15　数学的帰納法

論理学において，推論の仕方を大別すると演繹と帰納になります。演繹というのは，一般的なものから具体的・特殊的なものへの，またはより一般性の少ないものへの推論をいい，帰納というのは，具体的なもの・特殊なもの，またはより一般性の少ないものから，一般的なものを導き出す推論のことをいいます。

あるいは次のようにいってもよいでしょう。

演繹とはいくつかの前提からある特定の推論規則に従って結論を導く方法で，一般的な内容を個別の事象に当てはめていきます。そして，帰納とは個々のさまざまな事象を積み重ねていって一般的な内容を推しはかる方法です。

> 推論規則としてよく使われるものに三段論法といわれるものがあります。いくつかの種類がありますが，代表的なものは，「A ならば B」と「B ならば C」から「A ならば C」を導く推論方法です。
>
> 例えば，
>
> バラは花である。
> 花は美しい。
> だから，バラは美しい。
>
> というように推論します。
>
> 一方，例えば，
>
> ハクチョウは大空を自由に飛び回ることができる。
> ツルは大空を自由に飛び回ることができる。
> ハトは大空を自由に飛び回ることができる。
> だから，鳥は大空を自由に飛び回ることができる。
>
> ［残念ながら私は，ニワトリが大空を自由に飛び回っているのを見たことがありませんけど $\cdots$。］
>
> というような推論の仕方が帰納です。ハクチョウ，ツル，ハトという個々の事象から，鳥という一般的な事柄に言及しています。
>
> (数学における) 論理的推論というのは，論証の積み重ねによって (その体系において) 正しい結論を導き出すことです。ですから，いかに多くの事象を集めようと，そこから対象全体に関する一般性を導くという仕方は認めがたいものです。その意味では，帰納は論理的推論とはいえないものです。

帰納において，帰納の前提となる個々の事象の範囲と，結論としての一般的内容の範囲とが一致する場合を完全帰納法といいます。この完全帰納法は論理的推論としても受け入れられるものです。つまり，対象範囲の「すべて」のものについてある性質が確かめられたならば，その対象範囲にあるものには一般的にその性質があると結論づけてもよいでしょう，ということです。

公理的方法を採用している現代数学は，公理といわれるいくつかの前提・仮定を基に，適当な推論規則に従って，定理 (や命題，補題，系) と呼ばれる結論を導き出す［証明する］という方法をとっています。すなわち，現代数学は 1 つの演繹体系［演繹推論のみによって完成させられる体系］なのです。

なお数学においては，三段論法を，

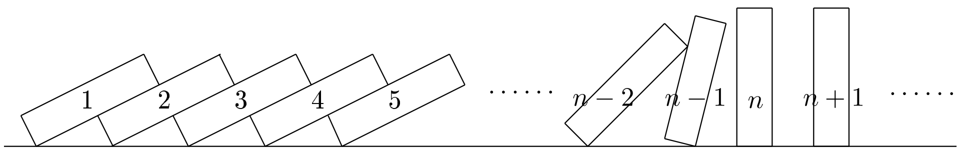
「A」と「A ならば B」から「B」を導く，

という形式で用いることがあります。［これは右のような図式で表されることが多いです。］

$$\frac{\mathrm{A} \qquad \mathrm{A} \to \mathrm{B}}{\mathrm{B}}$$

数学において，次のような推論の方法を数学的帰納法 (mathematical induction)［この用語はド・モルガン (Augustus de Morgan : 1806–1871) によって 1838 年に命名されました。］または完全帰納法 (complete induction) といいます。すなわち，

> 自然数 n についての性質 $P(n)$ に対して，
>
> (i)　$P(1)$ は正しい
>
> (ii)　任意の自然数 k について，
>
> 　　$P(k)$ が正しいと仮定したときに $P(k+1)$ も正しい
>
> の 2 つが証明されるならば，
>
> 　すべての自然数 n について $P(n)$ が正しい
>
> ことが導かれる。



