18　確率論の始まり

「確率」について『岩波 数学入門辞典』(岩波書店，2005 年) では次のような説明がなされています。すなわち，「一般に，『確からしさ』を 0 から 1 までの数で数値化したものをいう。数学では，加法性などを公理として満たすことを要請する。なお，このような数学的確率の他に，実験や統計のデータから決める経験的確率や，加法性を満たさない場合が実験的に検証されている心理的確率などもある。」

『家庭の算数・数学百科』(日本評論社，2005 年) には「あることがらや現象が起こる割合を数値で表したもの。…… さいころの目の出方や，トランプのカードの選び方のように，考えられるすべての場合を数え上げることをもとにして計算する場合と，出生率や降水確率のように，統計的なデータをもとに計算する場合があります。」とあります。

そして，偶然現象の起こる確率を数学的に取り扱い，その応用を考える数学の一分科を確率論といっています。

出生率とは，人口 (P) 1000 人に対する出生数 (B) の割合をいい，数式で表すと $\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{P}} \times 1000$ となります。分母の人口 P は年央人口 (本来は 7 月 1 日，日本では国勢調査の行われる 10 月 1 日の人口) を用いますが，それは性別，年齢別に関係なく，妊娠可能な人たちだけという訳ではありませんから，他国の値と比べるときなどは注意が必要でです。

それで，より正確に人口の再生産を表す値として合計特殊出生率 (1 人の女性 (あるいは 1 組の夫婦) が生涯に産む子どもの平均人数) を用いることが多いようです。合計特殊出生率が 2 である場合は，夫婦 2 人から子ども 2 人ということで世代がほぼ維持されることになります。平成 17 (2005) 年の日本の合計特殊出生率は 1.26 でしたが，平成 23 (2011) 年には 1.39 になっています。

なお，合計特殊出生率には 2 つの種類があります。

1 つは期間合計特殊出生率で，ある年において，$f(x)$ を「調査対象において，年齢 x の女性が 1 年間に産んだ子供の数」，$g(x)$ を「調査対象における年齢 x の女性の数」とするとき，$\displaystyle\sum_{x=15}^{49} \frac{f(x)}{g(x)}$ で表されます。すなわち「その年の出生率」ということです。

もう 1 つはコーホート合計特殊出生率です。ある世代の出生状況に着目したもので，同一年生まれ (コーホート) の女性の各年齢 (15〜49 歳) の出生率を過去から積み上げたものです。「その世代の出生率」ということです。

実際に「1 人の女性が一生の間に生む子どもの数」はコーホート合計特殊出生率ですが，それに相当するものとして一般に用いられているのは期間合計特殊出生率です。それは，各年齢の出生率が世代 (コーホート) によらず同じであれば，この 2 つの合計特殊出生率は同じ値になるからです。

降水確率は，気象庁の定義では「指定された時間帯の間に 1mm 以上の降水の降る確率」とされています。気象庁のホームページにある (2009 年 2 月現在) 「気象等の知識」内の「よくある質問集」において次のように説明されています。すなわち，

「降水確率は降水の有無のみについて確率を示すもので，降水が連続的か断続的か，一時的とすればその時間帯のどこかなどの雨の降り方や 1mm 以上のである限り降水量の多少については何も示していません。予報が出される地域内のどの点でも同じ確率として定義されます。よって，『東京地方の正午から午後 6 時までの降水確率は 70 パーセント』という場合，東京地方のどの地点でも正午から午後 6 時までの降水量の合計が 1mm 以上となる確率が 70 パーセントである，ということになります。なお，降水確率が 70 パーセントというのは『70 パーセントの予報が 100 回出されたとき，およそ 70 回は 1mm 以上の降水がある』ということを意味しています。」ということです。

降水確率は，過去の大気の状況 (湿度，温度，風向・風速など) とそのときの雨の有無の関係を調べておき，将来の大気の状態を数値予報という手法を使って予測して，雨の降る確率を求めたもの

です。
なお，1mm というのは一般的に傘が必要な位の雨なのだそうです。

確率論はフェルマ (Pierre de Fermat : 1601–1665) とパスカル (Blaise Pascal : 1623–1662) との間の往復書簡から始まりました。その生々しい様子を感じ取ってください。

(1)　フェルマとパスカル

フェルマやパスカルが確率を考え始めたきっかけは，ド・メレ (Chevalier de Méré (本名は Antoine de Gombaud) : 1607–1684) によってパスカルにもたらされた賭けの分け前に関する問題でした。

「2 人がそれぞれ 32 ピストル［ピストルは当時の貨幣単位］を出しあって，先に 3 回勝った方が合計 64 ピストルを受け取るという賭けをしています。さて，一方が 2 回勝ち，他方が 1 回勝っているときに勝負をやめざるを得なくなりました。では，賭け金の 64 ピストルはどのように分けたらよいでしょうか。」

