ニュートンの流率法

目　次

※1　訳文中の［　］は訳者による補足。
※2　字下げされた小活字の部分は訳者の覚え書。

まえおき

14，15 世紀において，外的には商業活動の広域化や貨幣経済の発達などによって，内的には高次方程式の解法などのために，代数学が進展するのであるが，当初ヨーロッパ人が手にしていたイスラムの代数には未知数や演算を表す記号が欠如していた。しかし，15 世紀初頭になると，未知数を省略記号で置き換えるような動きが出てきた。イタリアでは未知数を表すのに cosa (もの) という言葉がよく使われていたが，それが単に c と表され，平方・立方や平方根にも省略記号 ce (censo)，cu (cubo)， R (radice) が用いられるようになったのである。

高次方程式の解法については，カルダノ (Girolamo Cardano : 1501–1576) が『偉大なる術，あるいは代数学の規則について』(*Ars magna, sive de regulis algebraicis* : 1545 年) において 3 次方程式，4 次方程式の解法を公表した。そして，19 世紀になって，5 次以上の一般の代数方程式は代数的には解けないことがアーベル (Niels Henrik Abel : 1802–1829) やガロア (Evariste Galois : 1811–1832) によって示された。

記号化については，16 世紀末，ヴィエート (François Viète : 1540–1603) は『解析法序説』(*In Artem Analyticen Isagoge* : 1591 年) の中で，未知数だけでなく既知数をも記号化し，『方程式の理解と改良についての 2 つの論文』(*De Aequationum Recognitione et Emendatione Tractatus duo* : 1591 年) において，3 次方程式の「解の公式」を表している。

一方，ステヴィン (Simon Stevin : 1548–1620) は『十分の一』(*De Thiende*，仏訳 *La disme* : 1585 年) において，小数の概念を導入し，その表記法と計算法をまとめた。また，航海の拡大・活発化 —— コロンブス (Columbus : 1451–1506) が新大陸を発見したのが 1492 年，マゼラン (Magellan : 1480?–1521) によって世界周航がなし遂げられたのが 1522 年 —— に伴って，天文学や三角法に対する関心が深まり，計算の簡素化を図るために対数が発明された。レギオモンタヌス (Regiomontanus (Johannes Müller) : 1436–1476) が『あらゆる種類の三角形について』(*De triangulis omnimedis*) を執筆したのが 1463 年頃 (出版は 1533 年) で，ネイピア (John Napier : 1550–1617) が『対数の驚くべき体系の説明』(*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*) を出版したのが 1514 年のことである。

1543 年にはコペルニクス (Nicolaus Copernicus : 1473–1543) が科学革命の発端となる著作『天球の回転について』(*De Revolutionibus Orbium Coelestium*) を出版している (ただし，原稿は 1530 年頃までには完成していたらしい。) し，ケプラー (Johannes Kepler : 1571–1630) は『新天文学』(*Astronomia nova* : 1609 年) および『宇宙の和声』(*Harmonice mundi* : 1619 年) において，惑星運動に関する 3 つの法則 —— すなわち，楕円軌道の法則［惑星は太陽を 1 つの焦点とする楕円軌道上を運動する。］，面積速度一定の法則［惑星と太陽とを結ぶ線分が単位時間に描く面積は一定である。］，調和の法則［惑星の公転周期の 2 乗は軌道である楕円の長半径の 3 乗に比例する。］—— を提案している。

16 世紀から 17 世紀へと世紀が変わる頃，ガリレオ (Galileo Galilei : 1564–1642) は運動学に新生面を拓く。1589 年のある日，ピサの斜塔の上から同じ材質で重さが異なる 2 つの物体を落下させて，それらが同時に地上に落下することを発見した，ことが伝わっているが，これは事実ではないようである。しかし，いずれにしても，彼は斜面上の運動についての実験などにより，「真空中では，すべての物体は，その質，量，形態のいかんにかかわらず，同じ速さで落下する」こと，および

「自由落下は等加速度運動であり，落下速度は落下時間に比例し，落下距離は落下時間の自乗に比例する」ことを発見している。そして，後者の後半 (時間自乗法則，今日では $x=\dfrac{1}{2}gt^2$) は 1604 年までには，前半 (速度・時間比例法則，今日では $v=gt$) は 1610 年までには獲得されていた。自由落下運動については主著『新科学論議』(*Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze attenenti alla mecanica & i movimenti locali* : 1638 年)，特にその「第 3 日」，において展開されている。

ところで，ギリシア人は問題解決のために 2 つの方法を用いていた。それらは解析および総合といわれ，パッポス (Πάππος (Pappos，Pappus) : 4 世紀前半) の『数学集成』(Συναγωγή : *Collectio*) 第 7 巻によれば，次のようなものである (［10］pp.596–599)。

> 「解析 (ἀνάλυσις : analysis) とは求められていることをあたかも認められているかのようにおいて，そこからの順序正しい帰結を通して，総合の結果として認められるあることに進んでいく方法である。つまり，解析においては，求められていることが既になされたと仮定して，このことが何から生じるのかとか，また後者の前提となる根拠は何かなどを，既に知られているかあるいは第 1 原理として挙げられているあることに出会うまで，後戻りすることによって調べるのである。そして，そのような方法を，逆向きの解法ということで，解析と呼ぶのである。
>
> 一方，総合 (σύνθεσις : synthesis) においては，［解析の］逆の方向に進むのであり，［つまり,］解析において最後に到達したことを既になされたと仮定して，以前に前提であったことの結果としてそれらを自然な順序に整理し，それらをたがいに結び付けることによって，最後に求められたことの作図へと到達する。そして，これを総合と呼ぶのである。
>
> 解析には 2 つの種類があり，1 つは，その目的が真理を追究することであって，理論的といわれ，そして他方は，その目的が発見のためにおくものを見出すことであって，問題的といわれる。」

解析に代数を利用しようというヴィエートの着想は 17 世紀中葉に明確な形となって現れる。すなわち，デカルト (René Descartes : 1596–1650) は既知数の記号化を完成の域にまで高め，記号化された量を線分で表すことによって幾何学と代数学の融合を図り，フェルマ (Pierre de Fermat : 1601–1665) とともに，解析幾何学の創始者と呼ばれることになる。デカルトの成果は主著『方法序説』(*Discours de la Methode, Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences.* : 1637 年) の「試論」である『幾何学』(*La Géométrie*) に見られる。また，彼の数学に対する考えは『精神指導の規則』(*Regulae ad directionem ingenii* : 遺稿・1628 年頃執筆) にも表れている。一方，フェルマは『平面および立体の軌跡論』(*Ad locus planos et solidos isagoge* : 1637 年頃) において，デカルトよりも組織的にその理論を展開している。

数学的手法としての数学的帰納法がパスカル (Blaise Pascal : 1623–1662) によって確立されたのは，彼がフェルマとの賭けの分け前に関する書簡のやり取りによって確率論の第一歩を踏み出しつつあった 1650 年代初めであり，『数三角形論』(*Traité du Triangle arithmétique* : 1665 年刊行) の中に現れる。また，フェルマは数学的帰納法と密接な関係にある別の証明法を 1638 年以前に用いていて，それは無限降下法といわれている。

さて，曲線に接線を引く問題は古代から考察されており，ユークリッド (Εὐκλείδης ((Eukleides) Euclid) : 前 300 頃) は円の接線について述べているし，アポロニウス (Ἀπολλώνιος (Apollonius) :

前 262–前 200?) は円錐曲線の接線を調べている。17 世紀初めには，一般的な平面曲線にも対応できるような方法が 3 つ知られていた。

(1) デカルトによる代数的な方法 …… 代数曲線に対して，その 1 つの座標軸上に中心をもつ円とその代数曲線との 2 つの交点が一致したとして，法線を求める。超越曲線には対応していない。彼は未定係数法を用いて必要な値を求めているのであるが，曲線の方程式が複雑なときはそれは簡単ではない。そこで，フッデ (Jan Hudde : 1628–1704) は 2 重根を求めるための方法を改良した。

(2) フェルマによる無限小解析的な方法 …… 曲線 $y = f(x)$ に対して，無限小量 e をとり $f(a) \fallingdotseq f(a+e)$［向等 (adaequalitas)］として，最後に e を含む項を捨てる。この接線決定法は極値決定法の応用であった。この方法はのちにスリューズ (François de Sluse : 1623–1685)，ホイヘンス (Christiaan Huygens : 1629–1695) らによって定式化されている。

(3) ロベルヴァル (Gilles Personne de Roberval : 1602–1675) による運動学的な方法 …… 曲線は瞬間的な運動の合成によってつくられるとし，その方向を示す線として接線を定める。代数曲線，超越曲線の別なく対応できるものとして提案された。

また，求積・求長問題も古くから取り上げられており，アルキメデス (Ἀρχιμήδης (Archimēdēs) : 前 287?–前 212) は今日取り尽くしの方法と呼んでいる手法を用いて放物線の切片などの求積を行ったほか，螺線の求長も手掛けている。17 世紀になると，ケプラーが『葡萄酒樽の立体幾何学』(*Stereometria doliorum* : 1615 年) において提示した求積の方法は，カヴァリエリ (Bonaventura Cavalieri : 1598–1647) の『ある新しい方法によって推進された不可分者による連続体の幾何学』(*Geometria indivisibilibus continuoum nova quadam ratione promota* : 1635 年) において精密化された。トリチェッリ (Evangelista Torricelli : 1608–1647) は 1644 年に回転双曲体の求積を発表している。この頃，サイクロイドの接線や求積・求長の研究が盛んに行われ，ロベルヴァル，パスカル，レン (Christopher Wren : 1632–1723) らが結果を出している。なお，1659 年末には，ホイヘンスはサイクロイドの等時性，すなわち「サイクロイドの弧に沿って落下する質点は，どこから落下を始めても，最低点に達するのに同じ時間を要する」ことを発見した。彼は，また，縮閉線・伸開線の研究も推進し，サイクロイドの縮閉線は同じサイクロイドであることを発見している。これらは『振子時計』(*Horologium oscillatorium* : 1673 年) に載せられている。

ウォリス (John Wallis : 1616–1703) は『無限算術』(*Arithmetica Infinitorum* : 1656 年) の中で補間法を利用して x^n の求積を発見的に見出しており，また極限値の概念を導入するとともに無限小三角形の考えも提出している。ここで用いられた補間法はニュートン (Sir Isaac Newton : 1642–1727) による一般二項定理の発見の大きなきっかけになった。また，バロウ (Isaac Barrow : 1630–1677) は微分積分法の基本定理の間近まで来てきたが，それは『幾何学講義』(*Lectiones Geometriae* : 1670 年) に見られる。それは，はじめ運動学的に考察され，次いで「講義 X」で運動学的手法によらずに証明されている。

また，16，17 世紀は科学革命の時代であった。科学革命とは，一言でいうと，コペルニクスによって明確に問題提起され，ガリレオ，フランシス・ベーコン (Francis Bacon : 1561–1626) やデカルトらによって思想的・方法論的基盤がつくられ，ニュートン，ハーヴィ (William Harvey : 1578–1657) らによって一定の成果が得られた，古代・中世のスコラ的・アリストテレス (Ἀριστοτέλης (Aristotelēs) : 前 384–前 322) 的な枠組みを超えて近代科学が成立していく自然科学上の変革のことである。通

常，1543 年のコペルニクス『天球の回転について』から 1687 年のニュートン『自然哲学の数学的諸原理 (プリンキピア)』(*Principia mathematica philosophiae naturalis*) までの期間における変革を指す。なお，ハーヴィの『心臓および血液の運動について』(*Exercitatio anatomica de motu cordis et sanguinis in animalibus*) は 1628 年に出版されている。科学理論の変革の様子は次の図のようになるという (［19］p.94)。

	旧思想の体系	中間段階	科学革命の遂行
力学	アリストテレス	インペトゥス理論	ガリレオ ＞ ニュートン
天文学	プトレマイオス (Πτολεμαῖος)	コペルニクス	ケプラー ／
生理学	ガレノス (Γαληνός)	ヴェサリウス (Vesalius)	ハーヴィ
化学	錬金術	ボイル (Boyle)	ラヴワジェ (Lavoisier)

17 世紀になると学術研究の交流と推進を図り，科学者間の情報交換を促すための組織として科学学会がつくられるようになる。最も早いものはローマのアカデミア・デイ・リンチェイ (Accademia dei Lincei) であり 1603 年に設立された。その後，1657 年にフィレンツェのアカデミア・デル・チメント (Accademia del Cimento)，1660 年にロンドン王立協会 (The Royal Society of London)，1666 年にフランスの科学アカデミー (Académie des Sciences)，1700 年にプロイセン科学アカデミー (王立科学協会：die Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften) が設立されている。

ルネサンス期には，独自の生活手段をもたずパトロンの庇護の下に研究を進める学者が多くいた。例えば，ヴィエートはアンリ 3 世 (Henri III：在位 1574–1589) やアンリ 4 世 (Henri IV：在位 1589–1610) の顧問官であったし，ハーヴィはジェームズ 1 世 (James I：在位 1603–1625) およびチャールズ 1 世 (Charles I：在位 1625–1649) の侍医であった。また，デカルトはスウェーデン女王クリスティーナ (Kristina：在位 1632–1654) に請われてストックホルムへ赴いたが，そこでの早起きと寒さのために命を縮めたともいわれる。他の学者たちは，主に大学教授と科学愛好家［生業をもち，そこからの収入に支えられて科学研究にいそしむ人々］とに分類される。ガリレオはピサ大学とパドヴァ大学で教授職にあった (後に，トスカナ大公付の哲学者・首席数学者になっている) し，コペルニクスは医者であり聖職者であった。17 世紀も後半になると，パトロンから独立して自らの生活手段をもつ科学者が増えてくる。その生業は多岐にわたるが，活動の拠点は宮廷から科学学会へと変わっていった。例えば，ニュートンの論敵の 1 人であるフック (Robert Hooke：1635–1703) はロンドン王立協会の創設に参画し，のちに王立協会幹事 (書記) になっている。ニュートン自身は王立協会会長になり，生涯その職にあった。

ところで，16，17 世紀のヨーロッパは，一言でいえば，15，16 世紀の大航海時代・ルネサンス・宗教改革を経て，絶対王政の時代を迎え，18 世紀の産業革命・市民革命へと続く時代であるといえる。

イギリスは，エリザベス 1 世 (Elizabeth I：在位 1558–1603) のときに絶対王政の頂点を迎え，1588 年にはスペイン無敵艦隊を撃破して海上覇権獲得の第一歩を印した。この頃はイギリス・ルネサンスの最盛期であり，シェークスピア (Shakespeare：1564–1616) らが活躍した。また，『新機関』(*Novum organum*：1620 年) などの著作や「知は力なり (Ipsa scientia potestas est.)」という言葉で知られているフランシス・ベーコンも同時代の人である。ステュアート朝 2 代目のチャー

ルズ 1 世 (Charles I : 在位 1625–1649) の専制政治に対して議会は 1628 年に「権利の請願」を提出して対立が激しくなり，1642 年には王党派と議会派という形で内乱状態になった［ピューリタン革命：〜1649］。1660 年の王政復古の後，メアリ (Mary II : 在位 1689–1694) とその夫ウィリアム 3 世 (William III : 在位 1689–1702) の両王は 1688 年に議会が提出した「権利の宣言」を承認し，「権利章典」として発布した。これにより，議会が主権を握る立憲王政が確立し，絶対王政は消滅した［名誉革命］。なお，イングランドは 1536 年にウェールズを，1707 年にスコットランドを併合して大ブリテン王国となった。ときはアン女王 (Anne : 在位 1702–1714) の治世である。［なお，ニュートンは 1705 年にアン女王からナイト (Knight) の称号を授かった。］そして，この後，イギリスでは産業革命が起こることになる。

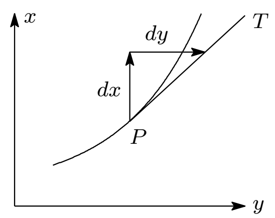
フランスでは，1562 年にユグノー戦争 (〜1598) と呼ばれる宗教内乱が起きたが，アンリ 4 世は 1598 年に「ナントの勅令」を発して，ユグノーにも信仰の自由と市民権を認める政策をとり内乱を収拾した。ルイ 13 世 (Louis XIII : 在位 1610–1643) は宰相にリシュリュー (Richelieu : 1585–1642) を登用して，貴族やユグノーの勢力を抑えて絶対王政を確立した。太陽王・ルイ 14 世 (Louis XIV : 在位 1643–1715) は「朕は国家なり」といって王権神授説を唱え，典型的な専制君主となった。この時代がフランス絶対王政の絶頂期である。彼はヴェルサイユに宮殿をつくった上，文学や美術を奨励したので，フランスはヨーロッパ文化の中心となった。ランブイエ夫人 (Catherine de Vivonne de Savelli, Marquise de Rambouillet : 1588–1665) によって先鞭をつけられたサロンは，18 世紀になって，ランベール夫人 (Anne Thérese Lambert : 1647–1753)，タンサン夫人 (Claudine-Alexandrine Guérin de Tencin : 1682–1749)，ジョフラン夫人 (Marie-Thérèse Rode Geoffrin : 1699–1777) らのサロンが開かれ，サロン文化として大きく花開くことになる。［なお，ダランベール (Jean Le Rond d'Alembert : 1717–1783) はタンサン夫人の私生児である。］1700 年に，ルイ 14 世が孫のフェリペ 5 世 (Felipe IV : 在位 1700–1724，1724–1746) をスペイン王に即位させたことに対してスペイン継承戦争が起こった (〜1713)。1713 年のユトレヒト条約でフェリペ 5 世の王位は承認されたが，領土割譲や財政悪化など失ったものも大きかった。フランス革命が起きるのはルイ 16 世 (Louis XVI : 在位 1774–1792) のときで 1789 年のことである。

東フランク王国のオットー 1 世 (Otto I : 在位 936–973) は 962 年にローマ教皇ヨハネス 12 世 (Johannes XII : 在位 955–964) からローマ皇帝の帝冠を受け，神聖ローマ帝国が誕生した。神聖ローマ帝国は，16 世紀半ばには，北海・バルト海沿岸からイタリア北部に及ぶ領土を有しており，オーストリアのハプスブルク家が皇帝権を独占していて (1438–1806)，さながらハプスブルク帝国のようであった。特に，カール 5 世 (Karl V : 在位 1519–1556) のときには「日の沈まぬ国」といわれるほどであった。さて，ドイツでおこった宗教改革は 1555 年のアウクスブルクの宗教和議で一定の解決 (妥協) を見たが，その後も続くプロテスタントとカトリックの対立の中で，1618 年には三十年戦争が勃発した (〜1648)。1648 年のウェストファリア条約でドイツにおける宗教紛争は一応決着した。プロイセンで絶対王政が形成されるのは 18 世紀になってからで，フリードリヒ 2 世 (Friedrich II : 在位 1740–1786) は「君主は国家の第一の下僕(しもべ)である」と唱える啓蒙専制君主であった。また，オーストリアのハプスブルク家では 1740 年に女帝マリア・テレジア (Maria Theresia : 在位 1740–1780) が父カール 6 世 (Karl VI : 在位 1711–1740) の領土を相続するが，それに異議を唱えるフランスやプロイセンとの間にオーストリア継承戦争 (1740–1748) が起こることになる。

イタリアはルネサンス発祥の地として知られる。15 世紀から 16 世紀にかけて，レオナルド・

ダ・ヴィンチ (Leonardo da Vinci：1452–1519)，ミケランジェロ (Michelangelo：1475–1564)，マキァヴェリ (Machiavelli：1469–1527) らが活躍していた。イタリアの支配権をめぐってスペイン・ハプスブルク家とフランス・ヴァロア家の間にイタリア戦争 (1521–1544：1494–1559) が起こった。この戦争では外交使節による交渉も行われたが，それを通して主権国家［一定の領域に対して排他的に権力を行使し，他の国家にも同じ権利を承認する国家］という概念が形成されていく。16 世紀半ばには，イタリアはローマ教皇領，ナポリ王国，ヴェネツィア共和国，ジェノヴァ共和国などに分かれていた。教皇領，ヴェネツィアを除いて，イタリア王国が成立するのは 1861 年 3 月のことである。

このような背景の下で，17 世紀中葉にニュートンとライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz：1646–1716) によって，独立に，微分積分法が確立されていくのである。秋月 康夫は次のように言う (［20］pp.252–253)。

> 「曲線に接線はどうすればひけるであろうか。焦点さえ分っていれば，楕円や，放物線には正確に接線はひける。一般の曲線 —— 例えば $y = x^3 + x + 1$ のグラフ —— についてはどうであろうか。これが微分法発見以前の主要問題であった。ニュートンは別だが，ライプニッツはこの問題を足場に微分法の発見にたち至っている。彼の最初の論文では［原注：原文の意を体して述べるのであって，史実通りではない。x 軸が垂直，y 軸が水平なのは，史実による。］，本質的には函数 $y = f(x)$ において，微分 (differential) (dx，dy) は，接線上の点の流通座標と解されている。そして，
>
> 
>
>
> 曲線 $y = f(x)$ の接線を求めるには，図を見る代りに次の器械によれば苦もなく求められるとして，
>
> $$d(u+v) = du + dv$$
> $$d(uv) = udv + vdu$$
>
> なる法則を与えている。これによって
>
> $$dx^2 = xdx + xdx = 2x \cdot dx$$
> $$dx^3 = x^2dx + x(2xdx) = 3x^2 \cdot dx$$
>
> だから $y = x^3 + x + 1$ なら $dy = (3x^2 + 1)dx$。よってこの曲線上の点 (1，3) における接線は，点 (1，3) を通り傾きが 4 の直線をひけばよいという流儀である。
>
> ところが，他方ニュートンは，彼の力学体系を建てる手段として，微分法を考え出した。そこでは微分は，いくらでも小さくなる微小な単位，即ち無限小として考えられた。爾来，力学の問題などを解く折には，dt 時間内の変化はこれこれで，高位の無限小は無視してかくかくであると結論するなど，まるで‘微分’は生き物であるかのように扱われてきた。この扱い方は初等的な問題を解くにはきわめて有効であった。が，複雑な問題に対してはある意味では天才的要素を要求し，また厳密性を欠く故に難渋であった［原注：近時，解析初歩の教育が，専ら微分係数によっていて，‘微分’の考えを欠く傾きにあるのは，ここに因するのであろう。］。」

そして，微分積分学の最初の教科書『曲線の理解のための無限小解析』(*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*) がロピタル (Marquis de L'Hospital：1661–1704) によって出版されたのは 1696 年のことである。この 30 年ほどが微分積分法の草創期ということになろうか。

ニュートン，ライプニッツによって微分積分法の基本定理が定式化され，微分積分法が形成され

ることは多くの書物に紹介されているが，ニュートンに関してはその内容が実際どのようなものなのかを著したものは少ない。(ライプニッツについては，彼の著作の一部ではあるが，原 亨吉らによる［4］，［5］がある。) そこで，ニュートンの流率法に関するいくつかの論文の訳出を試みたのである。

訳出にあたっては，

Isaaci Newtoni Opera quae exstant omnia. Commentariis illustrabat Samuel Horsley，5 vols., Frommann Verlag, 1779–1785 ［以下では，『全集』と呼ぶ。］

を使用したが，

The Mathematical Papers of Isaac Newton，edited by D. T. Whiteside，8 vols., Cambridge U.P., 1967–1981 ［以下では，『数学論文集』と呼ぶ。］

The Correspondence of Isaac Newton，edited by H. W. Turnbull，J. F. Scott，A. R. Hall and L. Tilling，7 vols., Cambridge U. P., 1959–1977 ［以下では，『書簡集』と呼ぶ。］

Unpublished Scientific Papers of Isaac Newton，edited and translated by A. Rupert Hall and Marie Boas Hall，Cambridge U. P., 1962 ［以下では，『未公刊科学論文集』と呼ぶ。］

Isaaci Newtoni, Equitis Aurati, Opuscula Mathematica, Philosophica et Philologica，3 vols., Lausanne & Geneve, 1744 ［以下では，『遺稿集』と呼ぶ。］

The Method of Fluxions and Infinite Series; with its Applications to the Geometry of Curve-Lines，transl. by John Colson，printed by Henry Woodfall，1736 ［以下では，『英訳版方法』と呼ぶ。］

Sir Isaac Newton's Two Treatises of the Quadratura of Curves, and Analysis by Equations of an infinite Number of Terms, explained, transl. by John Stewart, printed by James Bettenham, 1745 ［以下では，『英訳版求積』と呼ぶ。］

も参照した。

また，以下の文献を利用した。

［1］ 髙橋 秀裕「ニュートン　— 流率法の変容 —」，東京大学出版会 (コレクション数学史 3)，2003 (平成 15)

［2］ 伊東 俊太郎，原 亨吉，村田 全「数学史」，筑摩書房 (数学講座 18)，1975 (昭和 50)

［3］ 中村 幸四郎「近世数学の歴史　— 微積分の形成をめぐって —」，日本評論社，1980 (昭和 55)

［4］ G. W. ライプニッツ (原 亨吉，佐々木 力，三浦 伸夫，馬場 郁，斎藤 憲，安藤 正人，倉田 隆・訳・解説)「ライプニッツ著作集 2　— 数学論・数学 —」，工作舎，1997 (平成 9)

［5］ G. W. ライプニッツ (原 亨吉，横山 雅彦，三浦 伸夫，馬場 郁，倉田 隆，西 敬尚，長島 秀男・訳・解説)「ライプニッツ著作集 3　— 数学・自然学 —」，工作舎，1999 (平成 11)

［6］ 河辺 六男 (責任編集)「ニュートン　— 自然哲学の数学的諸原理 —」，中央公論社 (世界の名著 26)，1971 (昭和 46)

［7］ R. デカルト (原 亨吉・訳)『幾何学』，白水社 (「デカルト著作集 1」所収)，1973 (昭和 48)

［8］ ユークリッド (中村 幸四郎，寺阪 英孝，伊東 俊太郎，池田 美恵・訳・解説)「ユークリッド原論」，共立出版，1971 (昭和 46)

［9］ 田村 松平 (責任編集)「ギリシアの科学」，中央公論社 (世界の名著 9)，1972 (昭和 47)

［10］ Ivor Thomas (transl.)，*Greek Mathematical Works.* vol.II，Harvard U. P. (Loeb Classical Library 362)，2005

［11］ N. オレーム (中村 治・訳)『質と運動の図形化』，平凡社 (「中世思想原典集成 19 (中世末期の言語・自然哲学)」所収)，1994 (平成 6)

［12］ R. S. ウェストフォール (田中 一郎，大谷 隆昶・訳)「アイザック・ニュートン」(全 2 冊)，平凡社，1993 (平成 5)
［13］ 島尾 永康「ニュートン」，岩波書店 (岩波新書 88)，1979 (昭和 54)
［14］ 伊東 俊太郎「ガリレオ」，講談社 (人類の知的遺産 31)，1985 (昭和 60)
［15］ V. カッツ (上野 健爾，三浦 伸夫・監訳)「カッツ 数学の歴史」，共立出版，2005 (平成 17)
［16］ 佐々木 力「数学史」，岩波書店，2010 (平成 22)
［17］ B. L. ヴァン・デル・ウァルデン (村田 全，佐藤 勝造・訳)「数学の黎明　— オリエントからギリシアへ —」，みすず書房，1984 (昭和 59)
［18］ 近藤 洋逸「数学の誕生　— 古代数学史入門 —」，現代数学社，1977 (昭和 52)
［19］ 伊東 俊太郎，広重 徹，村上 陽一郎「改訂新版　思想史のなかの科学」，平凡社 (平凡社ライブラリー 430)，2002 (平成 14)
［20］ 秋月 康夫「輓近代数学の展望」，筑摩書房 (ちくま学芸文庫)，2009 (平成 21)
［21］ 高木 貞治「解析概論　改訂第三版」，岩波書店，1961 (昭和 36)
［22］ 塹江 誠夫，桑垣 煥，笠原 皓司「詳説演習　微分積分学」，培風館，1979 (昭和 54)
［23］ 杉浦 光夫，清水 英男，金子 晃，岡本 和夫「解析演習」，東京大学出版会 (基礎数学 7)，1989 (平成元)
［24］ 有馬 哲，浅枝 陽「演習詳解　微積分」(全 2 冊)，東京図書，1981 (昭和 56)
［25］ 佐藤 満彦「ガリレオの求職活動 ニュートンの家計簿」，中央公論新社 (中公文庫 1548)，2000 (平成 12)
［26］「文化のなかの数学」，日本評論社 (数学セミナー増刊 シンポジウム数学 3)，1981 (昭和 56)
［27］ 木下 康彦，木村 靖二，吉田 寅 (編)「改訂版　詳説 世界史研究」，山川出版社，2008 (平成 20)

［D1］ 日本数学会 (編集)「岩波　数学辞典　第 4 版」，岩波書店，2007 (平成 19)
［D2］ 青本 和彦，上野 健爾，加藤 和也，神保 道夫，砂田 利一，高橋 陽一郎，深谷 賢治，俣野 博，室田 一雄 (編集委員)「岩波　数学入門辞典」，岩波書店，2005 (平成 17)
［D3］ 伊東 俊太郎，坂本 賢三，山田 慶児，村上 陽一郎 (編集委員)「縮刷版　科学史技術史事典」，弘文堂，1994 (平成 6)

無限個の項をもつ方程式による解析について

『全集』第 1 巻 pp.257–282

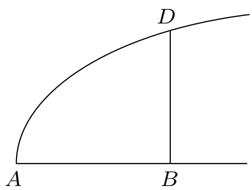
原題は，De Analysi per æquationes numero terminorum infinitas (On Analysis by equations unlimited in the number of their terms)。

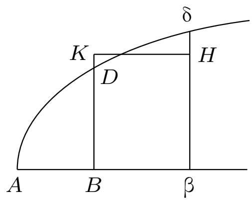
1669 年 6 月の執筆と推定されている。初めて出版されたのは 1711 年。

「無限個の項をもつ方程式」とは関数の無限級数展開のことである。これを求積法に利用する。

私がかつて考案した無限個の項の系列［無限級数］によって曲線の量［曲線下の面積］を測る一般的な方法を，次のように，厳密に証明したというよりは簡潔に説明した。 257

第 1 章





ある曲線 AD の底線 (basis) AB に対して，縦線 (applicatus) BD は垂直であるとし，$AB = x$，$BD = y$ と呼ぼう。そして，a，b，c，$\cdots$ を与えられた量，m，n を整数としよう。すると，

ここでの図について，『数学論文集』，『遺稿集』，『英訳版求積』はすべて上の左図を挙げるが，『全集』は上の右図を載せている。

単純な曲線の求積

規則 I

もし $ax^{\frac{m}{n}} = y$ ならば，$\dfrac{an}{m+n}\,x^{\frac{m+n}{n}} = ABD$ の面積 であろう。

$\displaystyle\int ax^{\frac{m}{n}}\,dx = \frac{na}{m+n}\,x^{\frac{m+n}{n}}$ ということ。

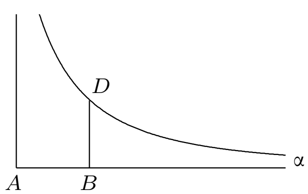
関数の無限級数展開 (このことに関しては後述) を基に項別積分 (このことについては規則 II, III) によって積分を考えようというニュートンの着想からすれば，基本的な積分はこれだけで十分である。

このことは例により明らかであろう。

1　もし $x^2\,(= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$，すなわち $a = 1 = n$，$m = 2$，ならば，$\dfrac{1}{3}x^3 = ABD$ であろう。

2　もし $4\sqrt{x}\,(= 4x^{\frac{1}{2}}) = y$ ならば，$\dfrac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}\left(= \dfrac{8}{3}\sqrt{x^3}\right) = ABD$ であろう。

3　もし $\sqrt[3]{x^5}\,(= x^{\frac{5}{3}}) = y$ ならば，$\dfrac{3}{8}x^{\frac{8}{3}}\left(= \dfrac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}\right) = ABD$ であろう。



4　もし $\dfrac{1}{x^2}\,(= x^{-2}) = y$，すなわちもし $a = 1 = n$，$m = -2$，ならば，$\left(\dfrac{1}{-1}x^{\frac{-1}{1}} =\right) - x^{-1}\left(= \dfrac{-1}{x}\right) = \alpha$ の方向へ無限に延長された αBD であろう。それは線 BD のもう一方の部分に横たわっているから，計算では［その符号を］負とする。

5　もし $\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\left(=x^{-\frac{3}{2}}\right)=y$ ならば，$\left(-\dfrac{2}{1}x^{-\frac{1}{2}}=\right)\dfrac{2}{-\sqrt{x}}=BD\alpha$ であろう。

6　もし $\dfrac{1}{x}\left(=x^{-1}\right)=y$ ならば，$\dfrac{1}{0}x^{\frac{0}{1}}=\dfrac{1}{0}x^{0}=\dfrac{1}{0}\times 1=\dfrac{1}{0}=$ 無限 であろう。これは，線 BD の両方の部分に［横たわっている］双曲線の面積のようなものである。

例 4 について，ホワイトサイド (Derek Thomas Whiteside : 1932–2008) は「ニュートンが意図したことは，定積分が実際には逆になる：$\displaystyle\int_x^{\infty} x^{-2}\,dx=-\int_{\infty}^{x} x^{-2}\,dx=x^{-1}$ ということであると思われる。」という (『数学論文集』第 2 巻 p.209)。

例 6 は $\displaystyle\int_x^{\infty}\frac{1}{x}\,dx=[\,\log|x|\,]_x^{\infty}$ であるが，その値は無限であるとし，「流率に関する 1666 年 10 月論文」(*The October 1666 Tract on Fluxions* : 1666 年) では命題 8 のところで「対数表によって機械的に見出されるであろう。」といっている (『数学論文集』第 1 巻 p.403)。

なお，「流率に関する 1666 年 10 月論文」は流率法に関する最初期の重要な論文であるが，はじめて印刷されたのは 1962 年のことである。これを，以下では「1666 年論文」と呼ぶ。

258

第 2 章
単純なものからつくられた曲線の求積
規則 II

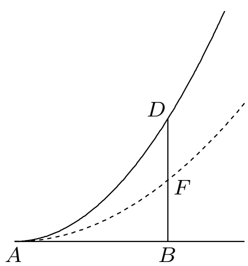
もし y そのものの値がそのような種類のいくつかの項から構成されるならば，その面積もまたそれらの各々の項から別々に生じる面積から構成されるであろう。

259

第 1 の例

もし $x^2+x^{\frac{3}{2}}=y$ ならば，$\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=ABD$ であろう。

なぜならば，もしつねに $x^2=BF$ および $x^{\frac{3}{2}}=FD$ とすれば，前の規則により，$\dfrac{1}{3}x^3=$ 線 BF によって描かれた面 AFB および $\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$［線］$DF$ によって［描かれた面］AFD で，それゆえ，$\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=$［面］$ABD$ 全体 であろうからである。

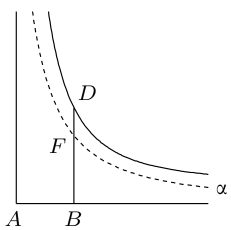


それゆえ，もし $x^2-x^{\frac{3}{2}}=y$ ならば，$\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}=ABD$ であろう。

また，もし $3x-2x^2+x^3-5x^4=y$ ならば，$\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{4}x^4-x^5=ABD$ であろう。

260

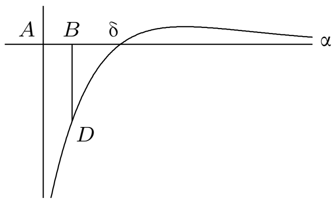
第 2 の例



もし $x^{-2}+x^{-\frac{3}{2}}=y$ ならば，$-x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}=\alpha BD$ であろう。あるいは，もし $x^{-2}-x^{-\frac{3}{2}}=y$ ならば，$-x^{-1}+2x^{-\frac{1}{2}}=\alpha BD$ であろう。

もしそれらの符号を替えるならば，その［面］全体が底線 $AB\alpha$ の上に落ちるときに限り，面 αBD として正の値 $\left(x^{-1}+2x^{-\frac{1}{2}}\text{ または } x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}\right)$ をもつであろう。

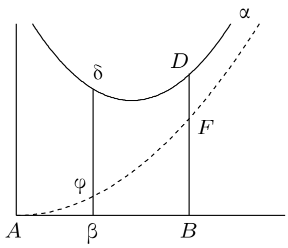
261　しかし，もし何らかの部分が［底線より］下に落ちる (これは曲線が底線を，ここに見える δ のように，B と α の間で十字形に分ける［交わる］ときに起きる) ならば，その部分が［底線より］



上にある部分から取り去られると，その差の値を得るであろう。しかし，もしその和を［知りたいと］熱望するならば，それぞれの面［の面積］を別々に求め，それらを加えよ。私は，この規則についての残りの例において同様の注意が払われることを切望する。

第 3 の例 262

もし $x^2+x^{-2}=y$ ならば，$\frac{1}{3}x^3-x^{-1}=$ 描かれた面［の面積］であろう。しかし，ここで，そのように見出された前述の面の部分は線 BD の反対側の辺に横たわっているということが注意されなければならない。



すなわち，$x^2=BF$ および $x^{-2}=FD$ とおかれると，$\frac{1}{3}x^3=BF$ によって描かれた面 ABF［の面積］，および $-x^{-1}=DF$ によって描かれた $DF\alpha$［の面積］であろう。

そして，このことは，求める面［の面積］の値における底線 x の比例の指数 $\left(\dfrac{m+n}{n}\right)$ が異なる符号によって作用されるときに，つねに起きる。このような場合において，この面の任意の中央部分 $BD\delta\beta$ (面は両側に無限であるから，これだけを与えることができる) はそのようにして見出される。

より小さい底線 $A\beta$ に関係する面をより大きい底線 AB に関係する面から引き去れば，それらの底線の差の上に立つ面 $\beta BD\delta$ が得られるであろう。この例では次のようである。(先の図を見よ。) もし $AB=2$ および $A\beta=1$ ならば，$\beta BD\delta=\dfrac{17}{6}$ であろう。

そして実際，AB に関係する面 (すなわち，$ABF-DF\alpha$) は $\dfrac{8}{3}-\dfrac{1}{2}$，あるいは $\dfrac{13}{6}$ であろうし，$A\beta$ に関係する面 (すなわち，$A\varphi\beta-\delta\varphi\alpha$) は $\dfrac{1}{3}-1$，あるいは $-\dfrac{2}{3}$ であろうし，そして，それらの差 (すなわち，$ABF-DF\alpha-A\varphi\beta+\delta\varphi\alpha=\beta BD\delta$) は $\dfrac{13}{6}+\dfrac{2}{3}$，あるいは $\dfrac{17}{6}$ であろう。

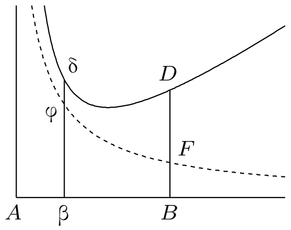
同じ仕方で，もし $A\beta=1$，$AB=x$ ならば，$\beta BD\delta=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}x^3-x^{-1}$ であろう。

それゆえ，もし $2x^3-3x^5-\dfrac{2}{3}x^{-4}+x^{-\frac{3}{5}}=y$，および $A\beta=1$ ならば，$\beta BD\delta=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{2}x^6+\dfrac{2}{9}x^{-3}+\dfrac{5}{2}x^{\frac{2}{5}}-\dfrac{19}{18}$ であろう。

$$\int_1^2\left(x^2+x^{-2}\right)dx=(AB\text{ 部分})-(A\beta\text{ 部分})=\int_0^2\left(x^2+x^{-2}\right)dx-\int_0^1\left(x^2+x^{-2}\right)dx$$
$$=\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{17}{6}$$

ということであるから，積分計算は，$a<b$ とするとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^b f(x)\,dx-\int_0^a f(x)\,dx$ とするということである。

最後に，もし量 x^{-1} が y そのものの値の中に見出されるならば，その項は (双曲線の面をつくっているから) 残り［の項］とは別に考えられなければならないことが注意されるべきである。



例えば，もし $x^2+x^{-3}+x^{-1}=y$ ならば，$x^{-1}=BF$ および $x^2+x^{-3}=FD$，さらに $A\beta=1$ とすると，［$\delta\varphi FD$ は］項 x^2+x^{-3} から生成されるから，$\delta\varphi FD=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^{-2}$ であろう。

263 それゆえ，もし残りの面 $\beta\varphi FB$，これは双曲線である，が何らかの計算法に従って与えられるならば，全体 $\beta BD\delta$［の面積］が与えられるであろう。

第 3 章

他のすべての［曲線の］求積

規則 III

しかし，もし y の値そのもの，あるいはその何らかの項が前述のものより複雑であれば，算術家が 10 進数において割ったり，根［ベキ根］を開いたり，あるいは複合方程式 (affectas æquationes) を解いたりするのと同じ方法で文字［変量］について操作することによって，より単純な項に還元されなければならない。そして，次に，それらの項そのものから，前述の規則によって，求める曲線の面を見出すであろう。

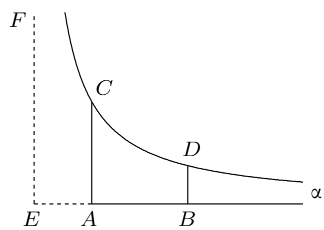
> これら 3 つの「規則」はすでに「1666 年論文」の命題 8 に関連する箇所で見られるが，ニュートンの積分法にとって，この規則 III こそが重要である。つまり，規則 I，II だけでは流率法の豊かな世界は拓けない。
> さらに，以下で示される，この規則 III の 3 つの方法のうち，第 3 の「方程式を解いたりする」方法が最も重要である。「1666 年論文」では第 1 の「除法」と第 2 の「開平」については例とその解が与えられているが，第 3 の「方程式」については解は与えられていない。

除法による例

$\dfrac{aa}{b+x}=y$ とすると，その曲線は明らかに双曲線になる。

いま，この方程式がその分母から自由にされるために，私は次のように除算を行う。

$$
\begin{array}{l}
b+x\,\big)\ aa+0\ \Big(\ \dfrac{aa}{b}-\dfrac{aax}{b^2}+\dfrac{aax^2}{b^3}-\dfrac{aax^3}{b^4}\cdots \\
\qquad\qquad \underline{aa+\dfrac{aax}{b}} \\
\qquad\qquad\quad 0-\dfrac{aax}{b}+0 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-\dfrac{aax}{b}-\dfrac{aax^2}{b^2}} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0+\dfrac{aax^2}{b^2}+0 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+\dfrac{aax^2}{b^2}+\dfrac{aax^3}{b^3}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0-\dfrac{aax^3}{b^3}+0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{-\dfrac{aax^3}{b^3}-\dfrac{aax^4}{b^4}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0+\dfrac{aax^4}{b^4} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots
\end{array}
$$



そして，それゆえ，この［方程式］$y=\dfrac{aa}{b+x}$ の代わりに新しい［方程式］$y=\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{a^2x}{b^2}+\dfrac{a^2x^2}{b^3}-\dfrac{a^2x^3}{b^4}\cdots$ が現れ，この系列は無限に続く。それゆえ，(第 2 の規則により) 求める面積 $ABDC$ は $\dfrac{a^2x}{b}-\dfrac{a^2x^2}{2b^2}+\dfrac{a^2x^3}{3b^3}-\dfrac{a^2x^4}{4b^4}\cdots$ に等しいであろうし，その上，無限系列の［値の］ためにこの［系列の］はじめのいくつかの項が任意に使われるにもかかわらず，もし x が b より数倍小さければ，十分に正確である。 264

同様に，もし $\dfrac{1}{1+xx}=y$ であるならば，除算が行われると $y=1-x^2+x^4-x^6+x^8\cdots$ が生じるであろう。それゆえ，(第 2 の規則により) $ABDC=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{7}x^7+\dfrac{1}{9}x^9\cdots$ であろう。

あるいは，もし項 xx が除数のはじめにおかれるならば，［すなわち］$xx+1$) で割るという仕方では，y の値として $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}\cdots$ が生じるであろう。それゆえ，(第 2 の規則により) $BD\alpha=-x^{-1}+\dfrac{1}{3}x^{-3}-\dfrac{1}{5}x^{-5}+\dfrac{1}{7}x^{-7}\cdots$ であろう。x が十分小さいときは前の方法で，十分大きいと仮定されるときには後の方法で，［処理を］進めなければならない。

最後に，もし $\dfrac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}=y$ ならば，除算が行われると $2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}\cdots$ が生じる。それゆえ，$ABDC=\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2+\dfrac{14}{5}x^{\frac{5}{2}}-\dfrac{13}{3}x^3\cdots$ であろう。

規則 III に関して，まず最初は，関数を除法によって単純化する場合。

はじめの例 $ABDC=\dfrac{a^2}{b}x-\dfrac{a^2}{2b^2}x^2+\dfrac{a^2}{3b^3}x^3-\cdots=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^2}{nb^n}x^n$ において $a_n=\dfrac{(-1)^{n+1}a^2}{nb^n}$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(-1)^{n+2}a^2}{(n+1)b^{n+1}}}{\frac{(-1)^{n+1}a^2}{nb^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)n}{(n+1)b}\right|=\frac{1}{b}$$

が存在するから，$ABDC$ を表すこの無限級数の収束半径は $\rho=\dfrac{1}{\frac{1}{b}}=b$ となる。すなわち，この無限級数は $|x|<b$ の範囲で収束するから，「x が b より数倍小さければ」収束が保証される，という訳である。

ところで，$\displaystyle\int\frac{a^2}{b+x}\,dx=a^2\log|b+x|$，$\displaystyle\int\frac{1}{1+x^2}\,dx=\tan^{-1}x$ であるから，上で得られたことは，

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots\qquad(-1<x\leqq 1)\qquad[a=b=1]$$

$$\tan^{-1}x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots\qquad(|x|\leqq 1)$$

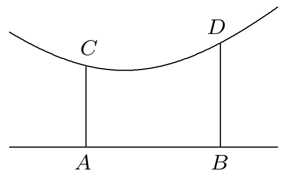
ということになる。

なお，「$xx+1$)」とした部分は，ホワイトサイドによれば，$\displaystyle\int_{\infty}^{x}\frac{1}{1+x^2}\,dx=-\tan^{-1}\frac{1}{x}$ ということらしい (『数学論文集』第 2 巻 p.214)。

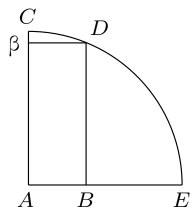
根を開くことによる例

もし $\sqrt{aa+xx}=y$ であるならば，私は次のようにその根を開く。

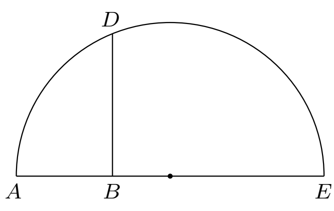
$$
\begin{array}{l}
aa + xx \left(a + \dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{x^4}{8a^3} + \dfrac{x^6}{16a^5} - \dfrac{5x^8}{128a^7} \cdots \right. \\
\underline{aa} \\
\quad 0 + xx \\
\qquad \underline{xx + \dfrac{x^4}{4a^2}} \\
\qquad 0 - \dfrac{x^4}{4a^2} \\
\qquad\quad \underline{- \dfrac{x^4}{4a^2} - \dfrac{x^6}{8a^4} + \dfrac{x^8}{64a^6}} \\
\qquad\qquad 0 + \dfrac{x^6}{8a^4} - \dfrac{x^8}{64a^6} \\
\qquad\qquad \underline{+ \dfrac{x^6}{8a^4} + \dfrac{x^8}{16a^6} - \dfrac{x^{10}}{64a^8} + \dfrac{x^{12}}{256a^{10}}} \\
\qquad\qquad\qquad 0 - \dfrac{5x^8}{64a^6} + \dfrac{x^{10}}{64a^8} - \dfrac{x^{12}}{256a^{10}} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \cdots\cdots
\end{array}
$$



265 それゆえ，方程式 $\sqrt{aa+xx} = y$ の代わりに，新しい［方程式］，つまり $y = a + \dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{x^4}{8a^3} + \dfrac{x^6}{16a^5} - \dfrac{5x^8}{128a^7} \cdots$ が引き出される。そして，(規則 2 により) 求める面積 $ABDC$ は $= ax + \dfrac{x^3}{6a} - \dfrac{x^5}{40a^3} + \dfrac{x^7}{112a^5} - \dfrac{5x^9}{1152a^7} \cdots$ であろう。そして，これが双曲線の求積である。



同様に，もし $\sqrt{aa-xx} = y$ とするならば，この根は $a - \dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{x^4}{8a^3} - \dfrac{x^6}{16a^5} - \dfrac{5x^8}{128a^7} \cdots$ であろう。それゆえ，求める面積 $ABDC$ は $ax - \dfrac{x^3}{6a} - \dfrac{x^5}{40a^3} - \dfrac{x^7}{112a^5} - \dfrac{5x^9}{1152a^7} \cdots$ に等しいであろう。そして，これが円の求積である。



あるいは，もし $\sqrt{x-xx} = y$ とおくならば，根は無限系列 $x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \dfrac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \dfrac{5}{128}x^{\frac{9}{2}} \cdots$ に等しいであろう。そして，求める面積 ABD は $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \dfrac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \dfrac{1}{72}x^{\frac{11}{2}} - \dfrac{5}{704}x^{\frac{11}{2}} \cdots$，あるいは，$x^{\frac{1}{2}}$ in $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{5}x^2 - \dfrac{1}{28}x^3 - \dfrac{1}{72}x^4 - \dfrac{5}{704}x^5 \cdots$ に等しいであろう。そして，これが円の面積の求積である。

もし $\dfrac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$ (この平方は楕円の曲線［弧］の長さを与える) ならば，［分母，分子の］両方の根を開くことによって

$$
\frac{1 + \dfrac{1}{2}ax^2 - \dfrac{1}{8}a^2x^4 + \dfrac{1}{16}a^3x^6 - \dfrac{5}{128}a^4x^8}{1 - \dfrac{1}{2}bx^2 - \dfrac{1}{8}b^2x^4 - \dfrac{1}{16}b^3x^6 - \dfrac{5}{128}b^4x^8} \cdots\cdots
$$

266 が生じる。そして，10 進分数において行うように，除算が行われることによって

$$\begin{array}{lllll} 1 & +\frac{1}{2}\,b\,x^2 & +\frac{3}{8}\,b^2\,x^4 & +\frac{5}{16}\,b^3\,x^6 & +\frac{35}{128}\,b^4\,x^8\ \cdots\cdots \\ & +\frac{1}{2}\,a & +\frac{1}{4}\,ab & +\frac{3}{16}\,ab^2 & +\frac{5}{32}\,ab^3 \\ & & -\frac{1}{8}\,a^2 & -\frac{1}{16}\,a^2b & -\frac{3}{64}\,a^2b^2 \\ & & & +\frac{1}{16}\,a^3 & +\frac{1}{32}\,a^3b \\ & & & & -\frac{5}{128}\,a^4 \end{array}$$

を得る。それゆえ，求める面積は $\begin{array}{lll} x & +\frac{1}{6}\,b\,x^3 & +\frac{3}{40}\,b^2\,x^5\ \cdots\cdots \\ & +\frac{1}{6}\,a & +\frac{1}{20}\,ab \\ & & -\frac{1}{40}\,a^2 \end{array}$ である。 267

しかし，この操作は，方程式の適切な準備によって，しばしば短縮されるということが注意されなければならない。例えば，［先程］述べられた例 $\dfrac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}} = y$ において，もし分数の両方の部 268
分［分母，分子］に $\sqrt{1-bxx}$ を掛けると，$\dfrac{\sqrt{\begin{array}{l}1+a\,x^2-ab\,x^4\\ \quad -b\end{array}}}{1-bx^2} = y$ が生じるであろうし，操作の残りは，分子の根号を開き，分母で割るだけで，やり遂げられる。

これら［の例］から，y のどのような値でも (ここに見られる $x + \dfrac{\sqrt{x-\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt[3]{ax^2+x^3}} - \dfrac{\sqrt[5]{x^3+2x^5-x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x+x^2}-\sqrt{2x-x^{\frac{2}{3}}}} = y$ のように，そこに現れる根号あるいは分母がどんなに複雑なものであっても) 単純な項の無限系列［無限級数］に還元する方法は十分明らかであろうし，それらから，第 2 の規則によって，求める面［の面積］が知られるようになるであろうと，私は信じる。

2 つ目は，開平によって単純化する場合。
数の平方根を開くのと同様の仕方で根号を開いて無限級数を生成する。実例は後述 (33 ページ)。
3 つ目の例では，適当な前処理をすれば計算が簡素化されることが注意されている。

最初の例 $y = \sqrt{x^2+a^2}$ では，$t = \sqrt{x^2+a^2} + x$ とおけば，$x = \dfrac{t^2-a^2}{2t}$ となるから，$\sqrt{x^2+a^2} = t - x = \dfrac{t^2+a^2}{2t}$，$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t^2+a^2}{2t^2}$ となる。従って，

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+a^2}\,dx &= \int \frac{t^2+a^2}{2t}\cdot\frac{t^2+a^2}{2t^2}\,dt = \int \frac{1}{4}\left(t + \frac{2a^2}{t} + \frac{a^4}{t^3}\right)dt \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}t^2 + 2a^2\log|t| - \frac{a^4}{2t^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(2a^2\log|t| + 2\cdot\frac{t^2-a^2}{2t}\cdot\frac{t^2+a^2}{2t}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(a^2\log|\sqrt{x^2+a^2}+x| + x\sqrt{x^2+a^2}\right) \end{aligned}$$

となる。これを無限級数展開を用いて求めているのである。

第 2 の例 $y = \sqrt{a^2-x^2}$ では，$x = a\sin t$ とおくと，$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)} = a\cos t$，$\dfrac{dx}{dt} = a\cos t$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= \int a\cos t\cdot a\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt \\
&= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{a^2}{2}\,(t+\sin t\cos t) \\
&= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)
\end{aligned}
$$

ということになる。

3 つ目の例 $y=\sqrt{x-x^2}$ では，$t=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ とすると，$x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}$，$\sqrt{x-x^2}=\sqrt{(1-x)^2\dfrac{x}{1-x}}=(1-x)\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{t}{1+t^2}$ だから，

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{x-x^2}\,dx &= \int \frac{t}{1+t^2}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt = 2\int \frac{t^2}{(1-t^2)^3}\,dt \\
&= 2\int\left(\frac{1}{(1+t^2)^2}-\frac{1}{(1+t^2)^3}\right)dt \\
&= 2\left\{\left(\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\tan^{-1}t\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left.-\left(\frac{t}{4(1+t^2)^2}+\frac{3t}{8(1+t^2)}+\frac{3}{8}\tan^{-1}t\right)\right\} \\
&= 2\left(\frac{t}{8(1+t^2)}-\frac{t}{4(1+t^2)^2}+\frac{1}{8}\tan^{-1}t\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{8}(2x-1)\sqrt{x-x^2}+\frac{1}{8}\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)
\end{aligned}
$$

である。

なお，ホワイトサイドは $\displaystyle\int_0^x (x-x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx=-\frac{1}{8}\left(\sin^{-1}(1-2x)+2(1-2x)\sqrt{x-x^2}\right)$ としている（『数学論文集』第 2 巻 p.217)。

第 4 章
複合方程式を解くことによる例
第 1 節
複合方程式の数値による解法

［文字係数の方程式の］解法には大きな困難があるから，はじめに，私が数値［係数の］方程式について使う方法を明らかにしよう。

$y^3-2y-5=0$ が解かれるものとしよう。そして，2 を，求める根からその 10 分の 1 より小さいだけ異なる数［第 1 次近似］としよう。次に，$2+p=y$ とおき，これを方程式におけるその値［の代わり］に代入すると，そこから新しい［方程式］$p^3+6p^2+10p-1=0$ が生じ，その根 p が求められなければならず，その結果として［それが］商に加えられる。確かに，(p^3+6p^2 はその小ささのために無視されるから) $10p-1=0$，あるいは $p=0.1$，は真の値に近い。それゆえ，商の中に 0.1 を書き，$0.1+q=p$ と仮定して，その値を，前のように，代入すると，そこから $q^3+6.3q^2+11.23q+0.061=0$ が生じる。

そして，$11.23q+0.061=0$ は真の値に近づく，あるいは (すなわち，これおよび主要な商の最初の数字が排他的に離れている場所［位，桁］の数と同じだけ多くの数字が導き出されるまで割ることによって) q はほとんど -0.0054 に等しくなるから，これは負の数であるため，商の下の部分に -0.0054 を書く。

そして，$-0.0054+r=q$ と仮定して，前のように，これを代入する。そして，このような仕方で，操作を望むだけ続ける。しかし，もし，いま見つけられる，1 つが除かれた，商の中 269
にある数字の数の 2 倍だけ多く，操作を続けることを望むならば，q の代わりに $-0.0054+r$ を，その最初の項 (q^3) の小ささのためにそれを無視して，この $6.3q^2+11.23q+0.061$ に代入すると，近似的に $6.3r^2+11.16196r+0.000541708=0$，あるいは ($6.3r^2$ を捨てて) 近似的に $r=\dfrac{-0.000541708}{11.16196}=-0.00004853$ が生じ，これを商の負の部分に書く。最後に，商の負の部分を正［の部分］から取り去ると，求める商 2.09455147 を得る。

$y^3-2y-5=0$		$+2.10000000$ -0.00544853 $+2.09455147=y$
$2+p=y$	$+y^3$	$+8+12p+6p^2+p^3$
	$-2y$	$-4-2p$
	-5	-5
	和	$-1+10p+6p^2+p^3$
$0.1+q=p$	$+p^3$	$+0.001+0.03q+0.3q^2+q^3$
	$+6p^2$	$+0.06\quad+1.2\quad+6.0$
	$+10p$	$+1\quad+10$
	-1	-1
	和	$+0.061+11.23q+6.3q^2+q^3$
$-0.0054+r=q$	$+6.3q^2$	$+0.000183708-0.06804r+6.3r^2$
	$+11.23q$	$-0.060642\quad+11.23$
	$+0.061$	$+0.061$
	和	$+0.000541708+11.16196r+6.3r^2$
$-0.00004853+s=r$		

より多くの次元の［高次の］方程式は全く異なることなく解かれ，ここで行ったように，もし最初の項を徐々に［次々と］省略すれば，その操作は最後まで軽減するであろう。

さらに，この例において，もし $p=0.1$ が真の値に十分に近いかを疑ったならば，$10p-1=0$ の代わりに $6p^2+10p-1=0$ を仮定し，その根の最初の数字を商に書くべきであったことが注意されなければならない。そして，最後に得られる方程式において，最後から 2 番目の項の係数の平方が，最後の項に最後から 3 つ目の項の係数を掛けた積より 10 倍大きくはないとき，商の 2 番目あるいは 3 番目の数字を，このような仕方で探し出すことが適当である。

確かに，もし述べられた仕方によって，商に加えられるあろう数字をすべて見つけ出せば (すなわち，最後に得られた方程式の最後の 3 つの項からより小さい根を導き出せば)，特に非常に多くの次元の［高次の］方程式において，作業はたいてい減るであろう。なぜならば，その仕方でいずれの段階においても商のために 2 倍多くの数字を得るであろうからである。

方程式を解くこの方法が広く知られているかどうかを私は知らないが，確かに，他のものと比べ 270
て単純であるし，実用に適していると，私には思える。その証明は操作の方法そのものから明らかであり，それゆえ，必要なときには，簡単に記憶の中に呼び戻される。

いくつかの項が欠けているか，あるいは項が全然欠けていないか，いずれの方程式もほとんど同じように容易に扱われる。そして，得られた商とともに，その根がはじめに提示された方程式の根と等しくなる［ような］方程式がつねに残される。それゆえ，操作の検証によって，これは算術の他のものにおけるのと同様に行うことができる［ことが分かる］。すなわち，(解析学者［デカルトのことを指している］に知られているように) はじめの方程式の根から商を取り去ることによって，最後の方程式あるいはその［方程式の］最後の 2 つか 3 つの項がそこから生み出されるかも知れない。

ここにどのような作業があろうとも，何らかの［種類の］量を他の［種類の］ものに代入する操作の中に見出されるであろう。［これは］いろいろにやり遂げられるが，次の方法が，特に係数の数値がいくつかの数字からなるときには，最も迅速であると私は信じる。

$p+3$ がこの［方程式］$y^4-4y^3+5y^2-12y+17=0$ における y の代わりに代入されるとしよう。すると，これは $\{[(y-4)\times y+5]\times y-12\}\times y+17=0$ の形に分解できるから，新しい方程式が次のように生成されるであろう。［すなわち，］$\overline{p-1}\times\overline{p+3}=p^2+2p-3$，そして p^2+2p+2 in $p+3=p^3+5p^2+8p+6$, そして p^3+5p^2+8p-6 in $p+3=p^4+8p^3+23p^2+18p-18$, そして $p^4+8p^3+23p^2+18p-1=0$ であり，これが求められていた［ものである］。

ここに述べられているのは，今日「ニュートン法」といわれる，方程式の近似解法である。
はじめに第 1 次近似として，方程式 $f(x)=0$ の予想される真の解に近い値 $x_1=a$ を定める。
次に真の解を $x=a+p$ として，これを方程式に代入し p の高次の項を無視して p の値 p_1 を定め，$x_2=a+p_1$ を第 2 次近似とする。
続いて，$p=p_1+q$ を，先に得られた p についての方程式に代入して，q の高次の項を無視して q の値 p_2 を定め，$x_3=a+p_1+p_2$ を第 3 次近似とする。
以下同様に，必要なだけこれを続ける。
このとき，注意すべきは，第 1 次近似をでき得る限り真の解に近い値にとるということである。p が小さな値 ($|p|<1$) にならなければ，p の高次の項を「無視する」ことはできない。

いま，$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ とする。ここに，$x=x_m+p$ を代入すれば，

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}a_k(x_m+p)^k &= \sum_{k=0}^{n}a_k\left((x_m)^k+k(x_m)^{k-1}p+\frac{k(k-1)}{2}(x_m)^{k-2}p^2\cdots+p^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}a_k(x_m)^k+p\sum_{k=0}^{n}ka_k(x_m)^{k-1}\\ &\qquad +p^2\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)}{2}a_k(x_m)^{k-2}+\cdots+\sum_{k=0}^{n}a_kp^k\\ &= f(x_m)+pf'(x_m)+\cdots\end{aligned}$$

となるから，$f(x_m+p)=0$ において p の 2 次以上の項を無視すると，$p\fallingdotseq-\dfrac{f(x_m)}{f'(x_m)}$ が得られる。

そこで，$x_{m+1}=x_m-\dfrac{f(x_m)}{f'(x_m)}$ として，近似度を高めていくというのが今日説明されているニュートン法である。

ここでの例 $f(y)=y^3-2y-5=0$ について見てみると ……

$f'(y)=3y^2-2$ だから，第 1 次近似を $x_1=a=2$ とすると，

$x_2=2-\dfrac{2^3-2\times2-5}{3\times2^2-2}=2-\dfrac{-1}{10}=2.1$　［ニュートンは，$p_1=0.1$］

$x_3=2.1-\dfrac{(2.1)^3-2\times2.1-5}{3\times(2.1)^2-2}=2.1-\dfrac{0.061}{11.23}=2.09456812\cdots$