数学的帰納法は三段論法の (無限) 連鎖となっています。そして，(i) と (ii) によって結論の内容の範囲としての自然数全体をカバーすることができるのです。［だから，正しい推論と認められる !! そして，数学的帰納法は演繹です !! ］

$$\frac{P(1)\text{ が正しい}\qquad\qquad P(1)\to P(2)\text{ が正しい}}{P(2)\text{ が正しい}}$$

$$\frac{P(2)\text{ が正しい}\qquad\qquad P(2)\to P(3)\text{ が正しい}}{P(3)\text{ が正しい}}$$

$$\frac{P(3)\text{ が正しい}\qquad\qquad P(3)\to P(4)\text{ が正しい}}{P(4)\text{ が正しい}}$$

$$\vdots$$

すなわち，n が指定されれば，それがどんな n であっても 1 つ 1 つ確認しながら進めていって，必ずその n に到達することができるのだから，「すべて」の n について正しいといえる，というのが数学的帰納法の考えです。

ところで，(ii) の証明には「任意の自然数 k 」がでてきます。この k は**任意に固定された値**としての k ということですから，証明の際には k という値の特性を利用する訳にはいかないことに，充分気をつけてください。

また，(ii) の証明に際して，「$P(k)$ が正しい」ことは「仮定」であって，それが本当に正しいかどうかは問題にしていないことにも注意してください。[1 つ 1 つ順々に成立が確認されていきます。]

数学的帰納法は自然数全体の集合を特徴づける最も重要なもので，「あらゆる数学の分野のなかで，きわめて頻繁に用いられる基本的な数学的手法の一つであり，非常にエレガントで，しかも強力」(［4］p.iii) なものです。

自然数は無限個あります。そして，どんな大きな自然数でも，テマヒマかければ，必ず捉える［たどりつく］ことができます。しかしこれは，原理的に可能だということで，実際上可能かどうかはまた別の問題です。では，無限個の「自然数全体」は捉えることができるのでしょうか。できるとすれば，どうすればよいのでしょうか。

ここに数学的帰納法の真価があります。数学的帰納法は，たった 2 つのことを示すだけで自然数全体を捉えてしまう手法なのです。［自然数全体という対象範囲の「すべて」の数を三段論法の無限連鎖で尽くしてしまおうというもので，数学的帰納法 (あるいはその原理・考え方) は自然数全体を捉えるためになくてはならない道具なのです。その無限連鎖を 2 つのことで示すのです。］

数学的帰納法の原理が確立されたことによって，はじめて，無限を捉える数学的方法を獲得した，あるいは無限数列を数学的に処理し得る基礎が確立した，といえるでしょう。また，17 世紀中葉においてはじめて，明確な形で無限への第一歩が踏み出されたともいえるでしょう。

(1)　パスカル

推論方法としての数学的帰納法を確立したのはパスカル (Blaise Pascal : 1623–1662) で，それは 1654 年のことでした。パスカルは，フランスの物理学者，宗教思想家，数学者で，確率論の端緒を開いた他，微分積分学の先駆的な業績もあります。流体の圧力に関するパスカルの原理や「加算器」の発明でも知られています。

彼は，『数 3 角形論』(*Traité du Triangle arithmétique* : 1665 年) において，まず，数三角形を次のように定義します (［1］pp.14–16 (pp.735–733))。

「次のような構成をもつ図形を数 3 角形という。

任意の 1 点 G から互いに垂直な 2 線 GV , Gξ を引き，G から始めて両者の各々の上に欲するだけの連続した相等しい部分をとって，これに 1 , 2 , 3 , 4 などと番号をつける。これらの数は線の分割の指数 (exposans) といわれる。

