かめると……

$$\begin{aligned} (a_1+a_2+\cdots+a_n)+\frac{1}{3}a_n &= \frac{a_1\{1-(\frac{1}{4})^n\}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{3}\cdot a_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= \frac{4}{3}a_1 - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n a_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} a_1 = \frac{4}{3}a_1 \end{aligned}$$

『ら線について』(*On Spirals*) には平方数の和に関することが挙げられています ([8] p.162)。

「もし $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ が、公差が最小の項 a_1 に等しい等差数列の増加列からなる n 本の直線であるならば、 $(n+1)(a_n)^2+a_1(a_1+a_2+\cdots+a_n) = 3\{(a_1)^2+(a_2)^2+\cdots+(a_n)^2\}$ が成り立つ。」(命題 10)

いま、等差数列 $\{a_n\}$ の初項を a とすると仮定から公差 $d = a (> 0)$ となります。このとき一般項は $a_k = a + (k-1)a = ka$ ですから、この命題の主張は

$$(n+1)(na)^2 + a(a+2a+\cdots+na) = 3\{a^2+(2a)^2+\cdots+(na)^2\}$$

が成り立つということです。

この両辺を a^2 で割ると

$$(n+1)n^2 + (1+2+\cdots+n) = 3(1^2+2^2+\cdots+n^2) \quad \cdots \textcircled{3}$$

となります。

式 $\textcircled{3}$ は

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+\cdots+n^2 &= \frac{1}{3}\{(n+1)n^2+(1+2+\cdots+n)\} \\ &= \frac{1}{3}\left\{(n+1)n^2+\frac{1}{2}n(n+1)\right\} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

と変形できますから、式 $\textcircled{3}$ は私たちが使っている平方数の和の公式の変形版といえます。

アルキメデスはこの命題の系として

$$3\{(a_1)^2+(a_2)^2+\cdots+(a_{n-1})^2\} < n(a_n)^2 < 3\{(a_1)^2+(a_2)^2+\cdots+(a_n)^2\}$$

すなわち、

$$3\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\} < n^3 < 3\{1^2+2^2+\cdots+n^2\}$$

を示しています。[彼はら線の 1 回転分の面積を求めるときにこの不等式を使いました。]

(3) 古代中国

古代中国の算術書『九章算術』はその当時の数学的知識を集大成したのですが、263年に魏の劉徽(りゅうき: 生没年不詳)が優れた「註」をつけています。

『九章算術』は、その名のとおり、9巻からなっていますが、その第3巻は「衰分^{しぶん}」という表題がつけられています。そして、劉徽によれば、「衰分とは、等級による比例分配のこと」です。[ですから、純粋に数列そのものという訳ではありませんが、無関係でもなさそうなので紹介します。]

「衰分」の巻では、まず計算法が示されます([5] p.118)。

「<計算法> それぞれ「列衰^{れつし}」(等級別の比率)を置く。

劉徽註 —— 「列衰」とは、相互に共通の比率である。なお約せる場合は先に約しておく。別にその値を加え合らし「法」(除数)とする。加え合わず以前の「列衰」に分配する数量を掛け、それぞれの値を「実」(被除数)とする。

劉徽註 —— 「法」は「列衰」の合計数、「列衰」は「法」の分散数で、本来同じものである。いま分配する数量を分散数に掛け合計数で割るが、一乗一除でたがいに働きを消し合うから、分配する数量はそのまま残り、しかもそれぞれの比率に応じて分配されるのである。また「衰分術」は「今有術」に含まれ、「列衰」はそれぞれ「求めるものの率」に、別に加え合わした「列衰」の和は「今有るものの率」に、分配する数量は「今有るもの数」に相当する。

また「経分術」で説明しよう。かりに甲家三人、乙家二人、丙家一人の合計六人で、十二を分けるとすれば、「経分術」で一人を求め、一人二となる。ここでさらに家ごとの分配数を求めようとすれば、各家の人数に一人分を掛ける。(この方法は先に割り後で掛け、)「衰分術」は先に掛け後で割る。

「実」を「法」で割る。「法」に足りない部分(余り)は、「法」を分母とする。」

なお、「今有術」とは「所謂『往を告げて来を知り』『一隅を挙げて三隅もって反える』ものである。したがって、正解と誤答の混淆をわかし、彼此の否塞状況を通じ、条件に応じ比率をなし、名分を詳しく^{ととの}齊え、片手落ちを正し、ふぞろいを齊える場合には、この術に帰結しないものはない。」