$\fallingdotseq 2.0946$　［ニュートンは，$p_2 = -0.0054$］

「これおよび主要な商の最初の数字が排他的に離れている場所の数と同じだけ多くの数字が導き出されるまで割る」とは，
この段階での近似解は $x_2 = 2.1$ であり，一方，$\dfrac{0.061}{11.23} = 0.005431\cdots$ であるから，これらの値で最初に 0 でない数字が現れる位［桁］は 2 つ離れているので，この除算は最初に 0 でない数字が現れた位から 2 桁の位まで行う，ということである。

$$x_4 = 2.0946 - \frac{(2.0946)^3 - 2 \times 2.0946 - 5}{3 \times (2.0946)^2 - 2} \fallingdotseq 2.0946 - \frac{0.00054155}{11.162}$$
$$\fallingdotseq 2.09455148 \quad \text{［ニュートンは，} p_3 = -0.00004853\text{］}$$

この段階での式 $q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061$ に $q = -0.0054 + r$ を代入すると，
$$r^3 + 6.2838r^2 + 11.16204748r + 0.000541550536$$
となるが，最高次の項を無視した［「1 つが除かれた」というのはこのことか?］式に代入すると，
$$6.3r^2 + 11.16196r + 0.000541708$$
になる。
そして，$0.000541550536/11.16204748 = 0.000048517132\cdots$
$0.000541708/11.16196 = 0.000048531619\cdots$ である。
近似解 2.0946 とは，最初に 0 でない数字が現れる位は 4 つ離れているから，有効な数字を 4 桁求めて，0.00004853 としている。

$$x_5 = 2.09455148 - \frac{(2.09455148)^3 - 2 \times 2.09455148 - 5}{3 \times (2.09455148)^2 - 2}$$
$$\fallingdotseq 2.09455148 - \frac{-0.0000000017214585312785857}{11.16143770711057} = 2.094551481542327\cdots$$
$\cdots\cdots\cdots$

なお，$y^3 - 2y - 5 = 0$ の実数解は
$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(5 + \sqrt{\frac{643}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(5 - \sqrt{\frac{643}{27}}\right)} = 2.094551481542\cdots$$
である。(残りの 2 つの解は虚数解。)

なお，もう 1 つの例の，$y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12y + 17 = \{[(y-4) \times y + 5] \times y - 12\} \times y + 17$ はよく使われる変形。

第 2 節
複合方程式の文字による解法

これで数値［係数の方程式］については明らかにされた。文字［係数］の方程式 $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ が解かれるものとしよう。

はじめに，x が零のときの y の値を求める，すなわち，この方程式 $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$ の根を探し出し，それが $+a$ であると見つける。それゆえ，商の中に $+a$ と書き，$+a + p = y$ と仮定して，y の代わりにこの値を代入して，そこから得られる項 $\left(p^3 + 3ap^2 + 4a^2p\cdots\right)$ を余白におく。これらから，特に p および x がそれぞれ［単独で］最小の次元である項，$+4a^2p + a^2x$ を取り上 271
げて，それらを近似的に零に等しいと，あるいは近似的に $p = -\dfrac{1}{4}x$，あるいは $p = -\dfrac{1}{4}x + q$ と，仮定する。そして，商の中に $-\dfrac{1}{4}x$ を書き，$-\dfrac{1}{4}x + q$ を p の代わりに代入する。そして，そこから得られる項を，添えられた表に見られるように，再び余白に書く。それから，特に q および x がそれぞれ最小の次元である項，$+4a^2q - \dfrac{1}{16}ax^2$ を取り上げて，近似的に $q = \dfrac{xx}{64a}$ と，

あるいは $q=+\dfrac{xx}{64a}+r$ と，仮定する。そして，商に $+\dfrac{xx}{64a}$ を追加し，$\dfrac{xx}{64a}+r$ を q の代わりに代入する。そして，望むだけこれを続ける。

$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$ $y=a-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{64a}+\dfrac{131x^3}{512a^2}+\dfrac{509x^4}{16384a^3}\cdots$		
$+a+p=y$	$+y^3$ $+a^2y$ $+axy$ $-2a^3$ $-x^3$	$+a^3 \quad +3a^2p+3ap^2+p^3$ $+a^3 \quad +a^2p$ $+a^2x+axp$ $-2a^3$ $-x^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$ $+3ap^2$ $+4a^2p$ $+axp$ $+a^2x$ $-x^3$	$-\frac{1}{64}x^3 \quad +\frac{3}{16}x^2q-\frac{3}{4}xq^2+q^3$ $+\frac{3}{16}ax^2-\frac{3}{2}axq \quad +3aq^2$ $-a^2x \quad +4a^2q$ $-\frac{1}{4}ax^2 \quad +axq$ $+a^2x$ $-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	$+3aq^2$ $+4a^2q$ $-\frac{1}{2}axq$ $+\frac{3}{16}x^2q$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$	$+\frac{3x^4}{4096a} \quad +\frac{3}{32}x^2r+3ar^2$ $+\frac{1}{16}ax^2+4a^2r$ $-\frac{1}{128}x^3 \quad -\frac{1}{2}axr$ $+\frac{3x^4}{1024a} \quad +\frac{3}{16}x^2r$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$
$+4a^2-\dfrac{1}{2}ax+\dfrac{9}{32}x^2\Big)+\dfrac{131}{128}x^3-\dfrac{15x^4}{4096a}\Big(+\dfrac{131x^3}{512a^2}+\dfrac{509x^4}{16384a^3}$ [$\cdots$]		

しかし，もし，1 つが除かれた，項の数の 2 倍だけ多くが，さらに，商に付け加えられることを望むならば，最後に得られる方程式の最初の項 $\left(q^3\right)$ を省略し，その上，x が商の最後から 2 番目の項 $[-\frac{1}{4}x]$ におけるものと同じ次元である，その第 2 の部分 $\left(-\dfrac{3}{4}xq^2\right)$ も省略し，残りの項 $\left(3aq^2+4a^2q\cdots\right)$ を，[上表に] 見るように，余白に書いて，$\dfrac{x^2}{64a}+r$ を q の代わりに代入して，そして，それから得られる方程式の最後の 2 つの項 $\left(\dfrac{15x^4}{4096a}-\dfrac{131}{128}x^3+\dfrac{9}{32}x^2r-\dfrac{1}{2}axr+4a^2r\right)$ から，除算 $4a^2-\dfrac{1}{2}ax+\dfrac{9}{32}x^2\Big)+\dfrac{131}{128}x^3-\dfrac{15x^4}{4096a}$ を行うことによって，商に加えるべき $+\dfrac{131x^3}{512aa}+\dfrac{509x^4}{16384a^3}$ を探し出す。

272 最後に，その商 $\left(a-\dfrac{x}{4}+\dfrac{xx}{64a}\cdots\right)$ が，第 2 の規則により，求める面積として $ax-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{192a}+\dfrac{131x^4}{2048a^2}+\dfrac{509x^5}{81920a^3}\cdots$ を与え，これは x が小さいほどより真の値に近づく。

ここでは，数値係数の方程式の解法の文字係数の方程式への応用として，いわば，陰関数表示さ

れた関数 $f(x,\, y)=0$ を陽関数表示 $y=\varphi(x)$ に変える方法が述べられている。
数値係数の場合のニュートン法と同じことをすればよいのだが，ここでの例 $y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$ では，x が小さいときには，次のようになる。
(1) $x=0$ とした $y^3+a^2y-2a^3=0$ を解くと $y=a$［これが第 1 次近似，すなわち無限級数表示の初項］だから，$y=a+p$ とする。
(2) この $y=a+p$ を $y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3$ に代入すると，$p^3+3ap^2+4a^2p+axp+a^2x-x^3$ となるから，p，x に関し，それらが分離していて，しかも，次数が最低である項を取り上げて，それを 0 に等しいとおく。すなわち，$4a^2p+a^2x=0$ とする。これから，$p=-\dfrac{1}{4}\,x$ となる。
この段階で $y=a-\dfrac{1}{4}\,x$ である。
(3) そこで，$p=-\dfrac{1}{4}\,x+q$ を $p^3+3ap^2+4a^2p+axp+a^2x-x^3$ に代入すると，

$$q^3+3aq^2-\frac{3}{4}\,xq^2+4a^2q-\frac{1}{2}\,axq+\frac{3}{16}\,x^2q-\frac{1}{16}\,ax^2-\frac{65}{64}\,x^3 \qquad \cdots \text{①}$$

となる。ここで，上と同様に，q，x に関して次数が最低の項を取り上げて，それを 0 に等しいとおくと，$4a^2q-\dfrac{1}{16}\,ax^2=0$ から，$q=\dfrac{x^2}{64a}$ となる。
ここで，① から q の最高次のものおよび x が商の「最後から 2 番目の」項と同次のもののうちの 2 番目のものを省略すると，

$$3aq^2+4a^2q-\frac{1}{2}\,axq+\frac{3}{16}\,x^2q-\frac{1}{16}\,ax^2-\frac{65}{64}\,x^3 \qquad \cdots \text{②}$$

となる。
この段階で，$y=a-\dfrac{1}{4}\,x+\dfrac{1}{64a}\,x^2$ である。
(4) そして，$q=\dfrac{x^2}{64a}+r$ を② に代入すると，

$$3ar^2+4a^2r-\frac{ax}{2}\,r+\frac{9x^2}{32}\,r-\frac{131x^3}{128}+\frac{15x^4}{4096a}$$

となり，① に代入すると，

$$\begin{aligned} &r^3+3ar^2+4a^2r-\frac{ax}{2}\,r+\frac{9x^2}{32}\,r-\frac{3x^3}{128a}\,r+\frac{3x^4}{4096a}\,r \\ &\qquad -\frac{3x}{4}\,r^2+\frac{3x^2}{64a}\,r^2-\frac{131x^3}{128}+\frac{15x^4}{4096a}-\frac{3x^5}{16384a^2}+\frac{x^6}{262144a^3} \end{aligned}$$

となる。
従って，いずれにしても，$4a^2r-\dfrac{131x^3}{128}=0$ より，$r=\dfrac{131x^3}{512a^2}$ である。
この段階で，$y=a-\dfrac{1}{4}\,x+\dfrac{1}{64a}\,x^2+\dfrac{131}{512a^2}\,x^3$ である。
(5) 以下，同様に続ける。

y［の展開式］が求められれば，面積は，規則 1 および 2 により，容易に求められる。
そして，ここに見られる，無限級数表示された関数の項別積分こそがニュートンの求積法の基本である。

第 3 節
同じ［方程式を］解くための他の方法

しかし，もし面積の値が，x が大きいときに真の値に近づかなければならないのであれば，$y^3+axy+x^2y-a^3-2x^3=0$ を例にしよう。それゆえ，これを解決するために，分離しているかあるいは一緒に掛けられている x と y が，最大［の次元］で，しかも，いたるところで等しい次元である，項 $y^3+x^2y-2x^3$ を選んで，そして，あたかもそれが零であるかのように［考えて]，これらから根を探し出す。それが x であると見出されたら，それを商の中に書く。あるいは，同じ

ことになるが，(x の代わりに単位を代入した) y^3+y-2 から根を導き出し —— それは 1 になる ——，それに x を掛けて，その積 (x) を商の中に書く。最後に，$x+p=y$ とおき，前の例におけるように，商 $x-\dfrac{a}{4}+\dfrac{aa}{64x}+\dfrac{131a^3}{512x^2}+\dfrac{509a^4}{16384x^3}\cdots$ を得るまで［操作を］進める。すると，面積は $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{ax}{4}+\boxed{\dfrac{aa}{64x}}-\dfrac{131a^3}{512x}-\dfrac{509a^4}{32768x^2}[\cdots]$ であり，これに関しては第 2 の規則の第 3 の例を見よ。私は，［説明の］明快さのために，x および a が互いに相互の場所に代入されること以外，すべてについて前の例と同じであるこの例を与えたから，そのため，他の解法の例をここに付け加える必要はない。

しかし，面積 $\left(\dfrac{xx}{2}-\dfrac{ax}{4}+\boxed{\dfrac{aa}{64x}}\cdots\right)$ はある漸近線に沿って無限にゆっくりと進む曲線によって制限されており，y について導き出された値の最初の項 $\left(x-\dfrac{a}{4}\right)$ はつねにその漸近線の中に制限され，それゆえ，その漸近線の位置は簡単に見出せるであろう。面積が x によって連続的に次々と割られていく項によって表されるときは，ときには真っ直ぐな漸近線の代わりに円錐曲線の放物線あるいはより複雑な他のものがあるときを除いて，同じことがつねに注意されなければならない。

ここで用いられている記号 $\boxed{\dfrac{aa}{64x}}$ は積分を表すもので，$\displaystyle\int\frac{aa}{64x}\,dx$ ということである。

さて，上で x が小さいときの方法を述べた後，ニュートンは周到に，ここで，x が大きな値のときの処理についても言及する。

「x および a が互いに相互の場所に代入されること以外，すべて」「同じである」ということは，解法の手順は，

(i) 最初の段階では，$a=0$ とした式から第 1 次近似を見つける。

(ii) 第 2 段階では，p，a に関して，それらが分離していてしかも，次数が最低である項を取り上げ，それを 0 に等しいとおいて，p を求める。

(iii) 第 3 段階以降は，第 2 段階と同様の操作を繰り返す。

ということになろう。

この例 $y^3+axy+x^2y-a^3-2x^3=0$ の場合は $\cdots\cdots$

(1) $a=0$ として，$y^3+x^2y-2x^3=0$ から，$y=x$ が得られ，これが第 1 次近似となる。

(2) $y=x+p$ として，$y^3+axy+x^2y-a^3-2x^3$ に代入すると，$4px^2+ax^2+3p^2x+apx+p^3-a^3$ となる。

このとき，条件を満たす項は $4px^2$，ax^2 であるから，$4px^2+ax^2=0$ として，$p=-\dfrac{a}{4}$ を得る。

(3) $p=-\dfrac{a}{4}+q$ として，$4px^2+ax^2+3p^2x+apx+p^3-a^3$ に代入すると，

$$4qx^2+3q^2x-\frac{aqx}{2}-\frac{a^2x}{16}+q^3-\frac{3aq^2}{4}+\frac{3a^2q}{16}-\frac{65a^3}{64}$$

となる。そこで，q，a に関して，それらが分離していてしかも，次数が最低である項を選んで，$4qx^2-\dfrac{a^2x}{16}=0$ とすれば，$q=\dfrac{a^2}{64x}$ となる。

(4) $q=\dfrac{a^2}{64x}+r$ を $4qx^2+3q^2x-\dfrac{aqx}{2}-\dfrac{a^2x}{16}+q^3-\dfrac{3aq^2}{4}+\dfrac{3a^2q}{16}-\dfrac{65a^3}{64}$ に代入すると，

$$\begin{aligned}&4rx^2+3r^2x-\frac{arx}{2}+\frac{3a^2r^2}{64x}-\frac{3a^3r}{128x}+\frac{15a^4}{4096x}+\frac{3a^4r}{4096x^2}\\&\qquad-\frac{3a^5}{16384x^2}+\frac{a^6}{262144x^3}+r^3-\frac{3ar^2}{4}+\frac{9a^2r}{32}-\frac{131a^3}{128}\end{aligned}$$

となるから，$4rx^2-\dfrac{131a^3}{128}=0$ とすると，$r=\dfrac{131a^3}{512x^2}$ が得られる。

(5) 以下，同様に続ければよい。続く項は $\dfrac{509a^4}{16384x^3}$，$\dfrac{1849a^5}{131072x^4}$，$\cdots$ となる。

しかし，a は x，y に関する係数であるから方程式に含まれない場合があり，この手順は汎用性があるとはいえない。

x が大きい値なら，$z = \dfrac{1}{x}$ は小さい値になるから，与式の文字を x から z に替えればよいと思われるが，ここでのニュートンはその表現を採用せず，「分離しているかあるいは一緒に掛けられている x と y が，最大［の次元］で，しかも，いたるところで等しい次元である，項」を選ぶという。

とすれば，上の (2) では，3 次の項 $4px^2 + 3p^2x + p^3$ が選ばれそうなものだが，そうではないし，(4) で $-\dfrac{131a^3}{128}$ が選ばれる根拠も明確ではない (と訳者には思える)。

この解法について，訳者にはニュートンの他の論文・手稿類を入手できないので，本文中に見られる表現の真意がどこにあるかは (少なくとも訳者には) 不明。

なお，この例だけなら，第 n 段階［はじめの $y^3 + x^2y - 2x^3 = 0$ とするところが第 1 段階］では，

$$\begin{cases} p_{n-1}\ [p,\ q,\ r\ \text{など}]\ \text{の 1 次の項のうち}\ x\ \text{の次数が最大のもの} \\ \text{与方程式での}\ x\ \text{の最高次は 3 次であるから，}(p_{n-1}\text{を含まない})\ x^{3-n+1}\text{単独の項} \end{cases}$$

を選ぶ，といってもよいかも知れない。ただし，これはあまり分かりやすい表現ではない。

(1′) 最初の $y^3 + x^2y - 2x^3 = 0$ は上と同様。

(2′) $y = x + p$ を代入 $\longrightarrow 4px^2 + ax^2 + 3p^2x + apx + p^3 - a^3$

$$\longrightarrow \begin{cases} p\ \text{の 1 次の項} \quad 4px^2 \\ x^{3-2+1} = x^2\ \text{の項} \quad ax^2 \end{cases} \longrightarrow p = -\frac{a}{4}$$

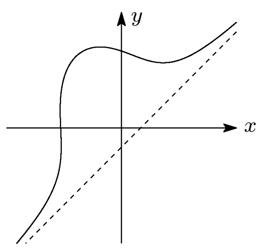
(3′) $p = -\dfrac{a}{4} + q$ を代入 $\longrightarrow 4qx^2 + 3q^2x - \dfrac{aqx}{2} - \dfrac{a^2x}{16} + q^3 - \dfrac{3aq^2}{4} + \dfrac{3a^2q}{16} - \dfrac{65a^3}{64}$

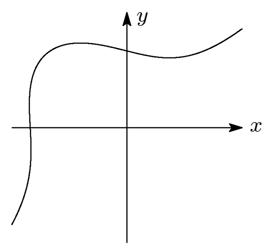
$$\longrightarrow \begin{cases} q\ \text{の 1 次の項} \quad 4qx^2 \\ x^{3-3+1} = x^1\ \text{の項} \quad -\dfrac{a^2x}{16} \end{cases} \longrightarrow q = \frac{a^2}{64x}$$

(4′) $q = \dfrac{a^2}{64x} + r$ を代入 $\longrightarrow \begin{cases} r\ \text{の 1 次の項} \quad 4rx^2 \\ x^{3-4+1} = x^0\ \text{の項} \quad -\dfrac{131a^3}{128} \end{cases} \longrightarrow r = \dfrac{131a^3}{512x^2}$

(5′) 以下，同様。

なお，$a = 2$ のとき，$y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$ および $y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$ のグラフは，それぞれ下左図，下右図のようになる。下左図では $y = x - \dfrac{1}{2}$ が漸近線である。





以上，x が小さい場合と x が大きい場合の 2 つの方法により，陰関数表示された曲線について，その曲線下の面積が求められることになる。

しかし，この方法は，個別的なものであって，楕円のような円状の曲線［閉曲線］には適用できない 273
ないから，［この方法については］省略して，例 $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$ によって，上で示された (すなわち，商の分子における x の次元が絶えず増やされている) もう一方［前者］の方法について，次のことを注意しよう。

I　もしいつか，x が零と仮定されるときに，y の値が無理量あるいは全く知られない［量］であることが起きるならば，それを何らかの文字で表すことが許されている。例えば，例 $y^3+a^2y+axy-2a^3-x^3=0$ において，もしこの $y^3+a^2y-2a^3$ の根が無理数あるいは知られない［量］であったならば，私は，それの代わりに任意の［文字］(b) をおくものと仮定して，次のように解法をやり遂げた。［すなわち，］商の中に b を書き，$b+p=y$ と仮定して，［ここに］見るように，それを y の代わりに代入する。それゆえ，新しい $p^3+3bp^2\cdots$ がつくり出され，b はこの $y^3+a^2y-2a^3=0$ の根と仮定されているから，零に等しい，項 $b^3+a^2b-2a^3$ が捨てられる。次いで，項 $3b^2p+a^2p+abx$ が商におかれるであろう $-\dfrac{abx}{3b^2+a^2}$ を与え，そして，$-\dfrac{abx}{3b^2+a^2}+q$ が p の代わりに代入されるであろう。以下，同様。

$y^3+aay+axy-2a^3-x^3=0 \qquad cc=3b^2+a^2$ としよう。 $y=b-\dfrac{abx}{c^2}+\dfrac{a^4bx^2}{c^6}+\dfrac{x^3}{c^2}+\dfrac{a^3b^3x^3}{c^8}-\dfrac{a^5bx^3}{c^3}+\dfrac{6a^5b^3x^3}{c^{10}}\cdots$		
$b+p=y$	$+y^3$	$+b^3+3b^2p+3bp^2+p^3$
	$+axy$	$+abx+axp$
	$+aay$	$+aab+aap$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$\frac{-abx}{cc}+q=p$	$+p^3$	$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6}\cdots$
	$+3bp^2$	$+\frac{3a^2b^3x^2}{c^4}-\frac{6ab^2x}{c^2}q\cdots$
	$+axp$	$-\frac{a^2bx^2}{c^2}+axq$
	$+ccp$	$-abx+ccq$
	$-x^3$	$-x^3$
	$+abx$	$+abx$
$c^2+ax-\dfrac{6ab^2x}{cc}\Big)\ \dfrac{a^4bx^2}{c^4}+x^3+\dfrac{a^3b^3x^3}{c^6}\ \Big(\ \dfrac{a^4bx^2}{c^6}+\dfrac{x^3}{c^2}+\dfrac{a^3b^3x^3}{c^8}\cdots$		

作業が終ったら，a の代わりに何らかの数をとって，数値方程式に関して上で示されたように，この［方程式］$y^3+a^2y-2a^3=0$ を解く。それから，b の代わりにその根を代入する。

II　もし前述の値が零ならば，すなわち，もし解かれるべき方程式において，この $y^3-axy+x^3=0$ のように，x または y が掛けられていない項がないならば，私は，x 単独の項そしてさらに y 単独の項，［あるいは，］もしそれが起こるのであれば，x が掛けられた他の［項の］うちで，それらの次元が最小である，項 $\big(-axy+x^3\big)$ を選ぶ。すると，これらは商の最初の項として $+\dfrac{xx}{a}$ を与
274 え，$\dfrac{xx}{a}+p$ が y の代わりに代入されるであろう。この $y^3-a^2y+axy-x^3=0$ においては，$-a^2y-x^3$，あるいは y^3-a^2y から，商の最初の項を導き出すことが許されるであろう。

方程式 $y^3+a^2y+axy-2a^3-x^3=0$ において，$x=0$ としたときの $y^3+a^2y-2a^3=0$ の根が「無理量あるいは全く知られない［量］である」ときには，その値を任意の文字，例えば b，で表しておく。
そして，前と同じように，操作を行う。すなわち，
$(1'')$ $y^3+a^2y-2a^3=0$ の根を $y=b$ としているから，$b^3+a^2b-2a^3=0$ である。
$(2'')$ $y=b+p$ として，$y^3+a^2y+axy-2a^3-x^3=0$ に代入すると，

$$p^3+3bp^2+\left(3b^2+a^2\right)p+apx+abx-x^3+b^3+a^2b-2a^3$$

となる。が，$b^3+a^2b-2a^3=0$ であるから，$c^2=3b^2+a^2$ と表せば，実際には，

$$p^3+3bp^2+c^2p+apx+abx-x^3$$

である。

ここでは，先の条件に従えば，c^2p および abx が選ばれるから，$p=-\dfrac{abx}{c^2}$ となる。

$(3'')$ $p=-\dfrac{abx}{c^2}+q$ として，$p^3+3bp^2+c^2p+apx+abx-x^3$ に代入すると，

$$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6}-x^3+\frac{3a^2b^2qx^2}{c^4}-\frac{a^2bx^2}{c^2}+\frac{3a^2b^3x^2}{c^4}$$
$$-\frac{3abq^2x}{c^2}-\frac{6ab^2qx}{c^2}+aqx+q^3+3bq^2+c^2q$$

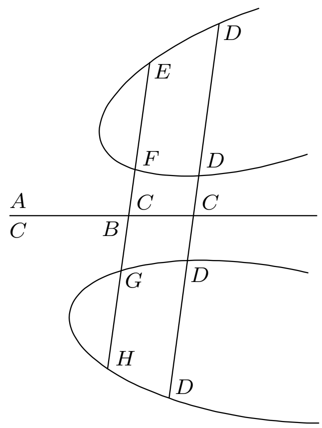
となる。

ここでは，$-\dfrac{a^2bx^2}{c^2}+\dfrac{3a^2b^3x^2}{c^4}$ および c^2q が選ばれるから，$c^2=3b^2+a^2$ を用いれば，$q=\dfrac{a^4bx^2}{c^6}$ が得られる。

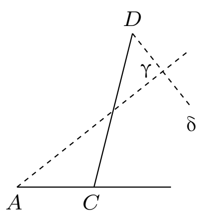
$(4'')$ 以下，同様。

III　もし，この $y^4+y^2-2y+6-x^2y^2-2x+x^2+x^4=0$ におけるように，その値が虚数であるならば，前述の値が実数になるまで，私は量 x を増加あるいは減少する。

例えば，添付した図において，AC (x) が零であるとき，CD (y) は虚数である。



しかし，もし AC が，BC が x になるように，与えられた量 AB によって減少されるならば，BC (x) が零と仮定されるとき，CD (y) は［それぞれが］実数である 4 重の値 (CE，CF，CG あるいは CH) であろう。面 $BEDC$，$BFDC$，$BGDC$ あるいは $BHDC$ が要求されるに従って，これらの根 (CE，CF，CG あるいは CH) のいずれかを商の最初の項にすることができる。さらに，他の場合においても，もしいつか行き詰ったときには，この方法によってあなた自身で［そこから］解放されるであろう。



方程式 $y^4+y^2-2y+6-x^2y^2-2x+x^2+x^4=0$ において $x=0$ とすると，$y^4+y^2-2y+6=(y^2+2y+3)(y^2-2y+2)=0$ となるから，このとき $y=-1\pm\sqrt{2}\,i$，$1\pm i$ である。

この例について，ホワイトサイドは次のようにいう (『数学論文集』第 2 巻 pp.230–231)。

$AC=x$，$CD=y$ に対して，まず，$\angle ACD$ の二等分線に平行に直線 $D\gamma$ を引き，それに垂直な直線 $A\gamma$ を引く。次に，$s=\sin\dfrac{1}{2}\angle ACD$，$c=\cos\dfrac{1}{2}\angle ACD$ とおいて，$X=s(x+y)$，$Y=c(x-y)$ とすることによって，$A\gamma=X$，$\gamma D=Y$ とする。

このとき，$x=\dfrac{cX+sY}{2sc}$，$y=\dfrac{cX-sY}{2sc}$ であるから，これらを与方程式に代入すると，$s^4Y^4+2s^2c^2(7X^2+4s^2)Y^2+c^4X^4+8s^2c^4X^2-32s^3c^4X+96s^4c^4=0$ となる。すると，

$$\begin{aligned}(sY)^2&=-c^2(7X^2+4s^2)\pm\sqrt{c^4(7X^2+4s^2)-c^4(X^4+8s^2X^2-32s^3X+96s^4)}\\&=-c^2(7X^2+4s^2)\pm4c^2\sqrt{3X^4+3s^2X^2+2s^3X-5s^4}\end{aligned}$$

が得られる。

ところが,

$$(7X^2+4s^2)^2-\left(4\sqrt{3X^4+3s^2X^2+2s^3X-5s^4}\right)^2=X^4+8s^2X^2-32s^3X+96s^4$$

は $X^3+4s^2X-8s^3=0$ を満たす実数値 $X=\left(\sqrt[3]{\dfrac{24\sqrt{3}+8\sqrt{31}}{6\sqrt{3}}}+\sqrt[3]{\dfrac{24\sqrt{3}-8\sqrt{31}}{6\sqrt{3}}}\right)s\fallingdotseq 1.36s$ に対して最小となり,最小値は正の値 ($\fallingdotseq 70.7s^4$) である［ホワイトサイドは $X\fallingdotseq 1.38s$, 最小値 $\fallingdotseq 69s^4$ としている］から,

$$(7X^2+4s^2)>4\sqrt{3X^4+3s^2X^2+2s^3X-5s^4}$$

となって,$(sY)^2<0$ であり,sY は実数解をもたない。

従って,「Y の実数値は X のどんな実数値に対しても対応することができない」ので,ニュートンが示した方程式によって定められる曲線 (D) は「全く実在しない」ことになる。

ニュートンは適当な座標変換によって虚数解が解消できるかのように述べているが,ことはそう簡単ではない。

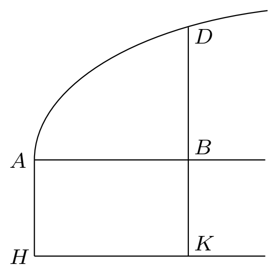
［IV］　最後に,もし x あるいは y のベキ指数が分数であるならば,それを整数に還元する。例えば,この例 $y^3-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{4}{3}}=0$ において,$y^{\frac{1}{2}}=v$ および $x^{\frac{1}{3}}=z$ とおけば,$v^6-z^3v+z^4=0$ を得るであろう。この根は $v=z+z^3\cdots$,あるいは (値が元に戻されると) $y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{3}}+x\cdots$ であり,そして［その両辺を］平方すれば $y=x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{4}{3}}\cdots$ である。

そして,曲線の面積を研究することについてはこれで十分に説明された。確かに,曲線の長さ,立体の量［体積］や面［表面積］,さらに重心についてのすべての問題は,結局はこれ,すなわち曲線によって制限された平面の量を探究すること,に還元されるであろうから,それらについてここで何かをつけ加える必要はない。しかしながら,私がそれらについて作業するための方法について簡単に述べておこう。

275 **第 5 章**

このような種類の他の問題に対する前述の［ことがらの］応用

ABD を任意の曲線とし,$AHKB$ を,その辺 AH あるいは BK が単位［1］である,長方形としよう。そして,直線 DBK が,AH から一様に動くことによって,面 ABD および AK が描かれると考え,BK (1) を AK ［$AHKB$］ (x) が,BD (y) を ABD が,徐々に増えていくときのモーメントとしよう。そして,モーメント BD が絶えず与えられるから,前述の規則により,それによって描かれる面積 ABD を調べることが,あるいは［それを］モーメント 1［単位］によって描かれる AK (x) と比べることができる。



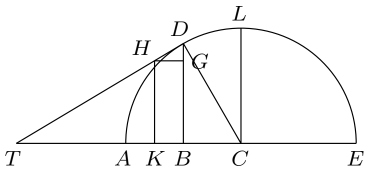
いま,面［面積］ABD が絶えず与えられているモーメントから導かれる方法によって,前述の規則により,他のどのような量もそのように与えられるモーメントから,同様に,導かれるであろう。このことは例によって明らかであろう。

第 6 章

曲線の長さを見出すこと。

$ADLE$ を円とし,その弧 AD の長さが見つけ出されるものとしよう。接線 DHT が引かれ,無際限に小さい長方形 $HGBK$ がつくられ,$AE=1=2AC$ とおかれると,底線 AB (x) のモーメント BK,あるいは GH,が弧 AD のモーメント HD に対する比は,$BT:DT=BD\left(\sqrt{x-xx}\right):$

$DC\left(\frac{1}{2}\right)=1\ (BK):\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}\ (DH)$ に等しいであろう。それゆえ，$\frac{1}{2\sqrt{x-xx}}$ あるいは



$\frac{\sqrt{x-xx}}{2x-2xx}$ は弧 AD のモーメントである。還元されると，これは $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}}+\frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}}+\frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}}+\frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}\cdots$ となる。それゆえ，第 2 の規則により，弧 AD の長さは，$x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}}+$ 276
$\frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}+\frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}}+\frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}\cdots$，あるいは $x^{\frac{1}{2}}$ in $1+\frac{1}{6}x+\frac{3}{40}x^2+\frac{5}{112}x^3+\frac{35}{1152}x^4+\frac{63}{2816}x^5\cdots$ である。

同様に，CB が x，半径 CA が 1 とおかれれば，弧 LD は $x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7\cdots$ であることが見出されるであろう。

しかし，モーメントの代わりにおかれるその単位は，［問題が］立体に関するときは面として，面に関するときは線として，(この例のように) 線に関するときは点として取り扱われることが注意されなければならない。

いま，幾何学者たちは，不可分者の方法を用いている間，そこに比を考えているのであるから，私は点あるいは無限に小さい線における単位について語ることを恐れない。

これらのことから，立体の面および量，そして重心について［調べるにはどのようにすればよいかを］推測することができる。

ここに初めて「モーメント」という用語が出てくるが，このことの定義はここには見られない。文脈［弧のモーメントを積分すると弧の長さになる］から察するに，ニュートンは無限小増分 (今日の dx など) をそう呼んでいるようである。

曲線の長さや立体の体積などの問題は，結局，積分に帰するといい，ここでは円弧に関する例を挙げている。

まず，円の方程式を $y=\sqrt{x-x^2}$ とする。すなわち，点 A を原点，AE を x 軸とする円 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ を考える。

いま，$\angle AED=\theta$ とすると，弧 AD に対する中心角は $\angle ACD=2\theta$ で，半径は $r=\frac{1}{2}$ であるから，弧 $AD=\frac{1}{2}\times 2\theta=\theta$ となる。

一方，$AB=x$，$BD=\sqrt{x-x^2}$ より 弦 $AD=\sqrt{x}$ であるから，$\sin\theta=\frac{AD}{AE}=$ 弦 $AD=\sqrt{x}$ となる。従って，弧 $AD=\theta=\sin^{-1}\sqrt{x}$ ということになる。

ところで，弧 AD のモーメント $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}+\cdots$ を項別積分して，弧 $AD=x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\cdots$ が得られるから，

$$\sin^{-1}\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}}+\frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}+\frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}}+\frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}+\cdots$$

ということになる。

次に，円 $ADLE$ を，点 C を原点とする半径 $CA=1$ の円 $x^2+y^2=1$ と見れば，弧 LD について，$BK:DH=BT:DT=BD:DC=\sqrt{1-x^2}:1=1:\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ であるから，

弧 LD のモーメント $=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$ となる。

これを無限級数展開し，項別積分すれば，弧 $LD = x + \dfrac{1}{6}\,x^3 + \dfrac{3}{40}\,x^5 + \dfrac{5}{112}\,x^7 + \cdots$ となる。

ところで，$\angle LCD = \theta$ とすれば，弧 $LD = 1 \times \theta = \theta$ で，$\sin\theta = \dfrac{BC}{CD} = x$ であるから，弧 $LD = \sin^{-1} x$ となる。すなわち，

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{3}{40}\,x^5 + \frac{5}{112}\,x^7 + \cdots$$

ということになる。

次に述べられる方法で，この $z = \sin^{-1} x$ の逆関数を求めれば，

$$\begin{aligned}\sin z &= z - \frac{1}{6}\,z^3 + \frac{1}{120}\,z^5 - \frac{1}{5040}\,z^7 + \frac{1}{362880}\,z^9 - \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\,!}\,z^{2k+1}\end{aligned}$$

となる。これは，ヨーロッパ初の正弦関数 ($\sin x$) の無限級数展開だということである。

ヨーロッパ以外では，ニーラカンタ (Nīlakaṇṭha : 1444?–1544?) がまとめた *Tantrasaṃgraha* (1501 年?) のマラヤーラム語による解説書 *Yuktibhāṣā* (1639 年) には，既に正弦関数の無限級数展開が見られるということである (『数学論文集』第 2 巻 p.237)。

また，日本では，建部 賢弘 (たけべ かたひろ : 1664–1739) が『綴術算径』(1722 年) において，逆正弦関数の平方のベキ級数展開に相当する内容 (π^2 の展開式) を数値的に述べている。また，同じ 1722 年には，鎌田 俊清 (かまた としきよ : 1678–1747) も正弦関数，余弦関数の無限級数展開にたどり着いているとのことである。

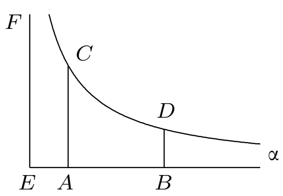
第 7 章

前述の逆を見出すこと。

しかし，もし，逆に，任意に与えられた曲線の面積あるいは長さなどから底線 AB の長さを知りたいのであれば，前述の規則によって見出された方程式から根 x が導き出されなければならない。

第 1 節

与えられた面積から底線を見出すこと。



例えば，もし与えられた双曲線 $\left(\dfrac{1}{1+x} = y\right)$ の面積 $ABDC$ から底線 AB を調べたいと思うならば，その面積を z と名付けて，私は，x が，商の中に望まれる z［の次元］より大きい次元のものである項が無視された，この $z\ (ABDC) = x - \dfrac{1}{2}\,x^2 + \dfrac{1}{3}\,x^3 - \dfrac{1}{4}\,x^4 \cdots$ の根を導き出す。

例えば，z が商において 5 次元に達するまでを望むならば，私は，項 $-\dfrac{1}{6}\,x^6 + \dfrac{1}{7}\,x^7 - \dfrac{1}{8}\,x^8 \cdots$ をすべて無視して，この $\dfrac{1}{5}\,x^5 - \dfrac{1}{4}\,x^4 + \dfrac{1}{3}\,x^3 - \dfrac{1}{2}\,x^2 + x - z = 0$ の根だけを導き出す。

$x = z + \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{1}{6}z^3 + \dfrac{1}{24}z^4 + \dfrac{1}{120}z^5 \cdots$		
$z + p = x$	$+\frac{1}{5}x^5$ $-\frac{1}{4}x^4$ $+\frac{1}{3}x^3$ $-\frac{1}{2}x^2$ $+x$ $-z$	$+\frac{1}{5}z^5 \cdots$ $-\frac{1}{4}z^4 - z^3p \cdots$ $+\frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2 \cdots$ $-\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$ $+z+p$ $-z$
$\frac{1}{2}z^2 + q = p$	$+zp^2$ $-\frac{1}{2}p^2$ $-z^3p$ $+z^2p$ $-zp$ $+p$ $+\frac{1}{5}z^5$ $-\frac{1}{4}z^4$ $+\frac{1}{3}z^3$ $-\frac{1}{2}z^2$	$+\frac{1}{4}z^5 \cdots$ $-\frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}z^2q \cdots$ $-\frac{1}{2}z^5 \cdots$ $+\frac{1}{2}z^4 + z^2q$ $-\frac{1}{2}z^3 - zq$ $+\frac{1}{2}z^2 + q$ $+\frac{1}{5}z^5$ $-\frac{1}{4}z^4$ $+\frac{1}{3}z^3$ $-\frac{1}{2}z^2$
$1 - z + \dfrac{1}{2}z^2 \Big) \dfrac{1}{6}z^3 - \dfrac{1}{8}z^4 + \dfrac{1}{20}z^5 \Big(\dfrac{1}{6}z^3 + \dfrac{1}{24}z^4 + \dfrac{1}{120}z^5$		

ここでは，ニュートン法の応用として，$z = f(x)$ の $x = \varphi(z)$ への変換，すなわち逆関数の生成，の方法が述べられている。

ニュートンの挙げる例は $y = \dfrac{1}{1+x}$ である。

この面積 $z = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{1}{5}x^5 - \cdots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k = \log(1+x)$

［$z = f(x)$］から，底線 x を求めるのに，まず，無限級数 $f(x)$ を適当な次数までの有限級数 $f(x) \fallingdotseq \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$ とする［上では $n = 5$］。

そして，方程式 $f(x) - z = 0$ を x について，ニュートン法と同様の手続きで，解くのである。

第 1 次近似は x の高次の項を無視して $x \fallingdotseq z$ とし，$x = z + p$ とする。これを与方程式に代入して，$p = \dfrac{1}{2}z^2 + q$ を見出し，同様の操作を続けていく。［上の表を参照。］

すると，$x = z + \dfrac{1}{2}z^2 + \dfrac{1}{6}z^3 + \dfrac{1}{24}z^4 + \dfrac{1}{120}z^5 + \cdots$ ［$x = \varphi(z)$］が得られる。

ところで，$z = \log(1+x)$ の逆関数は $1 + x = e^z$ であるから，結局，

$$x = e^z - 1 = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 + \cdots,\ \text{すなわち,}$$

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}z^k$$

が得られたことになる。

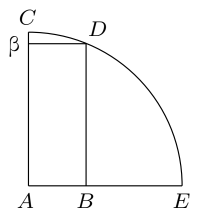
［上に］見るように，私は解析法を示したが，次の 2 つのことを付け加えよう。 277

I　代入している間，私は，次［の段階］には使わないと予見する項をつねに省略する。このこと

の規則は，互いに隣り合った任意の量から生じる最初の項の後ろには，その最初の項の次元の指数が最大の次元の指数から単位だけ離れている［項］より多くの項を右側に加えない，ということである。例えば，最大の次元が 5 である，この例においては，z^5 の後ろの項をすべて省略したし，z^4 の後ろには 1 つ，z^3 の後ろには 2 つだけ［の項］をおいた。導き出されるべき根 (x) がいたるところで偶数あるいは奇数の次元であるとき，これらを規則としよう。［すなわち,］互いに隣り合った任意の量から生じる最初の項の後ろには，その最初の項の次元の指数が最大の次元の指数から単位の 2 倍［離れている［項］より多くの項を右側に加えず］，あるいは，もしその x の次元がいたるところで単位の 3 倍離れているならば，単位の 3 倍離れている［項］より多くの項を右側に加えない。そして，他もそのように［行う］。

II　最後に生じる方程式における p，q あるいは r，$\cdots$ が 1 次元だけであることを見るとき，私は，その値を，すなわち商に加えられる残りの項を，ここでなされたように，除法によって求める。

第 2 節
与えられた曲線の長さから底線を見出すこと。



278 もし与えられた弧 CD から正弦 AB が熱望されるならば，上で (すなわち，$AB = x$，［弧］$CD = z$，および $AC = 1$ とおいて) 見出された方程式 $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 \cdots$ の根が導き出されると，$x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 \cdots$ であろう。

そして，さらに，もしこの与えられた弧から余弦 $A\beta$ を望むのであれば，$A\beta\ (= \sqrt{1-xx}\,) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10} \cdots$ とせよ。

第 8 章
絶えず進行し続ける系列［の係数］について

ついでに，ここで，これらの根の 5 つか 6 つの項が知られたなら，［数列の］類似性を見ることによって，たいていはそれらを意のままに (arbitrium) 伸ばすことができるであろうことを見ておこう。

それゆえ，この $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 \cdots$ は最後の項を 2，3，4，5，6，7，$\cdots$ の順にこれらの数で割れば伸びるであろう。

そして，この $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 \cdots$ はこの 2×3，4×5，6×7，8×9，10×11，$\cdots$ で［割れば伸びるであろう］。

そして，この $x = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 \cdots$ はこの 1×2，3×4，5×6，7×8，9×10，$\cdots$ で［割れば伸びるであろう］。

そして，この $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 \cdots$ はこの $\frac{1 \times 1}{2 \times 3}$，$\frac{3 \times 3}{4 \times 5}$，$\frac{5 \times 5}{6 \times 7}$，$\frac{7 \times 7}{8 \times 9}$，$\cdots$ を掛ければ［伸びるであろう］。そして，他についても同様である。

弧 $CD = \sin^{-1} x = z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$ ［$z = f(x)$］は先に見出されており (29 ページ，弧 LD)，この逆関数 $x = \sin z$ を求めている。

まず，高次の項を捨てて，$x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 - z \fallingdotseq 0$ とする。

はじめに，$x = z + p$ とおき，これを代入すると，

$$(z+p)+\frac{1}{6}(z^3+3z^2p+3zp^2+p^3)+\frac{3}{40}(z^5+5z^4p+\cdots)+\frac{5}{112}(z^7+7z^6p\cdots)-z\fallingdotseq 0$$

となるから，p の高次の項を無視して，

$$p\left(1+\frac{1}{2}z^2+\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^6\right)+\left(\frac{1}{6}z^3+\frac{3}{40}z^5+\frac{5}{112}z^7\right)\fallingdotseq 0$$

が得られ，

$$p\fallingdotseq\frac{-\left(\frac{1}{6}z^3+\frac{3}{40}z^5+\frac{5}{112}z^7\right)}{\left(1+\frac{1}{2}z^2+\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^6\right)}\fallingdotseq-\frac{1}{6}z^3$$

とできる。

次に，$p=-\dfrac{1}{6}z^3+q$ として，上の［p と z に関する］方程式に代入すれば，

$$q\left(1+\frac{1}{2}z^2+\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^6\right)-\left(\frac{1}{120}z^5+\frac{1}{56}z^7+\frac{5}{96}z^9\right)\fallingdotseq 0$$

となり，

$$q\fallingdotseq\frac{\left(\frac{1}{120}z^5+\frac{1}{56}z^7+\frac{5}{96}z^9\right)}{\left(1+\frac{1}{2}z^2+\frac{3}{8}z^4+\frac{5}{16}z^6\right)}\fallingdotseq\frac{1}{120}z^5$$

が得られる。

以下，同様に続ければ，$x=\sin z=z-\dfrac{1}{6}z^3+\dfrac{1}{120}z^5-\cdots$ ［$x=\varphi(z)$］が得られる。

次に，これもヨーロッパ初といわれる，余弦関数の無限級数展開

$$x=\cos z=1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4-\frac{1}{720}z^6+\frac{1}{40320}z^8-\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)\,!}\,z^{2k}$$

が述べられている。これは，

$$\cos z=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\left(z-\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{120}z^5-\cdots\right)^2}$$

$$=\sqrt{1-z^2+\frac{1}{3}z^4-\frac{2}{45}z^6+\frac{1}{315}z^8-\frac{2}{14175}z^{10}+\cdots}\ \text{であるから，}$$

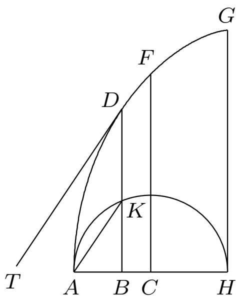
$$\begin{array}{ll}
 & 1-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{24}z^4-\frac{1}{720}z^6+\cdots \\
1 & \big)\ 1-z^2+\frac{1}{3}z^4-\frac{2}{45}z^6+\frac{1}{315}z^8-\frac{2}{14175}z^{10}+\cdots \\
1 & 1 \\ \hline
2-\frac{1}{2}z^2 & -z^2+\frac{1}{3}z^4 \\
-\frac{1}{2}z^2 & -z^2+\frac{1}{4}z^4 \\ \hline
2\quad -z^2+\frac{1}{24}z^4 & \frac{1}{12}z^4-\frac{2}{45}z^6+\frac{1}{315}z^8 \\
\frac{1}{24}z^4 & \frac{1}{12}z^4-\frac{1}{24}z^6+\frac{1}{576}z^8 \\ \hline
2\quad -z^2+\frac{1}{12}z^4-\frac{1}{720}z^6 & -\frac{1}{360}z^6+\frac{29}{20160}z^8-\frac{2}{14175}z^{10}+\cdots \\
-\frac{1}{720}z^6 & -\frac{1}{360}z^6+\frac{1}{720}z^8-\frac{1}{8640}z^{10}-\cdots \\ \hline
2\quad -z^2+\frac{1}{12}z^4-\frac{1}{360}z^6+\cdots & \frac{1}{20160}z^8-\frac{23}{907200}z^{10}+\cdots \\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

のように平方根を開くことによって得られる。

第 9 章

機械的な曲線への前述の［方法の］応用

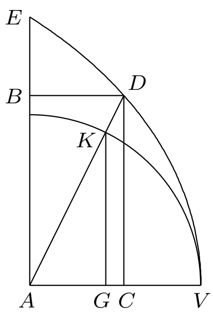
そして，幾何学的な曲線についてはこれで十分に述べられた。さらに，曲線がたとえ機械的であっても，それにもかかわらず，それは私たちの方法を決して拒絶しない。



279 例として，$ADFG$ を，その頂点を A，軸を AH，車輪を AKH として描かれるサイクロイドとしよう。そして，面［面積］ABD が求められる［としよう］。いま，上のように，$AB = x$，$BD = y$ とおき，そして $AH = 1$ として，はじめに，BD の長さを求める。明らかに，サイクロイドの性質から，$KD =$ 弧 AK であり，それゆえ，BD 全体 $= BK +$ 弧 AK である。しかし，BK $(= \sqrt{x - xx}\ ) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} \cdots$ であり，(前述のことから) 弧 $AK = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} \cdots$ である。ゆえに，BD 全体 $= 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}} \cdots$ である。そして，(規則 2 により) 面積 $ABD = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}} \cdots$ である。

あるいは，次の方がより簡単である。直線 AK は接線 TD と平行であるから，AB は BK に対して，線 AB のモーメントが線 BD のモーメントに対するであろう。すなわち，$x : \sqrt{x - xx} = 1 : \frac{1}{x}\sqrt{x - xx} = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{7}{2}} \cdots$ であろう。それゆえ，(規則 2 により) $BD = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{576}x^{\frac{9}{2}} \cdots$ であり，面積 $ABD = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{3168}x^{\frac{11}{2}} \cdots$ であろう。

異ならない方法で，(C を円の中心とし，$CB = x$ とおけば) 面積 $CBDF$ などを得るであろう。



円積線 (quadratrica) VDE (その頂点は V で，それに適合される［関係する］内円 VK の中心は A である) の面積 $ABDV$ が見出されるものとしよう。任意に AKD を引き，垂線 DB，DC，KG を下ろす。すると，$KG : AG = AB\ (x) : BD\ (y)$，あるいは $\frac{x \times AG}{KG} = y$ となるであろう。しかし，円積線の性質により，BA $(= DC) =$ 弧 VK，あるいは $VK = x$ である。それゆえ，$AV = 1$ とおくと，$GK = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 \cdots$ であろうし，上で示したことから，$GA = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \cdots$ であろう。

それゆえ，$y \left(= \frac{x \times AG}{KG} \right) = \dfrac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \cdots}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 \cdots}$，あるいは，除算が行われると，$y = 1 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 \cdots$ であり，(規則 2 により) 面積 $AVDB = x - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{225}x^5 - \frac{2}{6615}x^7 \cdots$ であろう。

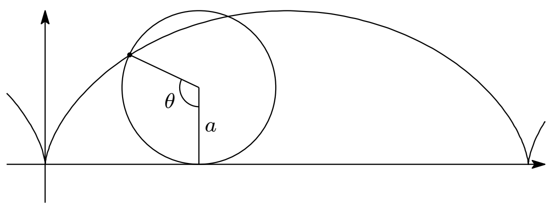
それゆえ，円積線 VD の長さは，計算はより複雑になるけれども，決定される。

私が知る限り，この方法がそれ自身を，しかもさまざまな仕方によって，拡張しないような種類

のものは何もない。確かに，機械的な曲線への接線は (もしそれが他の方法ではできないならば) このことの助けによって導かれる。そして，普通の解析が有限個の項からなる方程式によって (可能なときはいつでも) やり遂げることは何でも，これは，つねに，無限［個の項をもつ］方程式によってやり遂げることができる。それゆえ，私は，これにもまた解析の名を与えることをためらわ 280
なかった。確かに，ここでの計算［無限方程式による推論］がそこでのもの［有限方程式による推論］より確かでないとか，方程式がより正確でないということはない。有限の理性しかもたない私たち人間にはそのすべての項を表示することも，それゆえ，それから希求されている量を正確に知るほどにはそれらを理解することもできないにもかかわらず，である。例えば，有限方程式の無理根が，それらの何らかの量が残りのものから別々に，正確に知られるように，数によっても，それゆえ，どのような解析的な技法によっても表すことができないように。

最後に，それによって曲線の面積および長さなどが (それができる場合には) 正確にしかも幾何学的に決定されるから，それは解析法に属するものとして評価されるに値する。しかし，ここはそれを述べる場所ではない。振り返ると，他のことに対して 2 つのことが証明されるべきものとして現れる。

ここでは超越曲線が取り上げられる。



まず，サイクロイド。
これは，半径 a の円を x 軸に接して滑らずに転がすときの, 円周上の定点の軌跡である。今日では GH 方向を x 軸, HA 方向を y 軸, G を原点とするとき, $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ と媒介変数表示される［左図参照]。

さて，$BD=BK+$ 弧 AK であるから，$AB=x$，$BD=y$，$AH=1$ とすると，

$$y=\sqrt{x-x^2}+\sin^{-1}\sqrt{x} \qquad [BK=\sqrt{x-x^2},\ \text{弧 } AK=\sin^{-1}\sqrt{x} \text{ ともに前出}]$$

となり，これがニュートンによるサイクロイドの方程式である。
従って，サイクロイドの部分 ABD の面積は

$$\begin{aligned}(ABD)&=\int_0^x\left(\sqrt{t-t^2}+\sin^{-1}\sqrt{t}\right)dt\\&=\frac{1}{8}\left(\sin^{-1}(2x-1)+2(2x+1)\sqrt{x-x^2}+4(2x-1)\sin^{-1}\sqrt{x}\right)+\frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

となる。なぜなら ……

$$\begin{aligned}\int\sqrt{t-t^2}\,dt&=\int\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}\,dt\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(t-\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^{-1}\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right\}\\&=\frac{1}{4}(2t-1)\sqrt{t-t^2}+\frac{1}{8}\sin^{-1}(2t-1)\end{aligned}$$

$$\int\sin^{-1}\sqrt{t}\,dt=\int u\sin 2u\,du$$

$$[\sin^{-1}\sqrt{t}=u \text{ とおくと，} t=\sin^2 u \text{ より，} dt=2\sin u\cos u\,du=\sin 2u\,du]$$

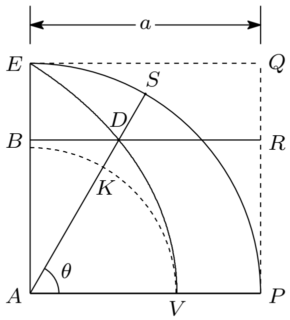
$$\begin{aligned}&=-\frac{1}{2}u\cos 2u+\int\frac{1}{2}\cos 2u\,du=-\frac{1}{2}u\cos 2u+\frac{1}{4}\sin 2u\\&=-\frac{1}{2}\sin^{-1}\sqrt{t}\times(1-2t)+\frac{1}{4}\times 2\sqrt{t(1-t)}\end{aligned}$$

$$[\sin^2 u = t \text{ より } \cos^2 u = 1 - t]$$
$$= \frac{1}{2}(2t-1)\sin^{-1}\sqrt{t} + \frac{1}{2}\sqrt{t-t^2}$$

であるから，

$$\int \left(\sqrt{t-t^2} + \sin^{-1}\sqrt{t}\right) dt$$
$$= \frac{1}{8}\sin^{-1}(2t-1) + \frac{1}{4}(2t+1)\sqrt{t-t^2} + \frac{1}{2}(2t-1)\sin^{-1}\sqrt{t}$$

となるからである。



次に，円積線。

これは，半径 a の 4 分円 APE において，動直線 BR は半径 AP と平行に AP の位置から EQ の位置まで一様に動き，動点 S は弧 PE 上を点 P から点 E まで一様に動くものとするとき，それらが同時に出発し，同時に到達するときの BR と AS の交点 D の軌跡である。ヒッピアス (Ἱππίας (Hippias of Elis)：前 460?–前 400?) が「角の 3 等分問題」を解くために導入したといわれている。

今日の座標のとり方［AP が x 軸，AE が y 軸］では，極座標で $r = \dfrac{2a\theta}{\pi\sin\theta}$，直交座標では $x = y\cot\left(\dfrac{\pi y}{2a}\right)$ と表される。また, 媒介変数表示では $x = \dfrac{2at\cot t}{\pi}$, $y = \dfrac{2at}{\pi}$ となる。そして, A から, 円積線と AP との交点 V までの長さは $\dfrac{2a}{\pi}$ であり，ニュートンのように $AV = 1$ とすれば，$AE = AP = \dfrac{1}{2}\pi$ となる。

さて, $KG : AG = x : y$ は明らかだから, $y = x \times \dfrac{AG}{KG}$ となる。一方, $AB = AD \cdot \sin\theta = \dfrac{2a\theta}{\pi}$, 弧 $VK = \dfrac{2a}{\pi} \cdot \theta$ だから 弧 $VK = AB\ (= x)$ である。ここで，半径 $AV = 1$ としているから，$\angle GAK = x$ となり，$\dfrac{AG}{KG} = \cot x$ となる。ゆえに，ニュートンによる円積線の方程式は $y = x\cot x$ ということになる。

従って，円積線の部分 $AVDB$ の面積は

$$(AVDB) = \int_0^x t\cot t\, dt = x\log(\sin x) - \int_0^x \log(\sin t)\, dt$$
$$= x\log(\sin x) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}-x} \log(\cos u)\, du$$

となる。ニュートンは $\sin t$，$\cos t$ の無限級数展開を知っているから，除法により $\cot t$ の無限級数展開が得られ，それを基に項別積分して積分値が求められる。

ところで，4 分円内の円積線の面積 AVE は，$x = \dfrac{\pi}{2}$ のときであるから，

$$(AVE) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cot t\, dt = \Big[t\log(\sin t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)\, dt = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\log 2\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}\log 2$$

となる。なぜなら ……

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin t)\, dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin t)\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin t\cos t)\, dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left(\frac{\sin 2t}{2}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin 2t)\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2\, dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin u)\, du - \frac{\pi}{4}\log 2 = \frac{1}{2}I - \frac{\pi}{4}\log 2$$

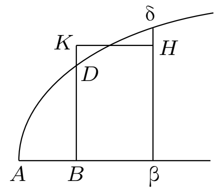
より，$I=-\dfrac{\pi}{2}\log 2$ となるからである。

第 10 章 (280)

［第 1 節］

I　第 1 の規則における単純な曲線の求積の証明

第 1 の規則の証明のための準備



そこで, 前のように, $AD\delta$ を, 底線が $AB=x$, 垂直な縦線が $BD=y$, そして面積が $ABD=z$ である, 任意の曲線としよう。さらに, $B\beta=o$, $BK=v$ とし，長方形 $B\beta HK$ (ov) は面 $B\beta\delta D$ に等しいとしよう。

ゆえに，$A\beta=x+o$ で，$A\delta\beta=z+ov$ である。

これらの前提で，x および z の間に随意に仮定された関係から，次に見るような方法で y を求める。

随意に $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$，あるいは $\dfrac{4}{9}x^3=zz$ と仮定しよう。このとき，x の代わりに $x+o$ $(A\beta)$ が，そして z の代わりに $z+ov$ $(A\delta\beta)$ が代入されると，$\dfrac{4}{9}$ in $x^3+3x^2o+3xo^2+o^3=$ (曲線の性質から) $z^2+2zov+o^2v^2$ が生じるであろう。そして，等しい $\left(\dfrac{4}{9}x^3\right.$ および $\left.zz\right)$ が取り去られ，残りが o で割られると，$\dfrac{4}{9}$ in $3x^2+3xo+o^2=2zv+ov^2$ が残る。いま，もし $B\beta$ が無限に減少させられ，そして消滅する，あるいは o が零である，と仮定すると，v と y は等しくなり，さらに o が掛けられた項は消滅して，結果として，$\dfrac{4}{9}\times 3xx=2zv$，あるいは $\dfrac{2}{3}xx\,(=zy\,)=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$，あるいは $x^{\frac{1}{2}}\left(=\dfrac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right)=y$ が残されるであろう。それゆえ，逆に，もし $x^{\frac{1}{2}}=y$ ならば，$\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$ であろう。

証明 281

あるいは一般的に, もし $\dfrac{n}{m+n}\times ax^{\frac{m+n}{n}}=z$ ならば, あるいは $\dfrac{na}{m+n}=c$, および $m+n=p$ とおかれるとすると，もし $cx^{\frac{p}{n}}=z$，あるいは $c^nx^p=z^n$ ならば，x の代わりに $x+o$ が，そして z の代わりに $z+ov$ (あるいは，同じことだが，$z+oy$) が代入されるならば，もちろんついには消滅してしまう残りの項が省略されると，c^n in $x^p+pox^{p-1}\cdots=z^n+noyz^{n-1}\cdots$ が生じる。いま，等しい c^nx^p および z^n が取り去られ，残りが o で割られると，$c^npx^{p-1}=nyz^{n-1}\left(=\dfrac{nyz^n}{z}\right)=\dfrac{nyc^nx^p}{cx^{\frac{p}{n}}}$ が残る。あるいは，c^nx^p で割られると，$px^{-1}=\dfrac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$，あるいは $pcx^{\frac{p-n}{n}}=y$ であろう。あるいは，c の代わりに $\dfrac{na}{m+n}$ が，そして p の代わりに $m+n$ が，すなわち $p-n$ の代わりに m が，pc の代わりに na が，元に戻されると，$ax^{\frac{m}{n}}=y$ となるであろう。それゆえ，逆に，もし $ax^{\frac{m}{n}}=y$ ならば，$\dfrac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}=z$ であろう。証明終り。

求積ができる曲線を見出すこと。

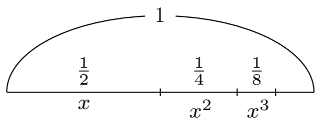
ついでに，ここから，その面積が知られている，望むだけ多くの曲線を見出すことができる方法が知られる。すなわち，面積 z と底線 x との間の関係として任意の方程式を仮定することによって，それから縦線 y が求められる。例えば，もし $\sqrt{aa+xx}=z$ を仮定するならば，計算［を行うこと］によって，$\dfrac{x}{\sqrt{aa+xx}}=y$ を見出すであろう。他の場合もそうである。

第 2 節

II　複合方程式の解法の証明

証明されるべき第 2 のことは，文字［に関する］の複合方程式の解法である。すなわち，x を十分小さいとするとき，商は，伸ばせば伸ばすほどより真の値に近づき，y そのものの正確な値から離れている不足分 (defectio) (p，q あるいは r，など) は任意に与えられた量より小さくなり，無限に伸ばされると y そのものに等しくなる，ということである。このことは次のように明らかであろう。

I　p，q，r，$\cdots$ がそれらの根である方程式の最後の項から，x が最小の次元である (すなわち，282 もし x が十分小さいものであると仮定すれば，その最後の項の半分より大きい) ような量が，操作のどこ［の段階］においても絶えず取り去られるから，その最後の項は (『原論』(Στοιχείωσις) 第 10 巻命題 1 により) ついには任意に与えられた量より小さくなるであろうし，もし操作が無限に続けられるならば，全く消滅するであろう。



すなわち，もし $x = \dfrac{1}{2}$ ならば，x は $x + x^2 + x^3 + x^4 \cdots$ 全体の半分であり，x^2 は $x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \cdots$ 全体の半分であろう。それゆえ，もし x コ $\dfrac{1}{2}$ ［$x < \frac{1}{2}$］ならば，x は $x+x^2+x^3 \cdots$ 全体の半分より大きく，x^2 は $x^2+x^3+x^4 \cdots$ 全体の半分より大きいであろう。それゆえ，もし $\dfrac{x}{b}$ コ $\dfrac{1}{2}$［$\frac{x}{b} < \frac{1}{2}$］ならば，$x$ は $x + \dfrac{x^2}{b} + \dfrac{x^3}{bb} \cdots$ 全体の半分より大きいであろう。そして，他の場合も同様である。そして，数値の係数に関しては，それらはたいていは絶えず減少するか，あるいは，もしいつか増加するならば，ときには x をより小さいものと仮定する必要があるだけである。