次に，2 線の各々の第 1 分点を他の 1 線によって結ぶと，この線を底辺 (base) として 1 つの三角形が作られる。

同様に，双方の第 2 分点を線によって結ぶと，それを底辺として第 2 の三角形が作られる。

このように同じ指数をもつすべての分点を結ぶと，指数と同じだけの三角形と底辺が作られる。

分点の各々を通って辺に平行な線を引くと，それらの平行線の交わりによって小正方形が作られるが，これらの正方形を細胞 (cellules) という。

左から右へ進む 2 つの平行線の間の細胞，例えば細胞 G , σ , π など，あるいは φ , ψ , ϑ などを，同じ水平行の細胞という。

上から下へ進む 2 つの平行線の間の細胞，例えば細胞 G , φ , A , D など，あるいは σ , ψ , B などを，同じ垂直行の細胞という。

同じ底辺が対角線状に横切っている細胞，例えば細胞 D , B , ϑ , λ また，A , ψ , π を，同じ底辺の細胞という。

同じ底辺の細胞で，その両端から等距離にあるもの，例えば E , R また B , ϑ を相反細胞 (reciproques) という。なぜなら，一方の水平行の指数は他方の垂直行の指数と同じだからで

ある。上の例でいえば，E は第 2 垂直行，第 4 水平行にあり，その相反細胞 R は相反的に第 2 水平行，第 4 垂直行にある。また，相反的に同じ指数をもつ細胞は同じ底辺にあり，かつ，その両端から等距離にあることが，極めて容易に証明される。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	G 1	σ 1	π 1	λ 1	μ 1	δ 1	ξ 1	1	1	1
2	φ 1	ψ 2	ϑ 3	R 4	S 5	N 6	7	8	9	
3	A 1	B 3	C 6	ω 10	ζ 15	21	28	36		
4	D 1	E 4	F 10	ρ 20	Y 35	56	84			
5	H 1	M 5	K 15	35	70	126				
6	P 1	Q 6	21	56	126					
7	V 1	7	28	84						
8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

また，任意の細胞の垂直行の指数と水平行の指数とを加えたものは，底辺の指数より単位数だけ大きいことも，極めて容易に証明される。

例えば，細胞 F は第 3 垂直行，第 4 水平行，第 6 底辺にあり，これら 2 つの行の指数の和 $3+4$ は底の指数 6 より単位数だけ大きい。これは 3 角形の 2 辺が同数の部分に分割されていることによる。しかし，これは証明されるよりむしろ理解されることである。

次の観察もこれと同じ性質のものである。各底辺は直前の底辺より 1 つ多い細胞を含み，また，その指数と同じだけの細胞を含む。例えば，第 2 底辺 φσ は 2 つの細胞を，第 3 底辺 Aψπ は 3 つの細胞を含む，など。

さて，各細胞に次の方法によって数を入れる。

直角のところにある第 1 細胞の数は任意である。しかし，ここに置かれた数によって他の数がすべて決定される。それ故，この第 1 細胞の数を，三角形の母数 (generateur) という。そして，他の各数は次のただ 1 つの規則によって規定される。

各細胞の数は，その垂直行における直前の細胞の数とその水平行における直前の細胞の数との和に等しい。こうして，例えば細胞 F すなわち細胞 F の数は，細胞 C と細胞 E との和に等しい。他も同様である。

ここから多くの帰結が引き出される。以下にその主要なものを示すに際し，私は単位数〔1〕を母数とした 3 角形を考える。しかし，これに関して述べられることは，他のいかなる数を母数にしてもあてはまるのである。」

ここに定義された「数三角形」はこんにちでは「パスカルの三角形」と呼ばれ，高校では“順列・組合せ”や“二項定理”との関連で出てきます。

パスカルは『数 3 角形論』で，数三角形を定義した後，いくつかの「帰結」を述べています。例えば次のようなものです (［1］pp.16–17 (pp.733–732))。

「帰結第 2　すべての数 3 角形において，各細胞は，その直前の水平行の，その垂直行から第 1 垂直行まで (それらの垂直行を含めて) のすべての細胞の和に等しい。

任意の細胞として ω をとる。そうすると，これは $\mathrm{R}+\vartheta+\psi+\varphi$ に等しい。ここに R，ϑ，ψ，φ は，ω の上の水平行の，ω の垂直行から第 1 垂直行までの細胞である。