私たちなら，次のように解くでしょうね。

2 人の人を A , B とし，この勝負について 2 人の腕前は同等であると仮定します。［同等でなければ，以下で考えるときの確率が変わってきます。］A が勝った回数が a 回，B が勝った回数が b 回のとき，(a , b) と表すことにします。そうすると，この後の勝負の行方は次のようになるでしょう。

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (3,1) & & & \Longrightarrow \ ① \\
(2,1) \arrow[ur, "A"] \arrow[dr, "B"'] & & & (3,2) & \Longrightarrow \ ② \\
 & (2,2) \arrow[urr, "A"] \arrow[drr, "B"'] & & & \\
 & & & (2,3) & \Longrightarrow \ ③
\end{tikzcd}
$$

① の場合は，A が 1 回勝って勝負が終わります。そしてこのとき，A が勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ です。

② の場合は，まず B が勝って，次に A が勝って勝負が終わるケースですから，A が勝つ確率は $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ となります。

③ の場合は，B が 2 回続けて勝つときで，このときの A が勝つ確率は 0 です。［ B が勝つ確率が $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ です。］

(2 , 1) 以降の展開は上の 3 つの場合がすべてですから，最終的に A が勝つ確率は $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + 0 = \dfrac{3}{4}$ で，B が勝つ確率は $\dfrac{1}{4}$ です。

すなわち，A , B が勝つ確率の比は 3 : 1 ですから，賭け金の 64 ピストルは 3 : 1 の比に分けるのが妥当です。

よって，A が 48 ピストル，B が 16 ピストルもらえばよいことになります。

ド・メレからの問題は，実は，もう 1 つあって，それは次のようなものです。

「2 つのサイコロを何回か同時に投げるとき，2 つとも 6 の目が出ること［このことをソネというみたいです。］が少なくとも 1 回はある確率が $\dfrac{1}{2}$ 以上になるようにするには，何回サイコロを投げればよいでしょうか。」

まず，1654 年 7 月 29 日付のパスカルからフェルマへの最初の書簡を読んでみましょう（［1］pp.309–310)。

「…… 例えば，2 人の賭博者が 3 回上がりの勝負をし，各々がそれぞれ 32 ピストルずつ賭けたとして，その 1 つ 1 つの勝負の値を知るために私はどうしたかと申しますと，大体次のとおりです。

　第 1 の者がすでに 2 回勝ち，もう一方が 1 回勝っているとしましょう。そうして 2 人はいま次の勝負をやろうとしています。その勝負の結果は如何というと，もし第 1 の者が勝てば，賭金の全部すなわち 64 ピストルを得ます。もしもう一方が勝てば双方共に 2 回ずつ勝ったことになります。従って賭をやめようと思うならば，各々自分の出した賭金すなわち 32 ピストルずつを引揚げなければなりません。

　そうなんです。第 1 の者は，勝てば 64 ピストル。負ければ 32 ピストルを得るのです。だから彼らがこの勝負をやってみないで賭をやめようと思うならば，第 1 の者はこう言わなければなりません。『32 ピストルは確実に僕のものになるんだ。この勝負に負けても貰えるんだからね。残りの 32 ピストルは，僕のものになるかも知れないし，君のものになるかも知れない。同じだけの運があるんだ。だからこの 32 ピストルは半分ずつ分けよう。そうしてその上に，確実に僕のものになる例の 32 ピストルをもらおう。』だから彼は 48 ピストル，もう一方は 16 ピストルを得ることになります。」

これが，先のド・メレの問題に対するパスカルの解答です。ここには確率という言葉は出てきませんし，樹形図も書かれてはいません。しかし，パスカルが樹形図を思い描いていた［あるいは実際にどこかに書いていた］ことは想像に難くありません。

パスカルは次のように続けます（［1］p.310)。

「今度は第 1 の者が 2 回勝ち，もう一方は 1 回も勝っていないとしましょう。そうして 2 人は次の勝負をはじめようとしています。この勝負の結果如何と言いますと，もし第 1 の者が勝てば，彼は賭金の全部 64 ピストルを得ます。もしもう一方が勝つと，第 1 の者は 2 回，もう一方が 1 回勝ったのですから前の場合に帰着します。

　ところですでに証明しました通り，この場合には，2 回の勝負に勝った第 1 の者は 48 ピストルを得るのです。だから彼らがこの勝負をしないでおこうと思うならば，第 1 の者はこういわなくてはなりません。『僕が勝てば僕は全部つまり 64 を得る。負けた場合は 48 が正当に僕のものとなる。だから負けた場合での確実に僕のものになるこの 48 は僕がもらおう。そして残りの 16 は半分ずつ分けよう。これは僕がもらうか，君がもらうか，運は同じなんだからね。』こうして彼は 48 と 8 つまり 56 ピストルを得ることになります。」