II　もし任意の方程式の最後の項が，ついに消滅するまで，絶えず減少するならば，それらの根のうちの 1 つもまた，その最後の項が消滅するまで同時に，減少するであろう。

III　それゆえ，量 p，q，r，$\cdots$ の 1 つの値は，この操作が無限に進められるとき，ついには完全に消滅するまで絶えず減少する。

IV　しかし，それら p，q，r，$\cdots$ の値は，それまでに導かれた商と合わせて，提示された方程式の根と等しくなる。(それゆえ，方程式 $y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$ の解法において，上で示したように，$y = a + p = a - \dfrac{1}{4}x + q = a - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{xx}{64a} + r = \cdots$ であることが分かるであろう。) それゆえ，無限に伸ばされた商が y の値の 1 つであることは十分に明らかである。

同じことは提示された方程式において y の代わりに商が代入されることによって明らかであろう。なぜなら，それらの項は，x が最小の次元であるものを，互いに絶えず破壊することが分かるからである。

ここでは，冒頭に挙げた規則の証明に触れられている。第 1 の方は規則 I に関するもので，無限小量 o を用いた証明法が示されている。
第 2 の方は，規則 III に関連するもので，無限級数の収束に関することが述べられている。複合方程式に関する手続き (処理) を続けていけば，いつかは真の解との差を与えられた量より小さくできるという。
無限等比級数 $x + x^2 + x^3 + \cdots$ は $|x| < 1$ のとき収束して，その和は $S = \dfrac{x}{1-x}$ である。
いま，$0 < x < \dfrac{1}{2}$ とすると，$x - \dfrac{1}{2}S = x - \dfrac{x}{2(1-x)} = \dfrac{x(1-2x)}{2(1-x)} > 0$ だから，$x > \dfrac{1}{2}S$ となる。

また，$x^2 - \frac{1}{2}(S-x) = x^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1-x} - x\right) = \frac{x^2(1-2x)}{2(1-x)} > 0$ であるから，$x^2 > \frac{1}{2}(S-x)$ である。

以下，$x^3 > \frac{1}{2}\left\{(S - \left(x + x^2\right)\right\}$ なども同様。

従って,『原論』第 10 巻命題 1 の条件が成立し，無限等比級数 $x + x^2 + x^3 + \cdots$ と S との差はあるところで指定された量より小さな値になる，という。

ニュートンがやろうとしていたことは，$f(x,\ y) = 0$ を $y = \varphi(x)$ とすることであった。

いま，$y = \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ とすると，($a_0 > a_1 > a_2 > \cdots$ のようだから，) $0 < \frac{a_1}{a_0}x < \frac{1}{2}$ となるような十分小さな x については求めた無限級数 $\varphi(x)$ は収束すると言いたかったのであろうか。

なお,『原論』第 10 巻命題 1 とは
「二つの不等な量が定められ，もし大きいほうの量からその半分より大きい量がひかれ，残りからまたその半分より大きい量がひかれ，これがたえずくりかえされるならば，最初に定められた小さいほうの量よりも小さい何らかの量が残されるに至るであろう。」
というものである。これはエウドクソス・アルキメデス (Eὔδοξος (Eudoxos)：前 400?–前 347?，Ἀρχιμήδης (Archimedes)：前 287?–前 212) の公理といわれることがある。古代における求積法といわれる「取り尽くしの方法」の基礎となっているものである。

級数および流率の方法について

『全集』第 1 巻 pp.391–518

原題は不明。

ホワイトサイド (Derek Thomas Whiteside : 1932–2008) は De Methodis Serierum et Fluxionum (The Method of Series and Fluxions) と推測している。『全集』は，「解析的な技法の形態あるいは解析的な幾何学」(Artis Analyticae Specimina vel Geometria Analytica) としている。

1670–1671 年冬の執筆と推定されている。初めて出版されたのは，英訳版で 1736 年 (『英訳版方法』) のこと。ラテン語版は 1779 年 (『全集』第 1 巻)。『遺稿集』(1744 年) にあるものは英訳版を逆にラテン語訳したものである。

「1666 年論文」と「無限個の項をもつ方程式による解析について」(以下「解析について」と呼ぶ。) を総合・発展させたもの。ウェストフォール (Richard S. Westfall : 1924–1996) は「ニュートンが自分の流率法についてそれまでに手がけた最も野心的な解説」であると言う ([10] I p.244)。

第 1 章 391
無限級数について

大多数の幾何学者が，古代の人たちの総合的な方法をほとんど無視して，たいていは解析法を向上させることに専念し，その助けによって，曲線の求積およびまだ完全には明らかにされていない同様のことがらを除いて，ほとんどすべて［の問題］が空にされた［解決された］と思える程に，多くの大きな困難を克服してきたのを観察しているから，解析［という名］の平原の境界を拡げ，曲線についての学問を進歩させることができた，次のことを，［この学問の］学習者のために，簡単にまとめたことは好ましく思われた。

計算することの操作は数においても文字［変量］(species) においても非常によく似ていて，量が前者では確定的に，後者では不確定的に表されるという特徴を除いて，［それらには］違っているところはないように見えるから，10 進数について最近見出された方法 (doctrina) を変量に対して同じように適用することを，特にそれはより難解なことに (ad praeclariora) 道を拓くものであるから，(もしメルカトール (Nicolaus Mercator : 1620–1687) による双曲線の求積を除けば) 誰も思いつかなかったことに，私は驚いた。しかし，変量についてのこの方法は代数に対して，10 進数における方法が普通の算術に対するのと，同じように関係するから，加法，減法，乗法，除法および根の開平の操作をそこから［容易に］さらに学ぶことができて，算術にも普通の代数にも熟練した読者は，10 進数および無限に続けられる代数的な項の間の類似性を知ることになる。すなわち，10 分の 1 の比で右の方へ絶えず減っていくそれぞれの数の場所［位］に対して，以下においてなされるように，一様に進行し，無限に続けられる，分子あるいは分母の次元に従って整理された系列のそれぞれの変量の項が対応する。そして，分数および根がすべてそれら［無限小数］に還元されるとき，その中に存在する 10 進数がある程度は整数の性質を身に着けることが，その利点であるよう 392
に，変量の無限の［系列の］利点は，それらによって，分母が合成された量からなる分数，合成された根，および複合方程式の根のような種類の，より難解な項の種類を単純な種類に，すなわち，その分子および分母が単純［な項］であり，克服できない他の困難がほとんどないような，分数の無限の系列に，還元することができることである。それゆえ，私は，はじめに，他の量のこのような種類の項への還元［の方法］，およびあまり出会わない計算の方法を示し，それからこの解析法を問題の解決に応用しよう。

除法や根の開平による還元は，10 進数および変量の算術における似たような操作の仕方を比べ

れば，次の例から明らかになるであろう。

除法による還元の例

$\dfrac{aa}{b+x}$ が提示されたら，次の方法で aa を $b+x$ で割る。

$$
\begin{array}{l}
b+x\,\Big)\, aa+00\,\Big(\,\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{a^2x}{b^2}+\dfrac{a^2x^2}{b^3}-\dfrac{a^2x^3}{b^4}+\dfrac{a^2x^4}{b^5}\cdots \\
\qquad\quad \underline{aa+\dfrac{a^2x}{b}} \\
\qquad\qquad -\dfrac{a^2x}{b}+0 \\
\qquad\qquad \underline{-\dfrac{a^2x}{b}-\dfrac{a^2x^2}{b^2}} \\
\qquad\qquad\qquad\quad +\dfrac{a^2x^2}{b^2}+0 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+\dfrac{a^2x^2}{b^2}+\dfrac{a^2x^3}{b^3}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\dfrac{a^2x^3}{b^3}+00 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-\dfrac{a^2x^3}{b^3}-\dfrac{a^2x^4}{b^4}} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +\dfrac{a^2x^4}{b^4}\cdots
\end{array}
$$

すると，$\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{a^2x}{b^2}+\dfrac{a^2x^2}{b^3}-\dfrac{a^2x^3}{b^4}\cdots$ が生じ，無限に続けられたこの系列は $\dfrac{aa}{b+x}$ に等しいであろう。あるいは，除数の最初の項を x とおけば，この方法によって，$x+b\,\Big)\,aa\,\Big(\,\dfrac{aa}{x}-\dfrac{a^2b}{x^2}+\dfrac{a^2b^2}{x^3}-\dfrac{a^2b^3}{x^4}\cdots$ が生じるであろう。

同様の方法で，分数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ は $1-x^2+x^4-x^6+x^8\cdots$ に，あるいは $x^{-2}-x^{-4}+x^{-6}-x^{-8}\cdots$ に還元される。

393 そして，分数 $\dfrac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}$ は $2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}\cdots$ に。

ついでに，ここで，私は，$\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{x^2}$，$\dfrac{1}{x^3}$，$\dfrac{1}{x^4}$ ［，$\cdots$］の代わりに x^{-1}，x^{-2}，x^{-3}，x^{-4}，$\cdots$ を使い，$\sqrt{x}$，$\sqrt{x^3}$，$\sqrt{x^5}$，$\sqrt[3]{x}$，$\sqrt[3]{x^2}$ ［，$\cdots$］の代わりに $x^{\frac{1}{2}}$，$x^{\frac{3}{2}}$，$x^{\frac{5}{2}}$，$x^{\frac{1}{3}}$，$x^{\frac{2}{3}}$，$\cdots$ を，$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ ［，$\cdots$］の代わりに $x^{-\frac{1}{2}}$，$x^{-\frac{2}{3}}$，$x^{-\frac{1}{4}}$，$\cdots$ を使うということが注意されなければならない。そして，これは，このような種類の幾何数列 x^3，$x^{\frac{5}{2}}$，x^2，$x^{\frac{3}{2}}$，x，$x^{\frac{1}{2}}$，x^0 (あるいは 1)，$x^{-\frac{1}{2}}$，x^{-1}，$x^{-\frac{3}{2}}$，x^{-2}，$\cdots$ から見つけることができることとの類似性という理由によるものである。

この方法では，$\dfrac{aa}{x}-\dfrac{aab}{xx}+\dfrac{aab^2}{x^3}\cdots$ の代わりに $aax^{-1}-aabx^{-2}+aab^2x^{-3}\cdots$ と書くことができる。

そして，$\sqrt{aa-xx}$ の代わりに $\overline{aa-xx}|^{\frac{1}{2}}$ と書くことができ，$aa-xx$ の平方の代わりに $\overline{aa-xx}|^2$ と，$\sqrt[3]{\dfrac{abb-y^3}{by+yy}}$ の代わりに $\overline{\dfrac{abb-y^3}{by+yy}}\Big|^{\frac{1}{3}}$ と書くことができる。そして，他の場合もそうである。

それゆえ，ベキを正および負，［そして］整数および分数に正しく識別することができる。

根の開平による還元の例

$aa+xx$ が提示されたら，この根を次のように開く。

$$
\begin{array}{l}
aa+xx\ \Big(\ a+\dfrac{x^2}{2a}-\dfrac{x^4}{8a^3}+\dfrac{x^6}{16a^5}-\dfrac{5x^8}{128a^7}+\dfrac{7x^{10}}{256a^9}-\dfrac{21x^{12}}{1024a^{11}}\cdots \\
\underline{aa} \\
0+xx \\
\underline{xx+\dfrac{x^4}{4a^2}} \\
-\dfrac{x^4}{4a^2} \\
\underline{-\dfrac{x^4}{4a^2}-\dfrac{x^6}{8a^4}+\dfrac{x^8}{64a^6}} \\
+\dfrac{x^6}{8a^4}-\dfrac{x^8}{64a^6} \\
\underline{\dfrac{x^6}{8a^4}+\dfrac{x^8}{16a^6}-\dfrac{x^{10}}{64a^8}+\dfrac{x^{12}}{256a^{10}}} \\
-\dfrac{5x^8}{64a^6}+\dfrac{x^{10}}{64a^8}-\dfrac{x^{12}}{256a^{10}} \\
\underline{-\dfrac{5x^8}{64a^6}-\dfrac{5x^{10}}{128a^8}+\dfrac{5x^{12}}{512a^{10}}\cdots} \\
\dfrac{7x^{10}}{128a^8}-\dfrac{7x^{12}}{512a^{10}}\cdots \\
\underline{\dfrac{7x^{10}}{128a^8}+\dfrac{7x^{12}}{256a^{10}}\cdots} \\
-\dfrac{21x^{12}}{512a^{10}}\cdots
\end{array}
$$

すると，$a+\dfrac{x^2}{2a}-\dfrac{x^4}{8a^3}\cdots$ が生じる。ここで，操作の最後の方で，それらの次元が，私が商と 394
して伸ばすことを望んでいるだけの最後の項 —— $\dfrac{x^{12}}{a^{11}}$ とする —— の次元を超えた，すべての項を私は無視する，ということが観察されるであろう。

さらに，項の順序は，この x^2+a^2 のように，逆にすることができる。そして，［そのときの］根は $x+\dfrac{a^2}{2x}-\dfrac{a^4}{8x^3}+\dfrac{a^6}{16x^5}\cdots$ であろう。

それゆえ，a^2-x^2 から，根は $a-\dfrac{x^2}{2a}-\dfrac{x^4}{8a^3}-\dfrac{x^6}{16a^5}\cdots$ である。

そして，$x-x^2$ から，［根は］$x^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{8}x^{\frac{5}{2}}-\dfrac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}\cdots$ である。

そして，a^2+bx-x^2 から，［根は］$a+\dfrac{bx}{2a}-\dfrac{x^2}{2a}-\dfrac{b^2x^3}{8a^3}\cdots$ である。

そして，$\dfrac{1+ax^2}{1-bx^2}$ から，［根は］$\dfrac{1+\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{8}a^2x^4+\frac{1}{16}a^3x^6\cdots}{1-\frac{1}{2}bx^2-\frac{1}{8}b^2x^4-\frac{1}{16}b^3x^6\cdots}$ である。さらに，除法

が行われると，
$$\begin{array}{llll} 1 & +\frac{1}{2}\,bx^2 & +\frac{3}{8}\,b^2x^4 & +\frac{5}{16}\,b^3x^6 \cdots\cdots \\ & +\frac{1}{2}\,a & +\frac{1}{4}\,ab & +\frac{3}{16}\,ab^2 \\ & & -\frac{1}{8}\,a^2 & -\frac{1}{16}\,a^2b \\ & & & +\frac{1}{16}\,a^3 \end{array}$$
となる。

しかし，これらの操作は適当な準備によってたいていは短縮することができる。例えば，$\sqrt{\dfrac{1+ax^2}{1-bx^2}}$ が開かれるという，［いま］述べられた例において，もしその分子および分母の形が同じでないならば，その両方［分子，分母］に $\sqrt{1-bx^2}$ を掛けて，それゆえ $\dfrac{\sqrt{1 \begin{matrix}+a\\-b\end{matrix} x^2 - abx^4}}{1-bx^2}$ をつくり，操作の残りは分子の根を開いて，それを分母で割るだけでやり遂げられた。

これらのことから，他の根をどのような方法によって開くことができるか，そして，［どのようにすれば］任意の合成された量が，それらがこの $x^3 + \dfrac{\sqrt{x-\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt[3]{ax^2+x^3}} - \dfrac{\sqrt[5]{x^3+2x^5-x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x+xx}-\sqrt{2x-x^{\frac{2}{3}}}}$ のように根［号］あるいは分母と絡み合っているとしても，単純な項の無限の系列に還元されるかは，明らかであると私は信じる。

第 2 章
複合方程式の還元について

しかし，複合方程式 (affectis æquationes) が提示されたら，それらの根をこのような種類の系列
395 ［無限級数］に還元することができる方法がきちんと説明されなければならない。なぜならば，これまで［ヴィエート (François Viète : 1540–1603) などの］数学者たちが数について述べてきたそれらの方法が回りくどく (その上，余分な操作が付け加えられて) 伝えられていて，そのため，変量についての操作の手本として利用すべきではないからである。それゆえ，はじめに，数についての複合方程式の解法を簡単に述べ，それから，変量について［の複合方程式の解法を］同じように説明しよう。

解かれるべき方程式 $y^3-2y-5=0$ が提示され，2 を，求められるべき根からその 10 分の 1 より小さいだけ異なっている，何らかの仕方で見出された，数としよう。そこで，$2+p=y$ とおいて，その方程式において y の代わりに $2+p$ を代入すると，そこから新しい［方程式］$p^3+6p^2+10p-1=0$ が生じ，その根 p が求められなければならず，それが商に加えられる。すなわち，その小ささのために p^3+6p^2 が無視された，$10p-1=0$，あるいは $p=0.1$ は真の値に非常に近づくであろう。それゆえ，0.1 を商の中に書き，$0.1+q=p$ と仮定して，この仮の値を，前のように，ここ［上の方程式］に代入すると，$q^3+6.3q^2+11.23q+0.061=0$ が生じる。そして，$11.23q+0.061=0$ は真の値に近づく，あるいは近似的に $q=-0.0054$ (すなわち，これおよび主要な商の最初の数字の間に排他的に介在する場所［位，桁］の数 —— ここでは 2 および 0.005 の間が 2 つであるように —— と同じだけ多くの数字が引き出されるまで 0.061 が 11.23 で割られると) であるから，これは負［の数］になるので，商の下の部分に -0.0054 と書いて，$-0.0054+r=q$ と仮定して，これを前のように［方程式に］代入する。そして，添付された表の仕方のように，この操作を望むだけ続ける。

		$+\,2.10000000$ $-\,0.00544852$ $2.09455148\cdots$
$2+p=y$	y^3	$+\,8\quad +\,12p\quad +\,6p^2\quad +\,p^3$
	$-\,2y$	$-\,4\quad -\,2p$
	$-\,5$	$-\,5$
	和	$-\,1\quad +\,10p\quad +\,6p^2\quad +\,p^3$
$0.1+q=p$	$+\,p^3$	$+\,0.001\quad +\,0.03q\quad +\,0.3q^2\quad +\,q^3$
	$+\,6p^2$	$+\,0.06\quad +\,1.2\quad +\,6$
	$+\,10p$	$+\,1\quad +\,10$
	$-\,1$	$-\,1$
	和	$+\,0.061\quad +\,11.23q\quad +\,6.3q^2\quad +\,q^3$
$-\,0.0054+r=q$	$+\,q^3$	$-\,0.0000001\cancel{5}\cancel{7}\cancel{4}\cancel{6}\cancel{4}\quad +\,0.000\cancel{0}\cancel{8}\cancel{7}\cancel{4}\cancel{8}r\quad -\,\cancel{0}.\cancel{0}\cancel{1}\cancel{6}\cancel{2}r^2\quad +\,r^3$
	$+\,6.3q^2$	$+\,0.0001837\cancel{0}\cancel{8}\quad -\,0.068\cancel{0}\cancel{4}\quad +\,\cancel{6}.\cancel{3}$
	$+\,11.23q$	$-\,0.060642\quad +\,11.23$
	$+\,0.061$	$+\,0.061$
	和	$+\,0.0005416\quad +\,11.162r$
$-\,0.00004852+s=r$		

しかし，最後の方で操作は，特により多くの次元の方程式において，この方法によって大いに短縮されるであろう。［すなわち,］根をどれだけ長く導き出すことを望むかを決めたなら，表の右側の部分に生じる方程式の最後から 2 番目の項の係数の最初の数字の後ろに，商において満たされる 396 べく残っている場所と同じだけ多くの場所を数え，それに続く 10 進数を無視する。しかし，最後の項では，商において満たされる 10 進数の場所より多くの場所の後ろの 10 進数を無視する。そして，最後から 3 番目の項ではより少ない場所の後ろをすべて無視する。そして，続けて，場所のその間隔に従って算術的に進めることによって，あるいは同じことだが，いたるところで，最後から 2 番目の項におけるのと同じだけ多くの数字を追い出すことによって，それらの最低の場所は項の系列に従って算術数列になるか，あるいは，そうでないことが起きるときは［それらの場所は］零 (circulus) によって満たされることになると理解される。それゆえ，いま提示された例においては，もし，私が，商が 10 進数の 8 つだけの場所［8 桁］まで満たされることを望むならば，$0.0054+r$ が q の代わりに代入されている間，—— このとき商において 10 進数の 4 つの場所が満たされ，同じだけ［の場所］が満たされるべく残っている —— より低い 5 つの場所における数字を省略することができた。それゆえ，私は，それら［の数字に］斜めに線を書いた。確かに，最初の項 r^3 は係数 99999［0.99999］をもっていたが，それにもかかわらずそれらを完全に省略することができた。それゆえ，それらの数字が消去されると，次の操作に対して和は $0.0005416+11.162r$ となり，これは，既に書かれた項まで除算が続けられると，要求された区切り［位］まで商を満たすから，r として $-\,0.00004852$ を与える。

最後に，商の負の部分を正の部分から取り去り，完全な商として 2.09455148 が得られる。

さらに，操作のはじめに，もし $0.1=p$ が真の値に十分近かったかどうかを疑ったならば，

$10p-1=0$ の代わりに $6p^2+10p-1=0$ を仮定して，より零 (nihilum) に近いその根の最初の数字を商に書いたことが注意されなければならない。そして，取り扱われている第 2 の方程式において，最後から 2 番目の項の係数の平方が最後の項に最後から 3 番目の項の係数が掛けられた積の 10 倍より大きくないとき，この方法によって商の第 2 の，さらに第 3 のまでも，数字を探し出すのは都合のよいことである。なお，もし商に加えられるであろう数字をすべてこの方法で探し出す (すなわち，その第 2 の方程式の最後の 3 つの項からより小さい根を導き出す) ならば，その作業は，特により大きい次元の方程式において，たいていは軽減するであろう。このように，どこででも［どの段階でも］商にある数字より 2 倍多くの数字が得られるであろう。

> 係数の大小に関する主張はホワイトサイドによれば次のようである (『数学論文集』第 3 巻 pp.46–47)。
> A，B，C を正の数とするとき，第 1 の方程式 $Bp-C=0$ の根 $p_1=\dfrac{C}{B}$ と第 2 の方程式 $Ap^2+Bp-C=0$ の正の根 $p_2=\dfrac{-B+\sqrt{B^2+4AC}}{2A}$ を考えると，
> $$\begin{aligned}(p_1-p_2)-\frac{1}{10}p_1 &= \left(\frac{C}{B}-\frac{-B+\sqrt{B^2+4AC}}{2A}\right)-\frac{1}{10}\cdot\frac{C}{B}\\ &= \frac{9AC+5B^2-5B\sqrt{B^2+4AC}}{10AB}\end{aligned}$$
> であるから，$B^2 \geqq \dfrac{81}{10}AC$ ならば，$p_1-p_2 \leqq \dfrac{1}{10}p_1$ となる。
> なおさら (*a fortiori*)，$B^2>10AC$ ならば $p_1-p_2 \leqq \dfrac{1}{10}p_1$ である。そして，このようなときには p_2 ではなく，p_1 で十分である。
> この例では，$A=6$，$B=10$，$C=1$ で，$B^2=100>60=10AC$ であるから，初期値は $p_1=0.1$ で十分といえる。
> なお，$6p^2+10p-1=0$ の解は $p=\dfrac{-5\pm\sqrt{31}}{6}$ であり，小数表示では $0.0946\cdots$，$-1.7612\cdots$ である。
> 従って，$p_1=0.1$ では不十分と考えるなら，$p_1=0.09$ とすることになろう。

397

第 3 章
文字による方程式の解法について

これで，数［値係数の方程式の解法］については以上のように示されたが，文字［係数の方程式の解法］について，よく似た操作が説明されることが残っており，それらについて次のことをあらかじめ理解しておくと都合がよい。

I　係数の文字について，あるものが残りのもの (もしいくつかあれば) から識別されなければならず，すなわち，それはまさしくすべてのものの最小のものあるいは最大のもの，あるいは与えられた量に最も近いものである，あるいはそうであると考えることができる。そうすることの理由は，商における項の分子あるいは分母において，その次元が絶えず増大するために，それらの項は小さくなり続け，それゆえ，除法および根の開平による還元の例において，変量 x について前述のことから明らかであるように，商は［求める］根に近づくことになる，ということである。実際，私は，以下では，その変量に対してたいていは x あるいは z を用い，また，開かれていく根の変量に対して y，p，q，r，s などを使うであろう。

II　もしいつか，複雑な分数あるいは無理量が提示された方程式の中や操作の後に現れるならば，それらは解析学者によく知られた方法で取り除かれなければならない。例えば，もし

$y^3+\dfrac{b^2}{b-x}\,y^2-x^3=0$ があるならば，$b-x$ を掛け，その積 $by^3-xy^3+b^2y^2-bx^3+x^4=0$ から y の値を探し出す。あるいは，$y\times\overline{b-x}=v$ と考えることができるから，y の代わりに $\dfrac{v}{b-x}$ と書かれるなら，$v^3+b^2v^2-b^3x^3+3b^2x^4-3bx^5+x^6=0$ が生じ，それから，根 v を探し出して，y の値が得られるように商を $b-x$ で割る。同様に，もし $y^3-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{4}{3}}=0$ が提示されるならば，$y^{\frac{1}{2}}=v$ および $x^{\frac{1}{3}}=z$ とおいて，y の代わりに v^2 と，x の代わりに z^3 と書かれるなら，$v^6-z^3v+z^4=0$ が生じ，この方程式が解かれたら y および x を元に戻す。すなわち，根 $v=z+z^3+6z^5\cdots$ が見出されるであろうから，y および x を元に戻せば，$y^{\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{3}}+x+6x^{\frac{5}{3}}\cdots$ が生じ，平方すれば $y=x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{4}{3}}+13xx\cdots$ が生じるであろう。

同じ方法で，もし［方程式の中に］x や y の負の次元が存在するならば，同じ［ベキの］x および y［の積］を掛けることによって，それらを取り除く。例えば，$x^3+3x^2y^{-1}-2x^{-1}-16y^{-3}=0$ があるとき，x および y^3［すなわち xy^3］を掛けると，$x^4y^3+3x^3y^2-2y^3-16x=0$ が生じる。そして，$x=\dfrac{aa}{y}-\dfrac{2a^3}{yy}+\dfrac{3a^4}{y^3}$ があるとき，これに y^3 を掛けると，$xy^3=a^2y^2-2a^3y+3a^4$ が生じる。そして，他の場合もそうである。

III　方程式がこのように準備されたら，作業は商の最初の項を見出すことから始める。このこ 398
とに関して，引き続く項を同じように見出すために，他の 2 つの場合がその場合に還元できることから，不定の文字 (x あるいは z) が小さいものと仮定される場合を一般的な規則としよう。

> ニュートンが変量 x (や z) を 3 つの場合に分けて考察していることが分かる。
> (1) x が (十分) 小さいとき
> (2) x がある値に (十分) 近いとき
> (3) x が (十分) 大きいとき
> そして，(2)，(3) の場合は (1) の場合に還元できるという。

根の文字 (y，p，q あるいは r など) が見出されない項から不定の文字 (x あるいは z など) の次元に関して最小のものを選び，続いて，その根の文字が存在する他の項，すなわち，はじめに仮定された項からこの項まで続いている，前述のそれぞれの文字の次元の系列 (progressio) ができる限り大きく低くなる，あるいはできる限り小さく高くなるような項，を選べ。そして，もし，それらの次元が随意に続けられたこの系列に一致する，他の項が存在するならば，さらにそれらも選べ。最後に，あたかも零に等しいようなこれらの選ばれた項から前述の根の文字の値を求め，［それを］商に付け加えよ。

しかしながら，この規則をより明らかにするために，次の表の助けによってさらに説明しよう。

B

x^4	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5
x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5
x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	x^2y^4	x^2y^5
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4	xy^5
0	y	y^2	y^3	y^4	y^5

A C

図 1

直角 BAC を書き，その辺 BA，AC を等しい部分に分け，そして，それからその角のある空間を等しい正方形あるいは長方形に分割するために垂線を立て，それらは文字 x および y の次元によって，それらが書き込まれた図 1 に見るように，名付けられていると理解する。そこで，何らか方程式が提示されるとき，そのそれぞれの項に対応する長方形に何らかの記号によって印をつける。そして，定規が，印がつけられた長方形のうちの 2 つあるいは偶然にもより多くのものに結び付けられ，それらのうちの 1 つは AB に隣接する左側の列における最も低いものであり，他のものは

右の方で定規に触れ，さらに，定規に触れていないものはすべてそれより上の方にあるものとしよう。そして，定規に触れていて印がつけられた長方形によって方程式の項を選び，それらから商に加えるべき量を求める。

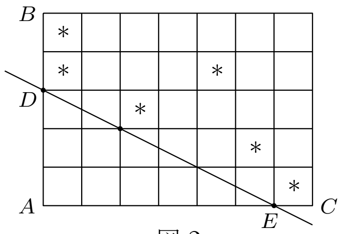


図 2

それゆえ，$y^6-5xy^5+\dfrac{x^3}{a}y^4-7a^2x^2y^2+6a^3x^3+b^2x^4=0$
399 から根 y を導き出すために，図 2 に見るように，それらの項に対応する長方形に何らか記号 $*$ によって印をつける。それから，定規 DE を左側の列において印がつけられた場所のうちの最も低いところに結び付け，そして，それを右側の辺についてより低い方からより高い方へ，印がつけられた残りの場所のうちのもう 1 つの，あるいは偶然にもより多くの，ものに同様に触れ始めるまで，回転させると，そのように触れられた場所は x^3，x^2y^2 および y^6 であることが分かる。それゆえ，あたかも零に等しいような項 $y^6-7a^2x^2y^2+6a^3x^3$ (そして，さらに，もし望むならば，$y=v\times\sqrt{ax}$ とおいて $y^6-7v^2+6=0$ と還元して) から，y の値を求める。そして，それが 4 重の $+\sqrt{ax}$，$-\sqrt{ax}$，$+\sqrt{2ax}$ および $-\sqrt{2ax}$ であることを見出し，それらのどれも，どの根を導き出すかを決めるかに応じて，商の最初の項として取ることが許される。

それゆえ，$y^5-by^2+9bx^2-x^3=0$ から $-by^2+9bx^2$ を選び，そこから商の最初の項として $+3x$ を得る。

そして，$y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0$ から $y^3+a^2y-2a^3$ を選び，商の中にその根 $+a$ を書く。

そして，$x^2y^5-3c^4xy^2-c^5x^2+c^7=0$ から $x^2y^5+c^7$ を選び，これは商の最初［の項］として $-\sqrt[5]{\dfrac{c^7}{x^2}}$ を生じさせる。そして，他の場合も同様である。

しかし，この項が見出されたとき，もしそのベキが負であることが起きるならば，私は，それが解かれている間は押し下げる必要がないように，さらに，まもなく述べられる，余分な項を削除するための規則が適切に利用できるように，不定な文字の同じベキによって方程式を押し下げる。それゆえ，$8z^6y^3+az^6y^2-27a^9=0$ が提示されたら，その商は $\dfrac{3a^3}{2z^2}$ から始めなければならず，私は，解法に取りかかる前に，$8z^4y^3+az^4y^2-27a^9z^{-2}=0$ となるように，zz によって方程式を押し下げる。

商の引き続く項は同じ方法によって，しかしたいていはさして困難もなく，操作を進める間の補助的な (secundarius) 方程式から，引き出される。なぜならば，このことは，根の文字 (p，q，r など) のない無際限に小さい文字 (x，xx，x^3 など) に作用された項のうちの最低のものが，他の不定な文字のない 1 次元だけのその根の文字が作用される量によって割られることによって，そしてその結果が商に書かれることによって，やり遂げられるのが常であるからである。それゆえ，次の例において，項 $\dfrac{x}{4}$，$\dfrac{x^2}{64a}$，$\dfrac{131x^3}{512a^2}$，$\cdots$ は a^2x，$\dfrac{1}{16}ax^2$，$\dfrac{131}{128}x^3$，$\cdots$ が $4aa$ で割られることによって引き出される。

ニュートンの流率法にとって重要な位置を占める，文字係数の複合方程式の解法の基本が述べられている。図を用いることで，先の「解析について」より分かりやすくなっている。

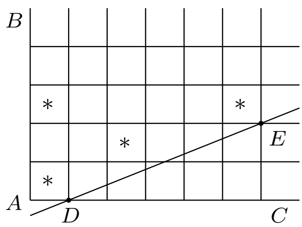
なお，本文中の図 1 について，左下隅の定数項に相当する長方形のところは『全集』,『数学論文集』では「0」であるが,『遺稿集』,『英訳版方法』では「1」になっている。積という意味なら，

「1」の方がよいような気がするが，大したことではない。

第 1 の例 $y^6 - 5xy^5 + \dfrac{1}{a}x^3y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + b^2x^4 = 0$ では，本文中の図 2 のように，

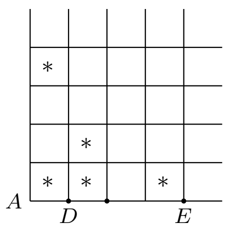
x^3［左から 1 番目，下から 4 番目］，
x^4［左 1 番目，下 5 番目］，
x^2y^2［左 3 番目，下 3 番目］，
x^3y^4［左 5 番目，下 4 番目］，
xy^5［左 6 番目，下 2 番目］，
y^6［左 7 番目，下 1 番目］

に該当する枠に印 $*$ を書いて，まず，最も左の列のうち最も低い位置にある印付きの枠［D］を指定する。そして，定規 DE を D を中心として，下辺 AC 上を左から右にスライドさせるように反時計回りに回転させて，印付きの枠にあたったところ［E］で止める。このとき定規に触れている位置に該当する項を取り上げて，商の初項を決定しようというのである。

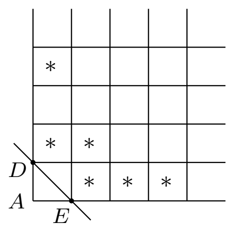


第 4 の例 $x^2y^5 - 3c^4xy^2 - c^5x^2 + c^7 = 0$ では左の図のようになるから，0［定数項］と x^2y^5 に対応する項を選ぶことになり，$x^2y^5 + c^7 = 0$ とする。このとき，$y = -\sqrt[5]{\dfrac{c^7}{x^2}}$ であるから，これを商の最初の項としてとることができるという。

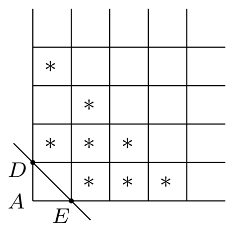
無限級数展開をするにあたって，初項を適切に定めることは重要なことであるから，ニュートンはこのような方法を考え出したのであろう。次に挙げられる例 $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$ を先取りしてしまうと，それぞれの段階における図は次のようになる。



ここから，$y = a + p$



ここから，$p = -\dfrac{1}{4}x + q$



ここから，$q = \dfrac{x^2}{64a} + r$

これらのことが前提されたから，残っているのは解法の実例を示すことである。

それゆえ，$y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$ を解かれるべき方程式としよう。そして，補助方程式 (æquatio fictitiâ) としての項 $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$ から，第 3 の前提によって $y - a = 0$ を引き出し，商の中に $+a$ と書く。次に，$+a$ は y の正確な値ではないから，$a + p = y$ とおいて，余白に書かれ 400
た方程式の項における，y の代わりに $a + p$ を代入し，その結果の項 $\left(p^3 + 3ap^2 + axp \cdots\right)$ を再び余白に書き，これらから，もう一度第 3 の前提によって，補助方程式としての項 $+4a^2p + a^2x = 0$ を選ぶと，$p = -\dfrac{1}{4}x$ が生じるから，商の中に $-\dfrac{1}{4}x$ と書く。さらに，$-\dfrac{1}{4}x$ は p の正確な値ではないから，$-\dfrac{1}{4}x + q = p$ とおいて，余白における項の p の代わりに $-\dfrac{1}{4}x + q$ を代入し，その結果の項 $\left(q^3 - \dfrac{3}{4}xq^2 + 3aq^2 \cdots\right)$ をもう一度余白に書き，これらから，前述の規則によって，もう一度補助方程式としての項 $4a^2q - \dfrac{1}{16}ax^2 = 0$ を選ぶと，$q = \dfrac{x^2}{64a}$ が生じるから商の中に $+\dfrac{x^2}{64a}$ と書く。さらに，$\dfrac{x^2}{64a}$ は q の正確な値ではないから，$\dfrac{x^2}{64a} + r = q$ とおいて，余

白における項の q の代わりに $\dfrac{x^2}{64a}+r$ を代入する。そして，添付した表に示すように，この作業を望むところまで続ける。

$y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$ $y=a-\dfrac{x}{4}+\dfrac{xx}{64a}+\dfrac{131x^3}{512a^2}+\dfrac{509x^4}{16384a^3}$ [⋯]		
$+a+p=y$	$+y^3$ $+a^2y$ $+axy$ $-2a^3$ $-x^3$	$+a^3 \quad +3a^2p+3ap^2+p^3$ $+a^3 \quad +a^2p$ $+a^2x+axp$ $-2a^3$ $-x^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$ $+3ap^2$ $+4a^2p$ $+axp$ $+a^2x$ $-x^3$	$-\frac{1}{64}x^3 \quad +\frac{3}{16}x^2q-\frac{3}{4}xq^2+q^3$ $+\frac{3}{16}ax^2-\frac{3}{2}axq \quad +3aq^2$ $-a^2x \quad +4a^2q$ $-\frac{1}{4}ax^2 \quad +axq$ $+a^2x$ $-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	$+q^3$ $-\frac{3}{4}xq^2$ $+3aq^2$ $+4a^2q$ $-\frac{1}{2}axq$ $+\frac{3}{16}x^2q$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$	$*$ $*$ $+\frac{3x^4}{4096a} \quad +\frac{3}{32}x^2r+3ar^2$ $+\frac{1}{16}ax^2+4a^2r$ $-\frac{1}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$ $+\frac{3x^4}{1024a} \quad +\frac{3}{16}x^2r$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$
$+4a^2-\dfrac{1}{2}ax+\dfrac{9}{32}x^3\Big)+\dfrac{131}{128}x^3-\dfrac{15x^4}{4096a}\Big(+\dfrac{131x^3}{512a^2}+\dfrac{509x^4}{16384a^3}$ [⋯]		

しかし，もし商をある一定の区切りまで伸ばしたいと望むならば，その最後の項における，例えば，x が与えられた次元の数を超えて高くならないように，代入がなされている間，私は，先を見越して，後で使わないであろう項をつねに省略する。このことの規則は，横の余白において任意の量から生じる最初の項の後ろには，最初に生じる項の次元が周期的なあるいは商の最
401 大の次元からの段階に背く［それらの次元の差を超える］よりも多くのものを，その右の方に付け加えないということである。この例におけるように，もし商 (あるいは商における x) が 4 次になるまで高めたいと思うならば，x^4 の後ろのすべての項を省略し，x^3 の後ろに 1 つだけをおく。それゆえ，記号 $*$ の後ろの項は消去されるものと考える。そして，ついに，導き出されるであろう残っている根の［文字］p，q，r あるいは s などが 1 次元のものだけである，項 $\dfrac{15x^4}{4096a}-\dfrac{131}{128}x^3+4a^2r-\dfrac{1}{2}axr+\dfrac{9}{32}x^2r$ に至るまで，操作を続ける。［すると,］除法によって，商を満たすために欠けているだけ多くの項 $+\dfrac{131x^3}{512a^2}+\dfrac{509x^4}{16384a^3}$ が出てくるであろう。そし

て，ついには $y=a-\dfrac{1}{4}\,x+\dfrac{x^2}{64a}+\dfrac{131x^3}{512a^2}+\dfrac{509x^4}{16384a^3}$ [⋯] が得られるであろう。

より十分な説明のために，解かれるべき別の例 $\dfrac{1}{5}\,y^5-\dfrac{1}{4}\,y^4+\dfrac{1}{3}\,y^3-\dfrac{1}{2}\,y^2+y-z=0$ を与えよう。ここでは，商を 5 次元までにだけ見出すことが期待されるとし，記号 $(\cdots)$ の後ろの余分な項は無視される。

$y=z+\dfrac{1}{2}\,z^2+\dfrac{1}{6}\,z^3+\dfrac{1}{24}\,z^4+\dfrac{1}{120}\,z^5\cdots$		
$z+p=y$	$+\frac{1}{5}\,y^5$	$+\frac{1}{5}\,z^5\cdots$
	$-\frac{1}{4}\,y^4$	$-\frac{1}{4}\,z^4-z^3p\cdots$
	$+\frac{1}{3}\,y^3$	$+\frac{1}{3}\,z^3+z^2p+zp^2\cdots$
	$-\frac{1}{2}\,y^2$	$-\frac{1}{2}\,z^2-zp-\frac{1}{2}\,p^2$
	$+y$	$+z\qquad+p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}\,z^2+q=p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{4}\,z^5\cdots$
	$-\frac{1}{2}\,p^2$	$-\frac{1}{8}\,z^4-\frac{1}{2}\,z^2q\cdots$
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}\,z^5\cdots$
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}\,z^4+z^2q$
	$-zp$	$-\frac{1}{2}\,z^3-zq$
	$+p$	$+\frac{1}{2}\,z^2+q$
	$+\frac{1}{5}\,z^5$	$+\frac{1}{5}\,z^5$
	$-\frac{1}{4}\,z^4$	$-\frac{1}{4}\,z^4$
	$+\frac{1}{3}\,z^3$	$+\frac{1}{3}\,z^3$
	$-\frac{1}{2}\,z^2$	$-\frac{1}{2}\,z^2$
$1-z+\dfrac{1}{2}\,z^2\Big)\ \dfrac{1}{6}\,z^3-\dfrac{1}{8}\,z^4+\dfrac{1}{20}\,z^5\ \Big(\ \dfrac{1}{6}\,z^3+\dfrac{1}{24}\,z^4+\dfrac{1}{120}\,z^5$ [⋯]		

そして，それゆえ，もし方程式 $\dfrac{63}{2816}\,y^{11}+\dfrac{35}{1152}\,y^9+\dfrac{5}{112}\,y^7+\dfrac{3}{40}\,y^5+\dfrac{1}{6}\,y^3+y-z=0$ が，商を 9 次元までにだけ，解かれることを望むならば，作業を始める前に項 $\dfrac{63}{2816}\,y^{11}$ を無視し，それから，作業をしている間中，z^9 の後ろのすべての項もまた無視して，商はいたるところで $(z$，z^3，z^5，$\cdots$ の仕方のように) 単位の 2 つずつの段階によって高まらなければならないことに気づくから，z^7 の後には 1 つ，そして z^5 の後には 2 つだけをおく。そして，ついには，$y=z-\dfrac{1}{6}\,z^3+\dfrac{1}{120}\,z^5-\dfrac{1}{5040}\,z^7+\dfrac{1}{362880}\,z^9\cdots$ が生じる。

そして，このことから，無限に複合された，あるいは非常に多くの，または無限に多くの個数の項からなる方程式を解くことができる技法は明らかである。すなわち，作業を始める前に，根の文
字に作用していない，無際限に小さい文字の次元が商において要求された最大の次元を超えるよう 402
な，あるいは，根の文字の代わりに，モザイク模様の表の助けによって見出された，商の最初の項が代入されることによって，そこからこのような種類の大きな項以外は現れることができないような，すべての項が無視されなければならない。それゆえ，最後の例において y^9 を超える項を，それらは無限に続くけれども，すべて無視した。そして，この方程式

$$0=\begin{cases} -8+z^2-4z^4+9z^6-16z^8\cdots \\ +y \text{ in } z^2-2z^4+3z^6-4z^8\cdots \\ -y^2 \text{ in } z^2-z^4+z^6-z^8\cdots \\ +y^3 \text{ in } z^2-\dfrac{1}{2}z^4+\dfrac{1}{3}z^6-\dfrac{1}{4}z^8\cdots \end{cases}$$

において，立方根が z の 4 次元までにだけ導き出されるためには，私は，$+y^3$ in $z^2-\dfrac{1}{2}z^4+\dfrac{1}{3}z^6$ の後ろ，および $-y^2$ in $z^2-z^4+z^6$ の後ろ，および $+y$ in z^2-2z^4 の後ろ，および $-8+z^2-4z^4$ の後ろの無限にある項のすべてを省略する。そして，私は，この方程式 $\dfrac{1}{3}z^6y^3-\dfrac{1}{2}z^4y^3+z^2y^3-z^6y^2+z^4y^2-z^2y^2-2z^4y+z^2y-4z^4+z^2-8=0$ だけが解かれるものと仮定する。なぜならば，$2z^{-\frac{2}{3}}$ (すなわち，商の最初の項) は，$z^{\frac{2}{3}}$ によって下げられた，方程式の残りにおける y の代わりに代入されると，いたるところで［z の］4 次元より多くのものを与えるからである。

より高い［次数の］方程式に関して述べてきたことは 2 次方程式にも適用される。例えば，もしこの方程式

$$0=\begin{cases} yy \\ -y \text{ in } a+x+\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{x^3}{a^2}+\dfrac{x^4}{a^3}\cdots \\ +\dfrac{x^4}{4a^2} \end{cases}$$

の根を x^6 の区切りまで望むならば，$-y$ in $a+x+\dfrac{x^2}{a}$ の後ろの無限にある項のすべてを省いて，この $y^2-ay-xy-\dfrac{x^2}{a}y+\dfrac{x^4}{4a^2}=0$ だけを，(あるいはこの形 $y=\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{x^2}{2a}-\sqrt{\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{1}{2}ax+\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{x^3}{2a}}$ にするのが常であるような仕方で，あるいはいま述べられた複合方程式についての方法によってより迅速に) 解くと，$y=\dfrac{x^4}{4a^3}-\dfrac{x^5}{4a^4}*$ となり，要求された最後の項は零になる。

しかし，根が適当な区切りまで引き出された後で，［係数の］系列の類似性を観察することによって，それらは望むだけ伸ばすことができることがある。それゆえ，この $z+\dfrac{1}{2}z^2+\dfrac{1}{6}z^3+\dfrac{1}{24}z^4+\dfrac{1}{120}z^5\cdots$ (無限方程式 $z=y-\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{3}y^3\cdots$ の根) を，最後の項を順にこれら
403 の数 2，3，4，5，6，7，$\cdots$ で割ることによって，果てしなく伸ばすことができる。そして，この $z-\dfrac{1}{6}z^3+\dfrac{1}{120}z^5-\dfrac{1}{5040}z^7+\dfrac{1}{362880}z^9\cdots$ はこれらの数 2×3，4×5，6×7，8×9，$\cdots$ で割ることによって，また，この $a+\dfrac{x^2}{2a}-\dfrac{x^4}{8a^3}+\dfrac{x^6}{16a^5}-\dfrac{5x^8}{128a^7}\cdots$ はこれらの数 $\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{4}$，$-\dfrac{3}{6}$，$-\dfrac{5}{8}$，$-\dfrac{7}{10}$，$\cdots$ を掛けることによって［果てしなく伸ばすことができる］。他の場合も同様である。

しかし，商の最初の，そしてときには第 2 のあるいは第 3 の，項の発見について，その難しさをはっきりさせることがまだ残っている。なぜならば，前述のことに従って求められた，その値は無理量，あるいは複雑な複合方程式の解くことができない根になることがあるからである。このことが起きる，さらにそれが不可能なものではない，ときには，それを何らかの文字で表して，それが知られている［値である］かのように作業が行われるであろう。例えば，例 $y^3+axy+a^2y-x^3-2a^3=0$ において，もしこの $y^3+a^2y-2a^3=0$ の根が無理量あるいは知られていない［値である］なら

ば，それの代わりに任意の［文字］b がおかれると考えて，次のように (商の 3 次元の項までとする) 解法をやり遂げる。

$y^3+aay+axy-2a^3-x^3=0 \qquad cc=3b^2+a^2$ としよう。 $y=b-\frac{abx}{c^2}+\frac{a^4bx^2}{c^6}+\frac{x^3}{c^2}+\frac{a^3b^3x^3}{c^8}-\frac{a^5bx^3}{c^8}+\frac{6a^5b^3x^3}{c^{10}}\ \cdots$		
$b+p=y$	$+y^3$ $+axy$ $+aay$ $-x^3$ $-2a^3$	$+b^3 \quad +3b^2p+3bp^2+p^3$ $+abx+axp$ $+aab+aap$ $-x^3$ $-2a^3$
$\frac{-abx}{cc}+q=p$	$+p^3$ $+3bp^2$ $+axp$ $+ccp$ $-x^3$ $+abx$	$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6}\cdots$ $+\frac{3a^2b^3x^2}{c^4}-\frac{6ab^2x}{c^2}q\cdots$ $-\frac{a^2bx^2}{c^2} \quad +axq$ $-abx \quad +ccq$ $-x^3$ $+abx$
$c^2+ax-\frac{6ab^2x}{cc}\Big)\ \frac{a^4bx^2}{c^4}+x^3+\frac{a^3b^3x^3}{c^6}\ \Big(\ \frac{a^4bx^2}{c^6}+\frac{x^3}{c^2}+\frac{a^3b^3x^3}{c^8}\cdots$		

商の中に b と書き，$b+p=y$ と仮定して，先のように，y の代わりに代入する。それゆえ，b はこの $y^3+a^2y-2a^3=0$ の根であると仮定されているから，零に等しい項 $b^3+a^2b-2a^3$ を捨てると，$p^3+3p^2b+\cdots$ が生じる。次いで，項 $3b^2p+a^2p+abx$ は，商におかれることになる，$\dfrac{-abx}{3b^2+a^2}$ を与え，p の代わりに $\dfrac{-abx}{3b^2+a^2}+q$ が代入されることになる。

しかし，簡単のために，$3b^2+a^2$ の代わりに cc と書くが，項がそのように短縮されていると認 404
めるときは，いつでも $3bb+aa$ のように元に戻されることに気をつける。作業が終わったら，私は，a の代わりに何らかの数を仮定し，この $y^3+a^2y-2a^3=0$ を，数値［係数の］方程式について上で示されたように，解いて，その，3 つある［ただし，実数解は 1 つ］，根のいずれか 1 つを b の代わりに代入する。あるいはむしろ，私は，そのような種類の方程式を，できる限り，そして 399 ページ 6，7 行［ここでは 48 ページ］で知らせようとした仕方で，文字から，特に不定の［文字］から，自由にし［方程式から文字をなくし］，もし消し難いものが残っているならば，残りのものに対してだけ数をおく。それゆえ，$y^3+a^2y-2a^3=0$ は，その根が a で割られると a から自由にされて，それは $y^3+y-2=0$ となり，見出されたその根は a が掛けられてから，b の代わりに代入されなければならない。

私は，今まで不定な文字を小さいものと仮定してきた。しかし，もしそれが与えられた量に近接していると仮定されるならば，私は，無際限に小さいその差に対して何らかの文字をおき，代入されたそれによって，前のように［方程式を］解く。例えば，$\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y+a-x=0$ において，もし x が a とほとんど同じ量であると知られたあるいは考えられたならば，私は，それらの間の差を z とおく。そして，x の代わりに $a+z$ あるいは $a-z$ と書かれると，$\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+y\mp z=0$ が生じるであろうし，これは前述のようにして解かれ

るであろう。

しかし，もしその文字が無際限に大きいと仮定されるならば，無際限に小さいその逆数の代わりに何らかの文字とおき，代入されたそれを前のように解く。それゆえ，$y^3+y^2+y-x^3=0$ があり，x が非常に大きいと知られるあるいは考えられるときは，その逆数である小さい量 $\dfrac{1}{x}$ の代わりに z とおく。すると，x の代わりに $\dfrac{1}{z}$ が代入されると $y^3+y^2+y-\dfrac{1}{z^3}=0$ が生じるであろうし，この根は $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{9}z+\dfrac{7}{81}z^2+\dfrac{14}{729}z^4\cdots$ であり，もし望むならば，x が元に戻されると $y=x-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{9x}+\dfrac{7}{81x^2}+\dfrac{14}{729x^4}\cdots$ となるであろう。

もしいつか，これらの 3 つの方策 (suppositio) のどれも完全にはあるいは適切には成功しないならば，他［の方法］に頼らなければならない。それゆえ，$y^4-x^2y^2+xy^2+2y^2-2y+1=0$ において，最初の項は $y^4+2y^2-2y+1=0$ と考えられることによって得られなければならないが，これは可能な根を許容しない［実数解をもたない］から，私は，それができる別の方法を試す。例えば，もし x が $+2$ と少し異なるあるいは $2+z=x$ であると考えるならば，x の代わりに $2+z$ が代入されると $y^4-z^2y^2-3zy^2-2y+1=0$ が生じるであろうし，そして，商は $+1$ から始まるであろう。あるいは，もし x が無際限に大きい，あるいは $\dfrac{1}{x}=z$ であると考えるならば，$y^4-\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{y^2}{z}+2y^2-2y+1=0$ が，そして，商の初項として $+z$ が得られるであろう。

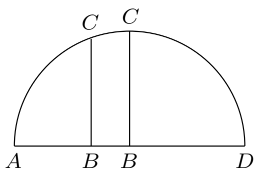
405 そして，さまざまな仮説に従ってこの方法で［作業が］進められると，いろいろな仕方で根を導くことが，そして根を表すことが自由にできるであろう。

しかしもし，それがなされるであろう多くの方法によって，探り出したいと望むのであれば，提示された方程式における不定の文字の代わりに代入されたときに $y\pm$ 何らかの量，あるいは y だけ，によって割ることができるようになる，何がしかの量を試すことになるであろう。このことは，例えば，方程式 $y^3+axy+a^2y-x^3-2a^3=0$ において，x の代わりに $+a$，あるいは $-a$，あるいは $-2a$，あるいは $\sqrt[3]{-2a^3}$ などが代入されると起きるであろう。そして，それゆえ，量 x を $+a$，あるいは $-a$，あるいは $-2a$，あるいは $\sqrt[3]{-2a^3}$ と少し異なるものと都合よく仮定することができ，それから，提示された方程式の根を多くの方法によって導き出すことができるであろう。確かに，そしておそらく，それらの差が無際限に大きいものと考えられるとしても多くの別の方法によって［なされるであろう］。さらに，もし不定な量の代わりに根を表すあれやこれやの文字を用いるならば，おそらくさらに別の方法によって提示されたことを得ることができる。そして，さらになお，不定な文字の代わりに $\left(az+bz^2,\ \dfrac{a}{b+z},\ \dfrac{a+cz}{b+z}\right.$ などのような$\left.\right)$ 何らかの仕方でつくられた値が代入されることによって，得られる方程式において前と同じように操作することで［やり遂げられる］。

しかし，これらの結論の正しさは一致する，すなわち，そのように引き出された商は，もしそれらが伸ばされるならば，ついには任意に与えられた量との差がより小さくなり，それゆえ，それらが無限に伸ばされると全く異ならない［ものになる］程に，根にどんどん近づいていく。表の右の部分における左側の列にある量は，それらの根が p，q，r，s，$\cdots$ であり，そして，そこから，それらが消滅することによって，それら p，q，r，s［，$\cdots$］，すなわち商および求める根の差が，同時に消滅するような，方程式の最後の項であるということをよく考えよ。それゆえ，そのとき，商は根と異なっていない。そのため，操作のはじめのときに，もし前述の列における項がすべて互い

に壊すのを見るならば，そのようなところまで引き出された商は真の根であると結論づけよ。しかし，もしそうでなければ，無際限に小さい文字がより小さい次元である項，すなわち，まさしく最大である項は，その列から絶えず取り除かれ，そのため，ついには与えられた任意の量より小さいものを除いては残っていなくて，そしてそれゆえ，操作が無限に続けられるとき，[それらは] 零より大きくはない。それゆえ，無限に引き出された商は真の根になるであろう。

しかし，最後に，明快さのために，ここまでは無際限に小さいものと仮定してきた，変量が望むだけ大きいものと仮定されると，真の根に収束する動きは遅いけれどもなお，商は正しいであろうし，このことは類推により明らかである。しかし，ここで根の限界 (terminus) や最大および最小の量が考えられることになる。なぜならば，このような種類の性質 (symptoma) は無限方程式にも有限方程式にも共通だからである。さらに，これらの根は，正の項の和の負 [の項] の和からの差が最大あるいは最小になるときに，最大あるいは最小になり，無際限な量 —— それゆえ私は不当にではなく小さいものと考えた —— が，根の大きさが突然無限になることなしに，大きいものと仮定することができないときに，制限されるが，それは不可能になるであろう。例えば，ACD を 406



直径 AD 上に描かれた半円とし，BC をその縦線 (ordinatim applicata) とおくことにしよう。$AB=x$，$BC=y$，$AD=a$ とすると，上のように，$y=\left(\sqrt{ax-x^2}=\right)\sqrt{ax}-\dfrac{x}{2a}\sqrt{ax}-\dfrac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax}-\dfrac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}\cdots$ であろう。それゆえ，BC あるいは y は，$\sqrt{ax}$ が [他の] すべての項 $\dfrac{x}{2a}\sqrt{ax}+\dfrac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax}+\dfrac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}\cdots$ を大きく超えるとき，すなわち $x=\dfrac{1}{2}a$ のとき，最大になるが，$x=a$ になるとき，制限されるであろう。なぜならば，もし x を a よりも大きいと仮定するならば，すべての項の和 $\dfrac{-x}{2a}\sqrt{ax}-\dfrac{x^2}{8a^2}\sqrt{ax}-\dfrac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}\cdots$ は無限になるであろうからである。また，根 $\sqrt{-ax}$ は不可能であるから，$x=0$ とおくときにもう 1 つの限界がある。これらの限界は半円の端点 (limes) A および D に対応している。

> 以上で，関数を無限級数に「還元」する 3 つの方法
> (1) 除法による方法
> (2) 開平による方法
> (3) 複合方程式の解法による方法
> が述べられた。特に，(3) については，「解析について」よりも一層詳しく説明されている。
> 説明では，x が十分小さいときを基本に据えているが，$x \fallingdotseq a$ のときには $x=a\pm z$ とすればよく，x が大きいときには $\dfrac{1}{x}=z$ とすればよいことが注意されている。
> ニュートンはこれらの方法によって，陰関数表示された関数を陽関数の形に無限級数展開することや，ある関数の逆関数を無限級数表示することを自由に行えるようになっていた。これと項別積分とを組み合わせて，さまざまな問題を解いていくことになる。
> なお，「根 $\sqrt{-ax}$」の部分は，ホワイトサイドによれば，「$x<0$ のときの $\sqrt{ax-x^2}$」と (同等の内容と) 読むべきである，という (『数学論文集』第 3 巻 p.70)。

第 4 章
流率の方法

これまで，今後しばしば用いるであろう，計算の方法について [述べてきた]。この解析的な技法の例証のために，いま残っているのは，いくつかの問題，特に曲線の性質が与えるであろうよう

な種類の問題，の実例 (specimen) を挙げることである。しかし，まず最初に，そのような種類の困難はすべて，どんなに速められようとあるいは遅らせられようと，何らかの位置運動によって描かれる空間に関して提出することが許されるであろう，ただ 2 つの問題に還元することができるということが注意されるべきである。

I　空間の長さが連続的に (すなわち，それぞれの時間［の瞬間］に) 与えられるとき，提示された任意の時間［時刻］における運動の速さを見出すこと。

407 II　運動の速さが連続的に与えられるとき，提示された任意の時間において描かれた空間の長さを見出すこと。

それゆえ，方程式 $xx = y$ において，もし y が任意の時間において —— ［その時間は］一様な速さ $\dot{x}$ で増大するもう 1 つの空間 x が測りそして表す —— 描かれた空間 (spatium) の長さを表すならば，そのとき $2\dot{x}x$ は空間 y が，同じ時間の瞬間において，描かれ始める速さを表すであろうし，逆も［そうであろう］。そして，それゆえ，以下において私は，量をあたかも，駆け抜けるように動くことができる物体が空間を描くような仕方で，連続的な増加によって生成されたものであると考える。

しかし，均等な位置運動によって表され，また測られるものでなければ，時間を評価することができず，さらに，同じ種類の量だけが互いに比較でき，そしてそれらの増加および減少の速さもまた互いに比較できるのであるから，今後は，時間を形式的に考えられたものとはみなさず，均等な流れによって成長させられ，それがあたかも時間であるかのように他のものが関係づけられるような，提示された量と同じ種類［の量］の 1 つであると仮定する。それゆえ，類推によりそれに時間という名が与えられても妥当でないとはいえない。それゆえ，もしいつか時間という言葉が現れる (私が明瞭さと識別のために本文中にときおり織り交ぜたように) ときは，その名前によって，形式的に考えられた時間ではなく，その均等な増加あるいは流れによって時間が表され測られる他の量として理解されるべきである。

しかし，徐々に，無際限に増大するものとして考える量を，任意の方程式において確定していて既知であるとみなされ，はじめの方の文字 a，b，c，$\cdots$ で表される他の量から区別するのに，今後は，私はそれらを流量と呼び，それらを終りの方の文字 v，x，y および z で表そう。そして，それらを生成している運動によって流れ，また成長している速さ —— それは流率あるいは単に速さといわれる —— を文字 $\dot{v}$，$\dot{x}$，$\dot{y}$ および $\dot{z}$ で表そう。すなわち，量 v の速さを $\dot{v}$ とおき，その他の量 x，y および z の速さをそれぞれ $\dot{x}$，$\dot{y}$ および $\dot{z}$ とおく。

これらを前提として，直ちにこの話題に着手し，はじめに，ちょうど今提出された 2 つの問題の解を示そう。

ニュートンの流率法に関する基本命題が定式化されている。
第 1 のものは微分法に関係するもので，変数 x，y に関する方程式から，それらの導関数を含む微分方程式 (流率方程式といった方が適切か) を導くことである。そのアルゴリズムは「1666 年論文」で既に確立されている。
第 2 の方は，第 1 のものの逆で，与えられた微分方程式の解を求めることに相当する。こちらについても，もちろん，「1666 年論文」および「解析について」において研究されている。こっちは第 1 のものより格段に難しい。
ニュートンの流率法の基礎には点の運動やその速度があるが，それには時刻・時間の概念が不可欠である。ここでは，ある変量を「時刻・時間」とみなして，他の量はそれを基準に考えようと

いう。これは，後で，$\dot{x}=1$ とおくことの布石ともいえる。

『自然哲学の数学的諸原理 (プリンキピア)』(*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* : 1687 年) では，時間，空間，場所，運動について，「定義」への「注解」の中で，次のように述べている (［6］pp.65–69)。

「絶対的な，真の，数学的な時間は，それ自身で，そのものの本性から，外界のなにものとも関係なく，均一に流れ，別名を持続ともいいます。相対的な，見かけ上の，日常的な時間は，持続の，運動による〔精密にしろ，不精密にしろ〕ある感覚的で外的な測度で，人々が真の時間のかわりに使っているものです。」

「絶対時間は，天文学では見かけ上の時間の均分によって，相対時間と区別されます。といいますのは，自然日はふつう均等であるとみなされ，時間の測度として使われていますが，本当は不均等だからです。天文学者たちは，天体の運動をもっと正確な時間で測定できるように，この不均等を補正するのです。」