このことは，これらの細胞をそれらが作られたもとの細胞に置きかえてみさえすれば明らかである。

なぜならば，ω は $\mathrm{R}\underbrace{+\mathrm{C}}_{\vartheta\underbrace{+\mathrm{B}}_{\psi\underbrace{+\mathrm{A}}_{\varphi\ \underbrace{\mathrm{A}}_{\varphi,}}}}$ に等しい。

なぜならば，A と φ とは前の帰結によってたがいに等しい。

故に，ω は $\mathrm{R}+\vartheta+\psi+\varphi$ に等しい。」

水平行の指数が $n+1$ $(n \geqq 0)$ である底辺において，(数三角形の図で) 左下から右上に向けて数えて $r+1$ $(0 \leqq r \leqq n)$ 番目の細胞 (の数) を，こんにちでは，${}_n\mathrm{C}_r$ と表して，2 項係数と呼んでいます。

例えば，水平行の指数が 9 である底辺［1 , 8 , 28 , 56 , 70 , 56 , 28 , 8 , 1］は $n=8$ で，
右上に向けて数えて 4 番目の数 56 は $r=3$ で，${}_8\mathrm{C}_3=56$ ということです。
右側の添え数 r は 0 から始まることに注意してください。

この「帰結第 2」は，${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_r + {}_{n-2}\mathrm{C}_{r-1} + \cdots + {}_{n-(r+1)}\mathrm{C}_0$ ということです。

また，次のような「帰結」が示されています。

「帰結第 5　すべての数三角形において，各細胞はその相反細胞に等しい。」(［1］p.18 (p.731))

「帰結第 7　すべての数三角形において，各底辺の細胞の和は，その直前の底辺の細胞 (の和) の 2 倍である。」(［1］p.18 (p.731))

「帰結第 8　すべての数三角形において，各底辺の細胞の和は，単位数で始まる公比 2 の等比数列の 1 項であり，その指数は底辺の指数と同じである。」(［1］p.19 (p.730))

問 1　上に挙げた「帰結」をそれぞれ ${}_n\mathrm{C}_r$ を用いて表しなさい。

それでは，数学的帰納法に関わる部分を見てみましょう ([1] pp.20–22 (pp.729–727) なお，ゴシックは筆者による)。

「帰結第 12　あらゆる数 3 角形において，同じ底辺にあって隣接する 2 つの細胞のうち，上位の細胞と下位の細胞との比は，上位の細胞から底辺の最上段までの細胞の個数 (両端の細胞を含む) と，下位の細胞から最下段までの細胞の個数 (両端の細胞を含む) との比に等しい。

同じ底辺の任意の隣接 2 細胞として，E，C をとれば，

E	と	C	との比は，	2	と	3 との比に等しい。
下位の細胞，		上位の細胞，		E から最下段までには 2 つの細胞，すなわち E，H があるから，		C から最上段までには 3 つの細胞，すなわち C，R，μ があるから，

この命題には無限に多くの場合があるが，私は 2 つの補題を仮定することによって，極めて短い証明を与えよう。

第 1　これは自明であるが，この比例は第 2 底辺において成り立つ。なぜならば，φ と σ との比が 1 と 1 との比に等しいことは極めて明らかである。

第 2　もしこの比例が任意の 1 底辺において成り立つならば，それは必然的に次の底辺においても成り立つ。

ここから，この比例が必然的にすべての底辺において成り立つことがわかる。なぜならば，補題 1 によって，この比例は第 2 底辺において成り立つ。故に，補題 2 によって，それは第 3 底辺において成り立つ。故に，第 4 底辺においても成り立つ。以下限りなく同様である。