この場合を樹形図で表すと

$$
(\,2\,,\,0\,)\;\begin{array}{l} \xrightarrow{\quad A\quad} (\,3\,,\,0\,) \quad\Longrightarrow\quad \text{A が 64 全部} \\[1em] \xrightarrow[\quad B\quad]{} (\,2\,,\,1\,) \quad\Longrightarrow\quad \text{前の場合で，A が 48，B が 16} \end{array}
$$

となります。パスカルの解答の説明はなくても大丈夫でしょう。

書簡は次のように続きます（［1］pp.310–311)。

「最後に，第 1 の者が 1 回だけ勝ち，もう一方は 1 回も勝っていないとしましょう。そうすると，もうお分かりのことと思いますが，もし 2 人が新たに勝負をはじめるならばその結果はと言うと，もし第 1 の者が勝てば，彼は 2 回勝ち，相手は 1 回も勝ていないことになる。したがって，前の場合に証明されたところにより，彼は 56 を得ます。もし負ければ 1 対 1 となり，したがって彼は 32 ピストルを得る。だから彼はこう言わなくてはなりません。『もし君がこの勝負をしないでおこうというのなら，僕は確実に僕のものである 32 ピストルをもらおう。そうして 56 から 32 を引いた残りは半分ずつ分けよう。56 から 32 を引けば 24 になる。この 24 を半分に割って，君は 12 をとりたまえ。僕も 12 もらう。これに 32 を加えて，合計 44 が僕の分だ。』」

$$
\begin{array}{ccl}
 & \xrightarrow{\ A\ } (2, 0) & \Longrightarrow \ \text{A が } 56,\ \text{B が } 8 \\
(1, 0) & & \\
 & \xrightarrow[\ B\ ]{} (1, 1) & \Longrightarrow \ \text{A が } 32,\ \text{B が } 32
\end{array}
$$

この場合は，A が勝てば A は 56，B は 8 で，B が勝てば A は 32，B は 32 ですから，A は 32 を，B は 8 を確保していることになります。そこで，残り $64 - (32 + 8) = 24$ を分けるのですが，これは五分五分ですから半分ずつにしようというのです。よって，A は $32 + 12 = 44$ で，B は $8 + 12 = 20$ ということになります。

このようなパスカルの解法に対して，フェルマは (1654 年 8 月 24 日付パスカルからフェルマへの書簡によれば) 次のように解いていました（［1］p.320)。

「数回勝負をする 2 人の賭博者が，賭に勝つには第 1 の者はもう 2 勝，他方はもう 3 勝しなければならぬという局面にあるとき，賭の分け前を求めるには (とあなたはおっしゃいます)，まず勝敗がもう何回の勝負で確定するかを見なければならない。

すぐに計算できます。もう 4 回の勝負で，です。そこからあなたはこう結論なさいます。2 人の賭博者で 4 回の勝負ならいく通りの組合せがあるかを見る。次に第 1 の者が勝つ組合せはいく通りあるか，第 2 の者が勝つ組合せはいく通りあるかを見る。そうしてこの比例にもとづいて賭金の配分をすればよいと。」

4 回の勝負での結果の現れ方は全部で $2^4 = 16$ 通りあります。

このとき，第 1 の者 A が 2 勝する場合は 11 通り，第 2 の者 B が 3 勝する場合は 5 通りあります。［パスカルは一覧表を書いていますが，ここでは省略します。］

ですから，64 ピストルを 11 : 5 の割合に分ければよいことになり，A は $64 \times \dfrac{11}{16} = 44$ ピストルで，B は $64 \times \dfrac{5}{16} = 20$ ピストルにすればよいのです。

私たちには，フェルマの解法の方が分かりやすいかも知れません。［高校では，通常，フェルマの解法を用いて解いています。］

パスカルは，次に，参加者が 3 人の場合を考察します。

1654 年 8 月 24 日付のパスカルからフェルマへの書簡には次のようにあります (［1］p.323)。

「同じ考えを賭博者が 3 人の場合にも押進めてみましょう。第 1 の者には勝数が 1 つ不足し，第 2 の者には 2 つ，第 3 の者にも 2 つ不足しているとしましょう。前と同じ組合せの方法で分け前を決めるには，賭博者が 2 人の場合にしたように，先ず賭の勝敗があと何回の勝負できまるかを調べなければなりません。あと 3 回で決まります。3 回やってまだ勝敗不明などということはありえないことです。

さて今度はこの 3 回の勝負が 3 人の賭博者ではいく通りの組み合わせがあるか，次に，第 1 のものに有利な組み合わせはいく通りか，第 2 の者にはいく通りか，最後の者にはいく通りかを見なければなりません。そして，この比例にしたがって，賭博者が 2 人と仮定したときと同じように賭金を配分しなければなりません。」