また、「経分術」とは「分数で示された量を一人の分だけ^{ただ}徑ちに求めることであり、分数の除法である。」

そして、第1問は、獲物を等差に分配することになる、次のような問題です([5] pp.118-119)。なお、問題に出てくる大夫以下の名称は秦漢時代に人民が賜わった爵位で、一 公士、二 上造から二十 徹侯(列侯)までありました。(簪^{しん}ジョウのジョウの字はフォントを見つけられませんでした。)

「巻第3「衰分」問題1 いま大夫、不更^{しん}、簪^{しん}ジョウ、上造、公士の五人が、一緒に狩猟をして五匹の鹿を獲た。問う、爵位の順序に従い(五対四対三対二対一の割合に)分配すると、それぞれいくらになるか。

答、大夫は、鹿一匹と三分の二匹。

不更は、鹿一匹と三分の一匹。

簪^{しん}ジョウは、鹿一匹。

上造は、鹿三分の二匹。

公士は、鹿三分の一匹。

<計算法> 一列に爵数(五, 四, 三, 二, 一)を置き, それぞれ「衰」(等級別の比率)とする。

劉徽註——爵数とは, 大夫五, 不更四, 簪ジョウ三, 上造二, 公士一をいう。『墨子』号令篇に爵級を賜与することが記されているが, このことから戦国時代(約前403-前221)の初めにはすでにこの爵数(爵級)の名があったと考えられる。

別にその値を加え合らし「法」とする。加え合わす以前の「列衰」に鹿の五匹を掛け, それぞれの値を「実」とする。「実」を「法」で割り, 鹿数を得る。

劉徽註——「今有術」で, 「列衰」をそれぞれ「求めるものの率」, 別に加え合わした「列衰」の和を「今有るものの率」, 鹿数を「今有るものの数」として計算すれば, 求める値を得る。」

「計算法」を見れば解法は明らかですが, 念のため……

大夫, …, 公士を $5:4:3:2:1$ にするのですから, それぞれ $5a, 4a, 3a, 2a, a$ とすれば, $5a+4a+3a+2a+a=(5+4+3+2+1)a=5a$ となります。このときの $(5+4+3+2+1)=15$ が「法」です。

$15a=5$ から $a=\frac{1}{3}$ となりますが, そうするのではなくて,

それぞれの「列衰」に鹿数の5を掛けて25, 20, 15, 10, 5とし, これらを「実」としてから, 「法」で割って, $\frac{25}{15}, \frac{20}{15}, \frac{15}{15}, \frac{10}{15}, \frac{5}{15}$ としています。

第4問には等比数列の和に関係する問題が出てきます ([5] p.120)。

「巻第3「衰分」問題4 いまよく機織りする婦人が, 日々織る量を倍にしていき, 五日で五尺織った。問う, 日々いくらずつ織ったか。

答, 初日, 一寸と三十一分の十九寸。

二日目, 三寸と三十一分の七寸。

三日目, 六寸と三十一分の十四寸。

四日目, 一尺二寸と三十一分の二十八寸。

五日目, 二尺五寸と三十一分の二十五寸。

<計算法> 一, 二, 四, 八, 十六を置き「列衰」とする。別にその値を加え合らし「法」とする。加え合わす以前の「列衰」に五尺を掛け, それぞれの値を「実」とする。「実」を「法」で割り, 尺数を得る。」

問4 この問題4は, 初項 a , 公比2の等比数列の初めの5項の和が50 (5尺=50寸) であるとき, 初めの5項を求めよ, というものです。『九章算術』の解を確認しなさい。

(4) 古代・中世インド

インドの数学者アールヤバタ (Āryabhaṭa : 476?-550?) の『アールヤバティヤー』 (Āryabhaṭīya : 499 年?) の第 2 章には次のような記述があります ([6] pp.103-104)。

「詩節 19 任意の (中間項の) 項数から一を引き、半分にし、先行する項数を加え、増分を掛け、初項を加えると中項の値になる。(これに) 項数を掛けると、任意の (中間項の部分) 和になる。しかしまた、(数列全体または数列の一部の) 初項と末項を加えて、項数の半分を掛けてもよい。」

等差数列 $\{a_n\}$ の初項を $a_1 = a$, 公差を d とするとき、第 $p+1$ 項から第 $p+n$ 項までの部分についての記述です。この部分の n 項の和を $S_{p,n}$ と表すことにすると、

$$S_{p,n} = \left\{ \left(\frac{n-1}{2} + p \right) \times d + a \right\} \times n = n \left\{ a + \left(\frac{n-1}{2} + p \right) d \right\}$$