故に，補題 2 のみを証明すればよい。それは次のようにする。いま，この比例が任意の 1 底辺，例えば第 4 底辺 Dλ において成り立つとする。すなわち，D と B との比が 1 と 3 との比に，B と ϑ との比が 2 と 2 との比に，ϑ と λ との比が 3 と 1 との比にそれぞれ等しいとする。そうすれば，同じ比例が次の底辺 Hμ においても成り立ち，例えば E と C との比は 2 と 3 との比に等しい。

なぜならば，仮定によって，D と B との比は 1 と 3 との比に等しい。

故に，$\underbrace{\mathrm{D}+\mathrm{B}}_{\mathrm{E}}$ と B との比は $\underbrace{1+3}_{4}$ と 3 との比に等しい。

同様に，仮定によって，B と ϑ との比は 2 と 2 との比に等しい。

故に，$\underbrace{\mathrm{B}+\vartheta}_{\mathrm{C}}$ と B との比は $\underbrace{2+2}_{4}$ と 2 との比に等しい。

しかるに，B と E との比は，3 と 4 との比に等しい。

故に，複合比 (proportion troublée) によって，C と E との比は，3 と 2 との比に等しい。証明終。

残るすべての場合についても，同様にして同じことが示される。というのも，この証明は，この比例が直前の底辺において成り立つということと，各細胞は直前の細胞と直上の細胞との和に等しいということのみにもとづいているが，このことは至るところにおいて真なのであるから。」

「帰結第 12」の証明において，パスカルは，具体例として第 4 底辺の場合を取り上げ，そのときに「補題 2」が成り立つことを示しています。しかし，その証明は底辺が第「4」であることに依存している訳ではありません。ですから，この証明は一般の n にも通用するものです。

一般の n を用いて証明の流れを確認してみましょう。

証明すべきことは ${}_n\mathrm{C}_{r+1} : {}_n\mathrm{C}_r = (n-r) : (r+1)$ ということです。

まず，数学的帰納法の第 1 段階 (i) は

$n=1$ のときで，このときは必然的に $r=0$ となります。

このときは ${}_1\mathrm{C}_0 = 1$ から最下段まではこれしかありませんから，細胞は 1 個です。また，${}_1\mathrm{C}_1 = 1$ から最上段までもこれしかありませんから，細胞は 1 個です。

すなわち，${}_1\mathrm{C}_1 : {}_1\mathrm{C}_0 = 1 : 1 = (1-0) : (0+1)$ が成り立ち，$n=1$ のときは正しいことがいえます。

次に，第 2 段階 (ii) は

$n=k$ のとき，すなわち ${}_k\mathrm{C}_{r+1} : {}_k\mathrm{C}_r = (k-r) : (r+1)$ を仮定して，$n=k+1$ のとき，すなわち

$$ {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1} : {}_{k+1}\mathrm{C}_r = \{(k+1)-r\} : (r+1) = (k-r+1) : (r+1) $$

を示さなくてはなりません。

まず，各 r $(1 \leqq r \leqq k)$ について，${}_{k+1}\mathrm{C}_r = {}_k\mathrm{C}_{r-1} + {}_k\mathrm{C}_r$ が成り立つことに注意します。

さて，仮定から ${}_k\mathrm{C}_r : {}_k\mathrm{C}_{r-1} = (k-r+1) : r$ ですから，

$$ \begin{aligned} {}_{k+1}\mathrm{C}_r : {}_k\mathrm{C}_r &= ({}_k\mathrm{C}_{r-1} + {}_k\mathrm{C}_r) : {}_k\mathrm{C}_r \\ &= \{r + (k-r+1)\} : (k-r+1) = (k+1) : (k-r+1) \end{aligned} $$

となります。

よって，$(k+1)\,{}_k\mathrm{C}_r = (k-r+1)\,{}_{k+1}\mathrm{C}_r \quad \cdots\cdots$ ①

同じく仮定から ${}_k\mathrm{C}_{r+1} : {}_k\mathrm{C}_r = (k-r) : (r+1)$ ですから，

$$ \begin{aligned} {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1} : {}_k\mathrm{C}_r &= ({}_k\mathrm{C}_r + {}_k\mathrm{C}_{r+1}) : {}_k\mathrm{C}_r \\ &= \{(r+1) + (k-r)\} : (r+1) = (k+1) : (r+1) \end{aligned} $$