3 人が 3 回の勝負をする訳ですから，結果の出方は全部で $3^3 = 27$ 通りあります。この様子をパスカルは，「それぞれ 3 つの面をもった (3 人だから) 3 つのサイコロを (3 回だから) 同時に投げる」ことと同一視して次のような表を作りました。この表で，a，b，c は各回の勝負でそれぞれ第 1 の者 A，第 2 の者 B，第 3 の者 C が勝ったことを表し，1，2，3 は最終的な結果としてそれぞれ A，B，C が上がったことを表します。

a a a	1			b a a	1			c a a	1		
a a b	1			b a b	1	2		c a b	1		
a a c	1			b a c	1			c a c	1		3
a b a	1			b b a	1	2		c b a	1		
a b b	1	2		b b b		2		c b b		2	
a b c	1			b b c		2		c b c			3
a c a	1			b c a	1			c c a	1		3
a c b	1			b c b		2		c c b			3
a c c	1		3	b c c			3	c c c			3

彼はまず，この表の 1，2，3 の個数を数えて，A が上がる場合が 19 通り，B が上がる場合が 7 通り，C が上がる場合が 7 通りですから，19 : 7 : 7 にする，としたら「とんでもない間違いを犯す」といいます (［1］p.324)。

それは例えば a b b のケースでは，「第 1 の者は，ここに，自分に必要な 1 つの a を見出しますが，第 2 の者もまた自分に不足している 2 つの b をここに見出」すからです。そこで彼は「2 人が共有するこのような並び方は，この各自にとって賭金全部の値打ちがあるものとしてでなく，ただその半分の値打ちしかないものとして数えなければなりません。」として，解を次のように修正します。

$$A : 1 \times 13 + \frac{1}{2} \times 6 = 16 \qquad [\text{単独の 1 が 13 個，重複の 1 が 6 個ある}]$$

$$B : 1 \times 4 + \frac{1}{2} \times 3 = \frac{11}{2} \qquad\qquad C : 1 \times 4 + \frac{1}{2} \times 3 = \frac{11}{2}$$

よって，この方法の配分比は $16 : \dfrac{11}{2} : \dfrac{11}{2}$ となります。

そして，この配分の仕方も「あまり正しくないのです。」といいます。それは，実際の勝負では誰かが上がったらそこで勝負は終わるのに，この表では必ず 3 回の勝負を行うとしているところに問題があるといいます。

そこで，「必ず 3 回の勝負をするというのではなく，ただ誰か 1 人が勝数に達するまで勝負する」という条件で数えてみると 1 (A) が 17 通り，2 (B) が 5 通り，3 (C) が 5 通りありますから，17 : 5 : 5 に配分するのがよいことになります。

このように，パスカルは大分混乱しながら正解にたどりついています。それは「必ず 3 回の勝負をする」ということにあるのではなく，彼が時間の流れを無視してサイコロを振って出た目をそのまま読んでしまったことにあります。最後には彼もその点に気づいて解を正しました。

サイコロ投げでシミュレーションするなら，1 つずつ順に［あるいは 1 つのサイコロを最大 3 回］投げて，誰かが上がりの状態になったらもうサイコロを投げない，とでもすればはじめから正解を導いていたであろうと思います。

この問題についてフェルマは，1654 年 9 月 25 日付のフェルマからパスカルへの書簡で次のように述べています (［1］pp.328–329)。

> 「賭博者が 3 人で第 1 の者には勝数が 1 不足し，他の 2 人にはそれぞれ，勝数が 2 不足しているという例をとりましょう。これはあなた御自身がいって来られた局面ですが，この場合には，第 1 の者が勝つ組合せは 17 ，他の 2 人の組合せはそれぞれ 5 ，これ以外にはありません。a c c という組合せは，第 1 の者にも第 3 の者にも勝を与えるとあなたはおっしゃる。が，賭博者の一人が賭に勝ってしまった後はどうなろうと何の意味もない。これはあなた御自身が言っておられたことであるのに，あなたはもう忘れておられるようです。ところでこの組合せでは，第 1 の者が 1 回の勝負ですでに賭に勝ってしまったのであるから，そのあとで第 3 の者が 2 回勝ったとて何になりましょう。30 回勝ったところで仕方がないのですから。
>
> 何故かと申しますと。あなたが見事に指摘なすった通り，このように賭をある一定の回数の勝負までひきのばすというフィクションは，規則の適用を容易ならしめるためにほかならない。つまり (私の考えでは) すべての偶然を等価値のものとして扱いうるため，もっと分かり易く言い換えれば，すべての分数を同じ分母に通分するためにほかならないからです。」

すなわち，フェルマは先の表を次のように修正して考えるべきであるといいます。［この表は書簡にはないようです。］誰か 1 人が勝ってしまった後については，分母をそろえるために便宜的におかれているのであって，それは他の人の勝ちを表すものではないというのです。

a	a	a	1			b	a	a	1			c	a	a	1		
a	a	b	1			b	a	b	1			c	a	b	1		
a	a	c	1			b	a	c	1			c	a	c	1		
a	b	a	1			b	b	a		2		c	b	a	1		
a	b	b	1			b	b	b		2		c	b	b		2	
a	b	c	1			b	b	c		2		c	b	c			3
a	c	a	1			b	c	a	1			c	c	a			3
a	c	b	1			b	c	b		2		c	c	b			3
a	c	c	1			b	c	c			3	c	c	c			3