となるといっています。

等差数列の第 $p+1$ 項は $a_{p+1} = a + pd$, 第 $p+n$ 項は $a_{p+n} = a + (p+n-1)d$ ですから、この部分の和は

$$\begin{aligned} S_{p,n} &= \frac{n}{2} \{ (a + pd) + (a + (p+n-1)d) \} = \frac{n}{2} (2a + nd - d + 2pd) \\ &= n \left(a + \frac{n}{2}d - \frac{1}{2}d + pd \right) = n \left\{ a + \left(\frac{n-1}{2} + p \right) d \right\} \end{aligned}$$

となります。

このような「部分和に関する公式」は珍しいといえるでしょう。 $p=0$ とすれば、私たちが使っている等差数列の和の公式になります。

等差数列の第 $p+1$ 項から第 $p+n$ までの和は、初項が第 $p+1$ 項 $a_{p+1} = a + pd$ で公差が d である n 項の和として計算すれば済みます。また、部分和なら $S_{p,n} = S_{p+n} - S_p$ としてもよいはずですが。なのに、アールヤバタはなぜ上のような部分和の公式にしたのでしょうか。私たちにはその方が分かりにくいような気がするのですが …。

「詩節 21 一を増分および初項とする (数列の) 和数 (よりなる数列) の和は、項数を初項とし一を増分とする三つ (の数) の積、あるいは項数に一を加えたものの立方から (その立方) 根を引いたもの、を六で割ったものである。」 ([6] p.104)

「詩節 22 項数と、項数に一を加えたものと、(それにさらに) 項数を加えたものを順に (作りその) 三数を掛け合わせたものの六分の一 (をとると)、それが平方数列の和である。(また自然数の) 数列の和の平方が、(自然数の) 立方の和である。」 ([6] pp.104-105)

詩節 21 では

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k j = \sum_{k=1}^n \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{6}$$

とっており、詩節 22 は

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(n+1+n)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$$

という内容です。これは私たちが使っている公式ですね。

『リーラーヴァティー』(Līlāvati : 1150 年) はバースカラ 2 世 (Bhāskara : 1114?-1185?) が著した四部作の天文学綱要書の一部ですが、その中に次のような記述があります。

「詩節 117 項数に一を加えて項数に掛けたものの半分は、一を初めとする (自然) 数の和であり、^{サンカリタ}「和数」という名前で伝えられている。

二を加えた項数をそれ (和数) に掛け、三で割れば、和数の和である。」([6] p.266)

「詩節 119 項数を二倍し一を加え三で割り和数を掛ければ、平方和である。

一を初めとする (自然) 数の立方の和は、和数の平方に等しいと、先人たちは述べている。」

([6] p.266)

これらは『アールヤバティーヤ』にあるものと同様ですが、こちらにはそれぞれに例題がついています。詩節 117 に関する例題は「一に始まり九に至るまでの (自然数の) おのおのの和数、およびそれらの和数の和を、すぐに私に述べなさい、数学者よ。」([6] p.266) というものです。

また、等差数列に関する内容には次のものがあります ([6] p.267)。

「詩節 121 項数から一を引き、増分に掛け、初項を加えれば、末項の値である。

それ (末項) に初項を加え半分にすれば、中項の値である。

それ (中項) に項数を掛ければ総値であり、これはまた「^{ガニタ}算計」ともよばれる。」

等差数列の初項を $a_1 = a$, 公差を d , 項数を n , 算計 [和] を $S_n = S$ とすれば、

$$a_n = (n - 1) \times d + a = a + (n - 1)d$$

$$\text{中項の値} = (a_n + a) \div 2 = \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{1}{2} \{2a + (n - 1)d\}$$

$$S = \text{中項の値} \times n = \frac{n}{2} \{2a + (n - 1)d\}$$

となるということで、こんにち私たちが使っている公式になります。ただし、中項は私たちは使っていないもので、「項数が偶数のときには中央の前後の値の和の半分」にするとしています。

この詩節には例題が 2 つついています。

「詩節 122 或る人が再生族の人々に対し、最初の日^ニに四ドラ^ンマを布施し、毎日五 (ドラ^ンマ) ずつ増やして布施するにおよんだ。友よ、彼は半月でいくらのドラ^ンマを布施したか、すぐに述べなさい。」([6] p.267)

「詩節 123 初項が七、増分が五、項数が八の場合、中項と末項の値は何か。また総値は何か、私に述べなさい。」([6] pp.267-268)