「絶対的な空間は，その本性として，どのような外的事物とも関係なく，常に同じ形状を保ち，不動不変のままのものです。相対的な空間は，この絶対空間の測度，すなわち絶対空間のどのようにでも動かしうる広がりで，われわれの感覚によってそれの物体に対する位置より決定されるものであり，人々によって不動の空間のかわりにとられているところです。地球に関するその位置によって決められる，地下空間の広がりとか，大気圏の広がりとか，天界の空間の広がりとかいったものです。絶対空間と相対空間とは形も大きさも同じですが，数値的にはかならずしも同一とはかぎりません。なぜなら，たとえば，地球が動いているとすると，われわれの大気圏は相対的には地球に関していつも同一のままですが，ある時刻には空気が突入し通過する絶対空間の一部であり，他の時刻には絶対空間のまた別の部分であって，したがって絶対的にみれば，地球大気の空間はたえず変わっているであろうからです。」

「場所は物体が占める空間の一部であり，その空間が絶対空間であるか相対空間であるかに従って，絶対的な場所となり相対的な場所となります。わたくしは空間の一部を場所といっているのであって，物体の置かれている位置をいっているのでもなければ，物体をとりかこむ表面をいっているのでもありません。…… また位置というのは本来大きさをもたないもので，場所がいろいろな性質をもつほどには，場所自体になりかわれないものです。」

「絶対運動とは物体の絶対的な場所から絶対的な場所への移行であり，相対運動とは相対的な場所から相対的な場所への移行です。ですから帆走中の船の中で，物体の相対的な場所とは，その物体が占めている船の部分，あるいはその物体が満たしている船の空所(あきま)全体のことです。したがってそれは船といっしょに動きます。また相対的な静止とは，物体が船の，あるいは船の空所の，同じ部分にひきつづきあることです。しかし真の，絶対的な静止というのは，その中を船自体も，その空所や，船にあるものすべてとともに運動している，不動の空間の同一の部分に物体が存続することです。」

「真の運動と相対運動とがたがいに区別される原因(もと)は，運動をひき起こすため物体に及ぼされる力です。真の運動は，動かされる当の物体に力を加えることによる以外，ひき起こされることも変化させられることもありません。しかし相対運動は，その物体になんの力も及ぼさずに，ひき起こしたり変化させたりすることができます。なぜなら，当の物体と関係する他の諸物体に力を及ぼし，それらの物体を動かすことによって，相対的な静止または運動においていた相互関係を変えることで十分だからです。」

「絶対運動を相対運動と区別する効果は，円運動の回転軸から遠ざける力です。なぜなら，そのような力は，純粋に相対的な円運動では存在しませんが，真の絶対的な円運動では，その運動の運動量に従って大きくなったり小さくなったりするからです。」

ここで初めて「流量 (fluens : fluent)」，「流率 (fluxio : fluxion)」という用語が現れる。なお，ニュートンによってドット記号が導入されるのは 1691 年頃のことであるが，『全集』はここでそのドット記号を援用している。

408 **問題 1**

流れている量［流量］相互の関係が与えられるとき，それらの流率の［間の］関係を決定すること。

解

与えられた関係が表される方程式をある流量，x とする，の次元に従って整理し，その［それぞれの］項に任意の算術数列［等差数列］を掛け，それから $\dfrac{\dot{x}}{x}$ を掛けよ。そして，この操作を流量のそれぞれについて別々に行え。その後で，それらの積のすべての和を零に等しいとおけば，求める方程式が得られる。

例1　もし流量 x および y の関係が $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ ならば，項をはじめは x に従って，次いで y に従って整理し，次のように掛ける。

各項に	x^3	$-ax^2$	$+axy$	$-y^3$
掛けると	$\dfrac{3\dot{x}}{x}$	$\dfrac{2\dot{x}}{x}$	$\dfrac{\dot{x}}{x}$	0
となる	$3\dot{x}x^2$	$-2\dot{x}ax$	$+\dot{x}ay$	$*$

各項に	$-y^3$	$+axy$	$-axx$ $+x^3$
掛けると	$\dfrac{3\dot{y}}{y}$	$\dfrac{\dot{y}}{y}$	0
となる	$-3\dot{y}y^2$	$+ax\dot{y}$	$*$

すると，積の和は $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$ で，これは流率 $\dot{x}$ および $\dot{y}$ の間の関係を与える方程式である。確かに，もし x を任意に仮定すると，方程式 $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ は y を与えるであろう。これらが決定されると，$\dot{x} : \dot{y} = (3y^2 - ax) : (3x^2 - 2ax + ay)$ であろう。

例2　もし流量 x，y および z の関係が $2y^3 + x^2y - 2cyz + 3yz^2 - z^3 = 0$ ならば，

各項に	$2y^3$	$+x^2y$ $-2czy$ $+3z^2y$	$-z^3$
掛けると	$\dfrac{2\dot{y}}{y}$	0	$-\dfrac{\dot{y}}{y}$
となる	$4\dot{y}y^2$	$*$	$+\dfrac{\dot{y}z^3}{y}$

各項に	x^2y	$+2y^3$ $-2cyz$ $+3yz^2$ $-z^3$
掛けると	$\dfrac{2\dot{x}}{x}$	0
となる	$2\dot{x}xy$	$*$

各項に	$-z^3$	$+3yz^2$	$-2cyz$	$+x^2y$ $+2y^3$
掛けると	$\dfrac{3\dot{z}}{z}$	$\dfrac{2\dot{z}}{z}$	$\dfrac{\dot{z}}{z}$	0
となる	$-3\dot{z}z^2$	$+6\dot{z}yz$	$-2c\dot{z}y$	$*$

である。

それゆえ，流れる速さ $\dot{x}$，$\dot{y}$ および $\dot{z}$ の関係は $4\dot{y}y^2 + \dfrac{\dot{y}z^3}{y} + 2\dot{x}xy - 3\dot{z}z^2 + 6\dot{z}yz - 2c\dot{z}y = 0$ である。

409 しかし，ここには 3 つの流量 x，y および z があるから，それらの間の，そしてそれらの流率の間の，関係が完全に決定されるようなもう 1 つの方程式が与えられなければならない。例えば，もし $x + y - z = 0$ とおかれるならば，これにより，規則に従うと，流率の間のもう 1 つの関係は $\dot{x} + \dot{y} - \dot{z} = 0$ であろう。いま，前述の方程式と合わせてこれらを比較し，3 つの流量のうちのいずれか 1 つが，またそれら 3 つの流率のうちのいずれか 1 つも，消去されることによって，残ったものの［間の］関係が完全に決定された方程式を得るであろう。

もしいつか，提示された方程式の中に複雑な分数あるいは無理量が存在するならば，そのそれぞれの代わりに多くの［それらに対応する］文字をおき，それらが流量を表すものと考えて，前のように操作をする。その後，私は，ここに見られるように，書き加えられた文字を隠し，そして消し去る。

例3　もし流量 x および y の関係が $yy - aa - x\sqrt{aa - xx} = 0$ ならば，$x\sqrt{aa - xx}$ の代わりに z と書けば，そこから 2 つの方程式 $y^2 - a^2 - z = 0$ および $aaxx - x^4 - z^2 = 0$ が得られ，これ

らのうち前者は，前のように，速さ $\dot{y}$ および $\dot{z}$ の関係として $2\dot{y}y-\dot{z}=0$ を与えるであろうし，後者は速さ $\dot{x}$ および $\dot{z}$ の関係として $2a^2\dot{x}x-4\dot{x}x^3-2\dot{z}z=0$，あるいは $\dfrac{aa\dot{x}x-2\dot{x}x^3}{z}=\dot{z}$ を与えるであろう。いま，$\dot{z}$ を隠すと，$2\dot{y}y+\dfrac{-aa\dot{x}x+2\dot{x}x^3}{z}=0$ となるであろうし，さらに z の代わりに $x\sqrt{aa-xx}$ を元に戻すと，求められていた $\dot{x}$ および $\dot{y}$ の間の関係 $2\dot{y}y+\dfrac{-aa\dot{x}+2\dot{x}x^2}{\sqrt{aa-xx}}=0$ が得られるであろう。

例4　もし $x^3-ay^2+\dfrac{by^3}{a+y}-x^2\sqrt{ay+x^2}=0$ が x および y の間の関係を表すならば，$z=\dfrac{by^3}{a+y}$ および $v=x^2\sqrt{ay+x^2}$ とおくと，そこから 3 つの方程式 $x^3-ay^2+z-v=0$，$az+yz-by^3=0$ および $ax^4y+x^6-vv=0$ を得る。速さ $\dot{v}$，$\dot{x}$，$\dot{y}$ および $\dot{z}$ の関係として，第 1［の方程式］は $3\dot{x}x^2-2a\dot{y}y+\dot{z}-\dot{v}=0$ を，第 2［の方程式］は $a\dot{z}+\dot{z}y+\dot{y}z-3b\dot{y}y^2=0$ を，第 3［の方程式］は $4a\dot{x}x^3y+6\dot{x}x^5+a\dot{y}x^4-2\dot{v}v=0$ を与える。しかし，これらのうち第 2 および第 3 の方程式によって見出された $\dot{z}$ および $\dot{v}$ の値を $\Bigl($ すなわち，$\dot{z}$ の代わりに $\dfrac{3b\dot{y}y^2-\dot{y}z}{a+y}$ を，$\dot{v}$ の代わりに $\dfrac{4a\dot{x}x^3y+6\dot{x}x^5+a\dot{y}x^4}{2v}$ を $\Bigr)$ 第 1 の方程式に代入すると $3\dot{x}x^2-2a\dot{y}y+\dfrac{3b\dot{y}y^2-\dot{y}z}{a+y}-\dfrac{4a\dot{x}x^3y+6\dot{x}x^5+a\dot{y}x^4}{2v}=0$ が生じる。そして，z および v の代わりに値 $\dfrac{by^3}{a+y}$ および $x^2\sqrt{ay+xx}$ を元に戻すと，求められていた方程式 $3\dot{x}x^2-2a\dot{y}y+\dfrac{3ab\dot{y}y^2+2b\dot{y}y^3}{a^2+2ay+y^2}-\dfrac{4a\dot{x}xy+6\dot{x}x^3+a\dot{y}xx}{2\sqrt{ay+xx}}=0$ が生じ，これによって速さ $\dot{x}$ および $\dot{y}$ の関係が表される。

流量 x，y，z，$\cdots$ の間の関係を $F(x,\ y,\ z,\ \cdots)=0$ とするとき，

$$\frac{\partial F}{\partial x}\times\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\times\frac{dy}{dt}+\frac{\partial F}{\partial z}\times\frac{dz}{dt}+\cdots\cdots=0$$

をつくれば，流率 $\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$，$\cdots$ の間の関係が得られるという。具体的な方法は例 1，例 2 を見れば明らかであろう。

処理にあたって，「任意の算術数列」を掛けるように指示しているが，実際には着目文字の次数からなる数列を掛けることがほとんどである。

なお，ニュートンにとっては，流量 x は時刻 t の関数と捉えられるから，流率は $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$ ということになり，今日の導関数 $\dfrac{dy}{dx}$ に相当するものは $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ である。$\dot{x}$ および $\dot{y}$ の間の関係を求める意味はここにある。

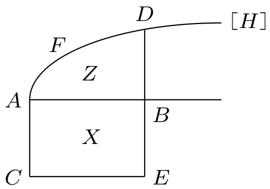
他の場合 —— 例えば，提示された方程式の中に，無理量の分母，立方根，$\sqrt{ax+\sqrt{aa-xx}}$ のように根号の中に根号があるもの，あるいはこのような種類の他の複雑な項が見出される場合 410
—— において，どのような方法で操作されなければならないかは，これらのことから明らかであると私は信じる。

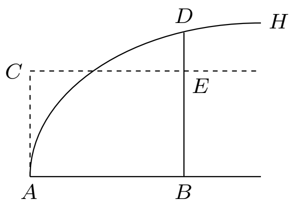
また，もし方程式の中に，曲線の面積や長さのように，どのような幾何学的な方法によっても決定することも表すこともできない量が含まれるならば，それにもかかわらず，それらの流率の関係は，次の例で知られるであろうように，ほとんど異なることなく探し出される。

例 5 のための準備

BD を AB と直角をなす縦線 (ordinatam) と仮定し，ADH を，任意の方程式によって表され

る AB および BD の間の関係によって定められる，曲線としよう。つまり，AB が x と呼ばれ，単位で割られた曲線の面積 ADB が z と呼ばれる。次いで，単位に等しい垂線 AC を立て，C を通って AB に平行な CE を引いて，BD と E で出会うとしよう。そして，2 つの面 ADB および $ACEB$ は直線 BED の運動によって生成されたものであると考えると，それらの流率 (すなわち，量 $1\times z$ および $1\times x$，あるいは量 z および x の流率) は互いに生成線 (lineae genarantes) BD および BE に比例することは明らかであろう。それゆえ，$\dot{z}:\dot{x}=BD:BE$ (あるいは 1) であり，それゆえ $\dot{z}=\dot{x}\times BD$ である。





ここに挙げた図について，『全集』は上左図を載せているが，『数学論文集』，『英訳版方法』，『遺稿集』はすべて上右図を載せている。

そして，そのため，z は x および任意の別の流量 y の間の関係を表す任意の方程式に含まれ，流率 $\dot{x}$ および $\dot{y}$ の関係は，それにもかかわらず，見出されるであろう。

例5　例えば，もし $z^2+axz-y^4=0$ が，x および y の間の関係を表すものとして，提示され，そして，一方，$\sqrt{ax-xx}=BD$ が曲線，それは円になるであろう，として定められるならば，方程式 $z^2+axz-y^4=0$ は，前述のように，速さ $\dot{x}$，$\dot{y}$ および $\dot{z}$ の関係として，$2\dot{z}z+a\dot{z}x+a\dot{x}z-4\dot{y}y^3=0$ を与えるであろう。そして，さらに，$\dot{z}=\dot{x}\times BD$ あるいは $=\dot{x}\sqrt{ax-xx}$ であるから，その代わりにこの値を代入すれば，速さ $\dot{x}$ および $\dot{y}$ の関係を定める方程式 $\overline{2\dot{x}z+a\dot{x}x}\sqrt{ax-xx}+a\dot{x}z-4\dot{y}y^3=0$ が生じるであろう。

［解の］**証明**　流量のモーメント (すなわち，それら［の流量］の無際限に小さい部分で，それが
411 加えられることによって，無際限に小さいそれぞれの時間の間に空間が増やされるもの) はそれらが流れる速さに比例する。それゆえ，もし任意のもの，例えば x，のモーメントがその速さ $\dot{x}$ および無限に小さい量 o との積によって (すなわち，$\dot{x}o$ によって) 表されるならば，他の v，y，z のモーメントは $\dot{v}o$，$\dot{y}o$，$\dot{z}o$ によって表されるであろう。なぜならば，$\dot{v}o$，$\dot{x}o$，$\dot{y}o$ および $\dot{z}o$ は互いに $\dot{v}$，$\dot{x}$，$\dot{y}$ および $\dot{z}$ に比例するからである。

いま，流量 (例えば，x および y) のモーメント (例えば，$\dot{x}o$ および $\dot{y}o$) は［それが加えられることによって］それら流量が無限に小さいそれぞれの時間の間隔の間に増やされるような無限に小さい増加分であるから，従って，それら流量 x および y は，任意の無限に小さい時間の間隔の後では，$x+\dot{x}o$ および $y+\dot{y}o$ となるであろう。そして，それゆえ，すべての時間において変わることなく流量の関係を表す方程式は，x および y の間と同様に，$x+\dot{x}o$ および $y+\dot{y}o$ の間の関係を表すであろう。それゆえ，その方程式において，それらの流量に対して x および y の代わりに $x+\dot{x}o$ および $y+\dot{y}o$ を代入することができる。

それゆえ，任意の方程式 $x^3-ax^2+axy-y^3=0$ が与えられると，x の代わりに $x+\dot{x}o$ を，y の代わりに $y+\dot{y}o$ を代入すれば，

$$\left.\begin{array}{llll} x^3 & +3\dot{x}ox^2 & +3\dot{x}^2oox & +\dot{x}^3o^3 \\ -ax^2 & -2a\dot{x}ox & -a\dot{x}^2oo & \\ +axy & +a\dot{x}oy & +a\dot{y}ox & +a\dot{x}\dot{y}oo \\ -y^3 & -3\dot{y}oy^2 & -3\dot{y}^2ooy & -\dot{y}^3o^3 \end{array}\right\}=0$$

が現れるであろう。

いま，仮定から $x^3-ax^2+axy-y^3=0$ であるから，それらが消されて，残りの項が o で割られると $3\dot{x}x^2+3\dot{x}^2ox+\dot{x}^3oo-2a\dot{x}x-a\dot{x}\dot{x}o+a\dot{x}y+a\dot{y}x+a\dot{x}\dot{y}o-3\dot{y}y^2-3\dot{y}^2oy-\dot{y}^3oo=0$ が残るであろう。そして，さらに，o は無限に小さいと仮定されていて，それゆえ流量のモーメントを表すことができるから，それが掛けられている項は他の項に関して零の価値がある［零と等しい］であろう。それゆえ，それらを捨てると，上の例 1 におけるように，$3\dot{x}x^2-2a\dot{x}x+a\dot{x}y+a\dot{y}x-3\dot{y}y^2=0$ が残る。

それゆえ，o が掛けられていない項はつねに消滅するであろうし，さらに，1 次元より多くの o が掛けられているものも消滅するであろうということが注意されなければならない。そして，o で割られた残りの項はつねに前述の規則によって得なければならない形であろう。これが私が示したかったことである。

そして，このことは，この規則に含まれる他のことは容易に従うであろうということを示している。［他のこととは］例えば，提示された方程式にいくつかの流量が含まれていることや，項に流量の次元の数だけでなく他の任意の算術数列も掛けられていることであり，［後者の場合には］操作 412
において［数列は］任意の流量に従って項の同じ差となり，数列はそれらの同じ次元の順序に従って整理される。そして，これらが許されると，例 3，4 および 5 においてさらに教えられることはそれら自身で明らかである。

ここで「モーメント」の概念が明確にされている。ここに現れる o は「1666 年論文」の定理 7 の証明に関する部分にも見られるが，そこではモーメントという用語は出てこない。

ニュートンは，流量 x の流率 $\dot{x}$ と無限小量 o によって $\dot{x}o$ と表されるもので，流量の「無際限に小さい部分」のことをモーメントと呼んでいるが，『プリンキピア』では次のように述べている (［6］pp.279–280)。

「これらの量［ゲニタのこと］は，不定かつ流動的なもので，たえず増大または減少している流れの運動のようなものであるとし，モメントゥム (積率) という名前でそれらの量の瞬間的な増し高または減り高を考えることにする。$\cdots$ 有限な微小部分はモメントゥムではなく，このモメントゥムから生ぜられる量である。(モメントゥムは) いままさに生じつつある有限な大きさの根源と解されねばならない。$\cdots$ モメントゥムのかわりに，増加および減少の速度〔それはまた量の運動とか変動とか流率とか名づけてもよい〕を使っても，あるいはこの速度に比例する任意の有限な量を使っても，同じことになる。」

従って，無限小量 o は時間の増分 dt に相当し，$\dot{x}o$ などは増分 $dx=\dfrac{dx}{dt}\times dt$ などに相当するものと考えられる。

なお，ニュートンは無限小量に対して「無際限に (indefinitus)」という言い方と「無限に (infinitus)」という言い方を使っている。それらの違いがどの程度のものなのか，そしてそれをニュートン自身はどれほど深く認識していたかは不明。

問題 2

流量の流率を含む方程式が提示されたとき，それらの流量相互の関係を見出すこと。

特殊解

この問題は前［の問題］の逆であるから，反対の方法で解かれるはずである。すなわち，$\dot{x}$ が掛けられている項が x の次元に従って整理され，そして $\dfrac{\dot{x}}{x}$ で割られ，それから，［次元の数あるいはおそらくは別の等差］数列で割られる［ようにしなければならない］。そして，同じ操作が $\dot{v}$，$\dot{y}$

あるいは $\dot{z}$ が掛けられている項について行われ，余分な項が捨てられてから，その結果の和全体が零に等しいとおかれなければならない。

例　それゆえ，提示された方程式を $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$ とすると，次の方法で操作される。

各項を	$3\dot{x}x^2$	$-2a\dot{x}x$	$+a\dot{x}y$	各項を	$-3\dot{y}y^2$	$+a\dot{y}x$
$\dfrac{\dot{x}}{x}$ で割り	$3x^3$	$-2ax^2$	$+axy$	$\dfrac{\dot{y}}{y}$ で割り	$-3y^3$	$+axy$
この数で割ると	3	2	1	この数で割ると	3	1
となる	x^3	$-ax^2$	$+axy$	となる	$-y^3$	$+axy$

413 そして，和 $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ が流量 x および y の要求された関係であろう。ここで，項 axy は 2 度現れたけれども，それにもかかわらず，この和 $x^3 - ax^2 + axy - y^3$ の中には 2 度はおかず，余分な項［として 1 つ］は捨てるということが注意されなければならない。そして，どこであろうと何らかの項が 2 度 —— あるいは，もし［方程式が］いくつかの流量からなるならば，より頻繁に —— 現れるときは，項の和の中には 1 度だけそれを書く。

他の場合も存在するが，起こったことを観察することは職人の才能に委ねる。なぜならば，問題がいつもこの技法で解ける訳ではないから，このことに多くの言葉を費やすことは余計なことだからである。しかしながら，私は，職人がこの方法によって流量［の間］の関係を得た後で，もし問題 1 に従ってそれらの流率を含む提示された方程式に戻ることができるならば，操作は正しいものであるし，もしそうでなければ疵のあるものであるということを，付け加えよう。それゆえ，提示された例において，方程式 $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ が得られたとき，もし最初の問題の助けによって，反対にそれから $\dot{x}$ および $\dot{y}$ の間の関係が探し求められるならば，提示された方程式 $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$ が得られるであろう。それゆえ，方程式 $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ が正しく見出されたことが知られる。しかし，もし方程式 $x\dot{x} - \dot{x}y + \dot{y}a = 0$ が提示されたならば，それから前述の方法により，x および y の間の関係として，$\dfrac{1}{2}x^2 - xy + ay = 0$ が導かれるが，反対にそこから問題 1 によって，はじめに提示されたものとは異なる［方程式］$\dot{x}x - \dot{x}y - \dot{y}x + \dot{y}a = 0$ が生じるから，操作は疵のあるものであった。

それゆえ，これらのうわべだけの観察を省略して，一般解に取りかかろう。

> この問題 2 は，流率方程式 (今日の微分方程式) の解法である。
> ニュートンはまず，特殊解を示す。問題 2 は問題 1 の逆の問題だから，「反対の方法で解かれるはずである」として問題 1 の逆の手順を踏む。このとき，いくつかの変数のついて行った操作によって同じ項が出た場合には，その項は 1 つだけを採用するという。
> しかし，与えられた問題が「いつもこの技法で解ける訳ではない」から，ここでの方法で得られた方程式に逆に問題 1 を適用して，提示された元の方程式が出てくるかどうかを調べるよう注意を促している。

一般解への準備

そして，はじめに，提示された方程式において流率 —— それらは，それらが流率であるような量とは異なる種類の量であるから —— の記号は，それぞれの項において，同じ大きさの次元まで
414 増やさなければならないことが注意されなければならない。そして，そうでないときには，ある流量の別の流率は単位であり，より低い［次元の］項には，すべての項において流率の記号が同じ階

級の次元になるまで増えるように，それが掛けられると理解されなければならない。例えば，もし方程式 $\dot{x}+\dot{x}\dot{y}x-axx=0$ が提示されるならば，何らかの第 3 の流量，例えば z，の流率 $\dot{z}$ が単位であると理解されなければならず，そこにおける流率［の次元］が第 2 の項 $\dot{x}\dot{y}x$ における［流率の］次元と同じ大きさになるように，はじめの項 $\dot{x}$ には 1 回，そして最後の項 axx には 2 回［その流率 $\dot{z}$ が］掛けられなければならない。あたかも提示された方程式が，$\dot{z}=1$ とおくことによって，$\dot{z}\dot{x}+\dot{x}\dot{y}x-a\dot{z}\dot{z}x^2=0$ から導かれるように，である。そして，方程式 $\dot{y}x=yy$ においては，$\dot{x}$ は単位であり，項 yy にはそれが掛けられていると考えなければならない。

一方，2 つだけの流量を含み，いたるところ同じ大きさの次元まで増やしてある方程式は，つねに，一方の部分［辺］には流率の比 $\left(\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\right.$ あるいは $\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}$ あるいは $\dfrac{\dot{z}}{\dot{x}}$ などのように$\left.\right)$ があり，他方の部分［辺］には，単純な代数的な項で表された，その比の値があるような形に，例えば $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=2+2x-y$ に見られるような形に，還元することができる。そして，前述の特殊解が方程式を満たさないときは，この形に還元することが要求される。

そのため，その比の値において，ある項が混合した量を分母にもつ，あるいは根である，あるいはもしその比が方程式の複合根 (radix affecta)［複合方程式の根］であるときは，除法あるいは根の開平あるいは複合方程式の解法のいずれかによる還元が，上で示されたように，行われなければならない。

例えば，もし方程式 $\dot{y}a-\dot{y}x-\dot{x}a+\dot{x}x-\dot{x}y=0$ が提示されるならば，はじめに還元によってこ 415
れは $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=1+\dfrac{y}{a-x}$，あるいは $\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}=\dfrac{a-x}{a-x+y}$ のいずれかになる。そして，前者の場合，もし混合した流量 $a-x$ を分母にもつ項 $\dfrac{y}{a-x}$ を，分子 y を分母 $a-x$ で割ることによって，単純な項の無限級数 $\dfrac{y}{a}+\dfrac{xy}{aa}+\dfrac{x^2y}{a^3}+\dfrac{x^3y}{a^4}\cdots$ に還元すると，$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=1+\dfrac{y}{a}+\dfrac{xy}{a^2}+\dfrac{x^2y}{a^3}+\dfrac{x^3y}{a^4}\cdots$ が得られ，この助けによって x および y の間の関係が決定されなければならない。

それゆえ，$\dot{y}\dot{y}=\dot{x}\dot{y}+\dot{x}\dot{x}xx$，あるいは $\dfrac{\dot{y}\dot{y}}{\dot{x}\dot{x}}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}+xx$，そしてさらには還元された $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+xx}$ が提示されたら，項 $\dfrac{1}{4}+xx$ の平方根を開くと，無限級数 $\dfrac{1}{2}+xx-x^4+2x^6-5x^8+14x^{10}\cdots$ を得，これを $\sqrt{\dfrac{1}{4}+xx}$ の代わりに代入すると，$\sqrt{\dfrac{1}{4}+xx}$ を $\dfrac{1}{2}$ に加えるか $\dfrac{1}{2}$ から引くかに従って，$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=1+x^2-x^4+2x^6-5x^8\cdots$ あるいは $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=-x^2+x^4-2x^6+5x^8\cdots$ が生じる。

そして，それゆえ，もし $\dot{y}^3+ax\dot{x}^2\dot{y}+a^2\dot{x}^2\dot{y}-\dot{x}^3x^3-2\dot{x}^3a^3=0$，あるいは $\dfrac{\dot{y}^3}{\dot{x}^3}+ax\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}+aa\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}-x^3-2a^3=0$ が提示されるならば，この複合［方程式の］立方根を開くと，第 3 章第 6 節［49 ページ］に見られたように，$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=a-\dfrac{x}{4}+\dfrac{xx}{64a}+\dfrac{131x^3}{512a^2}+\dfrac{509x^4}{16384a^3}\cdots$ が生じる。

しかし，ここで，私は流量に関して混合されている項だけを混合されているとみなす，ということが注意されなければならない。私は，与えられた量に関して混合された項は，それらを他の与えられた量に等しいと考えれば単純なものに還元することができるから，単純なものとみなす。それ
ゆえ，量 $\dfrac{ax+bx}{c}$，$\dfrac{x}{a+b}$，$\dfrac{bcc}{ax+bx}$，$\dfrac{b^4}{ax^2+bx^2}$，$\sqrt{ax+bx}$ などは，$a+b=e$ と考えれば， 416
単純な［項］$\dfrac{ex}{c}$，$\dfrac{x}{e}$，$\dfrac{bcc}{ex}$，$\dfrac{b^4}{ex^2}$，$\sqrt{ex}$ あるいは $e^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ に還元することができるから，単純なものであるとみなす。

さらに，流量を互いによりはっきりと区別するのに，比の分子，あるいは比の先行部の中に整理されている流率を関連量 (relatam quantitas) と，そして，それに関係づけられるもう一方［分母］を相関量 (correlatam quantitas) と，全く不適切にではなく名づけることができ，流量もまた同じ名前によってそれぞれ区別される。そして，以下のことをより容易に理解するには，相関量とは時間，あるいはむしろ，時間がそれによって表されそして測られる，均等に流れる任意の他の量であると，またもう一方あるいは関連量とは，どのように速められたりあるいは遅くされたりしようと，運動しているものがその時間内に通過する空間であると想像するのがよい。そして，問題の目的は，運動の速さがすべての時間［の瞬間］において与えられるとき，その全時間において［その運動体が］通過する空間を決定することである。

しかしながら，この問題に関して，方程式を 3 つの状態に区別するのがよい。

1　2 つの流率とそれらのうちの 1 つだけの流量を含むもの。

2　2 つの流量とそれらの流率を含むもの。

3　2 つより多くの［流］量の流率を含むもの。

そして，これらの前提で，これら 3 つの場合に従って問題の解法 (confectio) に取りかかろう。

> 「一般解への準備」のはじめに「同次元の原則」ともいうべき考え方が示される。すなわち，方程式の各項において流率を表す記号の次元は同一であることが要請されるのである。そうなっていない場合には，ある流量 (これは方程式に含まれる場合も含まれない場合もある) をとり，その流率は単位であると仮定して，次元が低い項はその流率，すなわち単位，が掛けられているとする。このような前処理をすると，方程式 $F(x,\, y, \dot{x}, \dot{y}) = 0$ は $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x,\, y)$ とすることができるという。そうすれば，$f(x,\, y)$ を無限級数に展開することによって，項別積分することにより解が求められるというのである。
> また，ニュートンは流率の比において，その分子を関連量，分母を相関量と呼び，関連量を「空間」すなわち曲線などと，相関量を「時間」と考えるのがよいという。そして，この用語は流量についても流用するという。
>
> 以下で一般解を求めるにあたって，流率方程式を 3 つの形式に分類する。「場合 1」は「1666 年論文」の命題 8 および「解析について」の規則 III にも見られるが，「場合 2，3」は (明確には) 取り上げられていない。
> 「場合 1」: $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x)$ となる場合で，これは $y = \displaystyle\int f(x)\,dx$ とできる。
> 「場合 2」: $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x,\, y)$ であるが，これは $f(x,\, y) = \varphi(x) + \psi(x,\, y)$ として解いていく。

解：場合 1

方程式に 1 つだけ含まれている流量を相関量と仮定し，そして，同様の仕方で整理された (すなわち，その一方の部分［辺］にはもう一方の流率のこの［相関量の］流率に対する比があり，もう一方［の辺］には単純な項によるその値があるようにされている) 方程式において，流率の比の値にその相関量を掛け，それから，それらのそれぞれの項を，その［相関］量がそこに作用される，次元の数で割る。こうして生じるであろうものはもう一方の流量の価値がある［流量と等しい］であろう。

417 それゆえ，$\dot{y}\dot{y} = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}\dot{x}xx$ が提示されたら，x を相関量と仮定して，方程式が同様の仕方で還元されると $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + x^2 + x^4 + 2x^6 \cdots$ となるであろう。いま，$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ の値に x を掛けると $x + x^3 - x^5 + 2x^7 \cdots$ が生じるであろうし，それらのそれぞれの項をそれらの次元の数で割って，

その結果の $x+\dfrac{1}{3}\,x^3-\dfrac{1}{5}\,x^5+\dfrac{2}{7}\,x^7\cdots$ を $=y$ とおく。すると，この方程式によって x および y の間の要求された関係が決定される。

それゆえ，$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=a-\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^2}{64a}+\dfrac{131x^3}{512a^2}\cdots$ であれば，x および y の間の関係を決定するものとして，$y=ax-\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{x^3}{192a}+\dfrac{131x^4}{2048a^2}\cdots$ が生じるであろう。

そして，それゆえ，方程式 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{a}{x^{\frac{1}{2}}}-x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{3}{2}}$ は $y=-\dfrac{1}{2x^2}+\dfrac{1}{x}+2ax^{\frac{1}{2}}-\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$ を与える。なぜならば，$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ の値に x を掛けると $\dfrac{1}{xx}-\dfrac{1}{x}+ax^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}$，あるいは $x^{-2}-x^{-1}+ax^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}$ となり，これらの項をそれらの次元の数で割れば，指定された y の値が現れるからである。

同じ方法で，方程式 $\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}=\dfrac{2b^2c}{\sqrt{ay^3}}+\dfrac{3y^2}{a+b}+\sqrt{by+cy}$ は $x=-\dfrac{4b^2c}{\sqrt{ay}}+\dfrac{y^3}{a+b}+\dfrac{2}{3}\sqrt{by^3+cy^3}$ を与える。なぜならば，$\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}$ の値に y を掛ければ $\dfrac{2b^2c}{\sqrt{ay}}+\dfrac{3y^3}{a+b}+\sqrt{by^3+cy^3}$，あるいは $2b^2ca^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+\dfrac{3}{a+b}\,y^3+\sqrt{b+c}\times y^{\frac{3}{2}}$ が生じるからである。そして，それゆえ，x の値は，それぞれの項の次元の数で割れば，現れる。

そして，それゆえ，$\dfrac{\dot{y}}{\dot{z}}=z^{\frac{2}{3}}$ は $y=\dfrac{3}{5}z^{\frac{5}{3}}$ を与える。そして，$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{ab}{cx^{\frac{1}{3}}}$ は $y=\dfrac{3abx^{\frac{2}{3}}}{2c}$ を与える。しかし，方程式 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{a}{x}$ は $y=\dfrac{a}{0}$ を与える。なぜならば，$\dfrac{a}{x}$ に x を掛ければ a となり，これをその次元の数 (それは零である) で割ると，y の値として無限量 $\dfrac{a}{0}$ が現れるからである。

それため，もしいつか，分母が相関量の 1 次元だけを含む，類似する項が $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ の値の中に現れるならば，相関量の代わりに，それと同じものおよび，任意に仮定された，与えられた何らかの量との和あるいは差を代入せよ。なぜならば，［そのようにして］生じる方程式による流量の関係は最初に提示された方程式による流量の関係と互いに同じものであろうし，無限の関連量はこの仕方でそ［れ自身］の無限の部分によって減少させられて，無限個の項からなるにもかかわらず，有限になるであろうからである。

それゆえ，方程式 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{a}{x}$ が提示されたら，もし x の代わりに，量 b を任意に仮定して，$b+x$ と 418
書くならば，$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{a}{b+x}$ が生じるであろうし，除法によって $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{a}{b}-\dfrac{ax}{b^2}+\dfrac{ax^2}{b^3}-\dfrac{ax^3}{b^4}\cdots$ となるであろう。そして，そこから，前述のように，規則は x および y の間の関係 $y=\dfrac{ax}{b}-\dfrac{ax^2}{2b^2}+\dfrac{ax^3}{3b^3}-\dfrac{ax^4}{4b^4}\cdots$ を与えるであろう，

それゆえ，さらに，方程式 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{2}{x}+3-xx$ があるとき，もし，項 $\dfrac{2}{x}$ のために，x の代わりに $1+x$ と書くならば，$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{2}{1+x}+2-2x-xx$ が現われ，項 $\dfrac{2}{1+x}$ を無限級数 $2-2x+2x^2-2x^3+2x^4\cdots$ に還元すると，$\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=4-4x+x^2-2x^3+2x^4\cdots$ であろう。それゆえ，規則によって x および y の間の関係 $y=4x-2x^2+\dfrac{1}{3}\,x^3-\dfrac{1}{2}\,x^4+\dfrac{2}{5}\,x^5\cdots$ が得られるであろう。

そして，それゆえ，もし $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=x^{-\frac{1}{2}}+x^{-1}-x^{\frac{1}{2}}$ が提示されるならば，項 x^{-1} $\Big($ あるいは

$\left.\frac{1}{x}\right)$ が中にあることが見えるから，私は，x を，例えばそれの代わりに $1-x$ が代入されることによって，変えると，$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{1}{\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1-x}-\sqrt{1-x}$ が生じるであろう。ところで，項 $\frac{1}{1-x}$ の値は $1+x+x^2+x^3\cdots$ であり，$\sqrt{1-x}$ の値は $1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3\cdots$ であるから，$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ あるいは $\frac{1}{1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3\cdots}$ の値は $1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3\cdots$ である。そのため，(これらの値が代入されると) $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=1+2x+\frac{3}{2}x^2+\frac{11}{8}x^3\cdots$ であろう。そして，これから，規則により $y=x+x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{11}{32}x^4\cdots$ となるであろう。そして，他の場合も同様である。

さらに，他の場合においても，このような流量の変換によって方程式は，ときには，適切に還元することができるであろう。例えば，もし $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{c^2x}{c^3-3c^2x+3cx^2-x^3}$ が提示されるならば，x の代わりに $c-x$ と書くと，$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{c^3-c^2x}{x^3}$，あるいは $=\frac{c^3}{x^3}-\frac{c^2}{x^2}$ が，そして，これから，規則によって $y=-\frac{c^3}{2x^2}+\frac{c^2}{x}$ が得られる。しかし，これらの変換の使用［方法］は以下でより明らかになるであろう。

419 **解：場合 2**

準備

それゆえ，これが 1 つだけの流量を含む方程式について［の解法］である。しかし，［提示された方程式に］2 つのうちのどちらもが含まれるときは，はじめに，方程式は前述の形に，すなわち一方の部分［辺］には，他方［の辺］における単純な項の総和に等しい，流率の比があるように，還元されなければならない。

そして，さらに，もしそのように還元された方程式の中に，分母に流量を含む，分数があるならば，少し前に述べられたその流量の変換によって，［その流量を］それらの分母から自由にしなければならない［なくさなければならない］。

それゆえ，方程式 $\dot{y}ax-\dot{x}aa-\dot{x}xy=0$ あるいは $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{y}{a}+\frac{a}{x}$ が提示されたら，$\left(\text{項 } \frac{a}{x}\right.$ のために$\Big)$ 私は，b を任意に仮定して，x の代わりに $b+x$ あるいは $b-x$ あるいは $x-b$ のいずれかと書く。例えば，もし $b+x$ と書けば，それは $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{y}{a}+\frac{a}{b+x}$ となる。それゆえ，項 $\frac{a}{b+x}$ を除法によって無限級数に還元すると，$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{y}{a}+\frac{a}{b}-\frac{ax}{b^2}+\frac{ax^2}{b^3}-\frac{ax^3}{b^4}\cdots$ であろう。

そして，同様に，方程式 $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=3y-2x+\frac{x}{y}-\frac{2y}{x^2}$ が提示されたら，もし $\left(\text{項 } \frac{x}{y}\right.$ および $\left.\frac{2y}{x^2} \text{ のために}\right)$ y の代わりに $1-y$ と，そして x の代わりに $1-x$ と書くならば，$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=1-3y+2x+\frac{1-x}{1-y}+\frac{2y-2}{1-2x+x^2}$ が生じるであろう。しかし，項 $\frac{1-x}{1-y}$ は，無限の除法により，$1-x+y-xy+y^2-xy^2+y^3-xy^3\cdots$ を与え，項 $\frac{2y-2}{1-2x+xx}$ は，同様の除法によって，$2y-2+4xy-4x+6x^2y-6x^2+8x^3y-8x^3+10x^4y-10x^4\cdots$ を与える。それゆえ，$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=-3x+3xy+y^2-xy^2+y^3-xy^3\cdots+6x^2y-6x^2+8x^3y-8x^3+10x^4y-10x^4\cdots$ である。

規則 420

方程式が，必要なときには，そのように準備されたら，それらの項を，はじめに関連量に作用されていないもの，次にその最小の次元に作用されたもの，などの順に，おくことによって，流量の次元に従って整理せよ。さらに，それらのそれぞれの部類 (classis) における項も同時にもう一方の相関量の次元に従って整理せよ。そしてそれらを，最初の部類 (すなわち，関連量が作用していないもの) においては右の方に進む横の系列として，その他のものは左側の列において降りていく系列として，次の表に示すように，書け。操作がそのように行われたら，最初の部類における最初のあるいは最低の項に相関量を掛けて，次元の数で割り，そして，それを商における関連量の値の最初の項として置け。次に，左側の列で整理された方程式の項において関連量の代わりにこれを代入し，最初の項のときと同じ仕方で，次に最低の項から商の第 2 の項を導く。そして，同じ操作を何度も繰り返すことによって，望むだけ長く商を伸ばすことができる。しかし，このことは例によってよりはっきりとするであろう。

はじめに，$F(x,\ y, \dot{x}, \dot{y}) = 0$ を $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x,\ y)$ の形に還元する方法が確認される。
そして，流率方程式 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{dy}{dx} = f(x,\ y) = \varphi(x) + \psi(x,\ y)$ において，はじめに $f(x,\ y) \fallingdotseq \varphi(x)$ と考えることによって，次々と解を導き出そうとするのである。ここに，$\varphi(x)$ は「最初の部類」で y を含まず，$\psi(x,\ y)$ が「その他のもの」である。なお，ニュートンは流量 x を相関量，流量 y を関連量としている。

以下で使用される表の構造は

	$\varphi(x)$　［右向き］
$\psi(x,\ y)$ ［下向き］	必要な計算の結果
和	各同類項の和

解 $y = \Phi(x)$

となっている。

この表の具体的な作成法は，次の例 1 に即して，後述。

例1　方程式 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + x^2 + xy$ が提示されたとしよう。関連量 y に作用されていない，それらの項 $1 - 3x + x^2$ を最上行において横に，その他の y および xy を左側の列に，整理されたのが見える。そして私は，はじめに，最初の項 1 に相関量 x を掛けると x になり，それを次元の数 1 で割って，下に書かれた商の中におく。それから，この項が余白における y の代わりに代入されると，$+y$ および $+xy$ の代わりに $+x$ および $+x^2$ を得る。これらを右側の部分に書き，すべて［の項］から最低の項 $-3x$ および $+x$ を選ぶ。それらの総和 $-2x$ に x を掛けると $-2x^2$ になり，その次元の数 2 で割ると，商における y の値の第 2 の項として $-x^2$ を与える。それゆえ，この項が余白における y および xy の y の値に満たされる［代入される］と，さらに，前に得られた $+x$ および $+xx$ に付け加えられるべき項，$-xx$ および $-x^3$ が生じる。これがなされたら，再び次に最低の項 $+x^2$，$-x^2$ および $+x^2$ を 1 つの和 x^2 に集め，それから，前のように，y の値におかれる

	$+1 - 3x + xx$
$+y$ $+xy$	$* \ +x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$ ［$\cdots$］ $* \quad * \ +x^2 - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6$ ［$\cdots$］
和	$1 - 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5$ ［$\cdots$］
$y =$	$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$ ［$\cdots$］

421 べき第 3 の項 $\frac{1}{3}x^3$ を導く。そして再び，得られた値 $\frac{1}{3}x^3$ を余白における項に［書いて］，1 つにまとめられた，次に最低の項 $\frac{1}{3}x^3$ および $-x^3$ から，y の値の第 4 の項 $-\frac{1}{6}x^4$ を導く。そして，無限に続ける。

この例について表の作成法を順に見てみると次のようになる。

① $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + x^2 + xy$ を関連量 y を含まない項と含む項に注意して，$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + x^2 + y + xy$ として，$\varphi(x) = 1 - 3x + x^2$ を最上行に (右向きに昇ベキの順に) 書き，$\psi(x,\ y) = y + xy$ を左の列に (下向きに昇ベキの順に) 書く。

	$1 - 3x + x^2$
y	
$+\,xy$	
和	

$y =$

② 仮に $y = f(x,\ y) \fallingdotseq \varphi(x) = 1 - 3x + x^2$ とみなして，最初の項 1 を「和」の欄に書いてから，積分した結果 x を y の初項として最下行に書く。

	$1 - 3x + x^2$
y	$*$
$+\,xy$	$*$
和	1

$y = x$

③ ②で得られた値 x を左欄の，すなわち $\psi(x,\ y)$ の，各項の y に代入して，その結果の x と x^2 を右欄に (縦に同類項をそろえて) 書く。

	$1 - 3x + x^2$
y	$*\ \ +x$
$+\,xy$	$*\qquad *\ +x^2$
和	1

$y = x$

④ (②で取り上げた項の) 次に低い次数の項の和［$(-3x) + x = -2x$］を求め，それを「和」欄に書いた後，それを積分したもの $-x^2$ を y の第 2 項として最下行に付け加える。

	$1 - 3x + x^2$
y	$*\ \ +x$
$+\,xy$	$*\qquad *\ +x^2$
和	$1 - 2x$

$y = x - x^2$

⑤ ④で得られた値 $-x^2$ を左欄の各項の y に代入して，その結果を右欄に (縦に同類項をそろえて) 書く。

	$1 - 3x + x^2$
y	$*\ \ +x - x^2$
$+\,xy$	$*\qquad *\ +x^2 - x^3$
和	$1 - 2x$

$y = x - x^2$

⑥ 次の次数の項の和［$x^2 + (-x^2) + x^2 = x^2$］を「和」欄に書き，それを積分した値を最下行の y に付け加える。

	$1-3x+x^2$
y	$* \quad +x-x^2$
$+\,xy$	$* \quad\ \ * \ +x^2-x^3$
和	$1-2x+x^2$

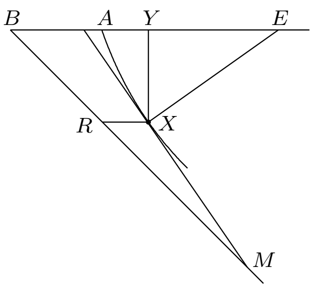
$$y=x-x^2+\tfrac{1}{3}x^3$$

⑦　以下，同様の操作を必要なだけ繰り返す。

	$1-3x+x^2$
y	$* \quad +x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^4+\frac{1}{30}x^5 \quad \cdots$
$+\,xy$	$* \quad\ \ * \ +x^2 \quad -x^3+\frac{1}{3}x^4 \ -\frac{1}{6}x^5+\frac{1}{30}x^6\cdots$
和	$1-2x+x^2-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4-\frac{4}{30}x^5 \quad \cdots$

$$y=x-x^2+\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{6}x^4+\tfrac{1}{30}x^5-\tfrac{1}{45}x^6\cdots$$

なお，ここに挙げられている例は 1638 年の末頃にドゥボーヌ (Florimond Debeaune : 1601–1652) が提出した逆接線問題を一般化したものであるということである。ドゥボーヌの問題とは「b を与えられた長さとするとき，任意の法線について $EY:EX=b:(YX-AY)$ となるような曲線 AX を見出せ」というものである (［2］p.174)。下の図では，$AB=b$，$\angle EBM=45°$ とし，BE が x 軸，BM が y 軸である座標系を考えている。XM が接線で，XE が法線である。この曲線 AX の方程式は $y=-\sqrt{2}\,b\log x$ となることが知られている。



一般化されたドゥボーヌの問題は微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=py+qy^n$ を解くというものであるが，ここでは $p=1+x$，$q=1-3x+x^2$，$n=0$ となっている。

なお，ドゥボーヌの問題はライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz : 1646–1716) も一般解を得ていて，1676 年 7 月の手記「逆接線法」(*Methodus tangentium inverse*) において「これは対数曲線に属する」と述べている。

例2　同じ方法で，もし方程式 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=1+\dfrac{y}{a}+\dfrac{xy}{a^2}+\dfrac{x^2y}{a^3}+\dfrac{x^3y}{a^4}\cdots$ ―― これらの項の列 (421)
は無限に続くものと理解される ―― によって，x および y の間の関係を決定しなければならないならば，1 を上部に，その他の項を左におき，そして，それから隣の表の方法のように操作を続ける。

	$+\,1$
$+\frac{y}{a}$	$* \ +\frac{x}{a}+\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{2a^3}+\frac{x^4}{2a^4}+\frac{x^5}{2a^5}\cdots$
$+\frac{xy}{a^2}$	$* \quad * \ +\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{2a^3}+\frac{x^4}{2a^4}+\frac{x^5}{2a^5}\cdots$
$+\frac{x^2y}{a^3}$	$* \quad * \quad * \ +\frac{x^3}{a^3}+\frac{x^4}{2a^4}+\frac{x^5}{2a^5}\cdots$
$+\frac{x^3y}{a^4}$	$* \quad * \quad * \quad * \ +\frac{x^4}{a^4}+\frac{x^5}{2a^5}\cdots$
$+\frac{x^4y}{a^5}$	$* \quad * \quad * \quad * \quad * \ +\frac{x^5}{a^5}\cdots$
和	$1+\frac{x}{a}+\frac{3x^2}{2a^2}+\frac{2x^3}{a^3}+\frac{5x^4}{2a^4}+\frac{3x^5}{a^5}\cdots$
$y=x+\frac{x^2}{2a}+\frac{x^3}{2a^2}+\frac{x^4}{2a^3}+\frac{x^5}{2a^4}+\frac{x^6}{2a^5}\cdots$	

ここでの計画は，私が y の値を x の 6 次元までにだけ導くことであり，そのために，操作をしている間，計画に役立たないと予見されるすべての項を捨てるが，このことは中断された系列に付け足した記号 $\cdots$ によってほのめかされる。

例3　同様の方法で，もし方程式 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=-3x+3xy+yy-xyy+y^3-xy^3+y^4-xy^4\cdots+6x^2y-6x^2+8x^3y-8x^3+10x^4y-10x^4+12x^5y-12x^5\cdots$ が提示され，y の値を x の 7 次元まで引き出すものとされるならば，それらの項を隣の表におけるように順におき，―― 左側の列における y には 1 次元［のもの］だけでなく 2 次元および 3 次元［のもの］まで，あるいは y の値を x^7

	$-3x$	$-6x^2$	$-8x^3$	$-10x^4$	$-12x^5$	$-14x^6\cdots$
$+3xy$	$*$	$*$	$-\frac{9}{2}x^3$	$-6x^4$	$-\frac{75}{8}x^5$	$-\frac{273}{20}x^6\cdots$
$+6x^2y$	$*$	$*$	$*$	$-9x^4$	$-12x^5$	$-\frac{75}{4}x^6\cdots$
$+8x^3y$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-12x^5$	$-16x^6\cdots$
$+10x^4y\ \cdots$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-15x^6\cdots$
$+y^2$	$*$	$*$	$*$	$+\frac{9}{4}x^4$	$+6x^5$	$+\frac{107}{8}x^6\cdots$
$-xy^2$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-\frac{9}{4}x^5$	$-6x^6\cdots$
$+y^3\ \cdots$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-\frac{27}{8}x^6\cdots$
和	$-3x$	$-6x^2$	$-\frac{25}{2}x^3$	$-\frac{91}{4}x^4$	$-\frac{333}{8}x^5$	$-\frac{302}{5}x^6\cdots$

$$y=-\frac{3}{2}x^2-2x^3-\frac{25}{8}x^4-\frac{91}{20}x^5-\frac{111}{16}x^6-\frac{302}{35}x^7\cdots$$
$$y^2=+\frac{9}{4}x^4+6x^5+\frac{107}{8}x^6\cdots$$
$$y^3=-\frac{27}{8}x^6\cdots$$

の次数を超えて引き出すことに決めるならより多く［のもの］まで，現れるから，それらが余白における項の値の右側に徐々に書き込まれるとき，引き続く操作に対して要求されると認めるだけ多くの次元の項が現れるように，徐々に伸ばされた y の値の平方および立方を下におくことを除いて —— 前述のように操作する。そし
422 て，この方法によって，ついに知りたいと思われていた方程式 $y=-\dfrac{3}{2}x^2-2x^3-\dfrac{25}{8}x^4\cdots$ が生じる。この値は負であるから，量 x および y のうちの一方は，他方が増加する間，減少することは明らかである。そして，流率の一方が正で他方が負であるときも，同様のことが結論されるはずである。

例4　全く異ならない方法で，関連量が分数の次元に作用されているとき，その値を［無際限に］導き出すことができる。

例えば，もし $\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}=\dfrac{1}{2}y-4y^2+2yx^{\frac{1}{2}}-\dfrac{4}{5}x^2+7y^{\frac{5}{2}}+2y^3$，ここで項 $2yx^{\frac{1}{2}}$（あるいは，

	$+\frac{1}{2}y$	$*$	$-4y^2$	$+7y^{\frac{5}{2}}$	$+2y^3$		
$2yx^{\frac{1}{2}}$	$*$	$*$	$+y^2$	$*$	$-2y^3$	$+4y^{\frac{7}{2}}$	$-2y^4\cdots$
$-\frac{4}{5}x^2$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-\frac{1}{20}y^4\cdots$
和	$+\frac{1}{2}y$	$*$	$-3y^2$	$+7y^{\frac{5}{2}}$		$+4y^{\frac{7}{2}}$	$-\frac{41}{20}y^4\cdots$

$$x=+\frac{1}{4}y^2\quad *\quad -y^3+2y^{\frac{7}{2}}\quad +\frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}}-\frac{41}{100}y^5\cdots$$
$$x^{\frac{1}{2}}=+\frac{1}{2}y\quad *\quad -y^2+2y^{\frac{5}{2}}-y^3\cdots$$
$$x^2=\frac{1}{16}y^4\cdots$$

$2y\sqrt{x}$）における x が分数の次元 $\dfrac{1}{2}$ に作用されている，が提示されるならば，表の下の部分に見られるように，私は，x の値から $x^{\frac{1}{2}}$ の値を徐々に，すなわちその平方根を開くことによって，探し出す。それは余白にある項 $2yx^{\frac{1}{2}}$ の値の中に徐々に移されて挿入される。そして，ついに，方程式 $x=\dfrac{1}{4}y^2-y^3+2y^{\frac{7}{2}}+\dfrac{8}{9}y^{\frac{9}{2}}-\dfrac{41}{100}y^5\cdots$ を得，これによって x は y に関して無際限に決定される。そして，他のどんな場合でもこのように処理できる。

しかし，私は，これらの解は無限に多くの方法でなし遂げることができると言った。そして，もし上段の系列の最初の量だけでなく，商の最初の項として，任意の別に与えられた量をも随意に仮定し，それから，前述のように操作されるならば，このことは起こるであろう。それゆえ，前述の第 1 の例において，もし y の値の最初の項として 1 を仮定して，それを余白にある項（$+y$ および $+xy$）の y の代わりに代入して，残りの操作を前述のように実行する —— 私はそのような表を添えた —— ならば，y の別の値 $1+2x+x^3+\dfrac{1}{4}x^4\cdots$ が生じるであろう。

	$+1-3x\ \ +xx$			
$+y$	$+1+2x$	$*$	$+x^3+\frac{1}{4}x^4\cdots$	
$+xy$	$*\ \ +x+2x^2$	$*$	$+x^4\cdots$	
和	$+2\ \ *\ \ +3x^2$		$+x^3+\frac{5}{4}x^4\cdots$	
$y=1+2x\ \ *\ \ +x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}x^5\cdots$				

	$+1\ \ -3x\ \ +x^2$
$+y$	$+a\ \ +x\ \ -x^2\ \ +\frac{1}{3}x^3\cdots$
	$+ax\ \ +ax^2\ \ +\frac{2}{3}ax^3\cdots$
$+xy$	$*\ \ +ax\ \ +x^2\ \ -x^3\cdots$
	$+ax^2\ \ +ax^3\cdots$
和	$+1\ \ -2x\ \ +x^2\ \ -\frac{2}{3}x^3\cdots$
	$+a+2ax\ \ +2ax^2\ \ +\frac{5}{3}ax^3\cdots$
$y=a$	$+x\ \ -x^2\ \ +\frac{1}{3}x^3\ \ -\frac{1}{6}x^4\cdots$
	$+ax+ax^2+\frac{2}{3}ax^3+\frac{5}{12}ax^4\cdots$

そして，それゆえ，その最初の項として 2，3，あるいは他の任意の数を仮定すると，代わる代わる［異なるものが］生じるであろう。あるいは，もしその項を無際限に表すのに，a のような，何らかの記号を用いるならば，同じ操作の方法によって —— ここで再び表をおく ——，ついに $y=a+x+ax-x^2+ax^2+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}ax^3\cdots$ を引き出すであろう。これが見出されたら， 423
a の代わりに数 1，2，0，$\dfrac{1}{2}$ あるいは他の任意の数を代入すれば，x および y の間の関係が無限に多くの方法で得られる。

そして，前述の第 4 の例に見るように，導かれるべき量が分数の次元に作用されているとき，その最初の項として普通は単位，あるいはその他の適切な何らかの数，を用いると都合がよいことに注意せよ。確かに，その分数の次元の値を得ることについて，根が，負の符号であるために，他の方法では導くことができないとき，そして，そこから最初の項が導かれる，最初のあるいは主要な部類の中におくべき項がないとき，このことによらなければならない。

それゆえ，私はついにすべて［の問題］の中でこの最も厄介で最も困難な問題 —— 方程式に 2 つだけの流量とそれらの流率が含まれるとき —— を仕上げた。しかし，すべての困難が取り込まれたこの一般的な方法のほかに，それらによって操作が軽減されることがあるような，普通はより簡潔な他の方法があり，これらに関していくつかの余分な例に触れることは，おそらく不愉快なことではないであろう。

	$*\ \ \ *\ \ -xx$
$\frac{1}{y}$	$1\ \ -x\ \ +\frac{3}{2}xx\cdots$
和	$1\ \ -x\ \ +\frac{1}{2}xx\cdots$
$y=1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3\cdots$ $\frac{1}{y}=1-x+\frac{3}{2}x^2\cdots$	

(I)　それゆえ，もしいつか導かれた量がどこかで負の次元になるとき，そのために方程式を別の形に還元することは絶対に必要であるということではない。それゆえ，例えば，方程式 $\dot{y}=\dfrac{1}{y}-x^2$，ここでは y は 1 次の負の次元のものである，が提示されたら，確かに私はそれを，例えば y の代わりに $1+y$ と書いて，別の形に還元することができるが，添付した表における解法の方がより敏速であろう。ここで，y の値の最初［の項］として 1 を仮定して，前述のようにその他の項を導き，同時に $\dfrac{1}{y}$ の値をそれらから除法によって徐々に引き出して，余白にある項の値にそれを挿入する。

	$-\frac{1}{xx}+\frac{1}{x}$
$-y$	$*\ \ -\frac{1}{x}$
和	$-\frac{1}{xx}\ \ \ 0$
$y=\frac{1}{x}$	

(II)　他方の流量の次元がいたるところでつねに正であることが必要であるということでもない。なぜならば，方程式 $\dot{y}=3+2y-\dfrac{yy}{x}$ から，項 $\dfrac{yy}{x}$ について前述の還元をすることなく，$y=3x-\dfrac{3}{2}x^2-4x^3\cdots$ が現れるであろうからである。

そして，$\dot{y}=-y+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{xx}$ から，添付した表のような仕方で 424

操作が行われると，$y=\dfrac{1}{x}$ が現れるであろう。

ここで，ついでに，任意の方程式を解くことができる無限に多くの方法の中で，［今］述べられた例におけるように，導かれるであろう量の有限の値で終ることがたびたび起こり，そして，もし項の最初の値として何らかの記号が仮定されるならば，それを見出すことは決して難しくないということに注意せよ。そして，解法がやり遂げられたとき，引き出された値が有限になるように，その記号の［表す］量について熟慮されるべきである。

(III)　さらに，もし y の値が方程式 $\dot{y}=\dfrac{y}{2x}+1-2x+\dfrac{1}{2}x^2$ から導かれるならば，それは，項 $\dfrac{y}{2x}$ のどんな還元もなしに，解析の［通常の］方法に従って，求められているものが与えられたと仮定することによって，不便なことなく行われるであろう。すなわち，$2e$ をまだ知られていない数値係数と仮定して，その値の最初の項の代わりに $2ex$ と表す。そして，この $2ex$ を余白にある項 $\dfrac{y}{2x}$ における y の代わりに代入すると，e が現われ，これを右に書くと，和 $1+e$ は，前に項 $2ex$ と表していた，y の値の同じ最初の項として $x+ex$ を与えるであろう。それゆえ，$2ex=x+ex$ とおくと，そこから $e=1$ が現れる。それゆえ，y の値の最初の項 $(2ex)$ は $2x$ である。同じ方法によって，第 2 項を表すために仮想的な (effictum) $2fx^2$ を用いると，そこからついに f の値として $-\dfrac{2}{3}$ を得るから，それゆえ，第 2 項は $-\dfrac{4}{3}xx$ である。そして，同様に，第 3 項における仮想的な g は $\dfrac{1}{10}$ の価値があり［に等しく］，第 4［の項］における h は 0 の価値があるであろう［に等しいであろう］。そして，それゆえ，さらに残っている項が見えないから，操作は終わっていて，y は正確に $2x-\dfrac{4}{3}x^2+\dfrac{1}{5}x^3$ の価値がある［に等しい］と結論する。

	$1-2x+\frac{1}{2}xx$
$\frac{y}{2x}$	$e+fx+gxx\quad+hx^3$
和	$+1-2x+\frac{1}{2}x^2$ $+e+fx+gxx\quad+hx^3$
仮定的には $y=2ex+2fx^2+2gx^3+2hx^4\cdots$ $\quad\Vert\quad\Vert\quad\Vert\quad\Vert$ 論理的には $y=+x\quad-x^2\quad+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}hx^4$ $+ex+\frac{1}{2}fx^2+\frac{1}{3}gx^3$ 実際には　$y=2x-\frac{4}{3}x^2+\frac{1}{5}x^3$	

ほとんど同じ方法によって，もし $\dot{y}=\dfrac{3y}{4x}$ であったならば，e が未知の係数を，s が同じく未知の次元の数を表すものとして，$y=ex^s$ と仮定せよ。そして，y の代わりに ex^s を代入すれば，
425 $\dot{y}=\dfrac{3ex^{s-1}}{4}$ が生じるであろうし，これから再び $y=\dfrac{3ex^s}{4s}$ である。いま，y のこれらの値が比較されると，$\dfrac{3e}{4s}=e$ であると分かるであろうし，それゆえ，$s=\dfrac{3}{4}$ であり，e は不定である。それゆえ，e を随意に仮定すれば，$y=ex^{\frac{3}{4}}$ であろう。

(IV)　ときにはまた，操作は均等な流量の最高の次元から始められ，より低い方に向かって連続的に進むことがある。例えば，もし $\dot{y}=\dfrac{y}{xx}+\dfrac{1}{xx}+3+2x-\dfrac{4}{x}$ が与えられるならば，操作は最高［の次元］の項 $2x$ から始められ，上段の系列を前述とは反対の順序に整理すると，添付された操作される様子に見られるように，ついには $y=xx+4x-\dfrac{1}{x}\cdots$ が現われるであろう。

	$+2x+3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}$
$+\frac{y}{xx}$	$*\quad+1+\frac{4}{x}\quad*\quad-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2x^4}\cdots$
和	$+2x+4\quad*\quad+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{2x^4}\cdots$
	$y=x^2+4x\quad*\quad-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}\cdots$