フェルマは「何らフィクションを使わない解法をお見せする」として，次のように綴ります（［1］pp.330-331)。

「第 1 の者はただ 1 回の勝負で勝つか，2 回で勝つか，3 回で勝つかです。

もしただ 1 回の勝負で勝ったとすると，これは 3 つの面をもったサイコロを 1 回だけ投げて，うまく目が出たのでなければなりません。ところで 1 つのサイコロにはこの場合には 3 通りの目の出方がある。だからこの賭博者は，1 回しか勝負をしないときには，$\frac{1}{3}$ という確率をもっていることになります。

2 回の勝負をすることになったとすると，彼の勝ち方は 2 通りある。1 回目の勝負は第 2 の賭博者が勝ち，2 回目の勝負で彼が勝つか，1 回目を第 3 の者が勝って，2 回目を彼が勝つかです。ところで 2 つのサイコロでは 9 通りの並び方がある。だからこの賭博者は，2 回の勝負をするときには，$\frac{2}{9}$ の確率をもっていることになります。

3 回の勝負をすることになったときには，彼は 2 通りの仕方で勝つことができます。すなわち 1 回目を第 2 の者が，2 回目を第 3 の者が勝って，彼が 3 回目を勝つか，あるいは 1 回目を第 3 の者，2 回目を第 2 の者が勝って，そして 3 回目を彼が勝つかです。なぜなら，第 2 の者か第 3 の者かがはじめの 2 勝負を続けて勝ったならば，その者が賭に勝つのであって，第 1 の者は負けだからです。ところで 3 つのサイコロでは 27 通りの並び方がある。だから第 1 の賭博者は，3 回の勝負をするときには，$\frac{2}{27}$ という確率をもつことになります。

したがってこの第 1 の賭博者が勝つ確率の和は $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}$，すなわち全部で $\frac{17}{27}$ ということになります。

この規則はあらゆる場合に通用する一般的なものです。すなわち，虚構に訴えることなく，各回数の勝負における実際の組合せだけで問題を解くことができるのであり，またこれらの組合せを御覧になれば，ある回数の勝負まで賭を延長して考えるのは，さまざまな分数を共通の分母に通分することにほかならないとはじめに申したことがお分かりと存じます。」

このように，2 人は互いの考えを連絡しあいながら正解をつかんでいったのです。

パスカルが混乱した最大の理由は「組合せの方法」についての誤解にあったようです。

表を使って賭けに勝つ人を特定するときに「必ず 3 回の勝負をするという，事実に合わぬことが想定されている」からだといいます。そして「賭博者が 3 人の場合も，現実の賭のあり方では，賭に勝つものは 1 人しかありません。1 人が賭に勝ったら勝負は止むというのが賭の実情なのですから。しかるにこの仮定的なあり方では，2 人の者が必要な勝数の達することがありうるのです。…… これに反して賭博者が 2 人の場合は，賭の仮定的なあり方と現実のあり方とが，賭博者全体の利害得失という点から見て全く同じものだったのです。またそれだからこそ，賭の仮定的なあり方と現実のあり方とが，極端にちがっていてもよかったのです。」としています（［1］p.326)。

この段階では，彼はサイコロ投げによる表に時系列の考えを導入できないでいました。［先述のとおり，後になってそれが可能になりましたが … 。］ですから，「組合せの方法は一般的ではありません。それはある一定の勝負数を必ず完全にやってしまおうとあらかじめ決めた場合の他は，概して適当ではないのです。」としてしまいます（［1］pp.327–328)。［フェルマが書簡中で「一般的なもの」と断っているのはそのためだと思われます。］

しかし最後には［1654 年 10 月 27 日付のパスカルからフェルマへの書簡］,「最後のお手紙で疑念は完全に晴らせて頂きました。分け前を求めるあなたの御方法，よく分かりましただけにますます讃嘆の情を禁じ得ません。」といっています (［1］p.333)。

さて，ド・メレからのもう 1 つの問題は，1654 年 7 月 29 日付のパスカルからフェルマへの書簡中に見られます (［1］p.314)。

> 「数というものには虚偽があるとわかった。何故かというと，1 つのサイコロで 6 を出そうという時には，4 回投げでやれば，671 対 625 の割合で有利になる。
>
> ところが 2 つのサイコロでソネ［6 の目合せ］を出そうという時には，24 回でも不利である。
>
> これは何故か。24 の 36 (つまり 2 つのサイコロの面の可能な組合せの数) に対する比は，丁度 4 の 6 (つまり 1 つのサイコロの面の数) に対する比に等しいのに。
>
> これが，あの方［ド・メレのこと］をして，数学の定理は確実でない，算術は矛盾していると高言せしめた大憤慨の理由です。」