となります。

よって，$(k+1)\,{}_k\mathrm{C}_r = (r+1)\,{}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1} \quad \cdots\cdots$ ②

従って，① ，② から $(k-r+1)\,{}_{k+1}\mathrm{C}_r = (r+1)\,{}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1}$ となりますから，

$$ {}_{k+1}\mathrm{C}_{r+1} : {}_{k+1}\mathrm{C}_r = (k-r+1) : (r+1) = \{(k+1)-r\} : (r+1) $$

が成り立ちます。

すなわち，$n=k$ のときに成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときも成り立つことがいえます。

『数 3 角形論』の「帰結第 12」の証明からも分かるように，パスカルは証明論法としての数学的帰納法を完全に把握していました。［すなわち，2 つのことを示すことによって，すべての自然数について示すことができることをはっきりと認識していました。］そして，彼以前には数学的帰納法を明確に把握し，使用した人はいませんでした。すなわち，パスカルによってはじめて，数学的帰納法が組織的に数学に導入されたのです。

パスカルにおける数学的帰納法の適用は，この他にあと 2 か所に見られます。それらはともに『単位数を母数とする数 3 角形の様々な応用』(*Divers usages du Triangle arithmétique dont le generateur est l'unité*) と題される論文に含まれていて，1 つはその論文の中の『組合せに対する数 3 角形の応用』命題 1 で，他の 1 つは同論文中の『数回勝負をする 2 人の賭博者の間でなされるべき賭の分け前を定めるための数 3 角形の用法』問題 1 命題 1 です。

『組合せに対する数 3 角形の応用』命題 1 を見てみましょう (［1］pp.31–32 (pp.718–717))。

「命題 1　すべての数 3 角形において，任意の水平行の細胞の和は，3 角形の指数のうちでの，この行の指数の組合せ［いくつかの物のなかから一定数のものを選び出す場合，提出されたすべてのなかから，許されただけを取り出す仕方のすべて，のこと。］の数に等しい。

任意の 3 角形，たとえば第 4 の 3 角形 GDλ をとる。そうすれば，任意の水平行，例えば第 2 水平行の細胞の和 $\varphi+\psi+\vartheta$ は，この 3 角形の指数である 4 のうち第 2 行の指数である 2 の組合せの和に等しい。

同様に，第 8 の 3 角形の第 5 行の細胞の和は，8 のうち 5 の組合せの和に等しい，など。

こうして無限の場合があるにかかわらず，次の 2 つの補題を用いれば証明は簡単である。

第 1。これは自明のことであるが，第 1 の 3 角形にはこの相等性が存在する。というのも，その唯一の行の細胞の和，すなわち G あるいは単位数は，3 角形の指数 1 のうち行の指数 1 の組合せの和に等しいのであるから。

第 2。この関係の成立する 1 つの数 3 角形があれば，すなわち，そのどの行をとっても，細胞の和が 3 角形の指数のうち行の指数の組合せの数に等しくなるならば，次の 3 角形も同じ性質をもつ。

ここから，すべての数 3 角形がこの相等性をもつことになる。なぜならば，第 1 補題によって，この相等性は第 1 の 3 角形に存在するし，さらに第 2 の 3 角形に存在することさえ明らかである。故に，第 2 補題によって，次の 3 角形も同じくこの相等性をもち，従って，さらに次の 3 角形もこれをもつ。以下限りなく同様である。

故に，第 2 補題を証明するだけでよい。

任意の 3 角形，例えば第 3 の 3 角形をとり，そこにおいてこの相等性が成立すると仮定する。すなわち，第 1 行の細胞の和 $G+\sigma+\pi$ は 3 のうち 1 の組合せの数に等しく，第 2 行の細胞の和 $\varphi+\psi$ は 3 のうち 2 の組合せ〔の数〕に等しく，第 3 行の細胞の和 A は 3 のうち 3 の組合せ〔の数〕に等しいとする。そうすれば，第 4 の 3 角形も同じ相等性をもち，例えば，第 2 行の細胞の和 $\varphi+\psi+\vartheta$ は 4 のうち 2 の組合せの数に等しい。