そして，ここで，ついでに，操作をしている間，項 $4x$ および $-\dfrac{1}{x}$ の間に，欠けている中間項として任意に与えられた量を挿入することができ，そして，y の値は無限の方法で導くことができる，ということが注意される。

(V)　さらに，もし関連量の分数の次元の指数があるならば，その分数の次元によって作用されたその量を別の何らかの第 3 の流量に等しいと仮定すると，整数［の次元］に還元することができ，その量もその流率もともに代入されると，そこから，その関連量およびその流率の代わりに，仮想方程式 (ficta aequatio) が現れる。

例えば，もし方程式 $\dot{y} = 3xy^{\frac{2}{3}} + y$ が提示されるならば，ここでは関連量は分数の次元の指数 $\dfrac{2}{3}$ に作用されているから，随意に流量 z を仮定し，$y^{\frac{1}{3}} = z$ あるいは $y = z^3$ と仮定すると，問題 1 により流率の関係は $\dot{y} = 3\dot{z}zz$ であろう。それゆえ，$3z^2\dot{z}$ が $\dot{y}$ の代わりに，z^3 もまた y の代わりに，そして z^2 が $y^{\frac{2}{3}}$ の代わりに代入されると，$3\dot{z}z^2 = 3xz^2 + z^3$，あるいは $\dot{z} = x + \dfrac{1}{3}z$ が現われ，ここでは z は関連量の役割をするであろう。しかし，z の値が，$z = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{18}x^3 + \dfrac{1}{216}x^4 + \dfrac{1}{3240}x^5 \cdots$ のように，引き出された後で，z の代わりに $y^{\frac{1}{3}}$ を元に戻すと，x および y の間の要求された関係，すなわち $y^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{18}x^3 + \dfrac{1}{216}x^4 \cdots$ が得られるであろう。そして，両方の部分［辺］を立方すると $y = \dfrac{1}{8}x^6 + \dfrac{1}{24}x^7 + \dfrac{7}{864}x^8 \cdots$ であろう。

同じような方法によって，もし $\dot{y} = \sqrt{4y} + \sqrt{xy}$，あるいは $= 2y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ が与えられるなら 426
ば，$z = y^{\frac{1}{2}}$ あるいは $z^2 = y$ と仮定して，そこから問題 1 により $2z\dot{z} = \dot{y}$ を得，そしてその結果，$2\dot{z}z = 2z + x^{\frac{1}{2}}z$，あるいは $\dot{z} = 1 + \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$ となる。それゆえ，この［問題の］最初の場合により，$z\,(y^{\frac{1}{2}}) = x + \dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ となり，［両方の］部分［辺］を平方すれば $y = x^2 + \dfrac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + \dfrac{1}{9}x^3$ となる。しかし，もし y の値の無限の仕方によって表すことを望むならば，最初の項を随意に c と仮定して，$z = c + x + \dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ とせよ。すると，$y\,(z^2)$ は $c^2 + 2cx + \dfrac{2}{3}cx^{\frac{3}{2}} + x^2 + \dfrac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + \dfrac{1}{9}x^3$ であろう。しかし，これらは最もまれな場合にも用いることができるので，私はこれらを非常に丁寧に取り扱うように見える。

ニュートンは「すべての中でこの最も厄介で最も困難な問題を仕上げた」と宣言し，流率方程式 $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{dy}{dx} = f(x,\,y) = \varphi(x) + \psi(x,\,y)$ の解法を多くの例を用いて示している。

微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = (1 - 3x + x^2) + (1+x)y$ について，「例 1」では解を

$$y = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6 \cdots$$

としているが，「例 4」(の後続部) では定数項を加えて

$$y = a + (1+a)x + (-1+a)x^2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}a\right)x^3 \cdots$$

としている。それで，無限個の表し方が可能であるといっている。

なお，この微分方程式の一般解をホワイトサイドは

$$y = 4 - x + e^{\pi}\left(6\int e^{-\pi}\,dx - 4 + a\right) \quad \left(\text{ただし，}\pi = x + \frac{1}{2}x^2\right)$$

としている (『数学論文集』第 3 巻 p.100)。

「いくつかの余分な例」として挙げられた (III) では，未定係数法が示される。

すなわち，求める y を $y = 2ex + 2fx^2 + 2gx^3 + 2hx^4 + \cdots$ として，$\varphi(x) = 1 - 2x + \dfrac{1}{2}x^2$

および $\psi(x,\,y)=\dfrac{y}{2x}=e+fx+gx^2+hx^3+\cdots$ について上記の表をつくり，各項の係数を比較して，最終的に求める y を確定させるという手法である。

実際，$y=2x-\dfrac{4}{3}\,x^2+\dfrac{1}{5}\,x^3$ ならば，$y'=\dfrac{y}{2x}+1-2x+\dfrac{1}{2}\,x^2$ であることは容易に確認できる。

また，(IV) では，通常昇ベキの順に処理するものを，降ベキの順に行うことがあることに注意している。そして，このドゥボーヌの微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=x^{-2}y+\left(x^{-2}-4x^{-1}+3+2x\right)$ の一般解 $y=x^2+4x-1+ke^{-x^{-1}}$ における $k=1$ の場合の級数をニュートンは与えたと，ホワイトサイドは言う (『数学論文集』第 3 巻 pp.110–111)。

解：場合 3

方程式が 3 つあるいはより多くの量の流率を含むとき，問題の解法は簡潔に片付けられる。すなわち，それらの量のうちの任意の 2 つの間の関係は (問題の条件によって決められていないときは) 任意に仮定されるべきであり，それらの流率［の関係］はそこから求められ，それらのうちのいずれかは，その流率とともに，提示された方程式から消し去ることができる。そのため，もし 3 つの量の流率が含まれるならば，1 つだけの —— そして 4 つ［の量］が含まれるならば 2 つの，以下同じように —— 方程式が仮定されなければならず，提示された方程式がついには，2 つより多く［の量］を含まないような，別の方程式に変換され，次いでこれ［この方程式］が前のように解かれたら，残りの量の［間の］関係が引き出されるであろう。

例えば，方程式 $2\dot{x}-\dot{z}+\dot{y}x=0$ が提示されたとき，量 x，y および z (それらの流率 $\dot{x}$，$\dot{y}$ および $\dot{z}$ は方程式に含まれる) 相互の関係を得るために，x および y のような，任意の 2 つの［量の］間の関係，例えば $x=y$，あるいは $2y=a+z$，あるいは $x=yy$ など，を自由に仮定する。しかし，もし $x=yy$ とすれば，これから $\dot{x}=2\dot{y}y$ であろうし，それゆえ $\dot{x}$ の代わりに $2\dot{y}y$ と，x の代わりに yy と書けば，提示された方程式は $4\dot{y}y-\dot{z}+\dot{y}y^2=0$ に変換されるであろう。そして，これから，y および z の間の関係 $2yy+\dfrac{1}{3}\,y^3=z$ が現れるであろう。ここで，今度は，もし yy の代わりに x と，y^3 の代わりに $x^{\frac{3}{2}}$ と書かれるならば，さらに $2x+\dfrac{1}{3}\,x^{\frac{3}{2}}=z$ が生じるであろう。

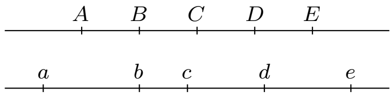
それゆえ，x，y および z が互いに関係づけられる無限［に多く］の方法の中で，これらの方程式 $x=yy$，$2yy+\dfrac{1}{3}\,y^3=z$ および $2x+\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}=z$ によって表された，1 つのものが見出される。

427

証明

われわれは，ついに問題をやり遂げたが，その証明がまだ残っている。そして，そのように多くのものの中へ，本来の基礎から総合的に導かれるものがあまり回り道しないように，解析の方法によって簡潔に述べられれば十分であろう。すなわち，任意の方程式が提示されたとき，操作を最後まで続けた後で，導かれた方程式から今度は (問題 1 によって) 提示されたものが引き出されるかを試してみるとよい。そして，それゆえ，導かれた方程式における量の関係は提示されたものにおける流率の関係を要求し，逆もそうである。これは示されている。それゆえ，方程式 $\dot{y}=x$ が提示されたならば，$y=\dfrac{1}{2}\,x^2$ が導かれ，そして，これから今度は (問題 1 により) $\dot{y}=\dot{x}x$，あるいは $\dot{x}$ は 1 であると仮定されているから，$=x$ となる。そして，それゆえ，$\dot{y}=1-3x+y+x^2+xy$ から $y=x-x^2+\dfrac{1}{3}\,x^3-\dfrac{1}{6}\,x^4+\dfrac{1}{30}\,x^5-\dfrac{1}{45}\,x^6\cdots$ が生じる。そして，これから今度は (問題 1 により) $\dot{y}=1-2x+x^2-\dfrac{2}{3}\,x^3+\dfrac{1}{6}\,x^4-\dfrac{2}{15}\,x^5\cdots$ となる。これら 2 つの $\dot{y}$ の値は，明らか

に，前者における y の代わりに $x - x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{6}x^4 + \dfrac{1}{30}x^5 \cdots$ が代入されると一致する。



しかし，私は，方程式の還元において，さらに説明を与えなければならない操作を用いた。それは与えられた量との結合による流量の変換である。AE および ae を，それに沿って遠方から運ばれる 2 つの可動体が同時に位置 A および a，B および b，C および c，D および d などに到達する，両方向に無限に伸びている線としよう。そして，B を，そこからの距離によって可動体の AE 上での運動が評価される，それゆえ $-BA$，BC，BD，BE は可動体が，連続的に，位置 A，C，D，E にあるときの流量［の値］であるような，点としよう。そして，b を他方の線における同様の点としよう。すると，$-BA$ と $-ba$ は同時の流量であろうし，BC と bc，BD と bd，BE と be などもそうであろう。しかし，もし，あたかも運動が関係づけられる休息［静止］した点として，点 B および b の代わりに A および c が置かれるならば，そのとき，0 と $-ca$，AB と $-cb$，AC と 0，AD と cd，AE と ce などは同時の流量であろう。それゆえ，流量は与えられた［量］AB および bd の和と差によって［その大きさが］交換されるが，それらの運動の速さおよびそれらの流率の相互の関係は交換されない。なぜならば，どちらの場合も，同時の部分 AB と ab，BC と bc，CD と cd，DE と de は同じ長さだからである。そしてそれゆえ，その中でこれらの量が表されている方程式において，量の同時の部分は，それらの絶対的な長さが与えられた何らかの量によって増やされたり減らされた 428
りしても，それゆえ交換されない。それゆえ，提示されたことは明らかである。なぜならば，この問題の本来の目標は，流量の与えられた比によって表される，同時の部分あるいは絶対的な量 (v，x，y あるいは z) の同時の差を決定することに他ならないからである。そして，同様に，もしそれらの同時のあるいは対応する差が提示された流率の関係と一致するなら，そのことはそれらが絶対的な長さの量であるということである。

このことの理由は次のように代数的に与えることができる。$\dot{y} = \dot{x}xy$ が提示されると，そして $x = 1 + z$ と仮定すると，(問題 1 により) $\dot{x} = \dot{z}$ であろう。それゆえ，$\dot{y} = \dot{x}xy$ の代わりに $\dot{y} = \dot{x}y + \dot{x}zy$ と書くことができる。いま，$\dot{x} = \dot{z}$ であるから，量 x および z は同じ長さではないにもかかわらず，y に関して同じように流れ，等しい同時の部分をもつことは明らかである。それゆえ，なぜ流れの比が一致する量を同じ記号で表さなくてもよいのか。そして，同時の差を決定するのに，なぜ $\dot{y} = \dot{x}xy$ の代わりに $\dot{y} = \dot{x}y + \dot{x}zy$ を使わなくてもよいのか。

さて，最後に，流量を含む方程式から，どのような方法で同時の部分を見出すことができるかは明らかである。例えば，$y = \dfrac{1}{x} + x$ を方程式としよう。すると，$x = 2$ とするとき $y = 2\dfrac{1}{2}$ であろう。一方，$x = 3$ とするとき $y = 3\dfrac{1}{3}$ であろう。ゆえに，x が 2 から 3 まで流れる間に，y は $2\dfrac{1}{2}$ から $3\dfrac{1}{3}$ まで流れるであろう。それゆえ，この時間に通過する部分は (3 − 2 すなわち) 1，そして $\left(3\dfrac{1}{3} - 2\dfrac{1}{2}\ \text{すなわち}\right)\dfrac{5}{6}$ である。

以下のことのためにこれらの基礎をおいて，いまはより個別的な問題に話題を変えよう。

問題 2 は問題 1 の逆ではあるが，問題 1 よりもはるかに難しい。ニュートンは，特に，「最も厄介で最も困難な問題」である，場合 2［すなわち，2 つの流率と 2 つの流量をもつ場合］について詳細に検討している。

中村 幸四郎は「級数展開，特殊な置換え等，かなり技巧的な手段，また計算をアルゴリズムとす

る規則等，流率方程式は，後の 1 階微分方程式論の前身として十分に内容の豊かなものであります。ここにも，計算家，技巧家としての数学者ニュートンの面が浮かび上がってくるようです。」と言っている（［3］p.183)。

第 5 章
［極大と極小について］
問題 3
極大および極小を決定すること。

［流］量が極大 (maxima) あるいは極小 (minima) であるとき，その瞬間においてはそれは前にも後ろにも流れていない。なぜならば，もしそれが前に流れる［増加する］(profluo) ならば，それはより小さかったうえ，すぐに今より大きくなるであろうし，そして，逆に，もしそれが後に流れる［減少する］(refluo) としてもそうだからである。それゆえ，問題 1 によってその流率を求め，それを零に等しいとおけ。

429 **例1**　もし方程式 $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ において，量 x の極大値が望まれるならば，量 x および y の流率［の関係］を求めると，$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$ が生じるであろう。すると，$\dot{x} = 0$ とおかれることによって，$-3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$ あるいは $3y^2 = ax$ が残るであろう。この助けによって，はじめの方程式において x あるいは y のいずれか一方を消し去ることができ，その結果の方程式によって，もう一方の量が決定され，それから $-3y^2 + ax = 0$ によって両方が決定される。

この操作は，あたかも提示された方程式の［それぞれの］項に［そこに含まれる］もう一方の流量 y の次元の数を掛けるのと同じである。それゆえ，関連量の極大値あるいは極小値を得るために，方程式は相関量の次元に従って整理されねばならず，そして何らかの等差数列が掛けられるという，フッデ (Johann van Waveren Hudde : 1628–1704) の有名な規則が現れる。しかし，私が知る限り，今までこの規則も他のどんなものも，前述の還元を［必要と］せずに，無理量に作用された方程式に拡張されたということは公表されていないから，このことについて次の例を挙げる。

ここで触れられているフッデの規則とは，代数方程式の重根を決定するためのアルゴリズムで，「多項式 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ が重根 $x = \alpha$ をもち，p，$p+b$，$p+2b$，$\cdots$，$p+nb$ を等差数列とするならば，多項式 $pa_0 + (p+b)a_1x + (p+2b)a_2x^2 + \cdots + (p+nb)a_nx^n$ もまた根 $x = \alpha$ をもつ。」
と表される。ここで，p，b は任意の数でよいのだが，フッデは多くの場合 $p = 0$，$b = 1$ としているということである（［15］pp.535–536)。
フッデの規則によって作られる多項式は $p\,f(x) + bx\,f'(x)$［$p = 0$，$b = 1$ なら $x\,f'(x)$］に相当するものであり，重根と導関数との関連性に気づかされる。ただし，フッデの用いた方法は代数的なものであり，導関数そのものではないことに注意する。
$y = f(x)$ が $x = \xi$ で極値 η をもつならば，方程式 $f(x) - \eta = 0$ は重根をもつから，フッデはこの規則を極値決定，接線決定に利用したのである。

例2　もし方程式 $x^3 - ay^2 + \dfrac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{ay+xx} = 0$ において［流］量 y の極大値が決定されなければならないならば，x および y の流率を求めると，$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{y}y + \dfrac{3ab\dot{y}y^2 + 2b\dot{y}y^3}{a^2 + 2ay + y^2} -$

$\dfrac{4a\dot{x}xy+6\dot{x}x^3+a\dot{y}xx}{2\sqrt{ay+xx}}=0$ が現れるであろう。そして，仮定から $\dot{y}=0$ であるから，$\dot{y}$ が掛けられた項を無視して，(作業を軽減するために，これは操作の間，前もって行われる，) 残りを $\dot{x}x$ で割れば，$3x-\dfrac{2ay+3xx}{\sqrt{ay+xx}}=0$ が残るであろうし，還元が行われると $4ay+3xx=0$ が生じる。この助けによって，量 x あるいは y のいずれかをはじめに提示された方程式から消し去ることができ，それから，その結果の方程式 —— それは 3 次であろう —— からもう一方の値を引き出すことができる。

この問題から，次のことの解法が得られるであろう。

I　与えられた三角形あるいは任意の曲線の切片の中に，極大の長方形を内接させること。

II　与えられた点，および位置において与えられた曲線の間にある，極大あるいは極小の直線を引くこと。あるいは，与えられた点から曲線に法線を引くこと。

III　与えられた点を通り，別の 2 つの直線あるいは曲線の間にある，極大あるいは極小の直線 430
を引くこと。

IV　放物線の内部に与えられた点から，その放物線を横切るすべての中で最も斜めの直線を引くこと。そして，他の曲線について同じことをすること。

V　曲線の頂点，それらの極大あるいは極小の幅［周］，および回転している部分が互いに交わるような点を決定すること。

VI　最も大きくあるいは最も小さく曲がっている，曲線上の点を見出すこと。

VII　与えられた楕円において，直線がその直径に対して規則正しく立てられる最小の角を見出すこと。

VIII　与えられた 4 つの点を通る楕円の中で，最小の，あるいは最も円の形に近い，ものを定めること。

IX　遠くからの光線が，前の半球で屈折した後，後ろの半球を照らすような球面の大きさを決定すること。

そして，このような種類の非常に多くの他のものが (嫌気のさす計算のために) 解決されるよりも簡単に考え出されるであろう。

第 6 章

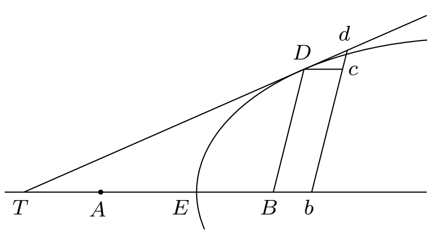
［曲線に接線を引くことについて］

問題 4

曲線に接線を引くこと。

方法 I

接線は，曲線の直線に対するさまざまな関係に従って，いろいろな方法で引かれる。そして，はじめに，直線 BD を，あたかも底線 (basis) のような別の直線 AB と与えられた角をなし，曲線 ED で終る，縦線 (ordinata) としよう。そして，この縦線は，無際限に［『全集』は infinitè ,『数学論文集』は indefinitè］小さい空間を通って bd の位置まで動かされると，AB が Dc に等しいモーメント Bb によって増加させられる間にモーメント cd によって増加させられる。いま，Dd が T で AB と一致する［交



わる］まで伸ばされると，これは D あるいは d で曲線に接し，そして三角形 dcD，DBT は相似
431 であろう。それゆえ，$TB : BD = Dc : cd$ であろう。

それゆえ，BD の AB に対する関係が，それによって曲線が決定される，任意の方程式で表されるとき，(問題 1 によって) それらの流率の関係を求め，TB が BD に対して AB の流率が BD の流率に対する比にとれば，TD は D で曲線に接するであろう。

例1　AB を x，BD を y と名づけ，それらの関係を $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ としよう。すると，流率の関係は $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$ であろう。それゆえ，$\dot{y} : \dot{x} = 3xx - 2ax + ay : 3yy - ax = BD\,(y) : BT$ であろう。ゆえに，$BT = \dfrac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$ となる。それゆえ，点 D が与えられると，そこから DB および AB，あるいは y および x が与えられ，それによって接線 TD が決定される，長さ BT が与えられるであろう。

しかし，この操作の方法は次のように整えることができる。［すなわち,］提示された方程式の項を零に等しいとして，［それらの各項に］それぞれの縦線の量の次元の数を掛け，その結果を分子におけ。それから，同じ方程式の項にそれぞれの底線の次元の数を掛け，その結果を，底線で割って，BT の値の分母におけ。そして，その BT を，もしその値が正ならば A と反対の方向に，しかし，もし負ならば A の方向に，とれ。

それゆえ，方程式 $\underset{3}{\overset{0}{x^3}} - \underset{2}{\overset{0}{ax^2}} + \underset{1}{\overset{1}{axy}} - \underset{0}{\overset{3}{y^3}} = 0$ は，上の数を掛けると分子として $axy - 3y^3$ を与え，下の数を掛けて x で割ると BT の値の分母として $3x^2 - 2ax + ay$ を与える。

それゆえ，方程式 $y^3 - by^2 - cdy + bcd + dxy = 0$ (これはデカルト (René Descartes : 1596–1650) がその助けによって 6 次元の方程式を構成した，第 2 類の放物線を表している。『幾何学』(*La Géométrie* : 1637 年) p.42，アムステルダム版，1659 年) は，一瞥により (prima fronte)，$\dfrac{3y^3 - 2by^2 - cdy + dxy}{dy}$，あるいは $\dfrac{3y^2}{d} - \dfrac{2by}{d} - c + x = BT$ を与える。

そして，$a^2 - \dfrac{r}{q}\,x^2 - y^2 = 0$ (これは中心 A の楕円を表している) は $\dfrac{-2yy}{-2\,\frac{r}{q}\,x}$ あるいは $\dfrac{qyy}{rx} = BT$ を与える。他の場合もそうである。

そして，縦線の角 ABD が一体どんな量であるかは重大ではないことに注意せよ。

432 しかし，この規則は無理量に作用された方程式や機械的な曲線には拡張できない。それらの場合には基本的な方法に頼らなければならない。

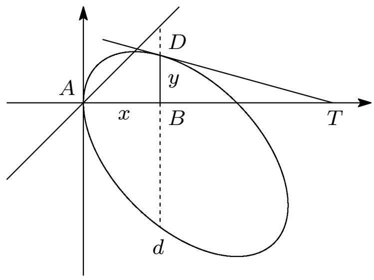
ニュートンは接線影 BT を求めるのに 2 通りの仕方を提示する。ここで，底線 x および縦線 y の関係は $f(x,\ y) = \displaystyle\sum_{i,\ j} c_{i,\ j}x^i y^j = 0$ とする。

① 相似三角形方式 ······ 三角形 dcD および DBT が相似であるので，$TB : BD = Dc : cd$ であるから，$TB : BD\,(y) = \dot{x} : \dot{y}$ とし，$TB = \dfrac{y \times \dot{x}}{\dot{y}} = y \times \dfrac{\dot{x}}{\dot{y}}$ とする。

② 直接計算方式 ······ $BT = \dfrac{f(x,\ y)\text{ の各項の } y \text{ の次数倍}}{f(x,\ y)\text{ の各項の } x \text{ の次数倍} \div x} = \dfrac{\sum_{i,\ j} jc_{i,\ j}x^i y^j}{\sum_{i,\ j} ic_{i,\ j}x^{i-1}y^j}$ とする。

ここで，$\displaystyle\sum_{i,\ j} ic_{i,\ j}x^{i-1}y^j \cdot \dot{x} + \sum_{i,\ j} jc_{i,\ j}x^i y^{j-1} \cdot \dot{y} = 0$ であるから，$\dfrac{\dot{x}}{\dot{y}} = \dfrac{-\sum_{i,\ j} jc_{i,\ j}x^i y^{j-1}}{\sum_{i,\ j} ic_{i,\ j}x^{i-1}y^j}$ となり，相似三角形方式と直接計算方式では符号が逆になることに注意を要する。また，相似三

角形方式は汎用だが，直接計算方式はそうではないことにも注意。



簡単のため $a=2$ とした「例 1」について，すなわち $x^3-2x^2+2xy-y^3=0$ について，見てみると……

まず，$(x-y)(x^2+xy-2x+y^2)=0$ と因数分解できるから，この曲線は左図のようになり，$x=1$ のときの y の値は $y=1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ である。

いま，$D\left(1, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ としよう。

さて，直接計算方式によると，$BT=\dfrac{2xy-3y^3}{3x^2-4x+2y}$ であるから，点 D における接線については $BT=\sqrt{5}$ となる。

そして，このとき，点 T は B に対して A と反対の方向にある (上図参照)。

一方，$d\left(1, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ とすると，$BT=-\sqrt{5}$ となり，T は B から A の方向にとられる。

ところで，デカルトは，『幾何学』第 2 巻［すべての曲線をいくつかの類に分け，そのすべての点が直線の点にたいしてもつ関係を知る方法］において，次のように曲線を分類している (［7］pp.19–21)。

「幾何学的と名づけうる線，すなわち，何らかの的確で精密な計測を受けうる線のすべての点は，必ず，ひとつの直線のすべての点にたいして或る関係をもち，この関係は線のすべての点に関して同一の方程式によって表されうる。そして，この方程式が 2 個の未定量による矩形あるいは同一の未定量による正方形までしかのぼらないとき，曲線は第 1 の最も単純な類に属し，そこに含まれるものは円と放物線と双曲線と楕円しかない。しかし，方程式が 2 個の未定量 —— というのは，ここでは 1 点と他の点との関係を説明するのに 2 個の未定量が必要だからであるが —— の双方または一方の第 3 ないし第 4 次元までのぼるときは，曲線は第 2 類に属する。方程式が第 5 ないし第 6 次元までのぼるときは，線は第 3 類に属し，以下同様にどこまでも進む。」

「私はこの方程式［曲線と基準とする線との関係を表す方程式］を平方の平方まで高める曲線と，それを立方までしか高めない曲線とを同じ類に入れ，また，方程式が立方の平方まで高まる曲線と，方程式が超立体までしか高まらない曲線とを同じ類に入れ，以下同様にする。その理由はこうである。平方の平方に達する場合のすべての困難を立方の場合に還元し，立方の平方に達する場合のすべての困難を超立体の場合に還元する一般的規則があるので，前の場合をより複雑なものと考えるべきではないのである。

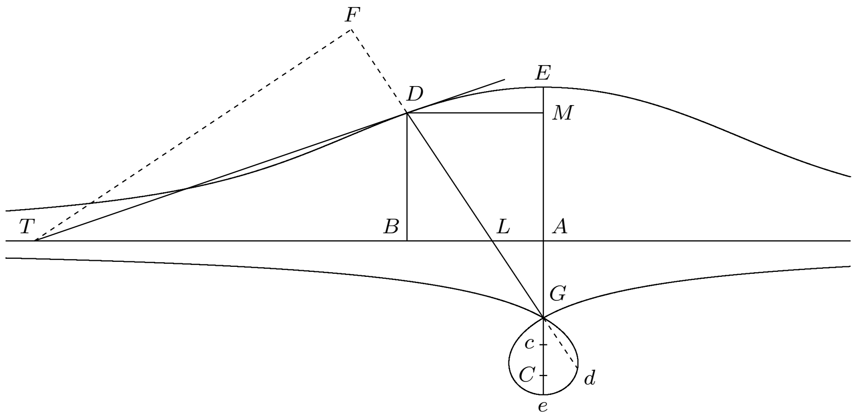
　しかし，各類の線の間では，大部分のものは同程度に複雑であって，同じ点を定め同じ問題を作図するのに用いうるけれども，やはりいくつかのものはより単純で，力の及ぶ範囲が劣ることにも注意を要する，たとえば，第 1 類の線のなかには，同程度に複雑な楕円，双曲線，放物線のほかに，円も含まれているが，これは明らかにより単純である。第 2 類の線のなかには，円から派生する通常のコンコイドがあるし，ほかにも同じ類の大部分の線より力の及ぶ範囲が劣るが，さりとて第 1 類に入れることはできない線がいくつかあるのである。」

ここに見られるように，デカルトは $(2n)$ 次方程式の解法を $(2n-1)$ 次方程式の解法に還元する一般的規則があると考えていたようである。4 次方程式については 3 次の分解方程式が対応するが，「この場合を不当に拡張した」(［7］p.89) ようである。

例2　$x^3-ay^2+\dfrac{by^3}{a+y}-x^2\sqrt{ay+x^2}=0$ を AB と BD の間の関係を表している方程式とすると，問題 1 により，流率の関係は $3\dot{x}x^2-2a\dot{y}y+\dfrac{3ab\dot{y}y^2+2b\dot{y}y^3}{a^2+2ay+y^2}+\dfrac{-4a\dot{x}xy-6\dot{x}x^3-a\dot{y}x^2}{2\sqrt{ay+xx}}=0$

であろう。それゆえ，$3x^2 + \dfrac{-4axy - 6x^3}{2\sqrt{ay + x^2}} : 2ay + \dfrac{3aby^2 + 2by^3}{aa + 2ay + y^2} - \dfrac{axx}{2\sqrt{ay + x^2}}\ (= \dot{y} : \dot{x}) = BD : BT$ である。

例3　ED を，極 G，腕 AT そして距離 LD として描かれたニコメデス (Nicomedes : 前 280?–前 210?) のコンコイドとしよう。そして，$GA = b$，$LD = c$，$AB = x$ そして $BD = y$ としよう。



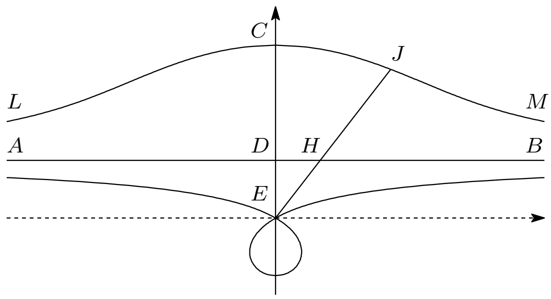
すると，三角形 DBL および DMG が相似であることから，$LB : BD = DM : MG$，すなわち $\sqrt{cc - yy} : y = x : b + y$ であろう。それゆえ，$\overline{b + y} \times \sqrt{cc - yy} = yx$ である。この方程式を得たら，$\sqrt{cc - yy} = z$ と仮定する。すると，2 つの方程式 $bz + yz = yx$ および $zz = cc - yy$ を得る。これらの助けによって，(問題 1 により) 量 x，y および z の流率を求めると，はじめ［の式］から $b\dot{z} + y\dot{z} + \dot{y}z = \dot{y}x + \dot{x}y$ が生じ，第 2［の式］から $2\dot{z}z = -2\dot{y}y$，あるいは $\dot{z}z + \dot{y}y = 0$ が生じる。そして，これらから $\dot{z}$ を消去すると，$-\dfrac{b\dot{y}y}{z} - \dfrac{\dot{y}y^2}{z} + \dot{y}z = \dot{y}x + \dot{x}y$ が現れる。これが解かれると，$y : z - \dfrac{by}{z} - \dfrac{y^2}{z} - x\ (= \dot{y} : \dot{x}) = BD : BT$ となる。ゆえに，BD は y であるから，$BT = z - x + \dfrac{-by - y^2}{z}$，すなわち，$-BT = AL + \dfrac{BD \times GM}{BL}$ であろう。ここで，BT の前に付けられている記号 $-$ は，点 T は A と反対の方向にとられなければならないことを表している。

注解

ついでながら，このことから，コンコイドの凹および凸の部分を分ける点を見つけることができる。すなわち，AT をすべての［中で］最小とするとき，D はそのような点であろう。それゆえ，$AT = v$ とすると，$BT = -z + x + \dfrac{by + y^2}{z}$ であるから，$v = -z + 2x + \dfrac{by + y^2}{z}$ で 433
あろう。ここで，簡単のために，x の代わりに上のことから得られた値 $\dfrac{bz + yz}{y}$ を代入すると，$\dfrac{2bz}{y} + z + \dfrac{by + y^2}{z} = v$ となるであろう。それゆえ, 問題 1 により, 流率 $\dot{v}$, $\dot{y}$ および $\dot{z}$ が求められ, そして, 問題 3 より, $\dot{v} = 0$ と仮定されると, $\dfrac{2b\dot{z}}{y} - \dfrac{2b\dot{y}z}{yy} + \dot{z} + \dfrac{b\dot{y} + 2\dot{y}y}{z} - \dfrac{b\dot{z}y + \dot{z}yy}{zz} = \dot{v} = 0$ が現れるであろう。最後に, この中に, $\dot{z}$ の代わりに $-\dfrac{\dot{y}y}{z}$ が, zz の代わりに $cc - yy$ が —— $\dot{z}$ と zz の値は上のことから求められるであろう —— 代入されて, 還元が行われると, $y^3 + 3by^2 - 2bc^2 = 0$ が得られるであろう。この方程式の作図によって y あるいは AM が与えられるであろうし，M を通って MD が AB に平行に引かれると，それは反対の湾曲の点 D に落ちるであろう。

さらに，もし接線を引かなければならない曲線が機械的であるならば，量の流率は問題 1 の例 5 にあるように求められ，残りは前述のようにやり遂げられるであろう。

ニコメデスのコンコイドとはパッポス (Πάππος ὁ Ἀλεξανδρεύς (Pappus of Alexandria) : 320 頃) によれば次のような曲線である (［17］pp.324–325)。

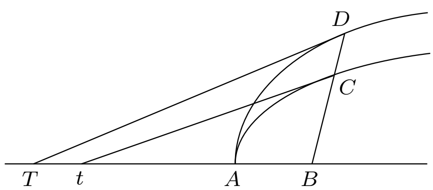


「CDE は AB に垂直とせよ。いま，直線 CDE を E の回りに回転させ，その際，D は常に AB 上にとどまり，しかも DC はその長さを保つようにせよ。このとき，C は次の性質をもつ曲線 LCM を描く。すなわち，E からこの曲線に向かって直線 EHJ を引くと，この曲線と直線 AB とは，その直線上で，常に，CD に等しい線分 HJ を切る。点 E をコンコイドの極，AB をその腕 (κανών : ruler，asymptote)，CD をその距離と呼ぶ。」

ニコメデスはこのコンコイドを角の 3 等分問題と立方体倍積問題に適用したという。

なお，コンコイドは，上の図のように EC が y 軸となるような座標系で考えると，極と腕の間の距離を a，「距離」を b として，$(y-a)^2(x^2+y^2)=b^2y^2$ あるいは $x^2=\left(\dfrac{by}{y-a}\right)^2-y^2$ と表される。上の図は $a=1$，$b=2$ の場合。なお，極座標では $r=a\sec\theta\pm b$ と表せるが，このときは x 軸と y 軸の位置関係が逆［EC が x 軸，DA 方向が y 方向］になる。

例4　AC および AD を，底線 AB に対して与えられた角で立てられた直線 BCD が C および D で交わる，2 つ曲線としよう。すると，［$AB=x$，$BD=y$ および $\dfrac{\text{面積 } ACB}{1}=z$ とすると,］



(問題 1 の例 5 への準備により) $\dot{z}=\dot{x}\times BC$ であろう。いま，AC を円あるいは何らかの知られた曲線とし，もう一方の曲線 AD を定めるのに，z が含まれた任意の方程式，例えば $zz+axz=y^4$，が提示されるとしよう。すると，問題 1 により，$2\dot{z}z+ax\dot{z}+a\dot{x}z=4\dot{y}y^3$ であろう。そして, $\dot{z}$ の代わりに $\dot{x}\times BC$ と書かれると, $2\dot{x}z\times BC+a\dot{x}x\times BC+a\dot{x}z=4\dot{y}y^3$ となるであろう。それゆえ, $2z\times BC+ax\times BC+az:4y^3\,(=\dot{y}:\dot{x})=BD:BT$ となる。それゆえ，もし，曲線 AC の性質から，縦線 BC および面積 ACB あるいは z が与えられるならば，点 T は接線 DT がそこを通るように与えられるであろう。

同じ方法で，もし $3z=2y$ が曲線 AD に関する方程式ならば，$3\dot{z}$ (あるいは $3\dot{x}\times BC$) $=2\dot{y}$ であろう。それゆえ，$3BC:2\,(=\dot{y}:\dot{x})=BD:BT$ となるであろう。他の場合も同様である。

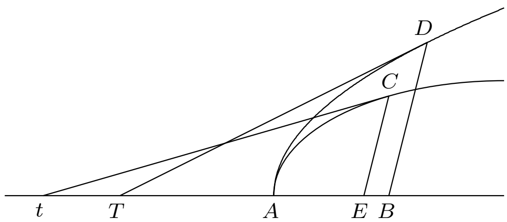
例5　前のように $AB=x$，$BD=y$ とし，任意の曲線 AC の長さを z としよう。すると，それに対して接線 Ct が引かれると，$Bt:Ct=\dot{x}:\dot{z}$，あるいは $\dot{z}=\dfrac{\dot{x}\times Ct}{Bt}$ であろう。

いま，接線が引かれるべき別の曲線 AD について，z が含まれる任意の方程式が与えられるとし，それをもし $z=y$ とするならば，$\dot{z}=\dot{y}$ であろう。それゆえ，$Ct:Bt\,(=\dot{y}:\dot{x})=BD:BT$ 434
である。そして，T が見出されたら，接線 DT を引け。

それゆえ，$xz=yy$ とおかれると，$\dot{x}z+\dot{z}x=2\dot{y}y$ であろうし，$\dot{z}$ の代わりに $\dfrac{\dot{x}\times Ct}{Bt}$ と書か

れると，$\dot{x}z+\dfrac{\dot{x}x\times Ct}{Bt}=2\dot{y}y$ が現れるであろう。それゆえ，$z+\dfrac{x\times Ct}{Bt}:2y=BD:BT$ である。

例6　AC を，Ct が接する，円あるいは何らかの知られた曲線としよう。そして，AD を，接線 DT が引かれなければならない別の曲線とし，そして，それは $AB=$ 弧 AC と仮定することによって定められ，(CE および BD を AB に対して与えられた角をなす縦線として) 何らかの方程式によって BD および CE あるいは AE が関係づけられるとしよう。それゆえ，AB あるいは 弧 $AC=x$，$BD=y$，$AE=z$ および $CE=v$ とすると，明らかに，CE，AC および AE の流率 $\dot{v}$，$\dot{x}$ および $\dot{z}$ はそれぞれ CE，Ct および Et に比例する。それゆえ，$\dot{x}\times\dfrac{CE}{Ct}=\dot{v}$，および $\dot{x}\times\dfrac{Et}{Ct}=\dot{z}$ となる。

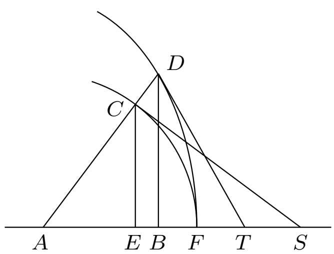


いま，曲線 AD を定める任意の方程式，例えば $y=z$，が与えられると，$\dot{y}=\dot{z}$ であろう。それゆえ，$Et:Ct\,(=\dot{y}:\dot{x})=BD:BT$ となる。

あるいは，$y=z+v-x$ が与えられると，$\dot{y}=\ (\dot{z}+\dot{v}-\dot{x}=)\ \dfrac{\dot{x}\times CE+Et-Ct}{Ct}$ であろう。それゆえ，$CE+Et-Ct:Ct\,(=\dot{y}:\dot{x})=BD:BT$ となる。

あるいは，最後に，$ayy=v^3$ が与えられると，$2a\dot{y}y=\ (3\dot{v}v^2=)\,3\dot{x}\times v^2\,\dfrac{CE}{Ct}$ であろう。それゆえ，$3vv\times CE:2ay\times Ct=BD:BT$ となる。

例7　FC を CS が接する円，そして，FD を，縦線 DB および［円の］中心に引かれた［直線］DA によって切り取られる弧 FC の［間の］関係を任意に仮定することによって定められる曲線としよう。そして，円の中に縦線 CE が下され，AC あるいは $AF=1$，$AB=x$，$BD=y$，$AE=z$，$CE=v$，$CF=t$ とすると，$\dot{t}z\left(=\dot{t}\times\dfrac{CE}{CS}\right)=\dot{v}$，および $-\dot{t}v\left(=\dot{t}\times\dfrac{-ES}{CS}\right)=\dot{z}$ であろう。ここで，私は，EC が増やされる間に AE は減少させられるから，$\dot{z}$ を負とおく。さらに，$AE:EC=AB:BD$ であるから，$zy=vx$ であり，これから問題 1 により，$\dot{z}y+\dot{y}z=\dot{v}x+\dot{x}v$ となる。そして，$\dot{v}$，$\dot{z}$ および v が消し去られると，$\dot{y}x-\dot{t}y^2-\dot{t}x^2=\dot{x}y$ となる。

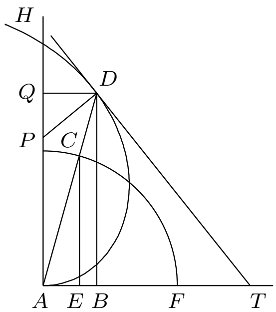


いま，曲線 DF が，ここで代入される $\dot{t}$ の値を導くことができる，任意の方程式によって定められるとしよう。［例えば,］$t=y$ (第 1 種の円積線の方程式) であるとすると，問題 1 により $\dot{t}=\dot{y}$ であろう。それゆえ，$\dot{y}x-\dot{y}y^2-\dot{y}x^2=\dot{x}y$ となる。従って，$y:xx+yy-x\,(=\dot{y}:-\dot{x})=BD\,(y):BT$
435 である。それゆえ，$BT=x^2+y^2-x$，$AT=xx+y^2=\dfrac{AD^2}{AF}$ である。

同じ方法によって，もし $tt=by$ であるならば，$2\dot{t}t=b\dot{y}$ が出てくるであろうから，$AT=\dfrac{b}{2t}\times\dfrac{AD^2}{AF}$ となる。他の場合も同様である。

円積線 (quadratrix) は，極座標で，$r=\dfrac{2a\theta}{\pi\sin\theta}$ と表せるから，$\begin{cases} x=\frac{2a\theta\cos\theta}{\pi\sin\theta} \\ y=\frac{2a\theta}{\pi} \end{cases}$ であり，
$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{2a}{\pi}(\cot\theta-\theta\operatorname{cosec}^2\theta)=\dfrac{2a}{\pi}\cdot\dfrac{\sin\theta\cos\theta-\theta}{\sin^2\theta}$，$\dfrac{dy}{d\theta}=\dfrac{2a}{\pi}$ となる。

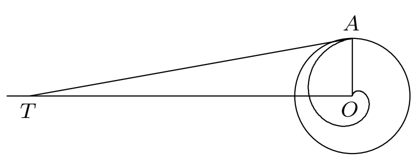
よって，接線の方程式は $y = \dfrac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta - \theta}x - \dfrac{2a}{\pi}\cdot\dfrac{\theta^2}{\sin\theta\cos\theta-\theta}$ となり，$y=0$ とすれば，$x = \dfrac{2a}{\pi}\cdot\dfrac{\theta^2}{\sin^2\theta}$ が得られる。
ニュートンの場合，$a = \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$x\,(AT) = \dfrac{\theta^2}{\sin^2\theta}$ である。これが $AT = x^2 + y^2$ ということ。



例8　しかし，もし AD が弧 FC に等しいと仮定されると，ADH はアルキメデス (Ἀρχιμήδης (Archimedes)：前 287?–前 212) の螺線になるが，このとき，すでにつけられた線の名前はそのままで，(角 ABD は直角であるから) $xx + yy = tt$ である。そして，それゆえ，(問題 1 により) $\dot{x}x + \dot{y}y = \dot{t}t$ である。さらに，$AD : AC = BD : CE$，それゆえ $tv = y$ であり，そこから問題 1 により $\dot{t}v + \dot{v}y = \dot{y}$ である。最後に，弧 FC の流率は直線 CE の流率に対して AC が AE に対する，あるいは AD が AB に対する，すなわち $\dot{t} : \dot{v} = t : x$ であり，そこから $\dot{t}x = \dot{v}t$ である。いま，見出されたこれらの方程式を比較すると，$\dot{t}v + \dot{t}x = \dot{y}$ であることが分かり，それゆえ $\dot{x}x + \dot{y}y\,(= \dot{t}t) = \dfrac{\dot{y}t}{v+x}$ である。そして，それゆえ，平行四辺形 $ABDQ$ が仕上げられると，もし $QD : QP\,(= BD : BT = \dot{y} : -\dot{x}) = x : y - \dfrac{t}{v+x}$ とするならば，すなわちもし $AP = \dfrac{t}{v+x}$ ととられるならば，PD は螺線の法線であろう。

これら［の例］から，どのような方法によってあらゆる曲線に接線が引かれるかは十分に明らかである，と私は信じる。それにもかかわらず，もしさらに，曲線がどのようなものであれ別の方法によって直線に関係づけられるときに，問題がどのようにやり遂げられるかを示したならば，［この問題の解決にとって］不適切ではないであろう。それゆえ，これらのいくつかの方法［の中］から，つねに，最も簡単で最も単純なものを用いることができる。

アルキメデスは『螺線について』(Περὶ ἑλίκων：*On Spirals*) において螺線を次のように定義している (［9］p.471)。
「もし 1 つの直線の一端を固定したまま，その直線を 1 平面上を一様な割合で回転させて，それが出発した位置まで再びもどってくるとし，直線が回転すると同時に，もし 1 点がその直線上を，固定された端点から出発して一様な割合で運動するならば，その点は平面上に 1 つの螺線を描くでしょう。」



接線に関連したことでいうと，アルキメデスは，もし螺線 (が 1 回転した後) の終端で螺線に接線を引き，また回転してもとの位置にもどってきた直線に垂直に，固定された端点から別の直線を引き，それが接線に交わるならば，その交点までのその直線の長さは円の周に等しい，すなわち，左の図で，AT が螺線 OA の接線のとき，OT は半径 OA の円の周に等しい，ということを証明した。
なお，螺線にはこのアルキメデスの螺線の他に，対数螺線 (等角螺線ともいわれる) $r = ke^{a\theta}$，双曲螺線 $r = \dfrac{a}{\theta}$，リチュウス (lituus) $r^2\theta = a^2$ などがある。
さて，アルキメデスの螺線の方程式は極座標で $r = a\theta$ を表されるが，$a = 1$ として $r = \theta$ とす

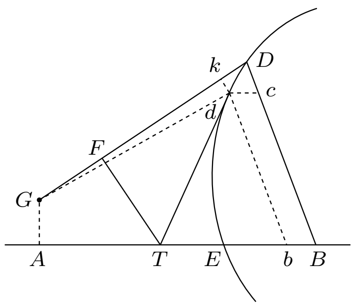
ると，$\begin{cases} x = \theta\cos\theta \\ y = \theta\sin\theta \end{cases}$ であるから，$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = \cos\theta - \theta\sin\theta \\ \frac{dy}{d\theta} = \sin\theta + \theta\cos\theta \end{cases}$ となり，点 $(\theta\cos\theta,\ \theta\sin\theta)$ における法線の方程式は $y = -\dfrac{\cos\theta - \theta\sin\theta}{\sin\theta + \theta\cos\theta}(x - \theta\cos\theta) + \theta\sin\theta$ となる。

この方程式を整理すると $y = \dfrac{-\cos\theta + \theta\sin\theta}{\sin\theta + \theta\cos\theta}x + \dfrac{\theta}{\sin\theta + \theta\cos\theta}$ となり，$x = 0$ とすれば $y = \dfrac{\theta}{\sin\theta + \theta\cos\theta}$ が得られる。これが $AP = \dfrac{t}{v + x}$ ということ。

一方，接線の方程式は $y = \dfrac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\cos\theta - \theta\sin\theta}x - \dfrac{\theta^2}{\cos\theta - \theta\sin\theta}$ となるから，接線影は $BT = \dfrac{\theta^2}{\sin\theta + \theta\cos\theta} - \theta\cos\theta = \dfrac{t^2}{v + x} - x$ となろう。

方法 II

D を，そこから与えられた点 G まで弦 (subtensa) DG が引かれる，曲線上の点とし，DB を底線 AB と任意に与えられた角をなす縦線としよう。確かに，点 D は曲線上を無限に小さい距離 Dd に沿って流れるものとし，そして，GD 上で Gk が Gd に等しくとられ，平行四辺形 $dbBc$ がつくられるものとしよう。すると，Dk および Dc は GD および BD の同時のモーメントであろうし，すなわちそれらは，もし D が d まで移動させられるならば，消滅させられる。いま，直線 Dd が
436 AB と T で交わるまで延長され，その点 T から弦 GD に垂線 TF が下ろされると，四辺形 $Dcdk$ および $DBTF$ は相似になるであろうし，それゆえ $DB : DF = Dc : Dk$ であろう。



それゆえ，BD の GD に対する関係が，曲線を定めるために，任意の方程式によって提示されるとき，流率の関係を求め，FD が DB に対して GD の流率が BD の流率に対する比［となるよう］にとれ。次いで，F から，AB と T で交わるように，垂線 FT を立てると，引かれた TD は D で曲線に接するであろう。しかし，DF は，もし正ならば G の方向に，もしそうでなければ反対の方向に，とれ。

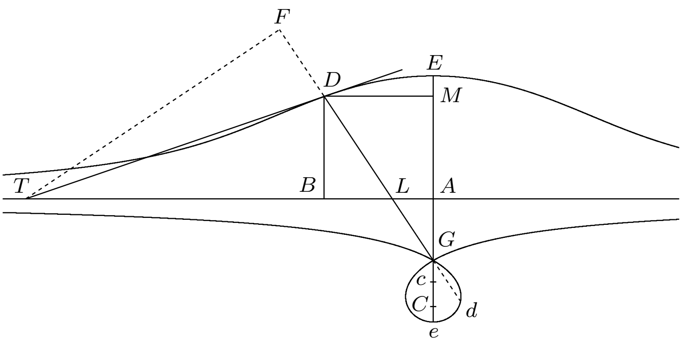
例1　$GD = x$ および $BD = y$ とし，それらの関係を $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ としよう。すると，流率の関係は $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y + a\dot{y}x - 3\dot{y}y^2 = 0$ であろう。そして，それゆえ，$3x^2 - 2ax + ay : 3y^2 - ax\,(= \dot{y} : \dot{x}) = DB\,(y) : DF$ である。ゆえに，$DF = \dfrac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$ である。それゆえ，曲線上に点 D が，従って BD および GD あるいは x および y が，任意に与えられると，点 F は与えられるであろう。それゆえ，もし垂線 FT を立てるならば，底線 AB とのその交点［T］まで引かれた DT は曲線に接するであろう。

そして，このため，規則を前の場合と同じように導くことができることは明らかである。すなわち，提示された方程式のすべての項を同じ部分［辺］に整理し，それぞれに縦線 y の次元を掛け，その結果を分子におけ。次いで，そのそれぞれの項に弦 x の次元を掛け，その結果を，その弦 x で割って，DF の値の分母におけ。そして，その DF を，もし正であるならば G と反対の方向に，もしそうでなければ［G と］同じ方向に，とれ。そして，底線 AB からの点 G の距離も —— もしそれらがたまたま離れていれば ——，縦線の角 ABD の大きさも全く関係しないことに注意せよ。

それゆえ，先の方程式 $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ は，一瞥して，分子として $axy - 3y^3$ を，DF の値の分母として $3x^2 - 2ax + ay$ を与える［ことが分かる］。

それゆえ，また，$a+\dfrac{b}{a}x-y=0$ (この方程式は円錐曲線に関するものである) は分子として $-y$ を，DF の値の分母として $\dfrac{b}{a}$ を与え，それゆえ［DF］$=-\dfrac{ay}{b}$ であろう。

そして，それゆえ，コンコイドにおいて (ここでは前よりも手早く仕上げられる)，$GA=b$, 437
$LD=c$, $GD=x$ そして $BD=y$ (方法 1 の例 3 の図を見よ［ここでは再掲した］。) とおかれると，



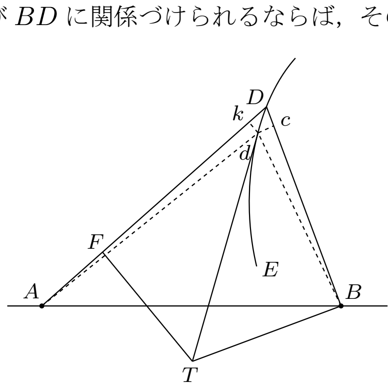
$BD\,(y)\ :\ DL\,(c)\ =\ GA\,(b)\ :\ GL\,(x-c)$ であろう。それゆえ，$xy-cy=cb$, あるいは $xy-cy-cb=0$ となる。この方程式は, 規則に従って $\dfrac{xy-cy}{y}$ を，すなわち $x-c=DF$ を，与える。ゆえに, GD を F まで伸ばして，$DF=LG$ となるようにして，F において垂線 FT を立て，T において腕 AB と交わるようにすれば，引かれた DT はコンコイドに接するであろう。

もしいつか，複合された量が方程式に見出されるならば，むしろ方程式を還元する方を選ぶときを除いて，一般的な方法に戻らなければならない。

例2　もし GD および BD の間の関係を定める (前出の図を見よ。［84 ページ］) ために方程式 $\overline{b+x}\times\sqrt{cc-yy}=yx$ が与えられるならば，問題 1 に従ってそれらの流率の間の関係を求める。すなわち，$\sqrt{cc-yy}=z$ と仮定すると，［2 つの］方程式 $bz+yz=yx$ および $cc-yy=zz$ が得られるから，流率 $\dot{x}$, $\dot{y}$ および $\dot{z}$ の関係は $b\dot{z}+y\dot{z}+\dot{y}z=\dot{y}x+y\dot{x}$ および $-2\dot{y}y=2\dot{z}z$ となる。そして，$\dot{z}$ および z が消し去られると，$\dot{y}\sqrt{cc-yy}-\dfrac{b\dot{y}y+\dot{y}y^2}{\sqrt{cc-yy}}-\dot{y}x=\dot{x}y$ が生じるであろう。ゆえに，$y:\sqrt{cc-yy}-\dfrac{by+yy}{\sqrt{cc-yy}}-x\,(=\dot{y}:\dot{x})=BD\,(y):DF$ である。

方法 III

さらに，もし曲線が，与えられた点 A および B から引かれ，曲線上で交わる 2 つの弦 AD および BD に関係づけられるならば，その［交］点 D は曲線上の無限に小さい空間 Dd に沿って前に



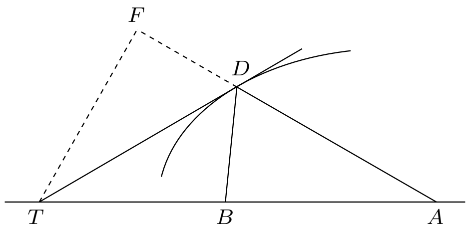
流れるものと考えよ。そして，AD および BD 上に，$Ak=Ad$ および $Bc=Bd$［となる点 k, c］をとれ。すると，kD および cD は線 AD および BD の同時のモーメントであろう。いま，DF を BD に対してモーメント Dk がモーメント Dc に対する比 (すなわち，線 AD の流率が線 BD の流率に対する比) にとり，T で交わる垂線 BT, FT を立てると，四辺形 $DFTB$ および $Dkdc$ は相似であろうし，それゆえ対角線 DT は曲線に接するであろう。

それゆえ，AD および BD の間の関係が定められる方程式から，問題 1 の助けによってそれらの流率の関係を求め，FD を BD に対してその同じ比にとれ。

例　$AD=x$ および $BD=y$ とおかれ，それらの関係を $a+\dfrac{ex}{d}-y=0$ —— この方程式は 438

第 2 類の楕円のもので，それらの光の屈折についての性質はデカルトによって彼の『幾何学』の第 2 巻で示されている —— としよう。すると，流率の関係は $\dfrac{e\dot{x}}{d} - \dot{y} = 0$ であろう。それゆえ，$e : d\,(= \dot{y} : \dot{x}) = BD : DF$ である。

そして，同じ仕方によって，もし $a - \dfrac{ex}{d} - y = 0$ ならば，$e : -d = BD : DF$ であろう。前者の場合には DF を A の方向にとり，後者の場合には反対の方向にとれ。



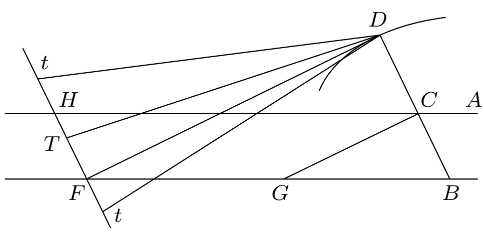
系1　それゆえ，もし $d = e$ (この場合，曲線は円錐曲線となる) ならば，$DF = DB$ であろう。そして，それゆえ，三角形 DFT，DBT は合同になり，角 FDB は接線によって 2 等分されるであろう。

系2　それゆえ，また，デカルトがこれらの曲線における屈折に関して，かなり遠回りをして，証明したことは，DF および DB (これらは d が e に対する与えられた比にある) が，DT 全体の正弦に関して，角 DTF および DTB の正弦であり，すなわち，AD が曲線の面における入射線で，DB がその反射あるいは屈折であるから，自ずから明らかである。そして，もし点 A あるいは B のいずれかが無限に離れていると仮定されるとしても，円錐曲線における屈折について同様のことである。

この規則を前述の仕方によって整え，その例をいくつか与えることは非常に簡単である。確かに，曲線が他の何らかの方法によって直線と関係づけられていて，前述の形に適切に還元することができないとき，これらの例について別の規則を必要に応じて考案することは非常に簡単である。

439 **方法 IV**

例えば，もし与えられた点 B の回りを回転する直線 BD 上の点 D が何らかの曲線上にあり，C を位置において与えられた直線 AC との交点とし，そして，BC および BD の間の関係が任意の方程式によって表されるならば，BF を AC に平行に，そして BD に対する垂線 DF と交わるように，引け。そして同様に，DF に対して垂線 FT を立てて，［それの］BC に対する比が BD の流率が BC の流率に対するようにとれ。DT が引かれると，それは曲線に接するであろう。



方法 V

しかし，もし点 A が与えられ，方程式が AC および BD の間の関係を表しているならば，CG を DF に平行に引き，FT を BG に対する比が BD の流率が AC の流率に対するようにとれ。

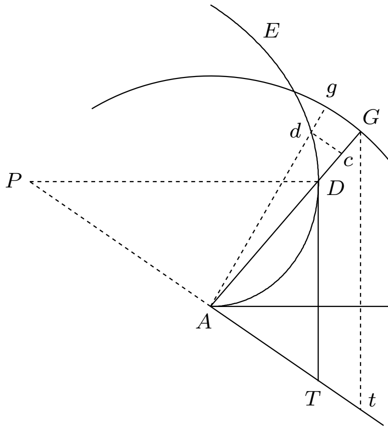
方法 VI

あるいは，さらに，もし方程式が AC および CD の間の関係を定めるならば，AC および FT が H で交わるようにし，HT を BG に対する比が CD の流率が AC の流率に対するようにとれ。そして，他の場合も同様である。

440 **方法 VII　螺線について**

問題は，機械的［な曲線］は常であるように，曲線が直線に対してではなく他の曲線に対して関

係づけられるときも，ほとんど異なることなくなし遂げられる。BG を，その半径が AG である，円の周とし，それが中心 A の回りを回転する間に，点 D は何らかの仕方で動かされ，螺線 ADE を描くとしよう。そして，Dd を，それに沿って D が流れる，曲線上の無限に小さい部分とし，AD 上で $Ac = Ad$ にとると，cD および Gg は直線 AD および円周 BG の同時のモーメントであろう。ゆえに，At を cd に平行に，すなわち直線 AD に垂直に引き，接線 DT がそれと T で交わるようにすると，$cD : cd = AD : AT$ であろう。さらに，Gt を接線に平行にすると $cd : Gg\,(= Ad$ あるいは $AD : AG) = AT : At$ であろう。



それゆえ，［弧］BG と［弧］AD の関係が定められる何らかの方程式が提示されたとき，問題 1 によってそれらの流率の関係を求め，At を AD に対してその比になるようにとれば，Gt は接線に平行になるであろう。

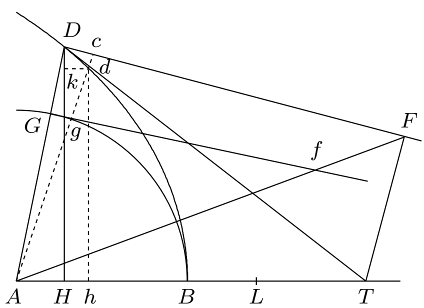
例1　［弧］$BG = x$ および $AD = y$ として，それらの関係を $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ としよう。すると，問題 1 によって，$3x^2 - 2ax + ay : 3y^2 - ax\,(= \dot{y} : \dot{x}) = AD : At = AP : AG$ が現れるであろう。点 t がそのように見出されたら，Gt を引き，DT をそれに平行にすれば，それは曲線の接線となるであろう。

例2　もし $\dfrac{ax}{b} = y$ (この方程式はアルキメデスの螺線のものである) とするならば，$\dfrac{a\dot{x}}{b} = \dot{y}$ であろう。それゆえ，$a : b\,(= \dot{y} : \dot{x}) = AD : At$ であろう。それゆえ，ついでに，もし TA が $AP : AB = a : b$ となるように P まで延長されるならば，PD は接線と直角であろう。

例3　もし $xx = by$ ならば，$2\dot{x}x = b\dot{y}$，それゆえ $2x : b = AD : At$ であろう。そして，それゆえ，どのような螺線に対する接線でも苦もなく決定することができる。

方法 VIII　円積線について 441

そのうえ，もし曲線を，中心 A から引かれた任意の直線 AGD が円と G で，曲線と D で交わり，弧 BG および，底線 AB と与えられた角をなす縦線である，直線 DH の間の関係が任意の方程式によって定められるようなものであるとするならば，点 D が曲線上の無限に小さい距離に沿って d まで動かされると仮定し，平行四辺形 $dhHk$ をつくって，$Ac = AD$ となるように Ad を c まで延長すると，Gg は弧 BG の，Dk は縦線 DH の同時のモーメントであろう。いま，直線 Dd を AB と交わるように T まで伸ばし，Dc に垂直に TF を下ろすと，四辺形 $Dkdc$, $DHTF$ は相似であろうし，それゆえ $Dk : Dc = DH : DF$ であろう。そして，さらに，もし Gf が AG に垂直に立てられ，AF と f で交わるとするならば，DF および Gf が平行であることから，$Dc : Gg = DF : Gf$ であろう。それゆえ，［それらを比較すると］比の性質により (ex aequo) $DH : Gf = Dk : Gg$，すなわち線 DH および［弧］BG のモーメントあるいは流率に比例する。



それゆえ，［弧］BG の DH に対する関係が定められる方程式によって，(問題 1 により) 流率の比を求め，Gf (円 BG の接線) を DH に対してその比にあるようにとれ。DF を Gf に平行に，Af の延長と F で交わるように，引け。そして，F において垂線 FT を，AB と T で交わるように，立て，DT が引かれると，それは円積線に接するであろう。

例1　［弧］$BG = x$ および $DH = y$ と名づけ，$xx = by$ とすると，(問題 1 により) $2\dot{x}x = b\dot{y}$ であろう。それゆえ，$2x : b\,(= \dot{y} : \dot{x}) = DH : Gf$ であろう。そして，［点］f が見出されたら，その他［の点］は前述のとおり決定されるであろう。