まず，前半。

1 つのサイコロを 4 回投げて，1 回も 6 の目が出ない確率は $\left(\dfrac{5}{6}\right)^4 = \dfrac{625}{1296}$ です。よって，少なくとも 1 回 6 の目が出る確率は $1 - \dfrac{625}{1296} = \dfrac{671}{1296}$ となります。

ですから，(6 の目が出る) : (6 の目が出ない) $= \dfrac{671}{1296} : \dfrac{625}{1296} = 671 : 625$ となり，6 の目が出る方がちょっと有利です。

次に後半。

2 つのサイコロを n 回投げるとき，1 回もソネにならない確率は $\left(\dfrac{35}{36}\right)^n$ です。［ですから，少なくとも 1 回ソネになる確率は $1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^n$ となります。］

問題は少なくとも 1 回ソネになる方が有利になる回数は何回か，ということですから，1 回もソネにならない方が不利になる回数を求めればよいことになります。すなわち,

$$\left(\frac{35}{36}\right)^n \leqq \frac{1}{2}$$

となるような n を求めればよいのです。

この式の両辺の常用対数をとると，$\log\left(\dfrac{35}{36}\right)^n \leqq \log\dfrac{1}{2}$ となり,

$$n\,(\log 35 - \log 36) \leqq (\log 1 - \log 2) \text{ より } n \geqq \frac{-\log 2}{\log 35 - \log 36} = \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35}$$

となります。

ここで，$\log 2 \fallingdotseq 0.30103$, $\log 36 \fallingdotseq 1.55630$, $\log 35 \fallingdotseq 1.54407$ ですから,

$$n \geqq \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35} \fallingdotseq \frac{0.30103}{1.55630 - 1.54407} \fallingdotseq 24.61406$$

となって，25 回以上ならば「少なくとも 1 回ソネになる」が有利になります。

［実際，$\left(\dfrac{35}{36}\right)^{24} \fallingdotseq 0.508596$, $\left(\dfrac{35}{36}\right)^{25} \fallingdotseq 0.494468$ です。］

(2)　ラプラス

ラプラス (Pierre Simon Laplace : 1749–1827) は『確率の解析的理論』(*Théorie analytique des probabilités* : 1812 年) において，母関数の理論を基に確率論を展開し，確率分布や極限定理などを解析的に論じました。

彼は「序言」にあたる部分で次のようにいっています (［2］p.1)。

「この本で意図しているのは確率に関する諸問題を解くために必要な解析法と原理とを説明することである。この解析法はいまからおよそ 30 年ほど前に，アカデミー・デ・シアンス［Académie des Sciences : 1666 年に設立されたフランスの科学アカデミー］の紀要（メモアール）に発表した 2 つの理論から構成されている。その 1 つは母関数の理論で，もう 1 つはきわめて大きな数の関数である式の近似法の理論である。この 2 つが第 I 編の対象であるが，ただ上記の紀要で発表したものよりもずっと一般的な形で述べる。2 つの理論をくらべてみれば後者は前者の延長であること，そしてまた母関数算法 (Calcul des Fonctions génératrices) という名前で呼ぼうと思う算法の 2 つの分枝であることがわかるであろう。この算法が私の確率の理論の基礎で，確率の理論は第 II 編の対象になる。偶然によって起こる事象に関係した諸問題は，しばしば容易に単純もしくは偏線形差分方程式に帰着させることができる。この種の方程式を積分するためのもっとも一般的な方法は母関数算法の第 1 の分枝によって与えられる。しかし問題とする事象の数が大きいときには，導き出された表示式がきわめて多数の項や因子をもっていて，数値的計算が実行できなくなり，従ってそれを収束する級数に変形する方法が不可欠のものとなる。ここに母関数算法の第 2 の分枝が必要であるばかりかますます有効なものとなるのである。

確率論の一般的な方法と結果を紹介するのがこの本の目的であるが，その理論の中でももっともデリケートな，もっとも困難な，同時にもっとも有用な諸問題を特に取扱う。なかんずく努力したのは大数の事象を考えたときの原因と結果の確率を決定すること，および事象がくり返されてゆくにつれてこの確率が近づいてゆく極限移行の法則を研究することである。……」

ラプラスはこのような意図で『確率の解析的理論』を著したのですが，その第 II 編「確率の一般理論」は第 1 章「この理論の一般法則」として次のように始めます (［2］pp.165–168)。

「1　すべての事象は，よしんばごく小さなもので自然界の大法則とは何のかかわりもないもののようにみえるとしても，天体の運行と同じ必然さでこの法則に従って起こっている。与えられた時点において物質を動かしているすべての力と，その分子の位置や速度をも知っている英知が，なおまたこれらの資料を解析するだけの広大な力をもつならば，同じ式に中に宇宙の最も大きな天体の運動も，また最も軽い原子の運動をも包みこむであろう。このような英知にとっては，不規則なものは何一つなく，空気や水蒸気のたった 1 つの分子が描く曲線も，太陽の軌道がわれわれにとってそうであると同じように，確実に規制されてみえるであろう。しかしこの大きな問題を解くために必要な資料の厖大さについてはわれわれは無知であり，その無力さの故に，きわめて限られた数であるにも拘らず，既知の資料の大部分は計算にかけることが不可能である。そしてわれわれにとっては何らの秩序なしに継起するかにみえる現象を，そ