なぜならば，$\varphi+\psi+\vartheta$ は　$\underbrace{\varphi+\psi}\quad+\quad\underbrace{\vartheta}$　に等しい。

$+\quad\underbrace{G+\sigma+\pi}$

仮定によって，　3 のうち 2 の　+　3 のうち 1 の

$\underbrace{\text{組合せの数}\qquad\text{組合せの数}}$

第 4 補題によって，　4 のうち 2 の組合せの数

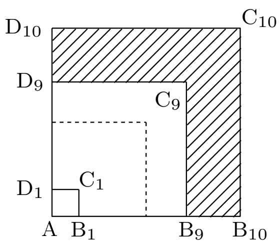
他のすべてについても同様にして同じことが証明される。証明終。」

「第 4 補題」が明らかではないため，証明の詰めが不明確ですが，数学的帰納法による証明の仕方は分かると思います。

(2)　その他の人々

確固たる認識をもって初めて数学的帰納法を用いたのがパスカルであることは大方の認めるところですが，数学的帰納法や数三角形にかかわったのはもちろん彼だけではありません。

最も初期のものはアル・カラジー (Abū Bakr ibn Muḥammad ibn al-Ḥusayn al-Karajī : 953–1029?) によるものと思われます。彼は自然数の立方和 ［$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$］ の証明において帰納法的な考えを用いています。もちろん，一般的な n ではなく，具体的な $n=10$ についての等式を示すのですが，その際に，実質的には $n=9 \longrightarrow n=10$ に相当するとみられる議論が行われました。ただし，実際には，彼の議論は $n=10 \to n=9 \to \cdots \to n=1$ と逆向きに進んでいきますから，数学的帰納法とは認めがたいものです。



左の図で，四角形 $AB_{10}C_{10}D_{10}$ は 1 辺が $1+2+\cdots+10$ (すなわち，$AB_1=1$，$B_1B_2=2$，$\cdots$，$B_9B_{10}=10$) の正方形です。
斜線部の面積は $(1+2+\cdots+9)\times 10\times 2+10\times 10$ ですから，

$$\begin{aligned}(1+2+\cdots+10)^2 &= \{(1+2+\cdots+9)+10\}^2\\ &=(1+2+\cdots+9)^2+20(1+2+\cdots+9)+10^2\\ &=(1+2+\cdots+9)^2+20\times\frac{9\times 10}{2}+10^2\\ &=(1+2+\cdots+9)^2+9\times 10^2+10^2\\ &=(1+2+\cdots+9)^2+10^3\end{aligned}$$

となって，$n=9$ のときに正しければ $n=10$ のときも正しいことがいえます。［これは $n=10$ に依存する変形ではないことに注意してください。］
実際には，これを $n=1$ まで続けて，等式が正しいことをいっています。

中国では，高次方程式の解法と関連して，数三角形がつくられました。すでに 11 世紀には賈憲 (かけん：活動期 1023–1050) の著作中に $(a+b)^6$ に相当するベキまでの係数を表した図が出ていたと楊輝 (ようき：1238?–1298?) が『詳解九章算法』(1261 年) の中で述べています。

また，朱 世傑 (しゅせいけつ：活動期 1280–1303) の『四元玉鑑』(1303 年) には 8 乗ベキまでの係数の図が載せられています。

なお，古代インドにおいて，ピンガラ (Pingala：生没年不詳) は『チャンダハスートラ』(Chandaḥsūtra：Chandaḥśāstra) の中で詩を構成するための長音と短音の組合せについて研究しています。そして，10 世紀には，ハラユーダ (Halayudha：生没年不詳) は『チャンダハスートラ』の注釈書『ムリタサンジーヴァニー』(Mṛtasañjīvanī) の中で長音と短音の組合せの様子がすぐに分かるように図を用いました。その図が最古の数三角形であろうと考えられています。しかし，その数三角形は音の組合せ以外には利用された形跡はないそうです。