しかし，おそらく，この規則は次のようにより優雅に実現される。［すなわち，］$\dot{x} : \dot{y} = AB : AL$ とせよ。すると，$AL : AD = AD : AT$ となり，DT は曲線に接するであろう。なぜならば，三角形 AFD，ATD は合同であるから，$AD \times DF = AT \times DH$ であり，それゆえ，$AT : AD \left(= DF\ [\text{あるいは}\dfrac{AD}{AG} \times Gf] : DH\ \text{あるいは}\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\,Gf\right) = AD : \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\,AG$ あるいは AL となるからからである。

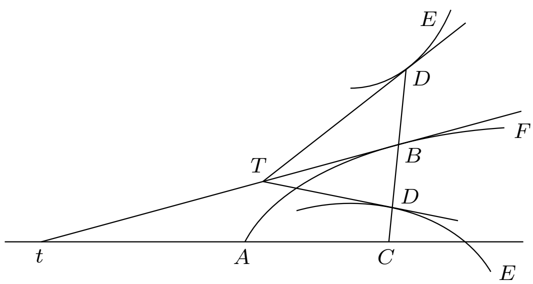
442 **例2**　$x = y$ (これは古代人の円積線の方程式である) とすると，問題 1 により $\dot{x} = \dot{y}$ となり，それゆえ $AB : AD = AD : AT$ となるであろう。

例3　$axx = y^3$ とすると，$2a\dot{x}x = 3\dot{y}y^2$ であろう。ゆえに，$3y^2 : 2ax\,(= \dot{x} : \dot{y}) = AB : AL$ とすると，$AL : AD = AD : AT$ となる。

そして，それがどんなに複雑であろうとも，他の円積線の接線を迅速に決定することができるであろう。

方法 IX

最後に，もし ABF を，直線 Bt が接する，任意に与えられた曲線とし，これと別の曲線 DE との間に切り取られる，底線 AC と与えられた角をなす縦線 BC の部分 BD が，曲線の部分 AB に対して何らかの方程式によって定められた関係をもつならば，この［曲線 ABF］の接線において，BT を，BD に対して曲線 AB の流率が直線 BD の流率に対するのと同じ比にあるようにとることによって，他方の曲線［DE］の接線 DT を引くことができるであろう。



例1　［弧］$AB = x$ および $BD = y$ と呼ばれ，$ax = yy$ とすると，問題 1 により $a\dot{x} = 2\dot{y}y$ であろう。それゆえ，$a : 2y\,(= \dot{y} : \dot{x}) = BD : BT$ であろう。

例2　$\dfrac{a}{b}\,x = y$ (もし ABF が円ならば，サイクロイドの方程式となる) とすると，$\dfrac{a}{b}\,\dot{x} = \dot{y}$ であろう。それゆえ，$a : b = BD : BT$ であろう。

そして，BD の AC に対するあるいは BC に対する関係が何らかの方程式で表されるとき，あるいは曲線がどのようなものであれ何らかの方法で別の直線あるいは別の曲線に関係づけられるとき，困難なく接線を引くことができるであろう。

さらに，その解がこれら［の原理］からあふれ出るであろう別の問題が少なからずある。そのような種類のものは，［次のようなものである。］

I　接線が底線あるいは位置において与えられた他の任意の直線と平行である，あるいは垂直で

ある，あるいは与えられた任意の角の傾斜をもつ，ような曲線上の点を見出すこと。

II　接線が底線または位置において与えられた他の直線に対して極大あるいは極小に傾いている点を見出すこと。すなわち，反対の流率の境界を見出すこと。しかし，私はすでにコンコイドについてこの例を示した。 443

III　曲線の周の外に任意に与えられた点から，その周と接触角 (angulus contactus) あるいは直角あるいは任意に与えられた他の角をつくる直線を引くこと。すなわち，任意に与えられた点から，接線あるいは法線あるいは曲線に対して任意に傾けられた直線を引くこと。

IV　放物線の内部に任意に与えられた点から，その周と，可能な限り，最大あるいは最小の角をつくる直線を引くこと。そして，他の曲線に関して同じことを理解すること。

V　位置において与えられた 2 つの曲線に，あるいは (それが可能ならば) 同じ曲線の 2 つの点に，接する直線を引くこと。

VI　与えられた条件で，与えられた点において位置において与えられた別の曲線に接する何らかの曲線を描くこと。

VII　光が任意の何らかの曲線の面に落ちるとき，任意の光線の屈折を決定すること。

これらの，そして似たような，問題をやり遂げることは，計算の退屈さが邪魔にならないとき，それらについてさらに特別な説明が必要になる程には難しくない。そして，そのように多くのことを吟味してきたことは，幾何学者にとって，より好ましいことであろうと，私は信じる。

ニュートンによる接線 (接線影 BT) の決定は，前述のとおり，$\dfrac{dy}{dt}:\dfrac{dx}{dt}=y\,(BD):BT$ によるものであるが，その変形としていろいろな方法が示されている。

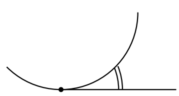
例えば，コンコイドについて，

「方法 I」ではこの方針に基づいて［$AB=x$，$BD=y$ として］$BT=-\left(AL+\dfrac{BD\times GM}{BL}\right)$ を導き，

「方法 II」では座標のとり方を［$DG=x$，$BD=y$ と］変えて $DF=x-c$ を導いている。

確かに，方法 II の方が速い。

また，螺線については「方法 I」と「方法 VII」の 2 か所で扱っており，円積線については「方法 I」と「方法 VIII」で扱っている。



なお，ここで接触角が出てくるが，それは，円の接線がその接点を頂点として円弧との間につくる角のことである［左図］。これは現代では全く話題に上らないが，近世においてはいろいろと議論されたようであり，原 亨吉は「かつてこれについておこなわれた議論は，無限概念の歴史の興味ある一駒を形づくるとともに，近世数学創設期の一状況を示すことにもなる」という (［2］ p.129)。

ユークリッド (Euclid (Εὐκλείδης) : 前 300 頃) の『原論』(Στοιχείωσις) の第 3 巻命題 16 に「円の直径にその端から直角にひかれた直線は円の外部におちるであろう。そしてこの直線と弧との間に他の直線はひかれないであろう。また半円の角［円弧と直径のなす角］はすべての鋭角の直線角より大きく，残りの角はすべての鋭角より小さい。」とある。

第 7 章

［曲率半径を定めることについて］

問題 5

任意の曲線の与えられた点における曲率を見出すこと。

曲線の科学に関して，非常に優雅であり，しかも有用である問題が見受けられる。しかし，その説明に当たって，［次のような］何らかの一般論をあらかじめ述べておくのがよい［であろう］。

I　同じ円はいたるところで同じ曲率をもち，等しくない円の曲率はそれらの直径に反比例する。もしある［円の］直径が別の［円の］直径の2倍小さければ，その円周の曲率は2倍大きいであろう。もしその直径が3倍小さければ，その曲率は3倍い大きいであろう，など。

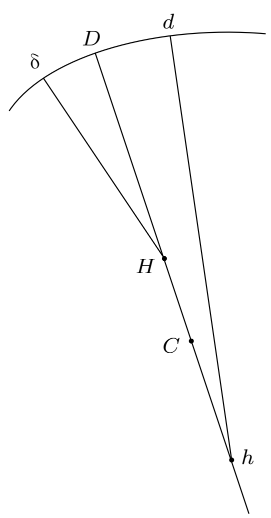
444 II　もし円が与えられた点で何らかの曲線の凹の部分と接し，その点の近くで接触角の中に他の接する円が描けないような大きさであるならば，その円はその接触点 (punctum contactus) において曲線と同じ曲率をもつ。なぜならば，接触点の近くにおいて曲線と別の円の間にある円は，曲線より小さく曲がり，別の円より以上にその曲率に近づくからである。それゆえ，それと曲線との間にもはや円を挿入できないとき，その曲率に最も近くなる。

III　それゆえ，曲線のある点における曲率中心は等しく曲げられた接円の中心であり，曲率の半径 (radius) あるいは半直径 (semidiameter) はその中心で終る法線の部分である。

IV　そして，その［曲線の］いろいろな点における曲率の比は等しく曲がった円の曲率の比から，あるいは曲率半径の逆比から知られる。

それゆえ，問題は曲率半径あるいは曲率中心を見出すということに還元される。

ゆえに，曲線上の3つの点δ，D および d において法線が引かれると仮定し，D およびδにおけるそれらは H で交わり，D および d におけるそれらは h で交わるとする。そして，点 D は中間にあり，もし Dδの部分の曲率が Dd［の部分の曲率］より大きければ，δH は dh より小さいであろう。しかし，法線δH および dh が中間の法線に近づけば近づくほど点 H および h の間の距離は小さくなり，そして，ついには法線が重なると，それら［の点］は一致するであろう。さらに，それらが点 C で一致するとすると，その点 C は，そこで法線を立てる［重なった法線がそこでの法線になる］ような曲線上の点 D における曲率中心であろう。これは自ずから明らかである。



しかし，この点 C について，それを決定するのに使うことができる，いろいろな性質 (symptoma) がある。例えば，

I　それは DC から，その両方の側に，無限に小さい距離にある［点における］法線の交点 (concursus) である。

445 II　それは両方の側に有限に小さい距離にある法線の交点を分離し，分割する。それゆえ，より大きく曲がった部分 Dδにおいてはより早く H に出会い，他方のより小さく曲がった部分 Dd においてはより多く動いて h と出会う。

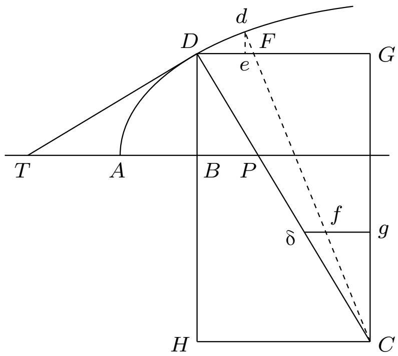
III　もし DC が，曲線に法線を立てながら，動かされると仮定されるならば，その点 C は (もし法線を立てる点 D に向かう，あるいはそれから離れる運動を除くならば) 決して動かされないであろうし，あたかも運動の中心のようであろう。

IV　もし中心 C，距離［半径］DC で円が描かれるならば，接触点の近くでそれら［その円と元の曲線］の間に描かれる他の円はない。

V　最後に，もし，H あるいは h のような，他の任意の接円の中心が，ついに一致するまで，この中心 C に次第に近づいていくならば，その円が曲線を横切る任意の点は，同時に，接触点 D に

一致するであろう。

そして，これらの性質はそれぞれ異なった仕方で問題を解決する手掛かりを与える。しかしながら，最初は最も単純なものを選ぼう。



曲線上の任意の点 D において，前のように，DT を接線，DC を法線，そして C を曲率中心としよう。そして，AB を，DB がそれと直角をなす縦線で，DC と P で交わるような，底線としよう。DG を AB に平行に，そして CG をそれと垂直に引き，その上に任意に与えられた大きさの Cg をとり，DC と δ で交わる垂線 $g\delta$ を引け。すると，$Cg : g\delta = (TB : BD =)$ 底線の流率 : 縦線の流率［$De : de$］であろう。さらに，点 D を曲線上で無限に小さい距離 Dd に沿って前進させるものと仮定せよ。そして，de を DG に対して，Cd を曲線に対して垂直に引いて，Cd が DG と F で，δg と f で交わるものとすると，De は底線のモーメント，de は縦線のモーメントで，δf は直線 $g\delta$ の同時のモーメントであろう。そして，$DF = De + \dfrac{de \times de}{De}$ である。それゆえ，これらのモーメント，あるいは同じことだが，それらが生成している流率の比が得られるから，GC の与えられた量 gC に対する比 (もちろん，これは DF が δf に対するものである) が得られ，このことから点 C が決定されるであろう。

ゆえに，$AB = x$，$BD = y$，$Cg = 1$ としよう。そして，$g\delta = z$ とすると，$1 : z = \dot{x} : \dot{y}$ あるいは $z = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ であろう。さらに，この z のモーメント δf を $\dot{z} \times o$，すなわち，その速さと無限
に小さい量との積，とせよ。すると，モーメントは $De = \dot{x} \times o$，$de = \dot{y} \times o$ であり，これから 446
$DF = \dot{x}o + \dfrac{\dot{y}\dot{y}o}{\dot{x}}$ であろう。ゆえに，$Cg\,(1) : CG = (\delta f : DF =)\, \dot{z}o : \dot{x}o + \dfrac{\dot{y}\dot{y}o}{\dot{x}}$ である。それゆえ，$CG = \dfrac{\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y}}{\dot{x}\dot{z}}$ である。

さらに，底線の流率 $\dot{x}$ (あたかも均一な流率であるとして他のものをそれに関係づけるとよい) に対してどのような速さを与えてもそれは自由であるから，それを 1［単位］とせよ。すると，$\dot{y} = z$，および $CG = \dfrac{1 + zz}{\dot{z}}$ であろう。そして，これから，$DG = \dfrac{z + z^3}{\dot{z}}$，および $DC = \dfrac{\overline{1 + zz}\sqrt{1 + zz}}{\dot{z}}$ となる。

それゆえ，曲線を定めるために，BD の AB に対する関係が表される任意の方程式が提示されたとき，はじめに問題 1 により $\dot{x}$ および $\dot{y}$ の間の関係を求め，その間に $\dot{x}$ の代わりに 1 を，$\dot{y}$ の代わりに z を代入せよ。次いで，［そのようにすることによって］生じる方程式から同じく問題 1 によって $\dot{x}$，$\dot{y}$ および $\dot{z}$ の間の関係を求め，その間に，前のように，$\dot{x}$ の代わりに 1 を，$\dot{y}$ の代わりに z を代入せよ。すると，それゆえ，先の操作により z の値を得るであろうし，後の方から $\dot{z}$ の値を得るであろう。それらが得られたら，DB を $DH = \dfrac{1 + zz}{\dot{z}}$ となるように曲線の凹の部分の方に H まで伸ばし，HC を AB に平行で，法線 DC と C で交わるように引けば，C は曲線上の点 D における曲率中心であろう。あるいは，$1 + zz = \dfrac{PT}{BT}$ であるから，$DH = \dfrac{PT}{\dot{z} \times TB}$，あるいは $DC = \dfrac{DP^3}{\dot{z} \times DB^3}$ とせよ。

ニュートンはここで曲率半径を求める一般論を述べている。順を追って，再録すると次のようになる。

まず，De は x のモーメントだから $\dot{x}o$，de は y のモーメントだから $\dot{y}o$ である。そして，z を $z=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$ となるように定め，この z のモーメントを $f\delta=\dot{z}o$ とする。すなわち，今日の言葉でいえば，$z=\dfrac{dy}{dx}$，$\dot{z}=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ということである。

さて，Dd が微小距離であることから三角形 DdF は直角三角形とみなされるから，$De:de=de:eF$ がいえる。これから，$eF=\dfrac{de^2}{De}=\dfrac{\dot{y}^2o^2}{\dot{x}o}=\dfrac{\dot{y}^2o}{\dot{x}}$ ということになる。従って，$DF=De+eF=\dot{x}o+\dfrac{\dot{y}^2o}{\dot{x}}=\dfrac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)o}{\dot{x}}$ となる。

また，$Cg:CG=f\delta:DF$ であり，$Cg=1$ としているから，$CG=\dfrac{Cg\times DF}{f\delta}=\dfrac{DF}{f\delta}=\dfrac{\frac{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)o}{\dot{x}}}{\dot{z}o}=\dfrac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\dot{z}}$ となる。

また，$De:de=DH:CH=CG:DG$ であるから，$DG=\dfrac{de\times CG}{De}=\dfrac{\dot{y}o\times\frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{\dot{x}\dot{z}}}{\dot{x}o}=\dfrac{\dot{y}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{\dot{x}^2\dot{z}}$ である。

ここで，$\dot{x}=1$，$\dot{y}=z$ とすれば，

$$CG=\frac{1+z^2}{\dot{z}},\quad DG=\frac{z(1+z^2)}{\dot{z}}$$

となる［作図にあたって，この 2 式が重要で，以下の例でもこれらを求めることを 1 つの目標としている。］から，$CD=\sqrt{CG^2+DG^2}=\sqrt{\dfrac{(1+z^2)^2+z^2(1+z^2)^2}{\dot{z}^2}}=\dfrac{\sqrt{(1+z^2)^3}}{|\dot{z}|}$ が得られる。

すなわち，ニュートンは曲率半径を $\rho=\dfrac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}$ と求めたことになる。

ところで，$BD:BP=BT:BD$ であるから，$BP\times BT=BD^2$，すなわち $BP\times BT^2=BD^2\times BT$，となって，それゆえ，$BP:BT=BD^2:BT^2=de^2:De^2=\dot{y}^2:\dot{x}^2=z^2:1$ から，$BP=z^2\times BT$ となる。従って，$PT:BT=(BT+BP):BT=(BT+z^2\times BT):BT=(1+z^2):1$ となるから，$\dfrac{PT}{BT}=1+z^2$ がいえる。

さらに，$DC=\dfrac{(1+z^2)\sqrt{1+z^2}}{\dot{z}}=\dfrac{1}{\dot{z}}\cdot\dfrac{PT}{BT}\cdot\sqrt{\dfrac{PT}{BT}}=\dfrac{1}{\dot{z}}\sqrt{\left(\dfrac{PT}{BT}\right)^3}$ である。一方，$BP\times BT=BD^2$ より $BP=\dfrac{BD^2}{BT}$ であるから，$PT=BP+BT=\dfrac{BD^2}{BT}+BT=\dfrac{BD^2+BT^2}{BT}=\dfrac{DT^2}{BT}$ となって，$PT\times BT=DT^2$ がいえるから，$PT:BT=PT^2:DT^2=DP^2:BD^2$ となる。従って，$DC=\dfrac{1}{\dot{z}}\sqrt{\left(\dfrac{PT}{BT}\right)^3}=\dfrac{1}{\dot{z}}\sqrt{\left(\dfrac{DP^2}{BD^2}\right)^3}=\dfrac{DP^3}{\dot{z}\times BD^3}$ となる。

この様子を次の「例 1」の $3x+x^2=y^2$ について見てみると ($\dot{x}=1$，$\dot{y}=z$ に注意) $\cdots$

$$3x+x^2=y^2\longrightarrow 3+2x=2zy\longrightarrow z=\frac{3+2x}{2y}\to x=1,\ y=2\text{ なら，}z=\frac{5}{4}$$

$$\downarrow$$

$$2=2\dot{z}y+2zz\longrightarrow \dot{z}=\frac{1-z^2}{y}\to x=1,\ y=2\text{ なら，}\dot{z}=-\frac{9}{32}$$

よって，$x=1$，$y=2$ に対応する点での曲率半径は $\rho=\dfrac{\left(1+\left(\frac{5}{4}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|-\frac{9}{32}\right|}=\dfrac{\sqrt{41}^3}{18}$ となる。

例1　それゆえ，$ax+bx^2-y^2=0$ (これは直立辺［縦線，通径］(latus rectum) が a で横断辺 (latus transversum) が $\dfrac{a}{b}$ である双曲線の方程式である) が提示されたら，(問題 1 によって) $a+2bx-2zy=0$ (すなわち，結果の方程式において $\dot{x}$ の代わりに 1 と，$\dot{y}$ の代わりに z と書かれたもので，そうでなければ $a\dot{x}+2b\dot{x}x-2\dot{y}y=0$ である) が現れるであろう。そして，それゆえ，再び $\dot{x}$ の代わりに 1 と，$\dot{y}$ の代わりに z と書かれた，$2b-2zz-2\dot{z}y=0$ が新たに現れる。前者により $z=\dfrac{a+2bx}{2y}$ で，後者により $\dot{z}=\dfrac{b-zz}{y}$ である。それゆえ，曲線上の任意の点 D が，そ 447
して結果として x と y が，与えられると，これらから z および $\dot{z}$ が与えられるであろう。それらが知られたら $\dfrac{1+zz}{\dot{z}}=GC$ あるいは DH として，HC を引け。

例えば，もし確定的に $a=3$ および $b=1$ とするならば，それゆえ $3x+xx=yy$ が双曲線［を定めるため］の条件となり，もし $x=1$ と仮定されるならば，$y=2$，$z=\dfrac{5}{4}$，$\dot{z}=-\dfrac{9}{32}$，そして $DH=-9\dfrac{1}{9}$ となるであろう。H が見出されたら，前に描かれた法線 DC と交わるように［垂線］HC を立てよ。あるいは，同じことであるが，$DH:HC\,(=1:z)=1:\dfrac{5}{4}$ として，曲率半径 DC を引け。

もしいつか，計算を非常に複雑であるとは見なさないならば，$\dot{z}$ や z の不定の値そのものを CG の値 $\dfrac{1+zz}{\dot{z}}$ に代入することができる。それゆえ，この例では，適当な還元によって $DH=y+\dfrac{4y^3+4by^3}{aa}$ を得るであろう。しかし，この DH の値は，数値による例でみたように，計算によると負になる。しかし，このことは DH を B に向かう方向にとられなければならないということを示しているだけである。一方，もしそれが正ならば，反対方向に引かれなければならない。

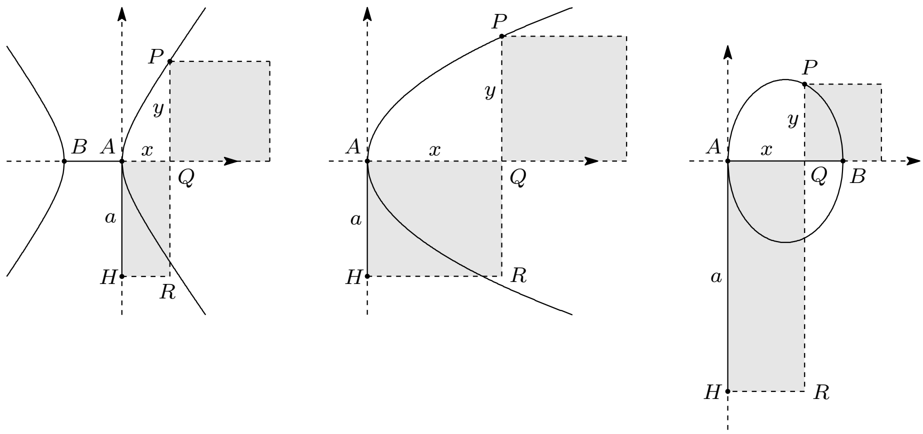
系　それゆえ，もし記号 $+b$ の前に付けられた符号が替えられるならば，それは楕円の方程式 $ax-bxx-yy=0$ となり，$DH=y+\dfrac{4y^3-4by^3}{aa}$ であろう。

しかし，$b=0$ とおかれると，それは放物線の方程式 $ax-y^2=0$ となり，$DH=y+\dfrac{4y^3}{a^2}$，すなわち $DG=\dfrac{1}{2}a+2x$ であろう。

これらのことから，任意の円錐曲線の曲率半径の値は $\dfrac{4DP^3}{aa}$ であることが容易に結論される。

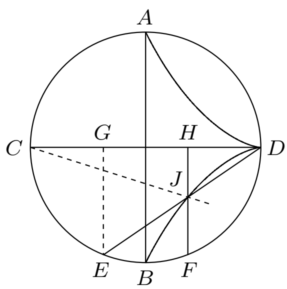
ここでは，円錐曲線の曲率半径が問題となっている。
円錐曲線の方程式は $y^2=ax+bx^2$ と表せるが，$b>0$ のとき双曲線，$b=0$ のとき放物線，$b<0$ のとき楕円になり，直交座標系を用いると 3 つの円錐曲線はそれぞれ下の図のようになる。
このとき，双曲線，楕円について，AH が直立辺であり，AB が横断辺である。放物線では直立辺は AH であるが，横断辺はない。なお，「例 1」にあるように，横断辺の長さは $\left|\dfrac{a}{b}\right|$ である。
$AQ=x$，$PQ=y$，$AH=a$ とし，PQ 上の正方形の面積 y^2 と長方形 $AHRQ$ の面積 ax とを比べるとき，それらが等しくなるときが放物線 (παραβολή：付設) で，正方形が長方形に対して bx^2 だけ過剰している場合が双曲線 (ὑπερβολή：超過付設)，不足している場合が楕円 (ἔλλειψις：不足付設) である。
円錐曲線に対して，初めてこのようなアプローチをしたのはアポロニウス (Ἀπολλώνιος (Apol-

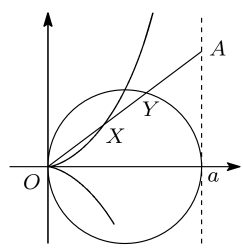
lonius)：前 262–前 200?) であり，それは彼の『円錐曲線論』(*Conics*) に見られる。彼は，それまで頂角が鈍角，直角，鋭角である直円錐を母線に直角に切断してつくられていた円錐曲線を，1 つの円錐［斜円錐でもよい］のいろいろな切断の違いによって捉えるようにしたのである。また，彼は円錐曲線の法線についても論じている。



y^2 の方が ax より bx^2 だけ大きい　　y^2 が ax に等しい　　y^2 の方が ax より bx^2 だけ小さい

例2　もし $x^3 = ay^2 - xy^2$ (ディオクレス (Διοκλῆς ὁ Καρύστιος (Diocles of Carystus)：前 240?–前 180?) のシッソイドの方程式) が提示されるならば，問題 1 によりはじめに $3x^2 = 2azy - 2xzy - yy$ が，次いで $6x = 2a\dot{z}y + 2azz - 2zy - 2x\dot{z}y - 2xzz - 2zy$ が得られるであろう。それゆえ，$z = \dfrac{3xx + yy}{2ay - 2xy}$，および $\dot{z} = \dfrac{3x - az^2 + 2zy + xz^2}{ay - xy}$ である。それゆえ，ソッソイド上に任意の
448 点が，それゆえ x および y が，与えられると，z および $\dot{z}$ が与えられるであろう。それらが知られたら，$\dfrac{1 + zz}{\dot{z}} = CG$ とせよ。





ディオクレスのシッソイドは次のように定義される（［17］p.369)。
「AB，CD を 1 つの円の互いに直交する 2 つの直径とし，E，F は円上の点で，それぞれ B の両側にあり，かつ B から等距離にあるものとする。いま CD に F から垂線 FH を下ろし，DE とこの垂線との交点を J とする。このとき点 J の描く図形がシッソイドである。」
現代風には「直径が a の円の接線上の点 A と，その接点と反対の直径上の点 O を結ぶ線分 OA が，円と交わる点を Y とするとき，線分 OA 上で $OX = AY$ となる点 X の軌跡」がシッソイドである。
上の右図のように座標軸を定めると，シッソイドは $x^3 + (x - a)y^2 = 0$ と表せる。

例3　もし，上のように，コンコイドについての方程式 $\overline{b + y}\sqrt{cc - yy} = xy$ が与えられるならば，$\sqrt{cc - yy} = v$ と仮定すれば，$bv + yv = xy$ が現れるであろう。いま，それらのうちの前者 (すなわち，$cc - yy = vv$) は問題 1 によって ($\dot{y}$ の代わりに z と書かれると) $-2yz = 2\dot{v}v$ を与え，後者は

$b\dot{v}+y\dot{v}+zv=y+xz$ を与えるであろう。そして，きちんと整理されたこれらの方程式から，$\dot{v}$ および z の値が決定されるであろう。しかし，さらに $\dot{z}$ の値が決定されるためには，最後の方程式から，$\dfrac{-yz}{v}$ が代入されることによって，流率 $\dot{v}$ を消去すれば，流量を含みそれらの流率を全く含まない，(問題 1 の解が要求するものとしての) 方程式 $-\dfrac{byz}{v}-\dfrac{yyz}{v}+zv=y+xz$ が現れるであろう。それゆえ，問題 1 により $-\dfrac{bz^2}{v}-\dfrac{by\dot{z}}{v}+\dfrac{byz\dot{v}}{vv}-\dfrac{2yzz}{v}-\dfrac{yy\dot{z}}{v}+\dfrac{yyz\dot{v}}{vv}+\dot{z}v+z\dot{v}=2z+x\dot{z}$ となるであろう。この方程式は，適切に還元され整理されると，$\dot{z}$ を与えるであろう。さらに，z および $\dot{z}$ が見出されたら，$\dfrac{1+zz}{\dot{z}}=CG$ とせよ。

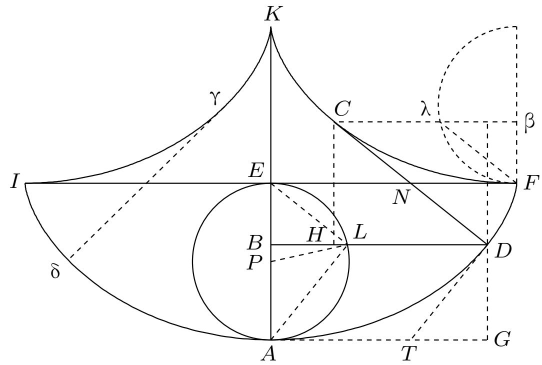
もし最後から 2 つ目の方程式を z で割るならば，それからその後，問題 1 により，$\dot{z}$ を定めるために前のものより単純な方程式 $-\dfrac{bz}{v}+\dfrac{by\dot{v}}{vv}-\dfrac{2yz}{v}+\dfrac{yy\dot{v}}{vv}+\dot{v}=2-\dfrac{y\dot{z}}{zz}$ が得られるであろう。

確かに，私は無理方程式における操作の方法が知られるようにこの例を与えた。しかし，コンコイドの曲率は，次のように，より簡単に見出すことができる。方程式 $\overline{b+y}\sqrt{cc-yy}=xy$ の両辺を平方し，yy で割ると，$\dfrac{bbcc}{yy}+\dfrac{2bcc}{y}\begin{matrix}+cc\\-bb\end{matrix}-2by-y^2=xx$ が生じる。それゆえ，問題 1 により，$-\dfrac{2b^2c^2z}{y^3}-\dfrac{2bc^2z}{y^2}-2bz-2yz=2x$，あるいは $-\dfrac{b^2c^2}{y^3}-\dfrac{bc^2}{y^2}-b-y=\dfrac{x}{z}$ が生じる。そして，これから再び問題 1 により $\dfrac{3b^2c^2z}{y^4}+\dfrac{2bc^2z}{y^3}-z=\dfrac{1}{z}-\dfrac{x\dot{z}}{zz}$ が生じる。[このように] 生成された前者から z が決定され，後者から $\dot{z}$ が決定される。

> 方程式の中に無理量が含まれる場合の，ニュートンの基本方針は，その無理量を他の文字に置き換えることのようである。ただし，最初に平方して根号を除去してもよいという注意を忘れてはいない。
>
> この例 $(b+y)\sqrt{c^2-y^2}=xy$ では ……
>
> $$\sqrt{c^2-y^2}=v\to c^2-y^2=v^2\to -2y\dot{y}=2v\dot{v}\to \dot{v}=-\frac{yz}{v}\ \cdots ①$$
>
> $$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$
>
> $$bv+yv=xy\to b\dot{v}+y\dot{v}+zv=y+xz\to -\frac{byz}{v}-\frac{y^2z}{v}+zv=y+xz\ \cdots ②$$
>
> ここで，②，①より，$z=\dfrac{-yv}{by+y^2-v^2+xv}$，$\dot{v}=\dfrac{y^2}{by+y^2-v^2+xv}$ となる。
>
> さらに，
>
> $$② \xrightarrow{z\text{ で割る}} -\frac{by}{v}-\frac{y^2}{v}+v=\frac{y}{z}+x\longrightarrow -\frac{bz}{v}+\frac{by\dot{v}}{v^2}-\frac{2yz}{v}+\frac{y^2\dot{v}}{v^2}+\dot{v}=2-\frac{y\dot{z}}{z^2}$$
>
> であるから，$\dot{z}=\dfrac{3yz^3v^2+by^2z^3+y^3z^3+bz^3v^2+2z^2v^3}{yv^3}$ が得られる。

例4　ADF を，その直径が AE である，円 ALE に適合した［母円とする］サイクロイドとし，縦線 BD が L で円を横切るとして，$AE=a$，$AB=x$，$BD=y$，$BL=v$ および 弧 $AL=t$ [，さらにこの弧の流率を $\dot{t}$] としよう。そして，はじめに，半径 PL が引かれると，底線 AB の流率は弧 AL の流率に対して BL が PL に対する，すなわち，$\dot{x}$あるいは $1:\dot{t}=v:\dfrac{1}{2}a$ であろう。そして，それゆえ，$\dfrac{a}{2v}=\dot{t}$ である。

さらに，円の性質から，$ax-xx=vv$ であり，それゆえ，問題 1 により，$a-2x=2\dot{v}v$，あるいは $\dfrac{a-2x}{2v}=\dot{v}$ である。 449



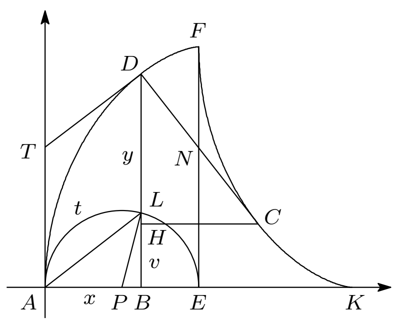
そのうえ，サイクロイドの性質から，$LD =$ 弧 AL，すなわち $v + t = y$ であり，それゆえ，問題 1 により，$\dot{v} + \dot{t} = z$ である。

最後に，流率 $\dot{v}$ および $\dot{t}$ の代わりにそれらの値が代入されると，$\dfrac{a-x}{v} = z$ が現れるであろう。それゆえ，問題 1 により，$\dfrac{-a\dot{v}}{vv} + \dfrac{x\dot{v}}{vv} - \dfrac{1}{v} = \dot{z}$ が導かれる。これらが見出されたら，$\dfrac{1+zz}{\dot{z}} = -DH$ として，［垂線］HC を立てよ。

サイクロイドとは「半径 r の円を x 軸に接して滑らずに転がすとき，円周上の定点の軌跡」をいう。広義には，円が直線上を滑らずに回転するとき，円に対して定位置をもつ点 (円周上になくてもよい) が描く曲線を指す。今日では，回転角 θ を媒介変数として，$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1-\cos\theta) \end{cases}$ と表される。［ニュートンの x，y とは逆であることに注意。］

近世に入って多くの数学者の興味を引いた曲線である。例えば，ロベルヴァル (Gilles Personne de Roberval : 1602–1675) はサイクロイド (の 1 つ分の弧) と軸とに囲まれる部分の面積は母円の面積の 3 倍であることを，1637 年頃に示している。また，パスカル (Blaise Pascal : 1623–1662) は面積や重心などを研究しているし，レン (Christopher Wren : 1632–1723) は弧長を決定している。

また，17 世紀になって，「物体が重力の作用で，1 つの点から初速度 0 で出発して，他の点へ到達するのに要する時間を最短とするような道があるか」という問題が取り上げられるようになった。この問題に関連して，固定された 2 点 A，B を結ぶ曲線に沿って，質点が重力の影響下で転がり落ちるのに要する時間を最小にするような曲線を最速降下線と呼ぶようになる。A を原点，B の座標を (x_1, y_1) として，最速降下線の方程式を $y = f(x)$ とすると，問題は，$\displaystyle\int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}\,dx$ (g は重力加速度) を最小とする $y = f(x)$ を求めることになる。この解がサイクロイドであることがベルヌーイ (Johann Bernoullis : 1667–1748)，ニュートン，ライプニッツらによって示された。



この「例 4」におけるサイクロイドの曲率半径の決定を見てみよう。

左の図で，$AE = a$ (つまり，円の半径は $\dfrac{1}{2}a$) であり，$AB = x$，$BD = y$，$BL = v$，弧 $AL = t$ とする。

まず，AB の流率 : 弧 AL の流率 $= BL : PL$ であることから，$\dot{x} : \dot{t} = v : \dfrac{1}{2}a$ となり，$\dot{t} = \dfrac{a\dot{x}}{2v}$ となる。

次に，円 ALE の方程式は $ax - x^2 = v^2$ となるから，$a\dot{x} - 2\dot{x}x = 2\dot{v}v$ すなわち $\dot{v} = \dfrac{a\dot{x} - 2\dot{x}x}{2v}$ となる。

さらに，サイクロイドの性質，弧 $AL = LD$，から，$y = v + t$ となり，$\dot{y} = \dot{v} + \dot{t}$ が得られる。

従って，$\dot{y} = \dfrac{a\dot{x}}{2v} + \dfrac{a\dot{x} - 2\dot{x}x}{2v} = \dfrac{2a\dot{x} - 2\dot{x}x}{2v} = \dfrac{a\dot{x} - \dot{x}x}{v}$ となる。

ここで，$\dot{x} = 1$，$\dot{y} = z$ とすると，$\dot{t} = \dfrac{a}{2v}$，$\dot{v} = \dfrac{a-2x}{2v}$，$z = \dfrac{a-x}{v}$ となる。

この第 3 式から流率を求めると，$\dot{z} = \dfrac{-v-(a-x)l}{v^2}$ が得られるが，ここで $v^2 = ax - x^2$ を用いると，曲率半径 $\rho = \dfrac{2\sqrt{v^2+(a-x)^2}^3}{|-2v^2-(a-x)(a-2x)|} = \dfrac{2\sqrt{a^2-ax}^3}{|ax-a^2|} = 2\sqrt{a^2-ax}$ となる。

なお，ニュートンのここでの結果から分かるように，サイクロイドの縮閉線は等大のサイクロイドである。

系　その他のことはこれから求められる。

I　$DH = 2BL$ および $CH = 2BE$，あるいは EF は曲率半径 CD を N で 2 等分する。そして，これは，いま得られた $\dot{z}$ および z の値を等式 $\dfrac{1+zz}{\dot{z}} = DH$ に代入することによって，そして，その結果を適切に還元することによって，明らかであろう。

II　従って，［ADF の］曲率中心が無際限に動き回［ってでき］る曲線 FCK は，I および F におけるその頂点がこの［はじめのサイクロイドの］先端 (cuspis) に隣接する［一致する］，別の同形の［合同な］サイクロイドである。なぜならば，ALE に等しく同じようにおかれた，円 $F\lambda$ が描かれ，$C\beta$ が EF に平行に，λ で円と交わるように引かれると，弧 $F\lambda$ (= 弧 $EL = NF$) = $C\lambda$ となるであろうからである。

III　サイクロイド IAF と直角である［直線］CD は C でサイクロイド IKF に接する。

IV　それゆえ，逆にされたサイクロイドにおいて，もし上の方のサイクロイドの尖点 (cuspis) K において距離［長さ］KA あるいは $2EA$ の糸によって吊るされた重りが支えられ，その重りのために波打っている［重りが振動しているとき］糸はサイクロイドの部分 KF および KI に近づくのであれば，それゆえ，いずれの側においても，それは，真っ直ぐに伸ばされるのではなく，垂直の位置から離れる間に，最も下の接触点の下でまだ真っ直ぐに留まっている部分 CD によって少しずつ上の方から曲げられるように，抵抗し強要する。それゆえ，糸 CD はつねにそれに垂直であるから，重りは下の方のサイクロイドの周上を動くであろう。

V　それゆえ，糸の全長 KA はサイクロイド KCF の周に等しく，その部分 CD はその周の部 450
分 CF に等しい。

VI　糸は，振動することによって，可動な点 C の周りを，それがあたかも中心であるかのように，回転するから，線 CD 全体が連続的に通過することによ［ってでき］る表面は直線 IF より上の部分 CN が同時に通過することによ［ってでき］る表面に対して，CD^2 が CN^2 に対する，すなわち 4 が 1 に対する，であろう。それゆえ，面積 CFN は面積 CFD の 4 分の 1 で，面積 $KCNE$ は面積 $KCDA$ の 4 分の 1 である。

VII　また，弦 EL は CN に等しく平行であり，CN が可動な中心 C の回りを回転するのと同様に不動の中心 E の回りを回転するから，それらが同時に通過することによる表面，すなわち面積 CFN および円の切片 EL，は等しくなるであろう。そして，このことから面積 NFD はその切片の 3 倍であり，全面積 $EADF$ は半円の面積の 3 倍であろう。

VIII　最後に，重り D が点 F に到達するとき，糸全体はサイクロイドの周 KCF の周りに曲げられ［巻きつけられ］，曲率半径 CD は零となるであろう。それゆえ，サイクロイド IAF はその先端 F においてどんな円よりも大きく曲げられ，伸ばされた接線 βF とともに，直線とともに［接触角を］つくることができる円よりも無限に大きい，接触角をつくるであろう。

さらにまた，サイクロイドによるものより無限に大きい接触角がある。そして，次いで，これ

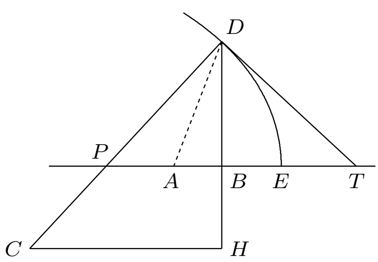
らより無限に大きい他のものがあり，それが無限に続くが，それにもかかわらず［それらのうちの］最大のものでも直線によるものより無限に小さい。それゆえ，$xx=ay$，$x^3=by^2$，$x^4=cy^3$，$x^5=dy^4$，$\cdots$ は曲線の系列を表し，それらに［ついて］後続するそれぞれのものは底線とともに接触角をつくり，それはその前のものが同じ底線とともにつくることができるものより無限に大きい。そして，はじめの $xx=ay$ がつくる接触角は円によるものと同じ種属 (genus) であり，2 番目の $x^3=by^2$ がつくるものはサイクロイドによるものと同じ種属である。そして，後続の［曲線がつくる］角は絶えずその前の［曲線がつくる］角より無限に大きいけれども，それらは決して直線による角の大きさに達することはできない。

同様に，$x=y$，$x^2=ay$，$x^3=b^2y$，$x^4=c^3y$，$\cdots$ は線の系列を表し，それらに［ついて］後続するものは頂点において底線とともに角をつくり，それは絶えずその前の［ものが底線とともにつくる］角より無限に小さい。さらに，これらの種属の任意の 2 つの接触角の間に，互いに無限に大きい，他の角の中間の種属を無限につくり出すことができるであろう。

451 しかし，ある種属の曲線は，それがどんなに大きくとも，接触点の近くにおいて接線および望むだけ小さい他の種属の曲線の間におかれることはできないから，あるいは，その［種属の］接触角は他の［種属の］接触角を，その全体の部分として，必然的に含むから，ある種属の接触角は他［の種属の接触角］より無限に大きいことが知られている。それゆえ，曲線 $x^4=cy^3$ が底線とともにつくる接触角は曲線 $x^3=by^2$ の接触角を必然的に含む。しかし，前述のサイクロイドの角およびこの曲線 $x^3=by^2$［の角］について起きるように，互いに他のものより大きくすることができる角は同じ種属のものである。

これらのことから，曲線はいずれかの点において任意の円より無限に真っ直ぐにあるいは無限に大きく曲げられ，それにもかかわらず，そのために曲線の形を失っていないということは明らかである。しかし，これはついでである。

例5 ED を，中心を A として描かれた円に関係する円積線とし，DB を AE に垂直に下ろし，$AB=x$，$BD=y$ および $AE=1$ としよう。すると，上 (第 6 章) のように，$\dot{y}x-\dot{y}y^2-\dot{y}x^2=\dot{x}y$ であろう。$\dot{x}$ の代わりに 1 と，$\dot{y}$ の代わりに z と書かれると，この方程式は $zx-zy^2-zx^2=y$ となり，これから問題 1 により $\dot{z}x-\dot{z}y^2-\dot{z}x^2+z\dot{x}-2z\dot{x}x-2z\dot{y}y=\dot{y}$ が導かれる。すると，還元して，再び $\dot{x}$ の代わりに 1 と，$\dot{y}$ の代わりに z と書かれると，$\dot{z}=\dfrac{2z^2y+2zx}{x-x^2-y^2}$ となるであろう。さらに，z および $\dot{z}$ が見出されたら，$\dfrac{1+zz}{\dot{z}}=DH$ として，上のように，HC を引け。



もし気のきいた作図を望むならば，非常に短いものを見出すあろう。すなわち，DP を DT に垂直に，AT と P で交わるように引き，$2AP:AE=PT:CH$ とせよ。

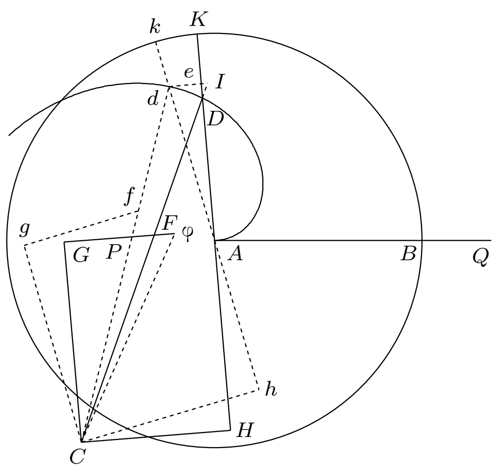
確かに，$z=\dfrac{y}{x-x^2-y^2}=\dfrac{BD}{-BT}$，および $zy=\dfrac{BD^2}{-BT}=-BP$，そして，$zy+x=-AP$，および $\dfrac{2z}{x-x^2-y^2}$ in $zy+x=\dfrac{2BD}{AE\times BT^2}$ in $-AP=\dot{z}$ である。さらに，$1+zz=\dfrac{PT}{BT}$ $\left(=1+\dfrac{BD^2}{BT^2}=\dfrac{DT^2}{BT^2}\text{ であるから}\right)$ であり，それゆえ $\dfrac{1+zz}{\dot{z}}=\dfrac{PT\times AE\times BT}{-2BD\times AP}=DH$ である。最後に，$BT:BD=DH:CH=\dfrac{PT\times AE}{-2AP}$ で

ある。ここで，負の値は CH を DH から AB に向かう方向にとらなくてはならないことを示しているだけである。

同じ方法で，螺線や他の任意の曲線の曲率が非常に短い計算で決定されるであろう。

さらに，曲線が何らかの仕方で直線に関係づけられるときに，先の還元をせずに，曲率を決定するのに，今はこの方法を，接線を決定するのに行われたのと同様に，適用させることができた。し 452
かし，すべての幾何学的な曲線は，そして機械的な曲線 (後で示すように，特に定義するための条件が無限方程式に還元されるとき) も，直角をなす縦線に関連づけることができるから，このことを十分になし遂げたと私は考える。より多くを望む人は，特にもし，私が，このことの例証に，余分なこととして，螺線についての方法を加えたならば，自分自身の努力によって困難なしにそれを与えるであろう。

BK を円，A をその中心，B を円周上に与えられた点，ADd を螺線，DC をその法線，そして C を点 D における曲率中心としよう。そして，直線 ADK を，CG に平行で等しく，また，垂線 GF が CD と F で交わるように引いて，AB あるいは $AK = 1 = CG$，$BK = x$，$AD = y$ そして $GF = z$ とする。さらに，点 D は螺線上の無限に小さい空間 Dd を動かされ，同様に，d を通って半径 Ak が引かれ，そして，Cg がそれ［Ak］に平行で等しく，その垂線 gf が Cd と f で交わるものと仮定せよ。さらに，［Cd が］GF と P で交わるものとする。GF を $G\varphi = gf$ となるように φ まで伸ばし，AK に対して垂線 de を下ろし，それを CD と I で交わるまで伸ばす。すると，［弧］BK，［直線］AD および GF の同時のモーメントは［それぞれ］Kk，De および［$F\varphi = gf - GF$ ゆえ］$F\varphi$ であろうから，それらを $\dot{x} \times o$，$\dot{y} \times o$ および $\dot{z} \times o$ とすることができる。



いま，上のように，$\dot{x} = 1$ と仮定すると，$AK : Ae\,(AD) = kK : de\,(= oy)$ である。同様に，$CG : GF = de : eD\,(= oyz)$ であり，それゆえ $yz = \dot{y}$ である。さらに，$CG : CF = de : dD\,(= oy \times CF) = dD : dI\,(= oy \times CF^2)$ である。そのうえ，角 $PC\varphi\,(=$ 角 $GCg) =$ 角 DAd，および角 $CP\varphi\,(=$ 角 $CdI =$ 角 $edD +$ 直角$) =$ 角 ADd であるから，三角形 $CP\varphi$ および ADd は相似であり，それゆえ $AD : Dd = CP\,(CF) : P\varphi\,(= o \times CF^2)$ であり，そこから $F\varphi$ を取り去れば，$PF = o \times CF^2 - o \times \dot{z}$ が残るであろう。最後に，AD に垂線 CH を下ろすと，$PF : dI = CG : eH$ あるいは $DH = \dfrac{y \times CF^2}{CF^2 - \dot{z}}$，あるいは，$CF^2$ の代わりに $1 + zz$ が代入されると，$DH = \dfrac{y + yzz}{1 + zz - \dot{z}}$ であろう。

そして，この種の計算において，それらの比が，無限小量を除けば，同等の比と異ならない (AD 453
および Ae のような) 量を等しいと見なすことに注意せよ。

さらに，これらのことから次のような規則が現れる。x および y の間の関係が任意の方程式によって定められるとき，問題 1 によって流率 $\dot{x}$ および $\dot{y}$ の関係を求め，$\dot{x}$ の代わりに 1 を，$\dot{y}$ の代わりに yz を代入せよ。次いで，現れる方程式からもう一度問題 1 により $\dot{x}$，$\dot{y}$ および $\dot{z}$ の間の関係を求め，再び $\dot{x}$ の代わりに 1 を代入せよ。適切な還元によって，前者は $\dot{y}$ および z を与え，後者

は $\dot{z}$ を与えるであろう。これらが知られたら，$\dfrac{y+yzz}{1+zz-\dot{z}}=DH$ とし，垂線 HC を前に引かれた螺線の法線 DC と C で交わるように立てると，C は曲率中心であろう。あるいは，同じことになるが，$CH:HD=z:1$ として，CD を引け。

例1　もしアルキメデスの螺線の方程式 $ax=y$ が与えられるならば，問題 1 により $a\dot{x}=\dot{y}$ あるいは ($\dot{x}$ の代わりに 1 と，$\dot{y}$ の代わりに yz と書かれると) $a=yz$ であろう。そして，これからもう一度問題 1 により $0=\dot{y}z+y\dot{z}$ であろう。それゆえ，螺線の任意の点 D，それゆえ AD の長さあるいは y，が与えられると，$z\left(=\dfrac{a}{y}\right)$ および $\dot{z}\left(=-\dfrac{\dot{y}z}{y}\text{あるいは}=\dfrac{-az}{y}\right)$ が与えられるであろう。これらが知られたら，$1+zz-\dot{z}:1+zz=DA\,(y):DH$，および，$1:z=DH:CH$ とせよ。

このことから，次のような作図が容易に導かれる。AB を $AB:$弧 $BK=$弧 $BK:BQ$ となるように Q まで延長し，$AB+AQ:AQ=DA:DH=a:HC$ とせよ。

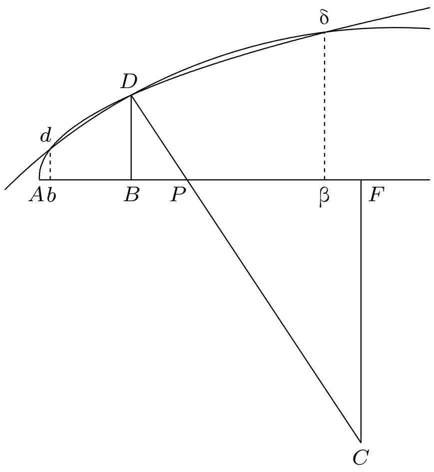
例2　もし $ax^2=y^3$ が BK および AD の間の関係を定めるならば，(問題 1 により) $2a\dot{x}x=3\dot{y}y^2$，あるいは $2ax=3zy^3$ を得るであろう。そして，これから再び $2a\dot{x}=3\dot{z}y^3+9z\dot{y}y^2$ を得るであろう。それゆえ，$z=\dfrac{2ax}{3y^3}$，および $\dot{z}=\dfrac{2a-9zzy^3}{3y^3}$ である。これらが知られたら，$1+zz-\dot{z}:1+zz=DA:DH$ とせよ。あるいは，操作をちきんと行って，$9xx+10:9xx+4=DA:DH$ とせよ。

例3　同様に，もし $ax^2-bxy=y^3$ が BK の AD に対する関係を定めるならば，$\dfrac{2ax-by}{bxy+3y^3}=z$，および $\dfrac{2a-2bzy-bz^2xy-9z^2y^3}{bxy+3y^3}=\dot{z}$ が生じるであろう。これらから DH が，それゆえ点 C が，前のように，決定される。

そして，それゆえ，あなたは任意の他の螺線の曲率を面倒なことなく決定するであろう。そして，それどころか，それらを例として，望むような任意の種属の曲線に対する規則を考え出すことができる［であろう］。

454　ついに私は問題［の解法］を仕上げた。しかし，私が用いた方法は普通の操作の方法とはかなり異なっているし，問題自体は幾何学者の下で活発に考察されているものの中には数えられないから，私は，得られた解の説明や立証において，より明白であり，接線を引く普通の方法により密接に関係する，別の解法に触れることを煩わしく感じることはないであろう。すなわち，もし円が，いくつかの点で任意の曲線を横切るように，任意の中心と半径で描かれると仮定され，そして，2 つの交点が一致するまで，その円が縮められるかあるいは広げられるかするならば，それはちょうどそこで曲線に接するであろう。さらに，もし，第 3 の交点がその接触点で前者と一致するまで，その中心がその接触点に近づけられるか，それから離されるかすると仮定されるならば，それ［その円］はその接触点においてその曲線と等しく曲がっていることになるであろう。私が上で曲率中心の 5 つの性質の最後において注意したように，私が述べたそれぞれの問題に従って異なる方法でやり遂げることができるであろう。

それゆえ，中心 C および半径 CD として，点 d，D および δ で曲線を横切る，円が描かれるとしよう。そして，底線 AB に対して垂線 db，DB，$\delta\beta$ および CF が下ろされ，$AB=x$，$BD=y$，$AF=v$，$FC=t$ そして $DC=s$ とすると，$BF=v-x$，および $DB+FC=y+t$ であろう。それらの平方の和は DC の平方に等しい。すなわち，$v^2-2vx+x^2+y^2+2ty+t^2=s^2$ である。これは，もし望むならば，$v^2+t^2-ss=$ 任意の記号 q^2 と仮定されることによって短くすることが



でき，$x^2-2vx+y^2+2ty+q^2=0$ となるであろう。一方，t，v および q^2 が見出された後で，もし s を知りたいと思うのであれば，$=\sqrt{v^2+t^2-q^2}$ とせよ。

いま，曲線を定めるために任意の方程式が提示されるとして，その湾曲の量を見出さなければならない。その［方程式の］助けによって量 x あるいは y のいずれかを消去すると，それらの根 (もし x を消去すれば db，DB，δβ など，あるいはもし y を消去すれば Ab，AB，Aβ など) が交点 (d，D，δ など) に関するものである方程式が現れるであろう。そして，それゆえ，それらの 3 つが等しくなるとき，円と曲線は接するであろうし，接触点において曲線と同じ曲率であろう。しかし，それらの方程式が，デカルトが示したように，3 つの等根をもつ同じ次元の別の補助方程式と同一視されるとき，ある 455
いは，より迅速には，その項に 2 度算術数列［等差数列］が掛けられるとき，それらは等しくなるであろう。

例　$ax=y^2$ を放物線の方程式とすると，x が消去される (すなわち，上の方程式［$x^2-2vx+y^2+2ty+q^2=0$］においてその値 $\dfrac{yy}{a}$ が代入される) と，その 3 つの根 y が等しくなるはずである，$\dfrac{y^4}{a^2}-\dfrac{2v}{a}\,y^2+2ty+q^2=0$ が現れるであろう。そして，結局，ここに見られるように，その項に算術数列を 2 度掛けると，$\dfrac{12y^4}{aa}-\dfrac{4v}{a}\,y^2+2y^2=0$，あるいは $v=\dfrac{3y^2}{a}+\dfrac{1}{2}\,a$ となるであろう。そこから，上のように，$BF=2x+\dfrac{1}{2}\,a$ を得るのは容易である。

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{y^4}{a^2} & -\dfrac{2v}{a}\,y^2 & +\,2ty & +\,q^2 = 0 \\
 & +\,y^2 & & \\
4 & 2 & 1 & 0 \\
3 & 1 & 0 & -1 \\
\dfrac{12y^4}{aa} & -\dfrac{4v}{a}\,y^2 & +\,2y^2 & = 0
\end{array}$$

そのため，放物線の任意の点 D が与えられたら，法線 DP を引き，軸上で $PF=2AB$ として，垂線 FC を DP と C で交わるように立てれば，点 C は求める曲率中心であろう。

楕円や双曲線についても同様にやり遂げることができるが，計算はとても煩わしく，他の曲線については非常に不快なものである。

第 8 章
関連するいくつかの問題について

これらの問題の解法から，別のいくつかの問題の解法 (confectio) が見つけ出される。それは次のようなものである。

I　与えられた曲率をもつ［曲］線上の点を見出すこと。

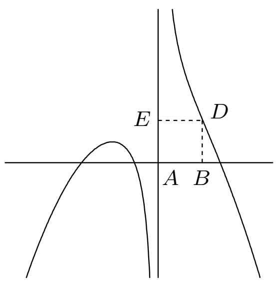
それゆえ，放物線 $ax=yy$ において，もし曲率半径が与えられた長さ f である点が問われるな

らば，前のように見出された，曲率中心から半径が $\dfrac{a+4x}{2a}\sqrt{aa+4ax}$ であると定まるであろうから，これを f に等しいとおけ。すると，還元が行われれば，$x=-\dfrac{1}{4}a+\sqrt[3]{\dfrac{1}{16}aff}$ が出てくるであろう。

II　直線状の点を見出すこと。

私が直線状の点 (punctum rectitudinis) と呼ぶのは，そこで湾曲の半径［曲率半径］が無限に大きくなる，あるいは［曲率］中心が無限に遠くなるような点で，放物線 $ax^3=y^4$ の頂点のような点である。そして，これは，たいてい，上で決定法を示した，逆の湾曲の境界と同じである。しかし，この問題から決して洗練されていなくはない別のものがあふれ出る。すなわち，曲率半径が長
456 ければ長いほど角 DCd (91 ページの図) は，そして同時にモーメント δf は，小さくなり，それゆえ，量 z の流率はそれとともに減少させられ，それゆえ，半径が無限になることによって，それは完全に消滅する。ゆえに，$\dot{z}$ を求め，それを零とおけ。

例えば，その助けによってデカルトが 6 次元の方程式を構成した，第 2 類の放物線において逆の湾曲の境界を決定しなければならないならば，この曲線の方程式は $x^3-bx^2-cdx+bcd+dxy=0$ である。すると，それゆえ，問題 1 により $3\dot{x}x^2-2b\dot{x}x-cd\dot{x}+d\dot{x}y+dx\dot{y}=0$ が出る。これは，$\dot{x}$ の代わりに 1 と，$\dot{y}$ の代わりに z と書かれると，$3x^2-2bx-cd+dy+dxz=0$ となる。それゆえ，再び，問題 1 により $6\dot{x}x-2b\dot{x}+d\dot{y}+d\dot{x}z+dx\dot{z}=0$ がでる。そして，もう一度 $\dot{x}$ の代わりに 1 と，$\dot{y}$ の代わりに z と，そして $\dot{z}$ の代わりに 0 と書かれると，これは $6x-2b+2dz=0$ となる。いま，z を消去し，方程式 $3x^2-2bx-cd+dy+dxz=0$ において dz の代わりにその値 $b-3x$ が書かれると，$-bx-cd+dy=0$，あるいは $y=c+\dfrac{b}{d}x$ が生じるであろう。



それため，点 A において垂線 $AE=c-\sqrt[3]{\dfrac{b^4c}{d^2}}$ を立てよ。そして，E を通って AB に平行に ED を引くと，放物線の凸と凹の部分を分離する，点 D は逆の湾曲の共通の境界であろう。

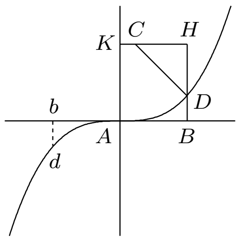
同様の方法で，逆の湾曲の部分の間に横たわらない，他の直線状の点を決定することができる。例えば，もし $x^4-4ax^3+6a^2x^2-b^3y=0$ が曲線を定めるならば，そこから問題 1 によりはじめに $4x^3-12ax^2+12a^2x-b^3z=0$ が導かれるであろう。そして，これからもう一度 $12x^2-24ax+12a^2-b^3\dot{z}=0$ が導かれるであろう。ここで，$\dot{z}=0$ と仮定すると，還元が行われたら，$x=a$ が現れるであろう。そのため，$AB=a$ とすれば，垂直に立てられた BD は求める直線状の点において曲線と出会うであろう。

III　湾曲が無限である点を見出すこと。

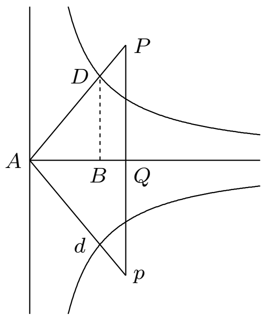
曲率半径を求め，それを零と仮定せよ。それゆえ，方程式 $x^3=ay^2$ によって定められた第 2 類の放物線については，半径は $CD=\dfrac{4a+9x}{6a}\sqrt{4ax+9x^2}$ であろうし，これは $x=0$ であるとき，零になる。

IV　湾曲が極大あるいは極小である点を見出すこと。

このような種類の点において，曲率半径は極大あるいは極小のいずれかになる。それゆえ，時間のその瞬間において，曲率中心は接触点の方へも反対の方へも動かされず，完全に休止している。
457 それゆえ，半径 CD の流率，あるいは，より迅速には，直線 BH あるいは AK のいずれかの流率，を求め，それが零［に等しい］と仮定されればよい。



例えば，もし第 2 類の放物線 $x^3 = a^2y$ についての問題が提示されるならば，曲率中心が決定されることについて，はじめに $DH = \dfrac{a^2+9xy}{6x}$ を見出すと，それゆえ $BH = \dfrac{a^2+15xy}{6x}$ である。さらに，$BH = v$ とすれば，$\dfrac{a^2}{6x} + \dfrac{5}{2}\,y = v$ であろうし，これから問題 1 により $-\dfrac{a^2\dot{x}}{6x^2} + \dfrac{5}{2}\,\dot{y} = \dot{v}$ が導かれる。しかし，いま BH の流率 $\dot{v}$ を零と仮定し，さらに，仮定から $x^3 = a^2y$ であるから，問題 1 により $3\dot{x}x^2 = a^2\dot{y}$ であり，$\dot{x} = 1$ とおいて，$\dot{y}$ の代わりに $\dfrac{3x^2}{a^2}$ を代入すると，$45x^4 = a^4$ が現れるであろう。ゆえに，$AB = \pm\sqrt[4]{\dfrac{a^4}{45}}$ とすると，垂直に立てられた BD は極大の曲率の点で曲線と出会うであろう。あるいは，同じことだが，$AB : BD = 3\sqrt{5} : 1$ とせよ。



同じ仕方で，方程式 $xy^2 = a^3$ によって表された第 2 類の双曲線は，底線上で $AQ = 1$ と仮定され，［垂直に］$QP = \sqrt{5}$ が立てられ，他方の側にそれと等しい Qp が立てられて，曲線と求める点 D および d で出会うような AP および Ap を引くことによって決定される，点 D，d において最も湾曲しているであろう。