問 5 上の 2 つの問題 [詩節 122, 詩節 123] を解きなさい。

『リーラーヴァティー』には初項，増分，項数を求めるための記述があります。

「詩節 124 算計を項数で割り，項数から一を引き増分に掛けたものの半分を引けば，初項となる。」([6] p.268)

「詩節 126 (総) 値を項数で割り，初項を引き，項数から一を引いたものの半分で割れば，増分となる。」([6] p.269)

「詩節 128 数列果 (総値) に増分と二を掛け，増分の半分と初項との差の平方を加え，平方根をとり，初項を引き，(先の) 増分の部分 (半分) を加え，増分で割れば，(結果は) 項数と人のよぶものである。」([6] p.269)

詩節 124 は「初項を知るための術則」で $a = \frac{S}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$ ということです。

詩節 126 は「増分を知るための術則」で $d = \left(\frac{S}{n} - a \right) \div \frac{n-1}{2}$ といっています。

詩節 128 は「項数を知るための術則」で $n = \frac{1}{d} \left(\sqrt{2dS + \left(\frac{d}{2} - a \right)^2} - a + \frac{d}{2} \right)$ となるというのです。

確かめましょう。

等差数列の和は $S = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)d\} = na + \frac{n(n-1)d}{2}$ ですから，

$$na = S - \frac{n(n-1)d}{2} \text{ より詩節 124 は明らか。}$$

$$\frac{n(n-1)d}{2} = S - na \text{ より } \frac{(n-1)d}{2} = \frac{S}{n} - a \text{ となり詩節 126 が出てきます。}$$

$2S = 2na + n(n-1)d$ を展開して整理すると $dn^2 + (2a-d)n - 2S = 0$ で，

$$\begin{aligned} \text{この 2 次方程式の解は } n &= \frac{-(2a-d) \pm \sqrt{(2a-d)^2 - 4 \cdot d \cdot (-2S)}}{2d} \\ &= \frac{1}{d} \left(-a + \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(2a-d)^2 + 2dS} \right) \end{aligned}$$

ですが， $-a + \frac{d}{2} < \sqrt{\frac{1}{4}(2a-d)^2 + 2dS}$ より詩節 128 の形になります。

詩節 128 については，例題「或る人が再生族の人々に対し，最初の日に三ドラムを布施し，(その後) 二 (ドラム) ずつ増やして (総額) 三〇〇と六〇 (ドラム) を布施するにおよんだ。彼は何日間布施したか，すぐに述べなさい。」([6] pp.269-270) というものです。

その解は，上の「公式」を適用すると，

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{2 \times 2 \times 360 + \left(\frac{2}{2} - 3 \right)^2} - 3 + \frac{2}{2} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{1440 + 4} - 3 + 1) \\ &= \frac{1}{2} (38 - 2) = 18 \text{ 日間} \end{aligned}$$

となります。

『リーラーヴァティー』で「2 倍増等 (の数列) の果を導く場合の術則」として挙げられているのは次の内容です ([6] p.270)。

「詩節 130 項数が奇数なら一を引いて「乗数」(という文字)をおき、偶数なら半分にして「平方」(という文字)をおくがよい。項数がなくなるまで (この操作を行う)。(このように形成された文字列の) 最後から逆向きに (乗数位においては増分を) 掛け (平方位においては) 平方することから生ずる果から一を引き、乗数 (増分) から一を引いたもので割り、初項を掛ければ、倍増 (問題) における算計である。」

これは等比数列の和の求め方を示したものです。前半の「生ずる果」までが r^n を求める部分で、後半の「果から一を引き」以降が和を求める部分です。

初項 $a = 2$, 公比 $r = 3$ の等比数列の初項から第 10 項までの和は、
まず、 3^{10} を求めるために

10	→	5	→	4	→	2	→	1	→	0
偶数だから		奇数だから		偶数		偶数		奇数		
「平方」		「乗数」		「平方」		「平方」		「乗数」		
と書いて		と書いて								
半分にする		1 を引く		半分		半分		1 引く		

としておいて、今度は逆向きに小さい値の方から

10		5		4		2		1		0
平		乗		平		平		乗		
59049	←	243	←	81	←	9	←	3	(←)	(1)
平方して		公比を掛けて		平方		平方		公比倍		(初期値は 1)