の作用を偶然 (hasard) という語で言い表す不特定でかくされた原因のせいにしてしまう。偶然という語は実のところわれわれの無知の表現にほかならない。……

確率の理論は与えられた状況のもとで起こり得るすべての事象を，ある個数の同等に可能な，すなわちその存在について同時に不確かな場合にまとめて，その中から確率を求めている事象に対して好都合なものの数をきめることに帰着できる。この数と可能なすべての数の比が，この確率を測るものさしで，だからそれは好都合な場合の数を分子とし，可能なすべての場合の数を分母とする 1 つの分数である。……

1 つの事象が，互いに独立な 2 つの単純事象から複合されているとき，すべての可能な場合の総数は，各々の単純事象に関する可能な場合の数の積にひとしいことは明らかである。何となれば 2 つの事象の 1 つに関する場合のおのおのにもう 1 つの事象に関するあらゆる場合を組み合わせることが可能であるからである。同じ理由によって，複合事象に好都合な場合の総数も，単純事象のおのおのに好都合な場合の数の積である。したがって複合事象の確率は各単純事象の確率の積である。……

いくつかの単純事象が，互いに関連していて，第 1 の事象がおこったという仮定が第 2 の事象のおこる確率に影響するといったときには，複合事象の確率は，1° 第 1 の事象の確率，2° 第 1 の事象が起こったとした上で第 2 の事象が起こる確率，を決定して求められる。この 2 つの確率の積が複合事象の確率である。……」

彼は，まず，事象 A の確率 $P(\mathrm{A})$ を

$$P(\mathrm{A}) = \frac{\text{事象 A に対して好都合な場合の数}}{\text{与えられた状況のもとで起こり得るすべての場合の数}}$$

とします。

そして，互いに独立な 2 つの事象 A，B に対しては

$$P(\mathrm{A}\text{ と }\mathrm{B}\text{ がともに起こる}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B})$$

と計算するといいます。

さらに，必ずしも独立ではない 2 つの事象 A，B については

$$P(\mathrm{A}\text{ と }\mathrm{B}\text{ がともに起こる}) = P(\mathrm{A}) \times P(\mathrm{B}|\mathrm{A})$$

で求められるといっています。［この事実を，こんにちでは確率の乗法定理といっています。］

例として，1 つのサイコロを m 回投げたとき，1 の目が引き続いて出る確率を取り上げ，その確率は $\dfrac{1}{6^m} = \left(\dfrac{1}{6}\right)^m$ であるとしています (［2］p.168)。

2 つ目の性質の例としては壺の問題を取り上げます (［2］p.168)。3 つの壺 A，B，C があり，その 1 つには黒い球だけが，残りの 2 つには白い球だけが入っているものとするとき，壺 C から 1 つの白い球が取り出され，壺 B からは 1 つの黒い球が取り出される確率はいくらか，というものです。

壺 C から白い球が取り出される確率は $\dfrac{2}{3}$ です。壺 C から白い球が取り出されたとすると，残りの壺のうちどちらかが黒い球だけですから，壺 B から黒い球が取り出される確率は $\dfrac{1}{2}$ となります。よって，求める確率は $P = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$ ということになります。

ラプラスは『確率の解析的理論』第 II 編「確率の一般理論」の第 1 章「この理論の一般法則」で次のような法則を挙げています（［2］p.169，171)。

「第 1 法則　2 つの単純事象の複合事象の確率は，これら 2 つの事象のうちの 1 つの確率と，この事象が起こったとしたときに，もう 1 つの事象が起こるであろう確率との積にひとしい。」

「第 2 法則　観測された事象に基づいての，未来事象の確率は，これら 2 つの事象の複合事象の確率を，ア・プリオリ［生得的，先天的，非経験的］に決定したものを，同じくア・プリオリに観測された事象の確率を決定して割り算をしたときの商である。」

「第 3 法則　観測された 1 つの事象が n 個の異なった原因から結果できると仮定する。これら原因の確率は，事象の確率同様にそれら原因の存在に基づいて導かれる。各原因の確率は，その原因は実在するとの仮定のもとでのその事象の確率を分子とし，同じような確率をすべての原因に関して和を作ったものを分母とする分数である。」

「第 4 法則　未来事象の確率は，観測された事象に基づいての，各原因の確率と，この原因が実在したとしたとき未来事象が生起する確率との積の和である。」

これらがラプラスのいう一般法則です。これらの法則に基づいて確率計算がなされるのですが，その際「見たところ完全に同じであると考えられる物事の間に存在し得る不均等は確率計算の結果の上に目立った影響を及ぼし得るから特別な注意に値する」といっています（［2］p.172)。