V　曲率中心の位置を決定すること，あるいはその中心が絶えず動き回る曲線［縮閉線］を描くこと。

サイクロイドの曲率中心は別のサイクロイドの上を動き回ることは示されている。

そして，放物線の［曲率］中心は，計算をすれば容易に分かるように，方程式 $axx = y^3$ で定められる，別の第 2 類の放物線の上を動き回る。

VI　光線が任意の曲線に注ぐとき，その焦点，あるいはその上の任意の点の回りで屈折された光線の収束点 (concursum radiorum) を見出すこと。

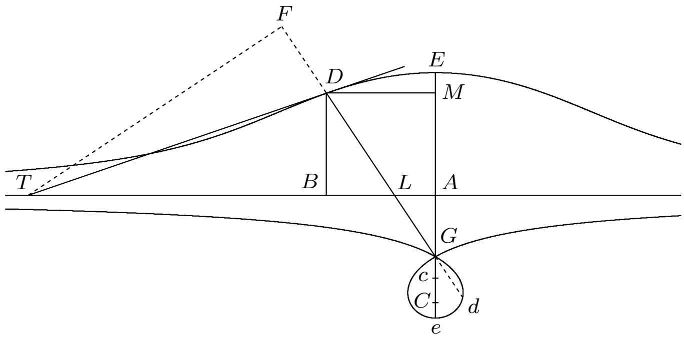
曲線上のその点における曲率を求め，その曲率中心と曲率半径とで円を描け。それから，その点の回りで，この円によって屈折された光線の収束点を求めよ。なぜならば，それは提示された曲線によって屈折された光線の収束点と同じだからである。

VII　これらに，曲線がその底線を垂直に横切るとき，曲線の頂点における曲率の特別な発見法 458
を加えることができる。すなわち，底線と交わっている，曲線の法線がそれを最後に横切る点はその曲率中心である。

そのため，底線 x および［それと］直角をなす縦線 y の間の関係が，それゆえ (問題 1 により) $\dot{x}$ および $\dot{y}$ の間の関係があるとき，$\dot{y}y$ の値は，もしそこにおける $\dot{x}$ の代わりに 1 と書き，$y = 0$ と仮定するならば，曲率半径であろう。

それゆえ，楕円 $ax - \dfrac{a}{b}xx = yy$ において，$\dfrac{a\dot{x}}{2} - \dfrac{a\dot{x}x}{b} = \dot{y}y$ であり，もし $y = 0$ それゆえ $x = 0$ と仮定し，$\dot{x}$ の代わりに 1 と書くならば，$\dot{y}y$ の値は曲率半径 $\dfrac{1}{2}\,a$ となるであろう。そして，それゆえ，双曲線および放物線の頂点において，曲率半径は直立辺の半分であろう。

そして，それゆえ，方程式 $\dfrac{b^2c^2}{xx} + \dfrac{2bcc}{x} \begin{matrix}+cc\\-bb\end{matrix} - 2bx - xx = yy$ によって定められるコンコイドについて，問題 1 の助けによって $\dot{y}y$ の値は $-\dfrac{b^2c^2}{x^3} - \dfrac{bc^2}{x^2} - b - x$ と見出されるであろう。



ここで $y=0$，それゆえ $x=c$ あるいは $-c$ と仮定されると，曲率半径 $-\dfrac{bb}{c}-2b-c$，あるいは $\dfrac{bb}{c}-2b+c$ が現れるであろう。ゆえに，$AE:EG=EG:EC$ (80 ページの図を見よ。［ここでは再掲した。］)，および $Ae:eG=eG:ec$ とすれば，コンコイドの共役な頂点 (vertex conjugatarum) E および e における曲率中心 C および c を得る。

問題 6

任意の曲線の与えられた点における湾曲の質を決定すること。

湾曲の**質** (qualitas curvaturæ) を，私は，曲線の異なる部分に沿って進むときに，より多くあるいはより少なく不均等である，あるいは，より大きくあるいはより小さく変化させられる，ような［曲線の］形状 (forma) であると理解する。

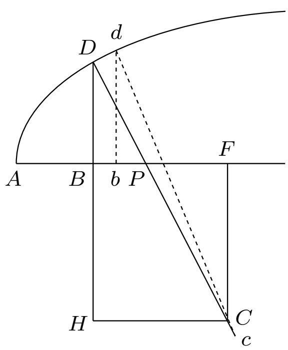
それゆえ，円の湾曲の質はどのようなものかと尋ねられたら，それは均等である，あるいは不変であると答えることができるし，中心 A の周りを一様に回転している直線 AK 上を A から加速する速度 AD で進む，すなわち，直線 AD が与えられた点 K によって描かれた弧 BK に対して数がその対数に対する比をもつ，ような点 D の運動によって描かれる螺線［87 ページの図を見よ。ただし，『数学論文集』(第 3 巻 p.187) は多少異なる図を載せている。］の湾曲の質はどのようなものかと問われ
459 たら，それは一様に変化する，あるいは均等に不均等であると答えることができる。そして，それゆえ，その他の曲線は，その各々の点において，その湾曲の変化に応じて不均等に不均等である (aliqualis［aliquanto æquabilis］) と名づけることができる。

それゆえ，曲線上の任意の点の周りにおいて，湾曲の不均等性 (inæquabilitas) あるいは変化が探究される。このことについて，［次のことが］注意されなければならない。

I　相似な曲線の相似な位置にある点において，湾曲の不均等性あるいは変化は同等であること。

II　そして，それらの点における曲率半径のモーメントは曲線の同時のモーメントに比例し，そして，流率は流率に［比例すること］。

III　それゆえ，それらの流率が比例しないとき，それらの湾曲の不均等性は異なっていること。



すなわち，曲率半径の流率の曲線の流率に対する比が大きいところでは不均等性は大きくなるであろう。それゆえ，その流率の比を湾曲の不均等性あるいは変化の指標と，不当にではなく，いうことができる。

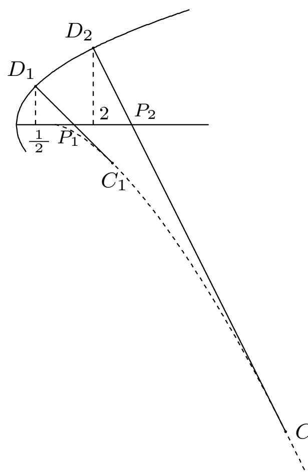
何らかの曲線 AD 上で無限に小さい距離にある点 D および d において曲率半径を DC および dc とすると，Dd は曲線のモーメントであるから，Cc は曲率半径の同時のモーメントであろうし，$\dfrac{Cc}{Dd}$ は湾曲の不均等性の指標であろう。すなわち，その不均等性［の大きさ］はその比 $\dfrac{Cc}{Dd}$ の量が示す大きさであるといえるであろう。あるいは，湾曲は円の湾曲と異なる大きさであるといえるであろう。

いま, DC と P で交わる任意の線 AB に対して, 垂直な縦線 DB および db が下ろされ, $AB=x$, $BD=y$, $DP=t$, $DC=v$ とすると, $Bb=\dot{x}\times o$ である。そして, $Cc=\dot{v}\times o$ であろう。また, $BD:DP=Bb:Dd=\dfrac{t\dot{x}o}{y}$, そして $\dfrac{Cc}{Dd}=\dfrac{\dot{v}y}{t\dot{x}}$ であり, $\dot{x}=1$ と仮定されると $=\dfrac{\dot{v}y}{t}$ であろう。そのため, x および y の間の関係が何らかの方程式で定められたとき, そこから, 問題 4 および 5 に従って, 法線 DP あるいは t および曲率半径 v を見出し, 問題 1 によって, この半径の流率 $\dot{v}$ をも見出すと, 湾曲の不均等性の指標 $\dfrac{\dot{v}y}{t}$ が与えられるであろう。

ここでニュートンは, 曲率半径に関連して, 湾曲の度合いを表す「指標」を導入する。
すなわち, 曲線の (与えられた点 D からの) 弧長を $s\,(=Dd)$ とし, その点での曲率半径を $v\,(=DC)$ とするとき, $\dfrac{dv}{ds}$ を湾曲の不均等性の指標と呼ぶ。
これは, 曲線上の点 $D\,(x,\ y)$ に対して, この点での法線が x 軸によって切り取られる長さを $DP=t$ とし, 曲率半径を $DC=v$ とするとき, $\dfrac{\dot{v}y}{t}$ (ただし, x の流率は $\dot{x}=1$ とする) としても同じである。次の「例 1」における実際の計算ではこちらの方が使われている。
$2x=y^2$ すなわち $y=\sqrt{2x}$ とすると, $y'=\dfrac{1}{\sqrt{2x}}$, $y''=-\dfrac{1}{\sqrt{2x}^3}$ であるから, $x>0$ について考えると,

$$\text{曲率半径 } v=\frac{\left\{1+(y')^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\frac{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2x}^3}}=\sqrt{2x+1}^3$$

となる。



よって, $x=\dfrac{1}{2}$ のとき $v=2\sqrt{2}$ で, $x=2$ のとき $v=5\sqrt{5}$ である。
また, $v'=3\sqrt{2x+1}$ であるから, $x=\dfrac{1}{2}$ なら $v'=3\sqrt{2}$ で, $x=2$ なら $v'=3\sqrt{5}$ である。
一方, 放物線の性質から $BP=1$ で, $DP=t=\sqrt{1+y^2}$ であり, $x=\dfrac{1}{2}$ のとき $y=1$ で $t=\sqrt{2}$ となり, $x=2$ のときは $y=2$ で $t=\sqrt{5}$ となる。
以上により, $x=\dfrac{1}{2}$ に対応する点 D_1 における湾曲の不均等性の指標は $\dfrac{v'y}{t}=\dfrac{3\sqrt{2}\times 1}{\sqrt{2}}=3$ であり, $x=2$ に対応する点 D_2 におけるそれは $\dfrac{v'y}{t}=\dfrac{3\sqrt{5}\times 2}{\sqrt{5}}=6$ ということになる。
ところで, 法線の傾きが $-\sqrt{2x}$ であることから, 曲率中心は $(3x+1,\ -2x\sqrt{2x})$ となることが分かる。従って, 放物線 $y=\sqrt{2x}$ の縮閉線は $y=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{9}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ となる (上の図の破線の曲線)。

さらには, $y=\sqrt{2ax}$ のときは, $y'=\dfrac{a}{\sqrt{2ax}}$, $y''=-\dfrac{a^2}{\sqrt{2ax}^3}$ であるから, 曲率半径は $v=\dfrac{\left(\sqrt{2ax+a^2}\right)^3}{a^2}$ である。
そして, $v'=\dfrac{3\sqrt{2ax+a^2}}{a}$ であるから, 指標は $\dfrac{v'y}{t}=\dfrac{3\sqrt{2ax+a^2}}{a}\times\sqrt{2ax}\div\sqrt{2ax+a^2}=\dfrac{3\sqrt{2ax}}{a}$ となる。
また, 曲率中心は $\left(3x+a,\ -\dfrac{2x\sqrt{2ax}}{a}\right)$ となるから, 縮閉線の方程式は $y^2=\dfrac{8}{27a}(x-a)^3$

ということになる。

ところで，オレーム (Nicole Oresme : 1325?–1382) は『質と運動の図形化』(*Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*) において，質のもつ内包量 (例えば，白さとか速さなど) や物体の運動についての理解・説明を容易にするためにそれらを図形で表すことを提案している。また，その図形はそれらの質や運動の比較にも使えることを述べている。彼のこの試みはグラフ表示の原初的形態とみなすことができる。
その第 20 章「曲がりぐあいの非均一性についての 1 つの表現法」で次のように述べている ([11] pp.488–490)。
「曲りぐあいを測るには 2 つの方法しかないと思われる。そしてその 1 つの方法は，曲りぐあいの大きさを 1 つの直線からの離れぐあい，つまり 1 つの直線からの距離でもって測るという方法である。すなわち曲がりぐあいを，直線と曲線から構成された角の量や，その接触角によって測定するという方法である。」
「非均一的な仕方での曲がりぐあいのいかなる内包量も，他の非均一的な仕方での曲がりぐあいの内包量に対し，…… 一般的に言って線分と線分のあいだに見出されうるいかなる比においても関係づけられないのである。…… いかなる曲がりぐあいも図形によって把握できないのである。…… すべての非均一な曲がりぐあいは，別の種類の他の質が非均一であるのとは異なる仕方で非均一である。つまりある珍しく，不思議な仕方で非均一なのである。」
また，第 21 章「曲りぐあいについての他の表現法」では次のように言う (同上 pp.490–492)。
「まず均一な曲がりぐあいについてであるが，その曲がりぐあいの内包量が，円の半径の量で測られるとしよう。…… この方法によれば，曲りぐあいの違いが比によって比較でき，類別できるということは明らかである。…… 直線と曲線の本来的な比較はできないが，2 つの曲線は曲がりぐあいにおいて本来的には比較できる。しかし比によっては関係づけられない。」
「曲りぐあいの内包量は半径によって測定されるということが認められると，そこから，すべての円周の曲りぐあいは端的に等しいということが帰結する。…… 2 倍の半径の円周は，その半分の半径の円周よりも 2 倍の長さをもつ。$\cdots$ 2 倍の円周の曲りぐあいは 2 分の 1 の内包量をもつ。それゆえ，端的に言って，2 倍の円周の曲りぐあいは半分の円周の曲りぐあいと同じであり，3 倍と 3 分の 1 についても同様である。…… 結局，相異なる円周のどの部分も曲りぐあいに関して等しいと言おう。」
「第 2 の表現法にもとづいて曲りぐあいの内包量が半径によって測定されることが認められれば，均一な曲がりぐあいだけでなく非均一な曲がりぐあいもまた，他のなんらかの質に相似的となるであろう。そしてこのなんらかの質の様態に即して図形化できるかもしれない。」

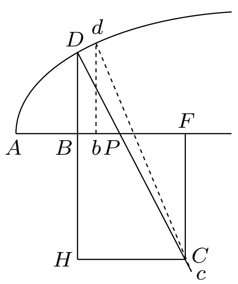
オレームはこのように述べ，「均一的な仕方で非均一な曲がりぐあいをもつ線」としてアルキメデスの螺線を例に挙げている。彼のこのような考察がニュートンの曲率や湾曲の質の研究に影響を与えたかどうかは (訳者には) 不明。

例1　$2ax = yy$ を放物線の方程式としよう。すると，問題 4 により $BP = a$ であろうし，それゆえ $DP = \sqrt{aa+yy} = t$ であろう。同様に，問題 5 により $BF = a + 2x$ であろう。そして，
460 $BP : DP = BF : DC = \dfrac{at+2tx}{a} = v$ であろう。いま，方程式 $2ax = yy$，$aa + yy = tt$ および $\dfrac{at+2tx}{a} = v$ は，問題 1 により，$2a\dot{x} = 2\dot{y}y = 2\dot{t}t$ および $\dfrac{a\dot{t}+2\dot{t}x+2t\dot{x}}{a} = \dot{v}$ を与える。これらが整理され，$\dot{x} = 1$ と仮定されると，$\dot{y} = \dfrac{a}{y}$，$\dot{t} = \dfrac{\dot{y}y}{t} = \dfrac{a}{t}$，および $\dot{v} = \dfrac{a\dot{t}+2\dot{t}x+2t}{a}$ が生じるであろう。そして，$\dot{y}$，$\dot{t}$ および $\dot{v}$ がこのように見出されたら，湾曲の不均等性の指標 $\dfrac{\dot{v}y}{t}$ が得られるであろう。

例えば，もし数によって $a = 1$ あるいは $2x = yy$，および $x = \dfrac{1}{2}$ と定められると，$y = \sqrt{2x} = 1$，

$\dot{y}=\dfrac{a}{y}=1$，$t=\sqrt{aa+yy}=\sqrt{2}$，$\dot{t}=\dfrac{a}{t}=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$，そして $\dot{v}=\dfrac{a\dot{t}+2\dot{t}x+2t}{a}=3\sqrt{2}$ であろう。それゆえ，$\dfrac{\dot{v}y}{t}=3$ が湾曲の不均等性の指標である。

しかし，もし $x=2$ と定められると，$y=2$，$\dot{y}=\dfrac{1}{2}$，$t=\sqrt{5}$，$\dot{t}=\sqrt{\dfrac{1}{5}}$，そして $\dot{v}=3\sqrt{5}$ であろう。それゆえ，$\dfrac{\dot{v}y}{t}=6$ が湾曲の不均等性の指標である。そのため，そこから軸 (axis) に下ろされた縦線が放物線の直立辺と等しいような［放物線上の］点における湾曲の不均等性は，そこから下ろされた縦線がその直立辺の半分であるような点におけるそれの 2 倍である。すなわち，前者の場合の湾曲は後者の場合におけるより 2 倍だけ円の湾曲に似ていない。



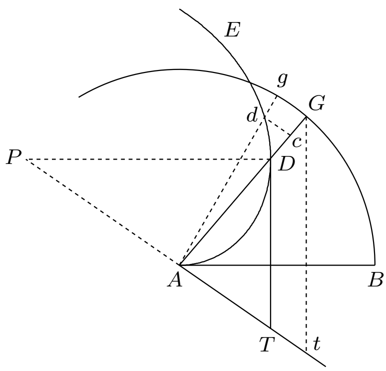
例2　$2ax-bxx=yy$［楕円の方程式］とすると，問題 4 により $a-bx=BP$ であろうし，それゆえ $aa-2abx+bbxx+yy=tt$，あるいは $aa-byy+yy=tt$ であろう。同様に，問題 5 により $DH=y+\dfrac{y^3-by^3}{aa}$ であろう。ここで，もし $yy-byy$ の代わりに $tt-aa$ を代入すると，$DH=\dfrac{tty}{a}$ が現れるであろう。そして，$BD:DP=DH:DC=\dfrac{t^3}{aa}=v$ である。いま，問題 1 によって，方程式 $2ax-bxx=yy$，$aa-byy+yy=tt$，および $\dfrac{t^3}{aa}=v$ は $a-bx=\dot{y}y$，$\dot{y}y-b\dot{y}y=t\dot{t}$，および $\dfrac{3t^2\dot{t}}{aa}=\dot{v}$ を与える。そして，$\dot{v}$ がそのように見出されたら，湾曲の不均等性の指標 $\dfrac{\dot{v}y}{t}$ が与えられるであろう。

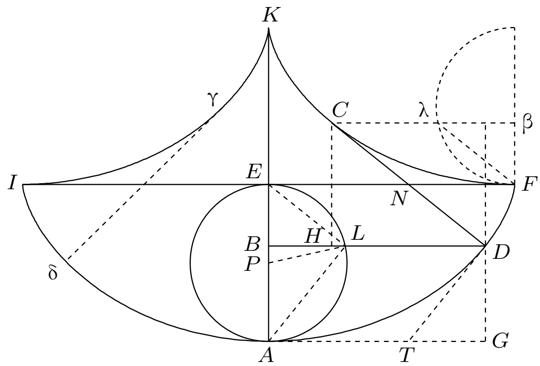
それゆえ，$a=1$ および $b=3$ である楕円 $2x-3xx=yy$ において，もし $x=\dfrac{1}{2}$ と仮定されるならば，$y=\dfrac{1}{2}$，$\dot{y}=-1$，$t=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$，$\dot{t}=\sqrt{2}$，$\dot{v}=3\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ であろうし，湾曲の不均等性の指標は $\dfrac{\dot{v}y}{t}=\dfrac{3}{2}$ であろう。それゆえ，ここに定められた点 D におけるこの楕円の湾曲は，軸に下ろされた縦線がその直立辺の半分に等しいような点における放物線の湾曲より 2 倍少なく不均等である (あるいは，円の湾曲に 2 倍似ている) ということは明らかである。 461

もしこれらの例においてもたらされる結論を敷衍するならば，放物線 $2ax=yy$ においては不均等性の指標は $\dfrac{\dot{v}y}{t}=\dfrac{3y}{a}$ になるであろう。そして，楕円 $2ax-bxx=yy$ においては指標は $\dfrac{\dot{v}y}{t}=\dfrac{3y-3by}{aa}\times BP$ になるであろう。そして，双曲線 $2ax+bxx=yy$ においては，類似性を観察すれば，指標は $\dfrac{\dot{v}y}{t}=\dfrac{3y+3by}{aa}\times BP$ であろう。それゆえ，個々に考察された任意の円錐曲線［楕円，双曲線］の異なる点において，湾曲の不均等性は長方形 $BD\times BP$ に比例すること，および，放物線の異なる点においては縦線 BD に比例することは明らかである。

しかし，放物線は不均等な湾曲で曲がっている線の中で最も単純であり，その湾曲の不均等性はちょっとした手間で決定される —— すなわち，その指標は $\dfrac{6\times\text{縦線}}{\text{直立辺}}$ である —— から，他の曲線の湾曲はこの湾曲と，厄介なことなく，関係づけることができる。例えば，もし楕円 $2x-3xx=yy$ の，$x=\dfrac{1}{2}$ と仮定して定められる点における，湾曲はどのようなものかと尋ねられるならば，その指標は (上のように) $\dfrac{3}{2}$ であるから，それと軸との間にある縦線が長さ $\dfrac{3}{2}$ の直線であるような点における放物線 $6x=yy$ の湾曲と同様であると答えることができる。

それゆえ，前に描かれた螺線 ADE ［再掲。下左図］の流率は弦 AD の流率に対してある与えられた比，例えば d が e に対する［比］，にあるので，その凹の部分の方向に AD に垂直に $AP = \dfrac{e}{\sqrt{dd-ee}} \times AD$ を立てると，P が曲率中心であり，$\dfrac{AP}{AD}$ あるいは $\dfrac{e}{\sqrt{dd-ee}}$ がその不均等性の指標であろう。それゆえ，この螺線はいたるところで，そこから軸に下ろされる縦線が $\dfrac{e}{\sqrt{dd-ee}}$ に等しいような点における放物線 $6x = yy$ と，同様の不均等な湾曲をもつ。



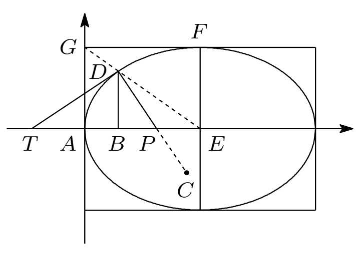


そして，それゆえ，サイクロイド［再掲。上右図］上の任意の点 D における不均等性の指標は $\dfrac{AB}{BL}$ であると見出されるであろう。それゆえ，同じ点 D におけるその湾曲は，その縦線が $\dfrac{1}{6}\,a \times \dfrac{AB}{BL}$
462 に等しい点における任意の放物線 $ax = yy$ の湾曲と同様に不均等である，あるいは円の湾曲と似ていない。

これらのことから，問題の内容は十分に明らかであろうと私は信じる。それが十分に認識されたら，上で述べられたことの系列［推論の流れ］を注視する人にとっては，自分自身で多くの例を与え，このようなことを行うための別の多くの方法を，要求に応じて，つくり出すことは難しくはないであろう。さらに，複雑な計算によって時間を浪費させられたり疲れさせられたりしなければ，類似の問題を全く大きな困難なしにやり遂げることができるであろう。そのような種類のものは［次のようなものである］。

I　「湾曲の不均等性が零である，あるいは無限である，あるいは極大または極小である，あるいは任意に与えられた大きさである，ような任意の曲線上の点を見出すこと」。それゆえ，円錐曲線の頂点において湾曲の不均等性は零であり，サイクロイドの尖点で無限であり，そして，長方形 $BD \times BP$ が極大になる，すなわち，その辺が主な頂点でそれに接している，外接された長方形の対角線が楕円を切る，楕円上の点で極大である。

このうち，楕円に関してホワイトサイドは次のような内容の脚注を添えている (『数学論文集』第 3 巻 p.194)。



楕円の方程式を $y^2 = 2ax - bx^2$ とする。すなわち，$AB = x$，$BD = y$ とし，$DP = t$，曲率半径 $DC = v$ とする。

まず，$y^2 = 2ax - bx^2$ から，$2\dot{y}y = 2a\dot{x} - 2b\dot{x}x$ であるから，$\dot{x} = 1$ とすれば，$\dot{y}y = a - bx$ となる。

それゆえ，問題 4 によれば，$\dot{y} : \dot{x} = BD\,(y) : BT = BP : BD\,(y)$ であるから，$BP = \dfrac{\dot{y}y}{\dot{x}}$ となるが，再び

$\dot{x}=1$ とすれば，$BP=\dot{y}y=a-bx$ である。

さて，$DP^2=BP^2+BD^2$ であるから，$t^2=(a-bx)^2+y^2=a^2-2abx+b^2x^2+y^2=a^2-b(2ax-bx^2)+y^2=a^2-by^2+y^2$ となり，これから $\dot{t}t=-b\dot{y}y+\dot{y}y=(1-b)\dot{y}y$ となる。

また，問題 5 の例 1 の系により，$v=DC=\dfrac{DP^3}{a^2}=\dfrac{t^3}{a^2}$ であるから，$\dot{v}=\dfrac{3\dot{t}t}{a^2}$ である。

それゆえ，湾曲の不均等性の指標は

$$\frac{\dot{v}y}{t}=\frac{3\dot{t}t}{a^2}\times\frac{y}{t}=\frac{3\dot{t}ty}{a^2}=\frac{3(1-b)\dot{y}yy}{a^2}=\frac{3(1-b)(a-bx)y}{a^2}$$
$$=\frac{3(1-b)}{a^2}y(a-bx)=\frac{3(1-b)}{a^2}BD\times BP$$

ということになる。

ここで，湾曲の不均等性の指標が極大になるときを求めるために，$y(a-bx)$ が極大になるときを調べよう。

流率の関係を求めて，それを零とすればよいから，$\dot{y}(a-bx)+y(-b\dot{x})=0$ とする。

ここで, $\dot{y}=\dfrac{a-bx}{y}$ であるから, $\dot{x}=1$ とすれば, $(a-bx)\dot{y}-by=0$ から, $(a-bx)^2-by^2=0$,

すなわち $y^2=\dfrac{(a-bx)^2}{b}$ が導かれる。

すると，$x=\dfrac{a}{b}$ のとき，$AG^2=EF^2=2a\cdot\dfrac{a}{b}-b\cdot\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{a^2}{b}$ であることから，

$$BD^2:BE^2=y^2:\left(\frac{a}{b}-x\right)^2=\frac{(a-bx)^2}{b}:\frac{(a-bx)^2}{b^2}=\frac{1}{b}:\frac{1}{b^2}$$
$$=\frac{a^2}{b}:\frac{a^2}{b^2}=AG^2:AE^2$$

となる。

すなわち，$BD:BE=AG:AE$ となるから，点 D は楕円 ADF および対角線 EG の交点である。

II　「任意の点における湾曲が他の曲線の与えられた点における湾曲と等しくて類似している，何らかの限定された種類の曲線，例えば円錐曲線，を決定すること」。

III　「ある点における湾曲および接線の位置が，軸に関して，他のある曲線の指定された点における湾曲および接線の位置と類似している円錐曲線を決定すること」。そして，この問題を使うと，その屈折の性質をデカルトが彼の『幾何学』の中で証明した，第 2 類の楕円の代わりに，屈折 463
について，可能な限りよく近似している，同じことをなし遂げる，円錐曲線を選ぶことができる。そして，他の曲線に対しても同様であると理解せよ。

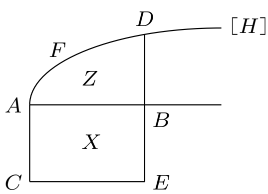
第 9 章

[曲線の求積について]

問題 7

その面積を有限方程式によって表すことができる任意に多くの曲線を見出すこと。

AB を曲線の底線とし，その始点 A において垂線 $AC=1$ が立てられ，CE が AB に平行に引かれるものとし，さらに，BD を，直線 CE と E で，曲線 AD と D で出会う，垂直な縦線としよう。そして，それらの面積 $ACEB$ および ADB は AB に沿って運ばれた線 BE および BD によって生成されるものと考えよ。すると，それらの増加量あるいは流率はその描画線 (linea describentes) BE および BD に絶えず比例するであろう。それゆえ，平行四辺形 $ACEB$ あるいは $AB\times 1$ を x とし，曲線の面積 ADB を z とする



と，流率 $\dot{x}$ および $\dot{z}$ は BE および BD に比例し，それゆえ $\dot{x}=1=BE$ とおかれると $\dot{z}=BD$ であろう。

いま，もし z および x の関係を定めるのに任意の方程式が随意に仮定されるならば，そこから問題 1 により $\dot{z}$ が引き出されるであろう。それゆえ，2 つの方程式を得るであろうから，その後者は曲線を定め，前者はその面積を定めるであろう。

> 底線 $AB=x$，面積 $ADB=z$ の関係を表す方程式 $f(x,\ z)=0$ が与えられると，問題 1 によって，それらの流率の関係 $\varphi(x,\ z,\dot{x},\dot{z})=0$ が得られる。ここで $\dot{x}=1$ とし，この第 2 式から z を消去すれば，曲線の方程式 $\dot{z}=F(x)$ が求められるというものである。
> すなわち，面積の関係 $f(x,\ z)=0 \quad \xrightarrow{\text{微分}} \quad$ 曲線の方程式 $\dot{z}=F(x)$ ，ということ。

例　$xx=z$ と仮定されると，問題 1 により $2\dot{x}x=\dot{z}$，あるいは，もし $\dot{x}=1$ ならば，$2x=\dot{z}$ が引き出されるであろう。

$\dfrac{x^3}{a}=z$ と仮定されると，放物線の方程式 $\dfrac{3x^2}{a}=\dot{z}$ が生じるであろう。

464 $ax^3=z^2$，あるいは $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=z$ と仮定されると，再び放物線の方程式 $\dfrac{3}{2}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=\dot{z}$，あるいは $\dfrac{9}{4}ax=\dot{z}\dot{z}$ が現れるであろう。

さらに, $a^3x=z^2$, あるいは $a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}=z$ と仮定されると, $\dfrac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{1}{2}}=\dot{z}$, あるいは $a^3=4x\dot{z}\dot{z}$ が引き出されるであろう。

同様に, $\dfrac{a^3}{x}=z$，あるいは $a^3x^{-1}=z$ と仮定されると， $-a^3x^{-2}=\dot{z}$ あるいは $a^3+\dot{z}xx=0$ が引き出されるであろう。ここで，$\dot{z}$ の負の値は BD が BE と反対の方向にとられるということを表しているだけである。

その上, $c^2a^2+c^2x^2=z^2$ と仮定すると, $2c^2x=2\dot{z}z$ が現われ, z が消去されると, $\dfrac{cx}{\sqrt{a^2+x^2}}=\dot{z}$ となるであろう。

あるいは，もし $\dfrac{a^2+x^2}{b}\sqrt{a^2+x^2}=z$ と仮定するならば，$\sqrt{a^2+x^2}=v$ とすれば，$\dfrac{v^3}{b}=z$ であろうし，それゆえ (問題 1 により) $\dfrac{3\dot{v}v^2}{b}=\dot{z}$ となるであろう。同様に，方程式 $a^2+x^2=v^2$ は問題 1 によって $2x=2v\dot{v}$ を与え，この助けによって，もし $\dot{v}$ を消去するならば，$\dfrac{3vx}{b}=\dot{z}=\dfrac{3x}{b}\sqrt{a^2+x^2}$ となるであろう。

最後に，もし $8-3xz+\dfrac{2}{5}z=z^2$ と仮定するならば， $-3z-3x\dot{z}+\dfrac{2}{5}\dot{z}=2\dot{z}z$ が引き出されるであろう。それゆえ，仮定された方程式によってまず面積 z を求め，それから引き出されたものによって縦線 $\dot{z}$ を求める。

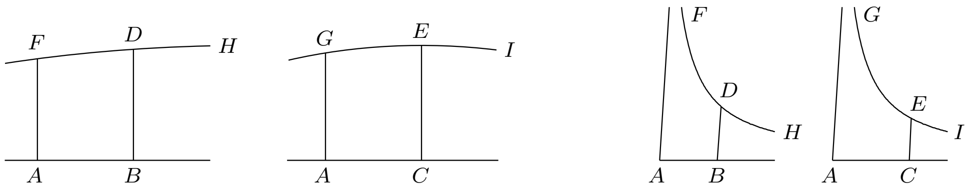
そして，面積から —— それがどのように表現される種類のものであろうとも —— つねに縦線を決定することができる。

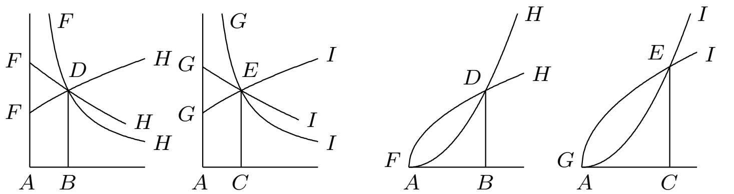
問題 8

その面積が任意に与えられた曲線の面積と
有限方程式で表すことができる関係をもつ任意に多くの曲線を見出すこと。

FDH を与えられた曲線，GEI を求める曲線とし，それらの縦線 DB および EC は底線 AB および AC の上を真っ直ぐに［垂直なままに］進むものとしよう。すると，そのようにつくられた面

積の増加量あるいは流率はそれらの増加の速度，すなわち底線の流率，が掛けられた縦線に比例す





『全集』において，ここで載せられている図は上の左図だけであるが，『数学論文集』には上の右図も，『遺稿集』，『英訳版方法』にはさらに下の左図および右図も載せられている。

るであろう。ゆえに，$AB = x$，$BD = v$，$AC = z$ および $CE = y$ としよう。そして，面積 $AFDB = s$，面積 $AGEC = t$ と［し，それらの面積の流率を $\dot{s}$，$\dot{t}$ と］すると，$\dot{x}v : \dot{z}y = \dot{s} : \dot{t}$ であろう。それゆえ，もし，上のように，$\dot{x} = 1$，$v = \dot{s}$ と仮定されるならば，$\dot{z}y = \dot{t}$，従って $\dfrac{\dot{t}}{\dot{z}} = y$ であろう。

それゆえ，1つは面積 s および t の関係を，もう1つは底線 x および z の関係を定める，任意の 465
2つの方程式が仮定されたら，(問題1によって) 流率 $\dot{t}$ および $\dot{z}$ を求め，$\dfrac{\dot{t}}{\dot{z}} = y$ とせよ。

例1　与えられた曲線 AFD を方程式 $ax - x^2 = vv$ によって表された円とし，面積がその［円の］面積と等しいような他の曲線が求められるものとしよう。ゆえに，仮定により $s = t$ であるから，$\dot{s} = \dot{t} = v$ であり，$y = \left(\dfrac{\dot{t}}{\dot{z}} =\right) \dfrac{v}{\dot{z}}$ である。底線 x および z の間の任意の関係を仮定することによって，$\dot{z}$ を定めることが残っている。

例えば，もし $ax = zz$ と仮定するならば，問題1により $a = 2\dot{z}z$ であろう。それゆえ，$\dot{z}$ の代わりに $\dfrac{a}{2z}$ を代入すると，$y = \left(\dfrac{v}{\dot{z}} =\right) \dfrac{2vz}{a}$ となるであろう。しかし，$v = \left(\sqrt{ax - xx} =\right) \dfrac{z}{a}\sqrt{aa - zz}$ であり，それゆえ $\dfrac{2zz}{aa}\sqrt{aa - zz} = y$ が，その面積が円の面積と等しい曲線の方程式となる。

同じ仕方で，もし $x^2 = z$ と仮定するならば，$2x = \dot{z}$ となり，それゆえ $y = \left(\dfrac{v}{\dot{z}} =\right) \dfrac{v}{2x}$ となって，v および x が消去されると，$y = \dfrac{\sqrt{az^{\frac{1}{2}} - z}}{2z^{\frac{1}{2}}}$ となるであろう。

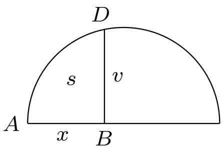
あるいは，もし $cc = xz$ と仮定するならば，$0 = z + x\dot{z}$ となり，それゆえ $-\dfrac{vx}{z} = y = -\dfrac{c^3}{z^3}\sqrt{az - cc}$ となるであろう。

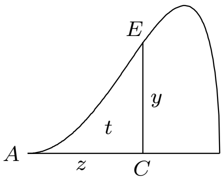
そして，それゆえ，$ax + \dfrac{s}{1} = z$ と仮定するならば，問題1の助けによって $a + \dot{s} = \dot{z}$ が得られ，それゆえ $\dfrac{v}{a + \dot{s}} = y = \dfrac{v}{a + v}$ となり，これは機械的な曲線を表していいる。

問題8は問題7を発展させたもので，与えられた曲線 $f(x,\, v) = 0$ から別の曲線 $g(z,\, y) = 0$ を求めようというもの。
このとき，$f(x,\, v) = 0$ による面積 s と $g(z,\, y) = 0$ による面積 t との間の関係 $\varphi(s,\, t) = 0$，および座標変換の関係 $\psi(x,\, z) = 0$ が与えられているものとする。また，x の流率 $\dot{x}$，s の流率 $\dot{s}$ について，$\dot{x} = 1$，$\dot{s} = v$ と仮定する。

基本の性質は「s の流率 : t の流率 $= x$ の流率 $\times v : z$ の流率 $\times y$」，すなわち $\dot{s} : \dot{t} = \dot{x}v : \dot{z}y$，である。これによって，先の仮定を用いると，$y = \dfrac{\dot{x}\dot{t}v}{\dot{s}\dot{z}} = \dfrac{\dot{t}}{\dot{z}} = \dfrac{t \text{ の流率}}{z \text{ の流率}}$ となるという。

従って，3 つの式 $f(x,\ v) = 0$，$\varphi(s,\ t) = 0$，$\psi(x,\ z) = 0$ から $\dot{t}$，$\dot{z}$ を求めればよいのである。





「例 1」の第 1 の場合では次のようにしている。

まず，$s = t \longrightarrow \dot{s} = \dot{t} = v \longrightarrow y = \dfrac{\dot{t}}{\dot{z}} = \dfrac{v}{\dot{z}}$

次に，$ax = z^2 \longrightarrow a = 2\dot{z}z \longrightarrow \dot{z} = \dfrac{a}{2z} \longrightarrow y = \dfrac{2vz}{a}$

また，$ax - x^2 = v^2 \longrightarrow v = \sqrt{ax - x^2}$

$$\longrightarrow v = \sqrt{a \cdot \frac{z^2}{a} - \left(\frac{z^2}{a}\right)^2}$$

$$= \frac{z\sqrt{a^2 - z^2}}{a}$$

以上により，$y = \dfrac{2vz}{a} = \dfrac{2z^2\sqrt{a^2 - z^2}}{a^2}$

ここに現れた曲線は 4 次代数曲線 (quartic algebraic curve)〔一般には $a^4y^2 = b^2x^3(2a - x)$〕と呼ばれるものの一種であるという。

例2　再び，円 $ax - x^2 = vv$ が与えられるとし，面積がその［円の］面積に対して任意に仮定された別の関係をもっている曲線が求められるとしよう。例えば，もし $cx + s = t$ と，さらに $ax = zz$ と仮定すると，問題 1 によって $c + \dot{s} = \dot{t}$ および $a = 2\dot{z}z$ が引き出されるであろう。それゆえ，$y = \left(\dfrac{\dot{t}}{\dot{z}} =\right) \dfrac{2cz + 2\dot{s}z}{a}$ となり，$\dot{s}$ の代わりに $\sqrt{ax - xx}$ が，x の代わりに $\dfrac{z^2}{a}$ が代入されると，$y = \dfrac{2cz}{a} + \dfrac{2z^2}{a^2}\sqrt{a^2 - z^2}$ となる。

しかし，もし $s - \dfrac{2v^3}{3a} = t$ および $x = z$ と仮定すると，問題 1 の助けによって $\dot{s} - \dfrac{2\dot{v}v^2}{a} = \dot{t}$ および $1 = \dot{z}$ が見出されるであろう。それゆえ，$y = \left(\dfrac{\dot{t}}{\dot{z}} =\right) \dot{s} - \dfrac{2\dot{v}v^2}{a}$，あるいは $= v - \dfrac{2\dot{v}v^2}{a}$ となる。しかし，いま $\dot{v}$ を消去するために，方程式 $ax - x^2 = vv$ は問題 1 により $a - 2x = 2\dot{v}v$ を与えるから，$y = \dfrac{2vx}{a}$ である。ここで，もし値 $\sqrt{ax - x^2}$ および z が代入されることによって v および x を隠すならば，$y = \dfrac{2z}{a}\sqrt{az - zz}$ が現れるであろう。

466 しかし，$ss = t$ および $x = z^2$ を仮定すると，$2\dot{s}s = \dot{t}$ および $1 = 2\dot{z}z$ が現れ，それゆえ $y = \left(\dfrac{\dot{t}}{\dot{z}} =\right) 4\dot{s}sz$ が現れるであろうし，$\dot{s}$ および x の代わりに $\sqrt{ax - x^2}$ および zz が代入されると，機械的な曲線の方程式 $y = 4sz^2\sqrt{a - zz}$ となるであろう。

例3　同じ仕方で，任意に与えられた他の曲線 (figura) に対して仮定された関係をもつ曲線が見出される。それゆえ，双曲線 $cc + xx = vv$ が与えられたとき，もし $s = t$ および $xx = cz$ と仮定するならば，問題 1 により $\dot{s} = \dot{t}$ および $2x = c\dot{z}$ が引き出され，それゆえ $y \left(= \dfrac{\dot{t}}{\dot{z}}\right) = \dfrac{c\dot{s}}{2x}$ となり，$\dot{s}$ の代わりに $\sqrt{cc + x^2}$ が，x の代わりに $c^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}$ が代入されると，$y = \dfrac{c}{2z}\sqrt{cz + zz}$ が生ずるであろう。

それゆえ，もし $xv - s = t$ および $xx = cz$ と仮定するならば，$v + \dot{v}x - \dot{s} = \dot{t}$ および $2x = c\dot{z}$ が引き出されるであろう。しかし，$v = \dot{s}$ であるから，$\dot{v}x = \dot{t}$ である。それゆえ，$y \left(= \dfrac{\dot{t}}{\dot{z}}\right) = \dfrac{c\dot{v}}{2}$ で

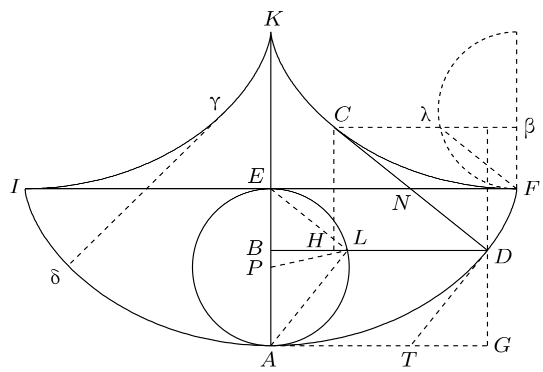
ある。しかし，いま $cc+xx=vv$ は，問題 1 の助けによって，$x=\dot{v}v$ を与える。それゆえ，$y=\dfrac{cx}{2v}$ であり，v の代わりに $\sqrt{cc+xx}$ が，x の代わりに $c^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}$ が代入されると，$y=\dfrac{cz}{2\sqrt{cz+zz}}$ となる。

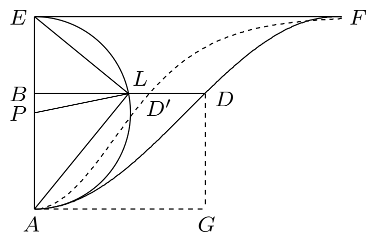
例4　そのうえ，もしシッソイド $\dfrac{xx}{\sqrt{ax-x^2}}=v$ が与えられ，それと関係している他の曲線を見 467
出さなければならないならば，そのために $\dfrac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\dfrac{2}{3}s=t$ と仮定し，$\dfrac{x}{3}\sqrt{ax-x^2}=h$ と仮定すると，$h+\dfrac{2}{3}s=t$ であろうし，それゆえ問題 1 により $\dot{h}+\dfrac{2}{3}\dot{s}=\dot{t}$ であろう。一方，方程式 $\dfrac{ax^3-x^4}{9}=hh$ は問題 1 により $\dfrac{3ax^2-4x^3}{9}=2\dot{h}h$ を与え，ここでもし h を消去するならば，$\dot{h}=\dfrac{3ax-4xx}{6\sqrt{ax-xx}}$ となるであろう。それゆえ，さらに，$\dfrac{2}{3}\dot{s}=\left(\dfrac{2}{3}v=\right)\dfrac{4xx}{6\sqrt{ax-xx}}$ であるから，$\dfrac{ax}{2\sqrt{ax-xx}}=\dot{t}$ であろう。さらに，z および $\dot{z}$ を定めるために，$\sqrt{ax-xx}=z$ と仮定されると，問題 1 の助けにより $-a\dot{x}=2\dot{z}z$，あるいは $\dot{z}=\dfrac{-a\dot{x}}{2z}$ が引き出されるであろう。それゆえ，$y\left(=\dfrac{\dot{t}}{\dot{z}}=\dfrac{-zx}{\sqrt{ax-x^2}}=\sqrt{\dfrac{zzx}{a-x}}=\sqrt{ax}\right)=\sqrt{aa-zz}$ である。この方程式は円のものであるから，円［の面積］およびシッソイドの面積の関係が得られるであろう。

そして，それゆえ，もし $\dfrac{2x}{3}\sqrt{ax-x^2}+\dfrac{1}{3}s=t$ および $x=z$ と仮定したならば，再び円の方程式 $y=\sqrt{az-zz}$ が生じていた。

全く異なることなく，もし任意の機械的な曲線が与えられるならば，それと関係づけられた他の機械的な曲線を見出すことができる。しかし，幾何学的な曲線を引き出すためには，互いに幾何学的に従属している直線のうちのいずれかを底線として利用し，その面積が［底線と縦線による］平行四辺形に関して補完する分を，その流率は縦線の流率が掛けられた底線の価値がある［に等しい］ 468
と仮定することによって，求めるのがよい。

例5　それゆえ，サイクロイド ADF が提示されたら，私は，それを底線 AB に関係づけて，平行四辺形 $ABDG$ を仕上げ，それが直線 GD の運動によって描かれ，それゆえその流率はその GD にそれが前進する速度が掛けられたもの，すなわち $x\times\dot{v}$ の価値がある［に等しい］と仮定することによって，補完的な面 ADG を求める。いま，AL は接線 DT に平行であるから，AB は BL に対してその AB の流率が縦線 BD の流率に対する，すなわち 1 が $\dot{v}$ に対するであろう。それゆえ，$\dot{v}=\dfrac{BL}{AB}$ であり，それゆえ $x\dot{v}=BL$ である。そして，それゆえ，面積 ADG は流率 BL によって描かれ，それゆえ円の面積 ABL は同じ流率によって描かれるから，それらは等しいであろう。

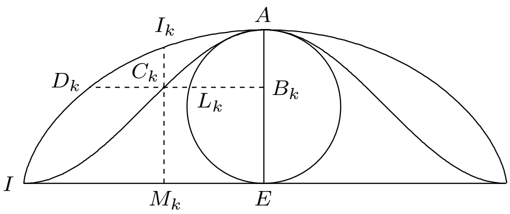




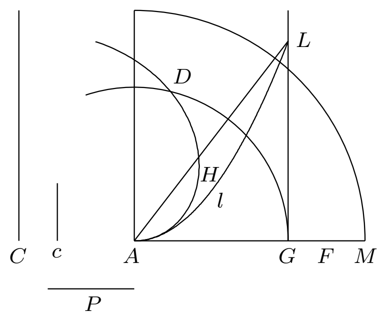
この右図は『数学論文集』によるもの。『全集』,『遺稿集』,『英訳版方法』には見られない。

同様の理由で，もし ADF を弧の曲線あるいは反正弦曲線［随伴線］(sinus versus : versed-sine) である，すなわちその縦線 BD が円の弧 AL に等しい，と仮定するならば，弧 AL の流率は底線 AB の流率に対して PL が BL に対する，すなわち $\dot{v} : 1 = \dfrac{1}{2}a : \sqrt{ax - x^2}$ であるから，$\dot{v} = \dfrac{a}{2\sqrt{ax - x^2}}$ であろう。それゆえ弧 ADG の流率 $\dot{v} \times x$ は $\dfrac{ax}{2\sqrt{ax - x^2}}$ であろう。それゆえ，
469 もし AB 上の点 B において $\dfrac{ax}{2\sqrt{ax - x^2}}$ に等しい直線が直角をなす縦線と考えられるならば，それは底線 AB に隣接する面積が面積 ADG と等しいような，ある幾何学的な曲線に終るであろう。

そして，それゆえ，幾何学的な曲線は，円，双曲線あるいは別の任意の曲線の弧の，それらの弧の正弦または反正弦あるいは他の任意の幾何学的に決定することができる直線に対する，与えられた角をなす，関係づけによってつくられた，他の曲線に等しいことが分かる。



ここに挙げられている反正弦曲線はサイクロイドの求積に際してロベルヴァルが利用したもので，彼はサイクロイドの随伴線 (compagne［仏］) といっている。
左の図で，母円の弧 AL_kE およびそれと等しい長さの底 EM_kI をそれぞれ $\{L_k\}$，$\{M_k\}$ で同数の偶数個に等分して，底に平行な直線 $B_kL_kD_k$ と母円の直径 AE に平行な直線 M_kI_k との交点を C_k とする。このとき，点 C_k の軌跡をサイクロイドの随伴線と呼んだ。なお，$B_kL_k = C_kD_k$ である。
サイクロイドの随伴線は媒介変数表示で $x = a\theta$，$y = a(1 - \cos\theta)$ と表され，$a = 1$ ならば，$y = 1 - \cos x$ となる。なお，この $1 - \cos x$ は和算では「矢」あるいは「正矢」といわれる。



螺線の面積に関して，面倒は極めて少ない。すなわち，回転の中心 A，任意の半径 AG で描かれた弧 DG が AF と G で，螺線と D で交わるとすると，その弧は，底線 AG の上を進む線の像として，螺線の面積 $AHDG$ を描くから，それゆえ，その面積の流率は長方形 $1 \times AG$ の流率に対して弧 GD が 1 に対するであろう。もしその弧に等しい直線［垂線］GL を立てるならば，それは同じ［底線］AG の上を同じように進んで，螺線の面積 $AHDG$ に等しい面積 ALG を描き，曲線 AlL は幾何学的となる。さらに，もし弦 AL が引かれるならば，三角形 $ALG \left(= \dfrac{1}{2}AG \times GL = \dfrac{1}{2}AG \times GD\right) =$ 扇形 AGD となり，それゆえ補完的な切片 ALl と ADH もまた等しいであろう。そして，このことはアルキメデスの螺線 —— この場合は AlL はアポロニウスの放物線になる —— に対してだけでなく，他のどのような曲線に対し
470 ても成立し，それらはすべて同じような手間で等しい幾何学的な曲線に変換することができる。

私はこの問題の説明のための多くの例をつくることができたが，それらは，曲線の面積に関して今までに見出してきたもの，あるいは，私が間違っていなければ，見出すことができるもの，は何でも少なくとも何らかの仕方でそれらに含まれ，そしてたいていはより少ない面倒でいつものような回り道をせずに決定できる程に，一般的であるから，これで十分であろう。

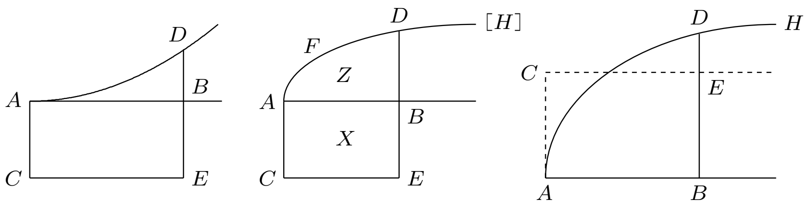
しかし，この問題およびその前の問題を十分に用いると，円錐曲線あるいは大きさが知られた任

意の他の曲線が仮定されることによって，それらと比較することができる別の曲線が見出され，それらを定める方程式が一覧の形に秩序正しく整理される。そして，そのような一覧がつくられると，ある曲線の面積が要求されるとき，もしそれを定める方程式が直接一覧の中に見出されるか，あるいは一覧に含まれている他のものに変換できるのであれば，そこからその面積が知られるであろう。さらに，その一覧は曲線の長さ，それらの重心，それらの回転によってつくられた立体，その立体の表面，および類似した流率によってつくられた任意の流量を決定するのに利用することができる。

問題 9

任意に提示された曲線の面積を決定すること。

問題の解法は［与えられた］流率［の間］の関係から (問題 2 によって) それらの流量［の間］の関係が導かれることで確立される。



ここでの説明のための図について，『全集』は左図を，『遺稿集』，『英訳版方法』は中図を，『数学論文集』は右図を載せている。

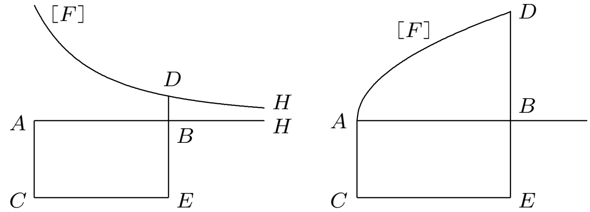
そして，はじめに，もし，その運動によって求める面積 $AFDB$ が描かれる，直線 BD が位置において与えられた底線 AB の上を真っ直ぐに［垂直なままに］進むならば，上のように，その間に単位に等しい BE によって平行四辺形 $ABEC$ が描かれると仮定せよ。すると，BE が平行四辺形の流率とおかれると，BD は求める面積の流率であろう。 471

ゆえに，$AB = x$ とすると，$ABEC\,(= 1 \times x) = x$ でもあろうし，$BE = \dot{x}$ であろう。さらに，面積 $AFDB = z$ とすると，$BD = \dot{z}$ であろうし，$\dot{x} = 1$ であるから，$= \dfrac{\dot{z}}{\dot{x}}$ であろう。それゆえ，BD を定める方程式によって，同時に流率の比 $\dfrac{\dot{z}}{\dot{x}}$ が定められ，これから (問題 2 の場合 1 により) 流量 x および z の関係が導かれるであろう。

第 1 の例　BD あるいは $\dot{z}$ がある単純な量に等しいとき。

$\dfrac{x^2}{a} = \dot{z}$ あるいは $= \dfrac{\dot{z}}{\dot{x}}$，すなわち放物線の方程式，が与えられるとすると，(問題 2 により) $\dfrac{x^3}{3a} = z$ が現れるであろう。ゆえに，$\dfrac{x^3}{3a}$ あるいは $\dfrac{1}{3}\,AB \times BD =$ 放物線 $AFDB$ の面積 である。

第 2 類の放物線の方程式 $\dfrac{x^3}{a^2} = \dot{z}$ が与えられるとすると，(問題 2 により) $\dfrac{x^4}{4a^2} = z$ が現れるであろう。すなわち $\dfrac{1}{4}\,AB \times BD =$ 面積 $AFDB$ である。



第 2 類の双曲線の方程式 $\dfrac{a^3}{x^2} = \dot{z}$ あるいは $a^2x^{-2} = \dot{z}$ が与えられるとすると，$-a^3x^{-1} = z$ あるいは $-\dfrac{a^3}{x} = z$ が現れるであろう。すなわち，その負の値がほのめかすように，$AB \times BD =$ 縦線 BD の他方の部分に 472

［向こう側に］横たわっている無限の長さの面積 $HDBH$ である。

それゆえ，もし $\dfrac{a^4}{x^3}=\dot{z}$ が与えられるならば，$-\dfrac{a^4}{2x^2}=z$ が現れるであろう。

さらに，$ax=\dot{z}^2$，あるいは $a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}=\dot{z}$ を再び放物線の方程式とすると，$\dfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}=z$ が生じるであろう。すなわち $\dfrac{2}{3}AB\times BD=$ 面積 $AFDB$ である。

$\dfrac{a^3}{x}=\dot{z}^2$ とすると，$2a^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}=z$，あるいは $2AB\times BD=AFDB$ となるであろう。

$\dfrac{a^5}{x^3}=\dot{z}^2$ とすると，$-\dfrac{2a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}=z$，あるいは $2AB\times BD=HDBH$ となるであろう。

$ax^2=\dot{z}^3$ とすると，$\dfrac{3}{5}a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{5}{3}}=z$，あるいは $\dfrac{3}{5}AB\times BD=AFDB$ となるであろう。そして，他の場合も同様である。

第 2 の例　$\dot{z}$ がそのような種類のいくつかの量の結合に等しいとき。

$x+\dfrac{x^2}{a}=\dot{z}$ とすると，$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3a}=z$ となるであろう。

$a+\dfrac{a^3}{x^2}=\dot{z}$ とすると，$ax-\dfrac{a^3}{x}=z$ となるであろう。

$3x^{\frac{1}{2}}-\dfrac{5}{x^2}-\dfrac{2}{x^{\frac{1}{2}}}=\dot{z}$ とすると，$2x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{5}{x}-4x^{\frac{1}{2}}=z$ となるであろう。

第 3 の例　先述の除法による還元が要求されるとき。

アポロニウスの双曲線の方程式 $\dfrac{a^2}{b+x}=\dot{z}$ が与えられ，そして除法が無限に行われると，
473 $\dot{z}=\dfrac{a^2}{b}-\dfrac{a^2x}{b^2}+\dfrac{a^2x^2}{b^3}-\dfrac{a^2x^3}{b^4}\cdots$ が現れるであろう。そして，これから (問題 2 により) 第 2 の例におけるように，$z=\dfrac{a^2x}{b}-\dfrac{a^2x^2}{2b^2}+\dfrac{a^2x^3}{3b^3}-\dfrac{a^2x^4}{4b^4}\cdots$ が得られるであろう。

$\dfrac{1}{1+x^2}=\dot{z}$ が与えられるとすると，除法により $\dot{z}=1-x^2+x^4-x^6\cdots$，あるいは $\dot{z}=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^6}\cdots$ が引き出されるであろう。それゆえ，(問題 2 により) $z=x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{1}{7}x^7\cdots=AFDB$，あるいは $z=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{3x^3}-\dfrac{1}{5x^5}\cdots=HDBH$ であろう。

$\dfrac{2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}}{1+x^{\frac{1}{2}}-3x}=\dot{z}$ が与えられるとすると，除法により $\dot{z}=2x^{\frac{1}{2}}-2x+7x^{\frac{3}{2}}-13x^2+34x^{\frac{5}{2}}\cdots$ が現れるであろう。そして，これから (問題 2 により) $z=\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2+\dfrac{14}{5}x^{\frac{5}{2}}-\dfrac{13}{3}x^3+\dfrac{68}{7}x^{\frac{7}{2}}\cdots$ となるであろう。

第 4 の例　先述の根の開平による還元が要求されるとき。

$\dot{z}=\sqrt{a^2+x^2}$，すなわち双曲線の方程式が与えられるとしよう。すると，根が無限に多くの項になるまで展開されると，$\dot{z}=a+\dfrac{x^2}{2a}-\dfrac{x^4}{8a^3}+\dfrac{x^6}{16a^5}-\dfrac{5x^8}{112a^7}\cdots$ が現れるであろう。それゆえ，前のように，$z=ax+\dfrac{x^3}{6a}-\dfrac{x^5}{40a^3}+\dfrac{x^7}{112a^5}-\dfrac{5x^9}{1008a^7}\cdots$ となるであろう。

同じ仕方で，もし $\dot{z}=\sqrt{aa-xx}$，すなわち円の方程式，が与えられるならば，$z=ax-\dfrac{x^3}{6a}-\dfrac{x^5}{40a^3}-\dfrac{x^7}{112a^5}-\dfrac{5x^9}{1008a^7}\cdots$ が得られるであろう。

それゆえ，もし，再び円の方程式，$\dot{z}=\sqrt{x-x^2}$ が与えられるならば，根が開かれると，

$\dot{z} = x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \dfrac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} \cdots$ が現れるであろう。それゆえ，$z = \dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \dfrac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \dfrac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} \cdots$ である。

それゆえ，$\dot{z} = \sqrt{a^2 + bx - x^2}$，もう一度円の方程式，は根の開平によって $\dot{z} = a + \dfrac{bx}{2a} - \dfrac{x^2}{2a} - \dfrac{b^2x^3}{8a^3} \cdots$ を与える。それゆえ (問題 2 により) $z = ax + \dfrac{bx^2}{4a} - \dfrac{x^3}{6a} - \dfrac{b^2x^4}{32a^3} \cdots$ が引き出されるであろう。

そして，それゆえ，$\sqrt{\dfrac{1+ax^2}{1-bx^2}} = \dot{z}$ は適当な還元によって 474

$$\begin{array}{llll} \dot{z} = 1 & + \frac{1}{2}bx^2 & + \frac{3}{8}b^2x^4 & \cdots \\ & + \frac{1}{2}a & + \frac{1}{4}ab & \\ & & - \frac{1}{8}aa & \end{array}$$

を与える。それゆえ (問題 2 により)

$$\begin{array}{llll} z = x & + \frac{1}{6}bx^3 & + \frac{3}{40}b^2x^5 & \cdots \\ & + \frac{1}{6}a & + \frac{1}{20}ab & \\ & & - \frac{1}{40}aa & \end{array}$$

となる。

そして，最後に，$\dot{z} = \sqrt[3]{a^3 + x^3}$ は，立方根の開平により，$\dot{z} = a + \dfrac{x^3}{3a^2} - \dfrac{x^6}{9a^5} + \dfrac{5x^9}{81a^8} \cdots$ を与える。それゆえ，$z = ax + \dfrac{x^4}{12a^2} - \dfrac{x^7}{63a^5} + \dfrac{x^{10}}{162a^8} \cdots = AFDB$ である。あるいはまた，$\dot{z} = x + \dfrac{a^3}{3x^2} - \dfrac{a^6}{9x^5} + \dfrac{5a^9}{81x^8} \cdots$ である。それゆえ，$z = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{a^3}{3x} + \dfrac{a^6}{36x^4} - \dfrac{5a^9}{567x^7} \cdots = HDBH$ である。

第 5 の例　先述の複合方程式の解法による還元が要求されるとき。

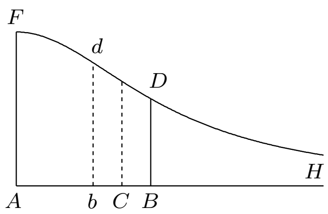
もし曲線が方程式 $\dot{z}^3 + a^2\dot{z} + ax\dot{z} - 2a^3 - x^3 = 0$ によって定められるならば，根を開くと，$\dot{z} = a - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{64a} + \dfrac{131x^3}{512aa} \cdots$ が現れるであろう。それゆえ，前のように，$z = ax - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{192a} + \dfrac{131x^4}{2048aa} \cdots$ が得られるであろう。