とすれば「果」 $3^{10} = 59049$ が得られます。

次に、和を求めるには

$$S = (59049 - 1) \div (3 - 1) \times 2 = \frac{2(59049 - 1)}{3 - 1} = 59048$$

とします。

等比数列の和 $S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ を求めるためには公比の累乗 r^n の計算が必要となります。この術則の前半はその計算を効率的に行うためのものです。上の例でいうと、

$$3^{10} = (3^5)^2 = (3 \cdot 3^4)^2 = \{3 \cdot (3^2)^2\}^2$$

であることから、

$$[1 \rightarrow] 3 \rightarrow 3^2 \rightarrow (3^2)^2 \rightarrow 3 \cdot (3^2)^2 \rightarrow \{3 \cdot (3^2)^2\}^2$$

と計算します。[初期値は 1 ではなく、公比のところから計算を始めた方が分かりやすいかも知れません。] この術則のように規則化されてはいないでしょうけど、私たちがこのような計算法はよく使いますね。

問 6 この術則に対する例題 (の 1 つ) は「友よ、最初が二、増分が毎日三倍増、項数が七日であるとき、算計は何か、述べなさい。」([6] p.271) というもので、その答は 2186 とされています。その答を確かめなさい。

(5) フィボナッチ数列

こんにちはフィボナッチ数列と呼んでいる数列が発見されるきっかけとなったのはフィボナッチ (Fibonacci : 1174?-1250?) の『算盤の書』 (*Liber Abaci* : 1202 年) にある次の問題です ([9] pp.404-405)。

「ある人が 1 つがいのウサギをある囲まれた場所で飼っていました。そして、最初の 1 月で (そのつがい) 1 つがいを産み、産まれたつがいもまた 2 か月後にはつがいを産むという性質があるとき、1 年の間にこの (はじめの) つがいがどれだけの数になるかを知りたいと思いました。」 (第 12 章の中の「1 年間で 1 つがいのウサギからどれだけのつがい産まれるか」)

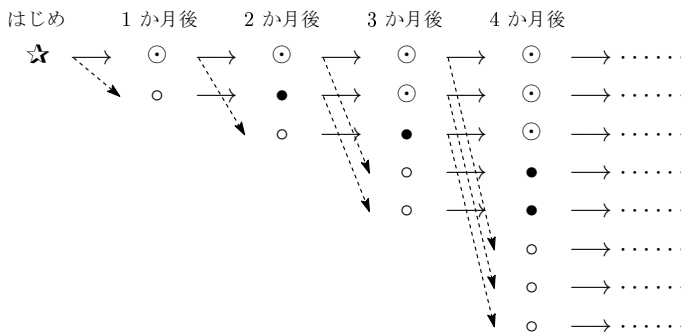
はじめ 1 つがいのウサギは 1 か月後にはつがいを産んで全部で 2 つがいになります。

2 か月後は最初のつがいと 1 か月後に産まれたつがいとを合わせて 3 つがいになります。 [このときは、はじめから 1 か月後に産まれていたつがいはまだ新しいつがいを産めません。]

3 か月後は最初のつがいと 1 か月後に産まれたつがいとがまたつがいを産みますから総計 5 つがいになっています。 [はじめから 2 か月後に産まれていたつがいはまだ産めません。]

.....

図で表した方が分かりやすいですから、図で示してみましょう。 [下の図で、○ は産まれたばかりのつがいで、まだ産めません。● は産まれて 1 か月のつがいで、このときから産めるようになります。⊙ は産まれて 2 か月以上たったつがいで、以降毎月つがいを産みます。]



この図から、何か月後かのつがいの数 f_n は、その前の月にいたつがいの数 f_{n-1} と、そのときにつがいを産むことができる [だから、その前の前の月にいた] つがいの数 f_{n-2} との和になっていることが分かります。すなわち、漸化式

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad (n \geq 3)$$

が成り立ちます。

この数列 $\{f_n\}$ の値を表にしてみると

はじめ	1 か月後	2 か月後	3 か月後	4 か月後	5 か月後	6 か月後
1	2	3	5	8	13	21
7 か月後	8 か月後	9 か月後	10 か月後	11 か月後	12 か月後	
34	55	89	144	233	377	

となって、1 年後には 377 つがいになっています。

この数列 $\{f_n\}$ をフィボナッチ数列といい、その各項をフィボナッチ数とっています。

フィボナッチ数 (列) にはいろいろな性質があることが知られていますが、ここでは 2 つだけ紹介することにします。ただし、初期値を $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ としたもの ($F_n \Rightarrow 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$) を考えます。