例えば，硬貨投げを何回か行うとき。通常は硬貨は均質に作られていると仮定していますから，表が出る確率も裏が出る確率も［硬貨が立ってしまうということは想定していませんから］ともに $\dfrac{1}{2}$ です。

ところが，硬貨が「不均等」であると，確率は表か裏かのどちらかに多少偏ります。その値を a としておくと，どちらに偏っているかは分かりませんから，表が出る確率は $\dfrac{1}{2}+a$ または $\dfrac{1}{2}-a$ となります。

投げる回数が 1 回のときは，この a がどちらにつくかは分かりませんから，表が出る確率は依然として $\dfrac{1}{2}$ です。しかし，回数が 2 回以上になると a が影響してきます。すなわち，2 回続けて表が出る確率は

$$\left(\frac{1}{2}+a\right)^2=\frac{1}{4}+a+a^2 \quad \text{か} \quad \left(\frac{1}{2}-a\right)^2=\frac{1}{4}-a+a^2$$

のいずれかとなります。ですから，2 回続けて表が出る確率は「上記の 2 つの確率を加え合わせて和の半分をとらねばならない」（［2］p.173)　ため，

$$\left\{\left(\frac{1}{2}+a\right)^2+\left(\frac{1}{2}-a\right)^2\right\}\div 2=\frac{1}{4}+a^2$$

とするのが妥当であることになります。

2 回とも裏が出る確率も同じく $\dfrac{1}{4}+a^2$ で，表，裏が 1 回ずつ出る確率は，同じ理由で，$\dfrac{1}{4}-a^2$ となります。

「このように単純事象の確率中に想定できる未知の誤差は，同一事象のくり返しという複合事象の確率を常に増大させる」ことになるというのです（［2］p.174)。

ラプラスはこの後，期待値についても言及しています (［2］p.174)。

「2　事象の確率はこれら諸事象の存在に関心のある人々の期待と懸念とを決定するのに役立つ。期待という語にはいろんな意味がある。それは本当らしいにすぎぬ仮定の中に何らかの財を待ちうける人の利益を一般的に表現している。偶然の理論ではこの利益は期待された額とそれを手に入れる確率との積である。全額が確率に比例して分配されると仮定して，人がその事象の危険をおかすことを欲しないとき返ってくるはずの部分が利益である。外部の状況をすべて捨てさったとき，全額をこのように分配することが唯一つの公正なやり方である。何となれば，確率の度合が同じであれば期待された額に同じ権利をもつからである。この利益を数学的期待値 (espérance mathématique) と名づけて，精神的期待値 (espérance morale) から区別する。こちらの方も前者同様に期待された財とそれを手にする確率とに依存するが，たいていは定義することも，まして計算にかけることもできぬ幾千もの変わりやすい状況に左右されている。これらの状況は期待された財の価値を増やすか減らすかするだけであることは事実であるが，精神的期待値それ自身もこの価値とそれを手に入れる確率との積と考えてもよい。しかしこのときは期待される財の中でその相対価値を絶対価値から区別しなくてはいけない。絶対価値はそれをほしがる動機には無関係であるが，これに反して相対価値は動機とともに増大する。…… 」

このような背景の下で確率論を展開していくのですが，その内容については割愛することにします。[精神的期待値についても最後の方の第 II 編第 10 章で考察されています。]

ラプラスの『確率の解析的理論』は，フェルマとパスカルが往復書簡を交わしたときから約 160 年の間に，いろいろな問題を解くための確率論から数学の一般理論としての確率論へと変わっていったことを表しています。[なお,『確率の解析的理論』では微分積分法がふんだんに使われています。だから「解析的」なのでしょう。]

---

19 世紀になると微分積分法の理論的基礎付けが確立してきますが，それが確率論にも応用されてより一般的で厳密な確率の理論が作られていきました。コルモゴロフ (Andreī Nikolaevič Kolmogorov (Колмогоров) : 1903–1987) の公理的な測度論的確率論はその 1 つの結晶といえます。興味がある人は，例えば

A. N. コルモゴロフ (根本 伸司，一條 洋・訳)「確率論の基礎概念」，東京図書，1969 (昭和 44)

A. N. コルモゴロフ (坂本 實・訳)「確率論の基礎概念」，筑摩書房 (ちくま学芸文庫)，2010 (平成 22)

などを見てください。

参考文献

［1］ B. パスカル (和田 誠三郎・訳)『書簡集』，人文書院 (「パスカル全集 1」所収)，1959 (昭和 34)

［2］ P. S. ラプラス (伊藤 清，樋口 順四郎・訳・解説)「ラプラス 確率論 – 確率の解析的理論 –」，共立出版 (現代数学の系譜 12)，1986 (昭和 61)

［3］ 「世界大百科事典 第 2 版」，日立システムアンドサービス，2004 (平成 16)