レヴィ・ベン・ゲルソン (Levi ben Gerson：1288–1344) は $(1+2+\cdots+n)^2=n^3+\{1+2+\cdots+(n-1)\}^2$ を証明するときに帰納法的な処理をしました。ただし，アル・カラジーと同様に，彼の場合も帰納法の向きは逆向きでした。［証明の論法は，アル・カラジーの場合と同様です。］

より数学的帰納法に近づいたのはマウロリーコ (Francisco Maurolico：1494–1575) で，彼の『算術についての本 2 巻』(*Arithmeticorum libri duo*：1557 年) の中に数学的帰納法のきざし［不完全な数学的帰納法］が見られます。

彼は次のような表を提示します。

1	0	1	1	1	0	1	1	$\cdots$
2	2	3	3	4	2	5	6	$\cdots$
3	4	5	6	9	6	12	15	$\cdots$
4	6	7	10	16	12	22	28	$\cdots$
5	8	9	15	25	20	35	45	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
9	16	17	45	81	72	117	153	$\cdots$
10	18	19	55	100	90	145	190	$\cdots$
根	偶数	奇数	三角数	平方	奇偶数	五角数	六角数	$\cdots$

そして，この表に現れる数の性質 —— 例えば，命題 6 は「先行する根がいっしょである［加えられた］それぞれの根はそれに隣接した奇数を与える。」です —— の証明において帰納法の考えが見てとれます。

また，フェルマ (Pierre de Fermat : 1601–1665) は，おそらく 1638 年以前に，数学的帰納法の 1 つの形式とみなすことができる証明法を「私の方法」といって使用していました。これは逆向きの帰納法で，こんにちでは無限降下法［あるいは無限下降法］(descente infinie ou indéfinie : infinite descent) といわれています。この論法は無限下降が不可能であることを示す間接論法なのですが，フェルマ自身による適用例は知られてないということです。［「3 辺の長さが有理数であらわされる直角三角形の面積は平方数ではあらわされえない」という命題の証明についての説明から彼の論法が推測されているのです。］

上に述べたように，パスカルは数学的帰納法による証明の第 2 段階で一般の $n = k$ を用いていず，特定の値によって一般にも通用させる証明をしています。一般の $n = k$ を用いたのはヤコブ・ベルヌーイ (Jakob Bernoulli : 1654–1705) で 1686 年のことだそうです。また彼の『推測術』(*Ars conjectandi* : 1713 年) には数学的帰納法の優れた適用例が見られるということです。

参考文献

［1］ B. パスカル (原 亨吉・訳)『数学論文集』，人文書院 (「パスカル全集 1」所収)，1959 (昭和 34)
［2］ ヴィクター J. カッツ (上野 健嗣，三浦 伸夫・監訳)「カッツ 数学の歴史」，共立出版，2005 (平成 17)
［3］ 安藤 洋美「高校数学史演習」，現代数学社，1999 (平成 11)
［4］ 廣瀬 健「数学的帰納法」，教育出版 (シリーズ新しい応用の数学 11)，1975 (昭和 50)
［5］ 伊東 俊太郎，原 亨吉，村田 全「数学史」，筑摩書房 (数学講座 18)，1975 (昭和 50)
［6］ 佐々木 力「数学史」，岩波書店，2010 (平成 22)
［7］ 銭 宝□［□は王ヘンに宗］(川原 秀城・訳)「中国数学史」，みすず書房，1990 (平成 2)
［8］ ジョージ G. ジョーゼフ (垣田 高夫，大町 比佐栄・訳)「非ヨーロッパ起源の数学 もう一つの数学史」，講談社 (ブルーバックス 1120)，1996 (平成 8)