(i) 自然数 n, m の最大公約数を p とすると、 F_n と F_m の最大公約数は F_p である。

(ii) $F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$

また、フィボナッチ数列の一般項に現れる $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.618033988\dots$ は黄金分割と関係がある数で、黄金比あるいは黄金数といわれます。

線分 AB を $AP : PB = PB : AB$ の比に内分するとき、線分 AB を黄金分割するといひ、 $AP : PB$ を黄金比といひます。いま、 $AP = 1$, $PB = x$ とすると、 $1 : x = x : (1 + x)$ ということから、 $x^2 = x + 1$ となり、この 2 次方程式の解が $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ となります。そのため $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ を黄金数といひのです。

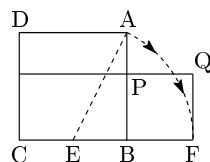
古代ギリシアでは縦、横の長さが黄金比 [簡単な整数で近似すると 5 : 8] になるような長方形が最も美しい形とされてきました。見ていると心が落ち着くのだそうです。

エジプトにあるクフ王 (Khufu : 前 26 世紀 (在位 B.C.2553?-B.C.2530?)) のピラミッドは高さが 146.59 m (ただし、現在は 138.74m) で底辺が 230.37 m になっていて、高さと底辺の長さとは黄金比に近い値 (約 1.57) になっています。(ちなみに、傾斜角は約 51.84° です。) その他、パルテノン神殿の正面の縦と横の長さ、ミロのビーナスのへそから上とへそから下の長さなど、いろいろなところに黄金比が現れています。[これらがはじめから黄金比を意識して作られたかどうかは分かりませんが …。]

こんにちでも名刺などのカードの縦・横の長さなどに黄金比が用いられています。

ユークリッド『原論』では「線分は、不等な部分に分けられ、全体が大きい部分に対するように、大きい部分が小さい部分に対するとき、外中比 ($\delta \alpha\chi\rho\omicron\varsigma \kappa\alpha\iota \mu\acute{\epsilon}\sigma\omicron\varsigma \lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$) に分けられたといわれる。」(第 6 巻定義 3) として、第 6 巻命題 30 でその作図法が示されています ([3] p.117, p.145)。

作図するには、 $\sqrt{5}$ を作ればよい訳ですから、直角をはさむ 2 辺の比が 1 : 2 になるような直角三角形 (の斜辺) を利用すればよいことはすぐに分かります。右の図で、四角形 ABCD は与えられた線分 AB を 1 辺とする正方形、点 E は辺 BC の中点、点 F は直線 CB と中心が E で半径が EA の円との交点、四角形 PQFB は BF を 1 辺とする正方形です。このとき、 $AP : PB$ は黄金比になります。[DC : CF も黄金比です。]



参考文献

- [1] 高崎 昇「古代エジプトの数学」, 総合科学出版, 1977 (昭和 52)
- [2] 彌永 昌吉, 伊東 俊太郎, 佐藤 徹「ギリシャの数学」, 共立出版 (数学の歴史 I), 1979 (昭和 54)
- [3] ユークリッド (中村 幸四郎, 寺阪 英孝, 伊東 俊太郎, 池田 美恵・訳・解説)「ユークリッド 原論」, 共立出版, 1971 (昭和 46)
- [4] 田村 松平 (責任編集)「ギリシアの科学」, 中央公論社 (世界の名著 9), 1972 (昭和 47)
- [5] 藪内 清 (責任編集)「中国天文学・数学集」, 朝日出版社 (科学の名著 2), 1980 (昭和 55)
- [6] 矢野 道雄 (責任編集)「インド天文学・数学集」, 朝日出版社 (科学の名著 1), 1980 (昭和 55)
- [7] Ivor Thomas(transl.), *Greek Mathematical Works I*, Harvard U.P.(Loeb Classical Library), 1939(1991)
- [8] T. L. Heath, *The Works of Archimedes*, Dover, 1953(2002)
- [9] L. Sigler, *Fibonacci's Liber Abaci*, Springer, 2003
- [10] ヴィクター J. カッツ (上野 健嗣, 三浦 伸夫・監訳)「カッツ 数学の歴史」, 共立出版, 2005 (平成 17)
- [11] 秋山 仁, 川尻 信夫, 平野 葉一, 松永 清子「大数学者に学ぶ 入試数学 IA」, 数研出版 (クリエイティブ高校数学講座 1), 1997 (平成 9)
- [12] 「世界大百科事典 第 2 版」, 日立システムアンドサービス, 2004 (平成 16)