しかし，もし $\dot{z}^3 - c\dot{z}^2 - 2x^2\dot{z} - c^2\dot{z} + 2x^3 + c^3 = 0$ が曲線の方程式ならば，その解法は 3 つの根，すなわち $\dot{z} = c + x - \dfrac{x^2}{4c} + \dfrac{x^3}{32c^2} \cdots$，および $\dot{z} = c - x + \dfrac{3x^2}{4c} - \dfrac{15x^3}{32c^2} \cdots$，および $\dot{z} = -c - \dfrac{x^2}{2c} - \dfrac{x^3}{2cc} + \dfrac{x^5}{4c^4} \cdots$ を与えるであろう。そして，これらから対応する 3 つの面積の値は $z = cx + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{x^3}{12c} + \dfrac{x^4}{128c^2} \cdots$，$z = cx - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{x^3}{4c} - \dfrac{15x^4}{128c^2} \cdots$，および $z = -cx - \dfrac{x^3}{6c} + \dfrac{x^4}{8c^2} + \dfrac{x^6}{24c^4} \cdots$ となる。

機械的な曲線に関して，それらを幾何学的な形式に還元することは後で明らかにされるであろうから，ここで付け加えることは何もない。

しかし，そのように見出された z の値は，それらのそれぞれの項に従って，ときには底線の有限部分 AB に，ときには H の方に無限に伸ばされた部分 BH に，そしてときにはその両方の部分に，置かれた面積に対応する。そのため，底線の任意の部分におかれた面積に［適切な］値を割り 475
当てるためには，その面積はつねにその面積のはじめと終りで区切られた底線の部分に一致する z の値の差に等しいとおかれなければならない。

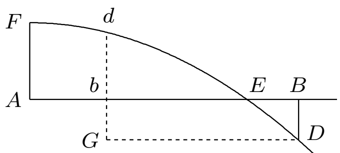
例えば，方程式 $\dfrac{1}{1+xx} = \dot{z}$ が定める曲線に対して，$z = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 \cdots$ であることは見出されている。いま，私は，底線の部分 bB に隣接する面積 $bdDB$ の量を決定するのに，$AB = x$



とおかれることで生じる z の値から，$Ab = x$ とおかれることで生じるそれを取り去る。すると，(区別するために，AB に対しては大文字 X で，Ab に対しては小文字 x で書かれると) その面積 $bdDB$ の値 $X - \dfrac{1}{3}X^3 + \dfrac{1}{5}X^5 \cdots - x + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{5}x^5 \cdots$ が残る。それゆえ，もし Ab あるいは x が零とおかれるならば，全面積 $AFDB = X - \dfrac{1}{3}X^3 + \dfrac{1}{5}X^5 \cdots$ が得られるであろう。

同じ曲線について，さらに $z = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{5x^5} \cdots$ も見出されている。それゆえ，再び，前述のことに従うと，その面積は $bdDB = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{5x^5} \cdots - \dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{3X^3} - \dfrac{1}{5X^5} \cdots$ であろう。それゆえ，もし AB あるいは X が無限であると考えられるならば，同様に H の方に向かう無限に長い部分に隣接する面積 bdH は $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{5x^5} \cdots$ に等しいであろう。なぜならば，後ろの級数 $-\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{3X^3} - \dfrac{1}{5X^5} \cdots$ は，分母の無限性のために，消滅するからである。

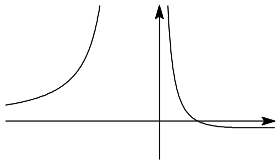
方程式 $a + \dfrac{a^3}{x^2} = \dot{z}$ で表された曲線について，$ax - \dfrac{a^3}{x} = z$ が見出されている。それゆえ，$aX - \dfrac{a^3}{X} - ax + \dfrac{a^3}{x} =$ 面積 $bdDB$ となる。しかし，これは x が零あるいは X が無限と仮定されると無限になり，それゆえ，面積 $AFDB$ および bdH はともに無限の大きさであり，$bdDB$ のような，それらの中間の部分だけを表すことができる。このことは，底線 x が z の値におけるある［項の］分子の中だけでなく他の項の分母の中にも見出されるときには，つねに起きる。しかし，
476 x が，はじめの例のように，分子の中だけに見出されるときは，z の値は平行な縦線のこちら側の［部分］AB におかれた面積に対応する。そして，それが，第 2 の例のように，分母の中だけのときは，その値は，そのすべての項の符号が替えられると，平行な縦線を超えて無限に伸ばされた全面積に対応する。



もしいつか曲線が点 b および B の間，例えば E，で底線を横切るならば，［求める］面積のために向かい合っている底線の部分に対応する面積の差 $bdE - BDE$ がとられるであろうし，もし［この差に］長方形 $BDGb$ が付け加えられるならば，面積 $dEDG$ が得られるであろう。

しかし，$\dot{z}$ の値において，ある項が x の 1 次元のベキだけで割られるとき，その項に対応する面積は円錐曲線の双曲線に関わり，それゆえそれは別に無限級数によって表されなければならないということが特に注意されなければならない。例えば次のようになされる。

$\dfrac{a^3 - a^2x}{ax + x^2} = \dot{z}$ を曲線の方程式とすると，除法により $\dot{z} = \dfrac{a^2}{x} - 2a + 2x - \dfrac{2x^2}{a} + \dfrac{2x^3}{a^2} \cdots$ となるであろう。そして，それゆえ，$z = \boxed{\dfrac{a^2}{x}} - 2ax + x^2 - \dfrac{2x^3}{3a} + \dfrac{x^4}{2a^2} \cdots$ となる。そして，面積は $bdDB = \boxed{\dfrac{aa}{X}} - 2aX + X^2 - \dfrac{2X^3}{3a} \cdots - \boxed{\dfrac{aa}{x}} + 2ax - x^2 + \dfrac{2x^3}{3a} \cdots$ となる。ここで記号 $\boxed{\dfrac{aa}{X}}$ および $\boxed{\dfrac{aa}{x}}$ によって項 $\dfrac{aa}{X}$ および $\dfrac{aa}{x}$ に対応する面積を表す。



『全集』はここで前出の $\dot{z} = \dfrac{1}{1+x^2}$ の図を載せているが，それは省略した。

$\dot{z} = \dfrac{a^3 - a^2 x}{ax + x^2}$ なら，$a > 0$ のとき，左図 $(a = 1)$ のようになりそうなものだが，『全集』，『数学論文集』，『遺稿集』，『英訳版方法』のいずれにも，この図は見られない。

なお，上の結果は

$$\begin{aligned} bdDB &= \int_x^X \frac{a^3 - a^2 t}{at + t^2}\,dt = a^2 \int_x^X \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{a+t}\right) dt = a^2 \left[\log t - 2\log(a+t)\right]_x^X \\ &= a^2 \left(\log X - 2\log(a+X) - \log x + 2\log(a+x)\right) \end{aligned}$$

ということ。

いま，$\boxed{\dfrac{aa}{X}}$ および $\boxed{\dfrac{aa}{x}}$ を探し出すために，私は，Ab あるいは x を［与えられた］確定した線とし，bB を未定の線あるいは流れている線と仮定し，それゆえ，もしそれ［後者］を y とするならば，$\boxed{\dfrac{aa}{x+y}} = bB$ に隣接した双曲線の面積，すなわち $\boxed{\dfrac{aa}{X}} - \boxed{\dfrac{aa}{x}}$ であろう。しかし，除法が行われると，$\dfrac{aa}{x+y} = \dfrac{aa}{x} - \dfrac{aay}{x^2} + \dfrac{a^2y^2}{x^3} - \dfrac{a^2y^3}{x^4} \cdots$ となる。それゆえ，$\boxed{\dfrac{aa}{x+y}}$ あるいは $\boxed{\dfrac{aa}{X}} - \boxed{\dfrac{aa}{x}} = \dfrac{aay}{x} - \dfrac{a^2y^2}{2x^2} + \dfrac{a^2y^3}{3x^3} - \dfrac{a^2y^4}{4x^4} \cdots$ である。そして，それゆえ，求める全面積は $bdDB = \dfrac{aay}{x} - \dfrac{a^2y^2}{2x^2} + \dfrac{a^2y^3}{3x^3} \cdots - 2aX + X^2 - \dfrac{2X^3}{3a} \cdots + 2ax - x^2 + \dfrac{2x^3}{3a} \cdots$ である。 477

同様に，AB あるいは X を確定した線として使うことができ，そのときは，$\boxed{\dfrac{aa}{X}} - \boxed{\dfrac{aa}{x}} = \dfrac{a^2y}{X} + \dfrac{a^2y^2}{2X^2} + \dfrac{a^2y^3}{3X^3} + \dfrac{a^2y^4}{4X^4} \cdots$ が生じていた。

ホワイトサイドによれば (『数学論文集』第 3 巻 p.219，220)，$Ab = x$ を確定量，$bB = y$ を未定量とすると，

$$\begin{aligned} \boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}} &= \int_x^X \frac{a^2}{t}\,dt = \int_0^y \frac{a^2}{x+u}\,du = \left[a^2 \log(x+u)\right]_0^y \\ &= a^2 \left(\log(x+y) - \log x\right) \end{aligned}$$

であり，$AB = X$ を確定量，$bB = y$ を未定量とすると，

$$\begin{aligned} \boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}} &= \int_x^X \frac{a^2}{t}\,dt = \int_y^0 \frac{a^2}{X-u}(-du) = \left[a^2 \log(X-u)\right]_y^0 \\ &= a^2 \left(\log X - \log(X-y)\right) \end{aligned}$$

であるということ。

さらに，もし bB を C で 2 等分して，AC を確定した長さとし，Cb および CB が未定［の長さ］と仮定されると，$AC = e$ および Cb あるいは $CB = y$ とすると，$bd = \dfrac{aa}{e-y} = \dfrac{aa}{e} + \dfrac{aay}{e^2} + \dfrac{a^2y^2}{e^3} + \dfrac{a^2y^3}{e^4} + \dfrac{a^2y^4}{e^5} \cdots$ であろう。それゆえ，底線の部分 bC に隣接する双曲線の面積は $\dfrac{a^2y}{e} + \dfrac{a^2y^2}{2e^2} + \dfrac{a^2y^3}{3e^3} + \dfrac{a^2y^4}{4e^4} \cdots$ であろう。また，$DB = \dfrac{aa}{e+y} = \dfrac{aa}{e} - \dfrac{a^2y}{e^2} + \dfrac{a^2y^2}{e^3} - \dfrac{a^2y^3}{e^4} + \dfrac{a^2y^4}{e^5} \cdots$ であろう。そして，それゆえ，底線のもう一方の部分

CB に隣接する面積は $\dfrac{a^2y}{e}-\dfrac{a^2y^2}{2e^2}+\dfrac{a^2y^3}{3e^3}-\dfrac{a^2y^4}{4e^4}+\dfrac{a^2y^5}{5e^5}\cdots$ であろう。そして，これらの面積の和 $\dfrac{2a^2y}{e}+\dfrac{2a^2y^3}{3e^3}+\dfrac{2a^2y^5}{5e^5}\cdots$ は $\boxed{\dfrac{aa}{X}}-\boxed{\dfrac{aa}{x}}$ に等しいであろう。

それゆえ，方程式 $\dot{z}^3+\dot{z}^2+\dot{z}-x^3=0$ が曲線［の性質］であるなら，その根は $\dot{z}=x-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{9x}+\dfrac{7}{81x^2}+\dfrac{14}{729x^4}\cdots$ であろう。それゆえ，$z=\dfrac{1}{2}\,x^2-\dfrac{1}{3}\,x-\boxed{\dfrac{2}{9x}}-\dfrac{7}{81x}-\dfrac{14}{2187x^3}\cdots$ となる。そして，面積 $bdDB=\dfrac{1}{2}\,X^2-\dfrac{1}{3}\,X-\boxed{\dfrac{2}{9X}}-\dfrac{7}{81X}\cdots-\dfrac{1}{2}\,x^2+\dfrac{1}{3}\,x+\boxed{\dfrac{2}{9x}}+\dfrac{7}{81x}\cdots$，すなわち $=\dfrac{1}{2}\,X^2-\dfrac{1}{3}\,X-\dfrac{7}{81X}\cdots-\dfrac{1}{2}\,x^2+\dfrac{1}{3}\,x+\dfrac{7}{81x}\cdots-\dfrac{4y}{9e}-\dfrac{4y^3}{27e^3}-\dfrac{4y^5}{45e^5}\cdots$ となる。

ちなみに，カルダノ (Girolamo Cardano： 1501–1576) の公式によれば，$\dot{z}$ の 3 次方程式 $\dot{z}^3+\dot{z}^2+\dot{z}-x^3=0$ の解は

$$\dot{z}=\sqrt[3]{\frac{1}{54}\left(27x^3+7+\sqrt{27\left(27x^6+14x^3+3\right)}\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{54}\left(27x^3+7-\sqrt{27\left(27x^6+14x^3+3\right)}\right)}-\frac{1}{3}$$

である。

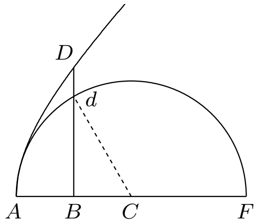
しかし，この双曲線の項は，たいていは，底線の始点を変更することによって，すなわち与えられた何らかの量を増やすか減らすかすることによって，適切に避けることができる。例えば，$\dfrac{a^3-a^2x}{ax+x^2}=\dot{z}$ が曲線の方程式であった，前の例において，私は，もし b を底線の始点とするならば，Ab を任意の確定した長さ，例えば $\dfrac{1}{2}\,a$，と仮定して，残された底線 bB の代わりに今は x と書く。すなわち，もし x の代わりに $x+\dfrac{1}{2}\,a$ と書くことによって底線を $\dfrac{1}{2}\,a$ だけ減らすならば，$\dfrac{\frac{1}{2}\,a^3-a^2x}{\frac{3}{4}\,a^2+2ax+x^2}=\dot{z}$ が現われ，そして，除法によって $\dot{z}=\dfrac{2}{3}\,a-\dfrac{28}{9}\,x+\dfrac{200x^2}{27a}\cdots$ となるであろう。それゆえ，$z=\dfrac{2}{3}\,ax-\dfrac{14}{9}\,x^2+\dfrac{200x^3}{81a}\cdots=$ 面積 $bdDB$ となる。

そして，底線の始点としてさまざまな点を使うことによって，任意の曲線の面積は無限に多くの方法で表すことができる。

さらに，方程式 $\dfrac{a^3-a^2x}{ax+x^2}=\dot{z}$ は，$\dot{z}\,[=\dfrac{a^3}{ax+x^2}-\dfrac{a^2}{a+x}]=\dfrac{a^3}{x^2}-\dfrac{a^4}{x^3}+\dfrac{a^5}{x^4}\cdots-a+$
478 $x-\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{x^3}{a^2}\cdots$ とすることによって，2 つの無限級数に分解することができる。［そして，］ここには x の 1 次のベキだけで割られる項は見出されない。しかし，一方の分子および他方の分母において x の次元が無限に増えるという，このような種類の級数は，文字［変量］の代わりに数値が代入されるときに，算術的な計算によって，それらから z を得るのにはあまり適していない。

面積の値が文字について得られた後で，このような種類の数についての計算に着手する人はほとんど困難に出会わないであろう。それにもかかわらず，前の主張のより完全な説明として，私は，1 つ 2 つの例を付け加えることにしよう。

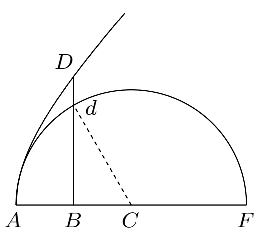
方程式 $\dot{z}=\sqrt{x+x^2}$ で表される，すなわちその頂点は A にあり，いずれの軸も単位に等しい，双曲線 AD が提示されるとしよう。すると，前述のことから，その面積 ADB は $\dfrac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}+\dfrac{1}{5}\,x^{\frac{5}{2}}$



$-\dfrac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}+\dfrac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}-\dfrac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}\cdots$，すなわち $x^{\frac{1}{2}}$ in $\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{5}x^2-\dfrac{1}{28}x^3+\dfrac{1}{72}x^4-\dfrac{5}{704}x^5\cdots$ であろう。この級数はその最後の項に，この系列 $\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 5}x$，$\dfrac{-1\cdot 5}{4\cdot 7}x$，$\dfrac{-3\cdot 7}{6\cdot 9}x$，$\dfrac{-5\cdot 9}{8\cdot 11}x$，$\dfrac{-7\cdot 11}{10\cdot 13}x$，$\cdots$ の引き続く項を連続して掛けることによって無限につくられる。すなわち，最初の項 $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\times\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 5}x$ は第 2 の項 $\dfrac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}$ となる。これに $\dfrac{-1\cdot 5}{4\cdot 7}x$ を掛けると第 3 の項 $-\dfrac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}$ となり，これに $\dfrac{-3\cdot 7}{6\cdot 9}x$ を掛けると第 4 の項 $\dfrac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ となり，そして無限に続く。いま，AB が任意の長さ，例えば $\dfrac{1}{4}$，と仮定されると，x の代わりにこの数を，$x^{\frac{1}{2}}$ の代わりにその根 $\dfrac{1}{2}$ を書けば，最初の項 $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ あるいは $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{8}$ は 10 進分数を還元すれば 0.08333 333 となる。これに $\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 5\cdot 4}$ を掛けると第 2 の項 0.00625 となる。これに $\dfrac{-1\cdot 5}{4\cdot 7\cdot 4}$ を掛けると第 3 の項 $-0.00027\,90178\cdots$ となる。そして，無限に続く。しかし，私がこのように 1 つずつ引き出していく項を 2 つの表，すなわちその一方は正の値のもので他方は負の値のものである，に整理し，そして，私は，ここに見るように，それらを加える。

+ 0.08333 33333 33333 3	− 0.00027 10178 57142 9	479
625 00000 00000 0	34679 06605 1	
2 71267 36111 1	834 46502 7	
5135 16939 6	26 28535 4	
144 62891 7	96129 6	
4 95458 1	3867 6	
19094 8	166 3	
796 3	7 5	
35 2	4	
1 6	− 0.00028 25719 38957 5	
1	+ 0.08961 09885 64661 8	
+ 0.08961 09885 64661 8	0.08932 84166 25704 3	

それから，正の値の和から負の値の和を取り去れば，求められるべき双曲線の面積 ADB の量として 0.08932 84166 25704 3 が残る。

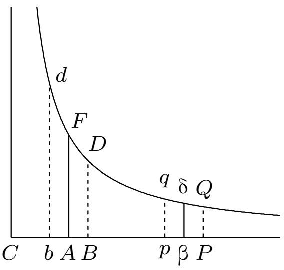


いま，方程式 $\sqrt{x-xx}=\dot{z}$ で表される，すなわちその直径 AF が単位である，円 AdF が提示されるとすると，前述のことから，その面積 AdF は $\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}-\dfrac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}-\dfrac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}\cdots$ であろう。この級数において，その項は双曲線の面積を表す上の級数の項と，符号が $+$ と $-$ であることを除いて，全く変わらないから，同じ数の項に他方の符号を結び付けること以外に行うべきことは何も残っていない。すなわち，上述の両方の表の結び付けられた和 0.08989 35605 03619 3 を最初の項の 2 倍 0.16666 66666 66666 6 から取り去れば，残りの 0.07677 31061 63047 3 は，AB を直径の 4 分の 1 とおいたときの，円の部分 AdB の面積であろう。そして，それゆえ，円と双曲線の面積は幾何学的な仕方では比較されないけれども，それにもかかわらず双方とも同じ算術的な計算によって生じる。

円の部分 AdB が見出されたら，全体の面積はこれから容易に導かれる。すなわち，半径

dC を引いて，Bd あるいは $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ を BC あるいは $\frac{1}{4}$ に掛けると，積の半分 $\frac{1}{32}\sqrt{3}$ あるいは $0.05412\,65877\,36527\,4$ は三角形 CdB に等しく，これを面積 AdB に加えたものは扇形 $ACd = 0.1308996938995747$ で，この 6 倍 $0.78539\,81633\,97448\,2$ が全面積であろう。

従って，ついでにいうと，面積を直径の 4 分の 1 で割れば，円周の長さ［直径 1 の円の周だから，円周率の値］は $3.14159\,26535\,89792\,8$ となる。



これらに，双曲線 dFD およびとその漸近線 CA の間に切り取られた面積の計算を追加しよう。C を双曲線の中心とし，$CA = a$，$AF = b$ および $AB = Ab = x$ とおくと，$\frac{ab}{a+x} = BD$ および $\frac{ab}{a-x} = bd$ であろうし，それゆえ，面積 $AFDB = bx - \frac{bx^2}{2a} + \frac{bx^3}{3a^2} - \frac{bx^4}{4a^3}\cdots$，および 面
480 積 $AFdb = bx + \frac{bx^2}{2a} + \frac{bx^3}{3a^2} + \frac{bx^4}{4a^3}\cdots$ であろう。そして，それらの和 $bdDB = 2bx + \frac{2bx^3}{3a^2} + \frac{2bx^5}{5a^4} + \frac{2bx^7}{7a^6}\cdots$ であろう。

いま，$CA = AF = 1$，Ab あるいは $AB = \frac{1}{10}$ とおくと，$Cb = 0.9$，$CB = 1.1$ となり，a，b および x の代わりにこれらの数が代入されると，この［下の左の］表に見られるように，級数の最初の項は 0.2 となり，第 2 項は $0.00066\,666\cdots$，第 3 項は $0.00000\,4$ などとなるであろう。

	0.20000 00000 00000 0	
	66 66666 66666 6	
	40000 00000 0	
	285 71428 6	
	2 22222 2	
	1818 2	
	15 4	
	1	
和	0.20067 06954 62151 1	= 面積 $bdDB$

	0.01000 00000 00000 0	
	5 00000 00000 0	
	3333 33333 3	
	25 00000 0	
	166 7	
	1 4	
和	0.01005 03358 53501 4	$= Ad - AD$

しかし，もしこの面積の部分 Ad および AD が別々に要求されるならば，より少ない方の DA をより多い方の dA から取り去れば，$\frac{bx^2}{a} + \frac{bx^4}{2a^3} + \frac{bx^6}{3a^5} + \frac{bx^8}{4a^7}\cdots$ が残るであろう。ここで，もし a および b の代わりに 1 と書かれ，x の代わりに $\frac{1}{10}$ と書かれるならば，数に還元された項は次の［上の右の］表のようになるであろう。

いま，もしこの面積の差が先に見出されたこれらの和に加えられ，また取り去られるならば，合計の半分 $0.10536\,05156\,57826\,3$ はより大きい方の面積 Ad で，残り［差］の半分 $0.09531\,01798\,04324\,8$ はより小さい方 AD であろう。

同じ表によって，AB および Ab が $\frac{1}{100}$，あるいは $CB = 1.01$，$Cb = 0.99$ とおかれるときに，もしその数を単に適当なより低い位に移すならば，ここに見られるように，面積 AD および Ad もまた得られるであろう。

	0.02000 00000 00000 0	
	6666 66666 7	
	40000 0	
	2 8	
和	0.02000 06667 06669 5	$= bD$

	0.00010 00000 00000 0	
	50 00000 0	
	333 3	
和	0.00010 00050 00333 3	$= Ad - AD$

［そして,］$\dfrac{1}{2}$ 和［$=$］$0.01005\,03358\,53501\,4 = Ad$，$\dfrac{1}{2}$ 差［$=$］$0.00995\,03308\,53168\,1 = AD$ である。

そして，それゆえ，AB および Ab が $\dfrac{1}{1000}$，あるいは $CB = 1.001$，$Cb = 0.999$ とおかれると，$Ad = 0.00100\,05003\,33583\,5$ および $AD = 0.00099\,95003\,33083\,5$ が得られるであろう。

同じ仕方で，もし，CA および $AF = 1$ を固定したまま，AB および $Ab = 0.2$，あるいは $= 0.02$，あるいは $= 0.002$ とおかれるならば，それらの面積が［次のように］導かれるであろう。

$$\begin{array}{lll} & Ad = 0.22314\,35513\,14209\,7 \quad \text{および} & AD = 0.18232\,15567\,93954\,6 \\ \text{あるいは} & Ad = 0.02020\,27073\,17519\,4 \quad \text{および} & AD = 0.01980\,26272\,96179\,7 \\ \text{あるいは} & Ad = 0.00200\,20026\,70673\,1 \quad \text{および} & AD = 0.00199\,80026\,62673\,1 \end{array}$$

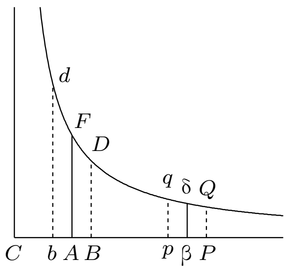
すでに見出されたこれらの面積から，加法と除法だけで，他のものを導くのは簡単である。 481
例えば，$\dfrac{1.2}{0.8}$ in $\dfrac{1.2}{0.9} = 2$ であるから，$\dfrac{1.2}{0.8}$ および $\dfrac{1.2}{0.9}$ の比に関わる (すなわち，底線の $1.2 - 0.8$ および $1.2 - 0.9$ の部分の上に立っている) 面積の和 $0.69314\,71805\,59945\,3$ は，知られているように，$C\beta = 2$ であるときの面積 $AF\delta\beta$ であろう。次に，$\dfrac{1.2}{0.8}$ in $2 = 3$ であるから，$\dfrac{1.2}{0.8}$ および 2［の比］に関わる面積の和 $1.09861\,22886\,68109\,7$ は $C\beta = 3$ であるときの面積 $AF\delta\beta$ であろう。同じように，$\dfrac{2 \times 2}{0.8} = 5$ および 2 in $5 = 10$ であるから，面積を適当に加えることによって，$C\beta = 5$ であるときの $1.60933\,79124\,34100\,4 = AF\delta\beta$，および $C\beta = 10$ であるときの $2.30258\,50929\,94045\,7 = AF\delta\beta$ が得られるであろう。そして，それゆえ，$10 \times 10 = 100$，および 10 in $100 = 1000$，および $\sqrt{5 \text{ in } 10 \text{ in } 0.98} = 7$，および 10 in $1.1 = 11$，および $\dfrac{1000 \times 1.001}{7 \times 11} = 13$，および $\dfrac{100 \times 1.02}{2 \times 3} = 17$，および $\dfrac{1000 \times 0.999}{3 \times 3 \times 3} = 37$，および $100 \times 1.01 = 101$，および $\dfrac{1000 \times 1.002}{2 \times 3} = 167$，および $\dfrac{1000 \times 0.998}{2} = 499$ であるから，$CA = AF = 1$ を固定してあるときに，$C\beta = 100$，1000，7 あるいは［上で］列挙された任意の他の数であるときの面積 $AF\delta\beta$ は上で見出された面積の結合によって見出すことができることは明らかである。私は，多くの素数に対応する双曲線の面積 (これから対数は簡単に導かれる) を，いわばほとんど面倒のない 2 つの操作だけで，定めるような，対数の表を構成するための最も適切な方法を明らかにすることをを示そうとした。しかし，その表は他のどんなものより都合よくこの泉から［この方法によって］取り出されるように見えるから，最後に，どうしてその構成［方法］に触れずにいられようか。

それゆえ，はじめに，そうするのが常であるように，0 が数 1 の対数，1 が数 10 の対数と仮定されると，素数 2，3，5，7，11，13，17，37［，$\cdots$］の対数は，見出された双曲線の面積を $2.30258\,50929\,94045\,7$，すなわち数 10 に対応する面積，で割ることによって，あるいは同じことだが，その逆数 $0.43429\,44819\,03251\,8$ を掛けることによって，見出されるであろう。それゆえ，確かに，例えば，もし数 2 に対応する面積 $0.69314\,718\cdots$ に $0.43429\cdots$ が掛けられると，数 2 の対数 $0.30102\,99956\,63981\,2$ となる。

それゆえ，これらの乗法によってつくられる表におけるすべての数の対数は，通常そうされるように，それらの対数の加法によって探し出され，空白の場所はこの定理の助けによって後で挿入さ 482
れるであろう。

n をその対数が与えられるであろう数とし，x をそれおよびそこから両側に等しい距離にあって

その対数が知られている最も近い数との間の差とし，d をそれらの対数の差の半分としよう。すると，数 n の求める対数は小さい方の数の対数に $d+\dfrac{dx}{2n}+\dfrac{dx^3}{12n^3}\cdots$ を加えることによって得られるであろう。なぜならば，もし数が Cp，$C\beta$ および CP で表され，上のように長方形 CBD あるいは $C\beta\delta=1$ とし，平行に縦線 pq および PQ が立てられるならば，もし $C\beta$ の代わりに n と，βp あるいは βP の代わりに x と書かれるなら，面積 $pqQP$ あるいは $\dfrac{2x}{n}+\dfrac{2x^3}{3n^3}+\dfrac{2x^5}{5n^5}\cdots$ が面積 $pq\delta\beta$ あるいは $\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^2}{2n^2}+\dfrac{x^3}{3n^3}\cdots$ に対するように，最も外側の数の対数の間の差あるいは $2d$ が小さい方の数および中間の数の対数の間の差に対するであろうし，それゆえ，この差は $\dfrac{\dfrac{dx}{n}+\dfrac{dx^2}{2n^2}+\dfrac{dx^3}{3n^3}\cdots}{\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^3}{3n^3}+\dfrac{x^5}{5n^5}\cdots}$，すなわち除法が行われると $d+\dfrac{dx}{2n}+\dfrac{dx^3}{12n^3}\cdots$，であろうからである。



しかし，この級数のはじめの 2 つの項 $d+\dfrac{dx}{2n}$ で —— たとえ，もしその対数が与えられるであろう数が少なくとも 1000 であるならば，対数は 14 桁あるいはおそらく 15 桁まで伸ばされたけれども —— 表をつくるには十分正確であると私は思う。確かに，x はたいていは単位か数 2 であるから，これが計算の困難さを引き起こすことは全くない。それにもかかわらず，この規則の助けによってすべての［空白の］場所に挿入する必要はない。なぜならば，最後にやり遂げられた［得られた］数の乗法や除法によってつくられた数の対数は，対数が先に得られている数によって，それらの対数の加法や減法によって得ることができるであろうからである。さらに，対数の差およびそれらの第 2 の差，［そして］もし必要ならば第 3 の差によって，それらの差を得るためにいくつかの完全な場所の連続が要求されるときに前述の規則を利用するだけで，空白の場所をより容易に満たすことができる。
483

同じ方法で，3 つの数について，それらの数が算術数列になっていないとしても，最小および中間の数の対数，あるいは中間および最大の数の対数が与えられるとき，対数を挿入するための規則を見出すことができる。

確かに，この方法の諸段階を追跡することによって，人工的な正弦および正接の表を構成するための規則を，自然の表の助けなしに，ほとんど困難なくつくり出すことができる。しかし，これはついでである。

この「問題 9」では，曲線下の面積の算出法が 5 つの場合に分けて述べられている。「第 3，第 4，第 5 の例」では無限級数の項別積分による求積法が扱われているが，もちろん主要部は「第 5 の例」である。これについては「解析について」でも述べられているが，ここではより洗練され深くなっている。

「解析について」では $y^3+a^2y+axy-2a^3-x^3=0$ を x に関する無限級数に展開する方法が詳しく述べられて，

$$y=a-\frac{x}{4}+\frac{x^2}{64a}+\frac{131x^3}{512a^2}+\cdots\ (x\text{ が小さいとき})$$

$$y=x-\frac{a}{4}+\frac{a^2}{64x}+\frac{131a^3}{512x^2}+\cdots\ (x\text{ が大きいとき})$$

とされているが，ここでは $\dot{z}^3 - c\dot{z}^2 - 2x^2\dot{z} - c^2\dot{z} + 2x^3 + c^3 = 0$ の根として

$$\dot{z} = c + x - \frac{x^2}{4c} + \frac{x^3}{32c^2} + \cdots$$
$$\dot{z} = c - x + \frac{3x^2}{4c} - \frac{15x^3}{32c^2} + \cdots$$
$$\dot{z} = -c - \frac{x^2}{2c} - \frac{x^3}{2c^2} + \frac{x^5}{4c^4} + \cdots$$

の 3 つが挙げられている (117 ページ)。

次の例 $\dot{z} = \dfrac{1}{1+x^2}$ (117 ページ) では，$z = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 - \cdots$ と無限級数展開して，

$$bdDB = \int_x^X \frac{1}{1+\xi^2}\,d\xi = \left(X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5 - \cdots\right) - \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots\right)$$

とする。そして，$x \to 0$ として $AFDB$ を求める。すなわち，

$$AFDB = \int_0^X \frac{1}{1+\xi^2}\,d\xi = \tan^{-1} X = X - \frac{1}{3}X^3 + \frac{1}{5}X^5 - \cdots$$

ただし，これが収束するためには $AB = X < 1\ [= AF]$ でなければならない (『数学論文集』第 3 巻 p.217)。

そこで，$AB > 1\ [= AF]$ の場合には，$z = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{5x^5} + \cdots$ を用い，

$$\begin{aligned} bdDB &= \int_{\frac{1}{X}}^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+\xi^2}\,d\xi \\ &= \left(-\frac{1}{X} + \frac{1}{3X^3} - \frac{1}{5X^5} + \cdots\right) - \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots\right) \\ &= \tan^{-1}\frac{1}{x} - \tan^{-1}\frac{1}{X} \end{aligned}$$

とする。ここで，$X \to \infty$ とすれば，

$$bdH = \int_x^\infty \frac{1}{1+\xi^2}\,d\xi = \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} - \cdots$$

となる。

また，関数 $y = f(x)$ について，$a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$，$b \leqq x \leqq c$ で $f(x) \leqq 0$ であるとき，$\displaystyle\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$ であることが注意されている。

双曲線および円の面積に関して，ニュートンがしたこと (120 ページ) は，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x+x^2}\,dx$，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x-x^2}\,dx$ の値を求めることであるが，無限級数の方法によらないとするなら次のようになろう。

まず，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x+x^2}\,dx$ については $\cdots\cdots$

$t = \sqrt{x+x^2} + x$ とおくと，$x = \dfrac{t^2}{2t+1}$，$dx = \dfrac{2t(t+1)}{(2t+1)^2}\,dt$ となるから，

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x+x^2}\,dx = \int (t-x)\,\frac{2t(t+1)}{(2t+1)^2}\,dt = \int \frac{t(t+1)}{2t+1}\frac{2t(t+1)}{(2t+1)^2}\,dt \\ &= \int \frac{2t^2(t+1)^2}{(2t+1)^3}\,dt \end{aligned}$$

となる。

さらに，$u = 2t+1$ とおくと，$t = \dfrac{u-1}{2}$，$dt = \dfrac{1}{2}\,du$ となるから，

$$I = \int 2\left(\frac{u-1}{2}\right)^2\left(\frac{u+1}{2}\right)^2 \frac{1}{u^3}\cdot\frac{1}{2}\,du = \frac{1}{16}\int \frac{u^4 - 2u^2 + 1}{u^3}\,du$$

$$= \frac{1}{16}\int\left(u-\frac{2}{u}+u^{-3}\right)du = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2}\,u^2-2\log u-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u^2}\right)$$

となる。

ここで，$u=2t+1=2\sqrt{x+x^2}+2x+1$ であるから，$u^2=8x^2+8x+1+4(2x+1)\sqrt{x+x^2}$，$\dfrac{1}{u^2}=8x^2+8x+1-4(2x+1)\sqrt{x+x^2}$ となって，

$$I=\frac{1}{16}\left(4(2x+1)\sqrt{x+x^2}-2\log\left(2\sqrt{x+x^2}+2x+1\right)\right)$$

ということになる。それゆえ，

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{x+x^2}\,dx &= \left[\frac{1}{16}\left(4(2x+1)\sqrt{x+x^2}-2\log\left(2\sqrt{x+x^2}+2x+1\right)\right)\right]_0^{\frac{1}{4}}\\ &= \frac{1}{16}\left(\frac{3\sqrt{5}}{2}-2\log\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)\\ &= 0.08932\,84166\,25704\,42216\,39203\,03087\,46504\,12887\cdots\cdots\end{aligned}$$

である。

次に，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}}\sqrt{x-x^2}\,dx$ については［こちらは既出 (18 ページ，35 ページ)］……

$t=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ とおくと，$x=\dfrac{t^2}{1+t^2}$，$dx=2t(1-x)^2dt=\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt$ となるから，

$$\begin{aligned}J &= \int\sqrt{x-x^2}\,dx=\int\sqrt{x(1-x)}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt\\ &= \int\sqrt{\frac{t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+t^2}}\cdot\frac{2t}{(1+t^2)^2}\,dt=2\int\frac{t^2}{(1+t^2)^3}\,dt\end{aligned}$$

となる。

ここで，$\left(\dfrac{t}{(1+t^2)^2}\right)'=\dfrac{(1+t^2)^2-t\cdot2(1+t^2)\cdot2t}{(1+t^2)^4}=\dfrac{1}{(1+t^2)^2}-\dfrac{4t^2}{(1+t^2)^3}$ であるから，

$$\int\frac{t^2}{(1+t^2)^3}\,dt=\frac{1}{4}\left(\int\frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt-\frac{t}{(1+t^2)^2}\right)$$

がいえる。

ところで，$J_n=\displaystyle\int\frac{1}{(u^2+a^2)^n}\,du$ とおくと，

$$\left(\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}}\right)'=\frac{1}{(u^2+a^2)^{n-1}}-\frac{(2n-2)u^2}{(u^2+a^2)^n}=\frac{(2n-2)a^2}{(u^2+a^2)^n}-\frac{2n-3}{(u^2+a^2)^{n-1}}$$

であることから，

$$\begin{aligned}\frac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}} &= \int\frac{(2n-2)a^2}{(u^2+a^2)^n}\,du-\int\frac{2n-3}{(u^2+a^2)^{n-1}}\,du\\ &= (2n-2)a^2J_n-(2n-3)J_{n-1}\end{aligned}$$

となって，漸化式

$$\begin{cases} J_n=\dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{1}{2n-2}\cdot\dfrac{u}{(u^2+a^2)^{n-1}}+\dfrac{2n-3}{2n-2}\cdot J_{n-1}\right)\\[2ex] J_1=\displaystyle\int\frac{1}{u^2+a^2}\,du=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}\end{cases}$$

が成り立つ。

それゆえ，

$$\begin{aligned}J &= 2\int\frac{t^2}{(1+t^2)^3}\,dt=\frac{1}{2}\left(\int\frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt-\frac{t}{(1+t^2)^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1+t^2}+\frac{1}{2}\,J_1\right)-\frac{t}{(1+t^2)^2}\right\}\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{t}{1+t^2}+\tan^{-1}t-\frac{2t}{(1+t^2)^2}\right)=\frac{1}{4}\left(\tan^{-1}t+\frac{t^3-t}{(1+t^2)^2}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + (2x-1)\sqrt{x-x^2}\right)$$

となることから，

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x-x^2}\,dx = \left[\frac{1}{4}\left(\tan^{-1}\sqrt{\frac{x}{1-x}} + (2x-1)\sqrt{x-x^2}\right)\right]_0^{\frac{1}{4}}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$$
$$= 0.07677\,31061\,63047\,30284\,65441\,09464\,58744\,20412\cdots\cdots$$

である。

ついでに，ニュートンはこの $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x-x^2}\,dx$ を基に直径が 1 の円の面積を求め，そこから円周率の値を，かなり高精度に，導いている (122 ページ)。

最後には，対数表の作成法についても述べられている。

双曲線 $y = \dfrac{ab}{z}$ において，$CA = a$，$AF = b$ とし，$Ab = AB = x$ とすると，

$$AFdb = \int_{a-x}^{a} \frac{ab}{z}dz = ab\log\frac{a}{a-x} = bx + \frac{bx^2}{2a} + \frac{bx^3}{3a^2} + \frac{bx^4}{4a^3} + \cdots$$
$$AFDB = \int_{a}^{a+x} \frac{ab}{z}dz = ab\log\frac{a+x}{a} = bx - \frac{bx^2}{2a} + \frac{bx^3}{3a^2} - \frac{bx^4}{4a^3} + \cdots$$

であるから，

$$AFdb + AFDB = bdDB = \int_{a-x}^{a+x} \frac{ab}{z}dz$$
$$= ab\log\frac{a+x}{a-x} = 2bx + \frac{2bx^3}{3a^2} + \frac{2bx^5}{5a^4} + \cdots$$
$$AFdb - AFDB = ab\log\frac{a^2}{(a-x)(a+x)} = \frac{bx^2}{a} + \frac{bx^4}{2a^3} + \frac{bx^6}{3a^5} + \cdots$$

となる。ここで，$a = b = 1$ とすると，

$$Ad = \log\frac{1}{1-x} = -\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$
$$AD = \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$
$$Ad + AD = \log\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \cdots$$
$$Ad - AD = \log\frac{1}{(1-x)(1+x)} = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \cdots$$

ということになる。

ここで，ニュートンは $Ad = \dfrac{(Ad+AD)+(Ad-AD)}{2}$，$AD = \dfrac{(Ad+AD)-(Ad-AD)}{2}$ として，Ad，AD の値を求める。

例えば，$x = \dfrac{1}{10}$ として，$Ad = -\log\dfrac{9}{10} = 0.1053605\cdots$，$AD = \log\dfrac{11}{10} = 0.0953101\cdots$。

また，$x = \dfrac{2}{10}$ とすれば，$Ad = -\log\dfrac{8}{10} = 0.2231413\cdots$，$AD = \log\dfrac{12}{10} = 0.18232\cdots$。

すると，例えば $\dfrac{1.2}{0.8} \times \dfrac{1.2}{0.9} = 2$，$\dfrac{1.2}{0.8} \times 2 = 3$ であるから，

$$\log 2 = \log\left(\frac{1.2}{0.8} \times \frac{1.2}{0.9}\right) = \log\frac{1.2}{0.8} + \log\frac{1.2}{0.9}$$
$$= \log 1.2 - \log 0.8 + \log 1.2 - \log 0.9 = 0.693147\cdots$$

［真の値は $\log 2 = 0.69314\,71805\,59945\,30941\,72321\,21458\cdots$］

$$\log 3 = \log\left(\frac{1.2}{0.8} \times 2\right) = \log\frac{1.2}{0.8} + \log 2$$

$$= \log 1.2 - \log 0.8 + \log 2 = 1.098612\cdots$$

［真の値は $\log 3 = 1.09861\,22886\,68109\,69139\,52452\,36922\cdots$］

などのようにして，加法だけで自然対数の値が求められるという訳である。
なお，常用対数の値を得るには $\log 10$ の値 $2.30258\cdots$ で割ればよいことも注意されている。

(483)

第 10 章

［円錐曲線と比較できる曲線の面積について］

これまで，あまり単純でない方程式によって定められる曲線の求積を，それらを無限に多くの単純な項からなる方程式に還元することによって明らかにしてきた。しかし，この種の曲線はときには有限方程式によっても求積することができ，あるいは，少なくとも，その面積がある程度は知られていると見なされる，円錐曲線のような，他の曲線と比較できる。このため，私は今，約束した
484 ように，問題 7 および 8 を使ってつくられる次の 2 つの定理の一覧を付け加えることにした。

これらのうちの前者は求積することができる曲線の面積を表し，後者はその面積が円錐曲線の面積と比較することができる曲線を含んでいる。

どちらにおいても，上のように，斜体字 d，e，f，g および h は与えられた任意の量を表し，x および z は曲線の底線，v および y は平行な縦線，そして s および t は面積を表す。一方，量 z のギリシア文字の添え字 η および θ は，整数であろうと分数であろうと，そして正であろうと負であろうと，その z の次元の数を表す。例えば，もし $\eta = 3$ とすると，$z^{\eta} = z^3$，$z^{2\eta} = z^6$，$z^{-\eta} = z^{-3}$ あるいは $\dfrac{1}{z^3}$，$z^{\eta+1} = z^4$，そして $z^{\eta-1} = z^2$ であろう。

さらに，面積の値において，簡単のために，縦線 y の値が作用される根 $\sqrt{e + fz^{\eta}}$，あるいは $\sqrt{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}}$ の代わりに R と書かれる。

ここで，問題 7，8 に基づいてつくられる積分の「一覧」(公式集 !!) が載せられる。「1666 年論文」にも同様の「一覧」が見られるが，ここでのものはそれを拡充したものである。
第 1 の「一覧」については，「前半の $dz^{\theta}(e + fz)^{\lambda} = y$ の形に還元される比較的単純な型の曲線については，一覧表は左から右へと容易に読まれるが，後半の型では，むしろ右欄の方が例えば $z^{\theta}R^{\mu}$ のような簡単な表現をしていることを考えると，一覧表は右から左へと読まれるべきであることが容易に推測できる」という (［1］p.135)。
なお，問題 8 に関係する第 2 の「一覧」は円錐曲線の積分に還元するための置換積分の公式集といえるものであるが，『全集』には (この位置では) 明示されていなくて，「曲線の求積について」に掲載されている「一覧」を見るように指示されている。そのため，ここでの第 2 の「一覧」は『英訳版方法』(pp.103–106) を基にしている。

485 **問題 7 によって構成された，直線図形に関係するいくつかの曲線の一覧**

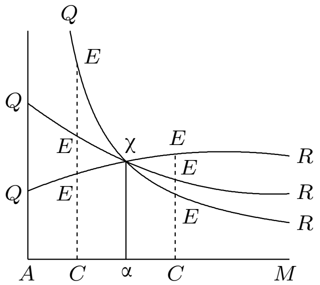
曲線の型		面積の値
I	$dz^{\eta-1} = y$	$\dfrac{d}{\eta}\, z^{\eta} = t$
II	$\dfrac{dz^{\eta-1}}{e^2 + 2efz^{\eta} + f^2z^{2\eta}} = y$	$\dfrac{dz^{\eta}}{\eta e^2 + \eta efz^{\eta}} = t$ あるいは $\dfrac{-d}{\eta ef + \eta f^2 z^{\eta}} = t$
III　1	$dz^{\eta-1}\sqrt{e + fz^{\eta}} = y$	$\dfrac{2d}{3\eta f}\, R^3 = t$

曲線の型			面積の値
III	2	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\dfrac{-4e+6fz^{\eta}}{15\eta f^2}\,dR^3=t$
	3	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\dfrac{16e^2-24efz^{\eta}+30f^2z^{2\eta}}{105\eta f^3}\,dR^3=t$
	4	$dz^{4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\dfrac{-96e^3+144e^2fz^{\eta}-180ef^2z^{2\eta}+210f^3z^{3\eta}}{945\eta f^4}\,dR^3=t$
IV	1	$\dfrac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{2d}{\eta f}\,R=t$
	2	$\dfrac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{-4e+2fz^{\eta}}{3\eta f^2}\,dR=t$
	3	$\dfrac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{16e^2-8efz^{\eta}+6f^2z^{2\eta}}{15\eta f^3}\,dR=t$
	4	$\dfrac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{-96e^3+48e^2fz^{\eta}-36ef^2z^{2\eta}+30f^3z^{3\eta}}{105\eta f^4}\,dR=t$

道がより深く拡げられるように，これらにより一般的な次の定理を付け加えよう。
$\sqrt{h+iz^{\eta}}$ の代わりに p とおかれる。

曲線の型			面積の値
V	1	$2\theta ez^{\eta-1}\begin{matrix}+2\theta f\\+3\eta f\end{matrix}\;z^{\theta+\eta-1}\times\dfrac{1}{2}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$z^{\theta}R^3=t$
	2	$2\theta ez^{\eta-1}\begin{matrix}+2\theta f\\+3\eta f\end{matrix}\;z^{\theta+\eta-1}\begin{matrix}+2\theta g\\+6\eta g\end{matrix}\;z^{\theta+2\eta-1}$ in $\dfrac{1}{2}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$z^{\theta}R^3=t$
VI	1	$\dfrac{2\theta ez^{\theta-1}+(2\theta+\eta)\times fz^{\theta+\eta-1}}{2\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$z^{\theta}R=t$
	2	$\dfrac{2\theta ez^{\theta-1}+(2\theta+\eta)\times fz^{\theta+\eta-1}+(2\theta+2\eta)\times gz^{\theta+2\eta-1}}{2\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$	$z^{\theta}R=t$
VII	1	$\dfrac{2\theta ez^{\theta-1}+(2\theta-\eta)\times fz^{\theta+\eta-1}}{(e+fz^{\eta})\text{ in }2\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{z^{\theta}}{R}=t$
	2	$\dfrac{2\theta ez^{\theta-1}+(2\theta-\eta)\times fz^{\theta+\eta-1}+(2\theta-2\eta)\times gz^{\theta+2\eta-1}}{(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta})\text{ in }2\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$	$\dfrac{z^{\theta}}{R}=t$
VIII	1	$\dfrac{2\theta ez^{\theta-1}+(2\theta-2\eta)\times fz^{\theta+\eta-1}}{e^2+2efz^{\eta}+f^2z^{2\eta}}=2y$	$\dfrac{z^{\theta}}{R^2}\left(\text{あるいは}\dfrac{z^{\theta}}{e+fz^{\eta}}\right)=t$
	2	$\dfrac{2\theta ez^{\theta-1}+(2\theta-2\eta)\times fz^{\theta+\eta-1}+(2\theta-4\eta)\times gz^{\theta+2\eta-1}}{e^2+2efz^{\eta}+(f^2+2eg)\times z^{2\eta}+2fgz^{3\eta}+ggz^{4\eta}}=2y$	$\dfrac{z^{\theta}}{R^2}\left(\text{あるいは}\dfrac{z^{\theta}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}\right)=t$
IX		$2\theta ehz^{\theta-1}\begin{matrix}+(2\theta+3\eta)\times fh\\+(2\theta+\eta)\times ei\end{matrix}\;z^{\theta+\eta-1}+(2\theta+4\eta)\times fiz^{\theta+2\eta-1}$ in $\dfrac{\sqrt{e+fz^{\eta}}}{2\sqrt{h+iz^{\eta}}}=y$	$z^{\theta}R^3p=t$

曲線の型		面積の値
X	$2\theta ehz^{\theta-1}\ \begin{matrix}+(2\theta+3\eta)\times fh\\+(2\theta-\eta)\times ei\end{matrix}\ z^{\theta+\eta-1}+(2\theta+2\eta)\times fiz^{\theta+2\eta-1}$ $\text{in}\ \dfrac{\sqrt{e+fz^{\eta}}}{(h+iz^{\eta})\ \text{in}\ 2\sqrt{h+iz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{z^{\theta}R^3}{p}=t$

486 

このような種類の他のことを付け加えることができるが，今は，円錐曲線と比較することができる，別の種類の曲線に進もう。そして，この一覧では，その底線の始点が A であり，底線が AC，平行な縦線が CE，面積の始線が $\alpha\chi$，そして描かれた面積が $\alpha\chi EC$ であるような線 $QE\chi R$ によって表される曲線が提示される。しかし，この面積の始線あるいは終端 (それはたいてい底線の始点 A で始まるか，あるいは無限に遠くまで遠ざかるかである) は，面積の値が零であるときに，底線の長さ $A\alpha$ を求めることによって，そして垂線 $\alpha\chi$ を立てることによって見出される。

487 同様に，線 PDG によって表される円錐曲線が現れるが，その中心は A であり，頂点は a，直交する半径は Aa および AP，底線の始点は A，あるいは a，あるいは α，底線は AB，あるいは aB，あるいは αB，縦線は BD，AB と T で交わる接線は DT，弦は aD，そして内接あるいは外接する長方形は $ABDO$ である。

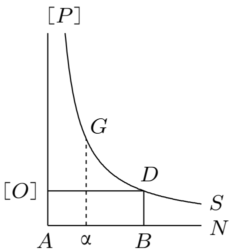


図 1

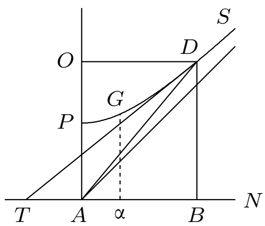


図 2

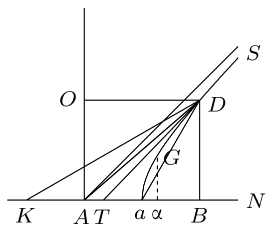


図 3

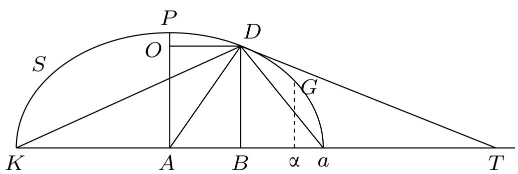


図 4

それゆえ，前に定められた文字がそのままにされると，$AC=z$, $CE=y$, $\alpha\chi EC=t$，AB あるいは $aB=x$，$BD=v$ そして $ABDP$ あるいは $aGDB=s$ であろう。そして，もしいつかある面積を定めるのに 2 つの円錐曲線が必要とされるならば，後者の円錐曲線の面積が σ，その底線が ξ，平行な縦線が Υ といわれる。[簡単のために，$\sqrt{ff-4eg}$ の代わりに p と書かれる。]

問題 8 によって構成された，円錐曲線に関係するいくつかの曲線の一覧

型	曲線	面積の値
	円錐曲線の底線	円錐曲線の共役縦線
I　1	$\dfrac{dz^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\dfrac{1}{\eta}s=t=\dfrac{\alpha GDB}{\eta}$　(図 1)
	$z^{\eta}=x$	$\dfrac{d}{e+fx}=v$

型		曲線	面積の値
		円錐曲線の底線	円錐曲線の共役縦線
I	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{d}{\eta f}z^{\eta}-\frac{e}{\eta f}s=t$
		$z^{\eta}=x$	$\frac{d}{e+fx}=v$
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{d}{2\eta f}z^{2\eta}-\frac{de}{\eta f^2}z^{\eta}+\frac{e^2}{\eta f^2}s=t$
		$z^{\eta}=x$	$\frac{d}{e+fx}=v$
II	1	$\frac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{\lvert 2xv-4s\rvert}{\eta}=t=\frac{4}{\eta}ADGa$ （図 3，4）
		$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}x^2}=v$
	2	$\frac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{2de}{\eta f}z^{\frac{1}{2}\eta}+\frac{4es-2exv}{\eta f}=t$
		$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}x^2}=v$
	3	$\frac{dz^{\frac{5}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\frac{2de}{3\eta f}z^{\frac{3}{2}\eta}-\frac{2de^2}{\eta f^2}z^{\frac{1}{2}\eta}+\frac{2e^2xv-4e^2s}{\eta f^2}=t$
		$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}x^2}=v$
III	1	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fx^{\eta}}=y$	$\frac{4de}{\eta f}\times\left(\frac{v^3}{2ex}-s\right)=t=\frac{4de}{\eta f}$ in $aGDT$, あるいは in $\lvert APDB-TDB\rvert$ （図 2，3，4）
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$
		あるいは,	$\frac{8de^2}{\eta f^2}\times\left(s-\frac{1}{2}xv-\frac{fv}{4e}+\frac{f^2v}{4e^2x}\right)=t$ $=\frac{8de^2}{\eta f^2}$ in $aGDA+\frac{f^2v}{4e^2x}$ （図 3，4）
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$
	2	$\frac{d}{z^{\eta+1}}\sqrt{e+fx^{\eta}}=y$	$\frac{-2d}{\eta}s=t=\frac{2d}{\eta}APDB$ あるいは $\frac{2d}{\eta}aGDB$ （図 2，3，4）
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$
		あるいは,	$\frac{4de}{\eta f}\times\left(s-\frac{1}{2}xv-\frac{fv}{2e}\right)=t=\frac{4de}{\eta f}\times aGDK$ （図 3，4）
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$

型		曲線 円錐曲線の底線	面積の値 円錐曲線の共役縦線
III	3	$\dfrac{d}{z^{2\eta+1}}\sqrt{e+fx^{\eta}}=y$	$\dfrac{-d}{\eta}s=t=\dfrac{d}{\eta}\times -aGDB$ あるいは $BDPK$ (図 4)
		$\dfrac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$
	4	$\dfrac{d}{z^{3\eta+1}}\sqrt{e+fx^{\eta}}=y$	$\dfrac{3dfs-2dv^3}{6\eta e}=t$
		$\dfrac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$
IV	1	$\dfrac{d}{z\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{4d}{\eta f}\times\left\lvert\dfrac{1}{2}xv-s\right\rvert=t=\dfrac{4d}{\eta f}$ in PAD あるいは in $aGDA$ (図 2，3，4)
		$\dfrac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$
		あるいは,	$\dfrac{8de}{\eta f^2}\times\left(s-\dfrac{1}{2}xv-\dfrac{fv}{4e}\right)=t=\dfrac{8de}{\eta f^2}$ in $aGDA$ (図 3，4)
		$\dfrac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$
	2	$\dfrac{d}{z^{\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{2d}{\eta e}\times(s-xv)=t=\dfrac{2d}{\eta e}$ in POD あるいは in $AODGa$ (図 2，3，4)
		$\dfrac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$
		あるいは,	$\dfrac{4d}{\eta f}\times\left\lvert\dfrac{1}{2}xv-s\right\rvert=t=\dfrac{4d}{\eta f}$ in $aGDA$ (図 3，4)
		$\dfrac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$
	3	$\dfrac{d}{z^{2\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{d}{\eta e}\times\lvert 3s-2xv\rvert=t$ $=\dfrac{d}{\eta e}$ in $\lvert 3aDGA-\triangle aDB\rvert$ (図 3，4)
		$\dfrac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$
	4	$\dfrac{d}{z^{3\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{10dfxv-15dfs-2dex^2v}{6\eta e^2}=t$
		$\dfrac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$

型		曲線	面積の値
		円錐曲線の底線	円錐曲線の共役縦線
V	1	$\dfrac{dz^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$\dfrac{xv-2s}{\eta}=t$
		$\sqrt{\dfrac{d}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=x$	$\sqrt{\dfrac{d}{g}+\dfrac{f^2-4eg}{4g^2}x^2}=v$
		あるいは,	$\dfrac{2s-xv}{\eta}=t$
		$\sqrt{\dfrac{dz^{2\eta}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=x$	$\sqrt{\dfrac{d}{e}+\dfrac{f^2-4eg}{4e^2}x^2}=v$
	2	$\dfrac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$\dfrac{d\sigma+2fs-fxv}{2\eta g}=t$
		$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{d}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=x\\ fz^{\eta}+gz^{2\eta}=\xi\end{cases}$	$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{d}{g}+\dfrac{f^2-4eg}{4g^2}x^2}=v\\ \dfrac{1}{e+\xi}=\Upsilon\end{array}\right\}$
VI	1	$\dfrac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$\dfrac{2xv-4s-2\xi\Upsilon+4\sigma}{\eta p}=t$
		$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2dg}{f-p+2gz^{\eta}}}=x\\ \sqrt{\dfrac{2dg}{f+p+2gz^{\eta}}}=\xi\end{cases}$	$\left.\begin{array}{l}\sqrt{d+\dfrac{-f+p}{2g}x^2}=v\\ \sqrt{d+\dfrac{-f-p}{2g}\xi^2}=\Upsilon\end{array}\right\}$
	2	$\dfrac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$\dfrac{4s-2xv-4\sigma+2\xi\Upsilon}{\eta p}=t$
		$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2dez^{\eta}}{fz^{\eta}-pz^{\eta}+2e}}=x\\ \sqrt{\dfrac{2dez^{\eta}}{fz^{\eta}+pz^{\eta}+2e}}=\xi\end{cases}$	$\left.\begin{array}{l}\sqrt{d+\dfrac{-f+p}{2e}x^2}=v\\ \sqrt{d+\dfrac{-f-p}{2e}\xi^2}=\Upsilon\end{array}\right\}$
VII	1	$\dfrac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	
			$\dfrac{4de^2\xi\Upsilon+2def\Upsilon-2dfgxv+4degv-2df^2v-8de^2\sigma+4dfgs}{4\eta eg-\eta f^2}=t$
		$\begin{cases}z^{\eta}=x\\ \dfrac{1}{z^{\eta}}=\xi\end{cases}$	$\left.\begin{array}{l}\sqrt{e+fx+gx^2}=v\\ \sqrt{g+f\xi+e\xi^2}=\Upsilon\end{array}\right\}$
	2	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$\dfrac{d}{\eta}s=t=\dfrac{d}{\eta}\times\alpha GDB$ （図 2，3，4）
		$z^{\eta}=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$
	3	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$\dfrac{d}{3\eta g}v^3-\dfrac{df}{2\eta g}s=t$
		$z^{\eta}=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$

型		曲線	面積の値
		円錐曲線の底線	円錐曲線の共役縦線
VII	4	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$\frac{6dgx-5df}{24\eta g^2}v^3+\frac{5df^2-4deg}{16\eta g^2}=t$
		$z^{\eta}=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$
VIII	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$	$\frac{8dgs-4dgxv-2dfv}{4\eta eg-\eta f^2}=t$ $=\frac{8dg}{4\eta eg-\eta f^2}$ in $\alpha GDB\pm\triangle DBA$　(図 2，4)
		$z^{\eta}=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$	$\frac{-4dfs+2dfxv+4dev}{4\eta eg-\eta f^2}=t$
		$z^{\eta}=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$	$\frac{(3df^2-4deg)s+(-2df^2+4deg)xv-2defv}{4\eta eg^2-\eta f^2g}=t$
		$z^{\eta}=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$
	4	$\frac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$ $\frac{\begin{matrix}36defg\\-15df^3\end{matrix}\,s\,\begin{matrix}+8deg^2\\-2df^2g\end{matrix}\,x^2v\,\begin{matrix}+10df^3\\-28defg\end{matrix}\,xv\,\begin{matrix}+10def^2\\-16de^2g\end{matrix}\,v}{24\eta eg^3-6\eta f^2g^2}=t$	
		$z^{\eta}=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$
IX	1	$\frac{dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}}=y$	$\frac{(4fg-4eh)s+(-2fg+2eh)xv+2df\,\frac{v}{x}}{\eta fh}=t$
		$\sqrt{\frac{d}{g+hz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}x^2}=v$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}}=y$ $\frac{(4egh-4fg^2)s+(-2egh+2fg^2)xv+\frac{2}{3}dh\,\frac{v^3}{x^3}-2dfg\,\frac{v}{x}}{\eta fh^2}=t$	
		$\sqrt{\frac{d}{g+hz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}x^2}=v$
X	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{(g+hz^{\eta})\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{2xv-4s}{\eta f}=t=\frac{4}{\eta f}ADGa$　(図 3，4)
		$\sqrt{\frac{d}{g+hz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}x^2}=v$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{(g+hz^{\eta})\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{4gs-2gxv+2d\,\frac{v}{x}}{\eta fh}=t$
		$\sqrt{\frac{d}{g+hz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}x^2}=v$

型	曲線	面積の値
	円錐曲線の底線	円錐曲線の共役縦線
XI 1	$dz^{-1}\sqrt{\dfrac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{dxv^3z^{-\eta}-4dfs-4de\sigma}{\eta fg-\eta eh}=t$
	$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{g+hz^{\eta}}=x\\ \sqrt{h+gz^{-\eta}}=\xi\end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{eh-fg}{h}+\dfrac{f}{h}x^2}=v\\ \sqrt{\dfrac{fg-eh}{g}+\dfrac{e}{g}\xi^2}=\Upsilon\end{array}\right\}$
2	$dz^{\eta-1}\sqrt{\dfrac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{2d}{\eta h}s=t$
	$\sqrt{g+hz^{\eta}}=x$	$\sqrt{\dfrac{eh-fg}{h}+\dfrac{f}{h}x^2}=v$
3	$dz^{2\eta-1}\sqrt{\dfrac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{dhxv^3+(-3dfg-deh)s}{2\eta fh^2}=t$
	$\sqrt{g+hz^{\eta}}=x$	$\sqrt{\dfrac{eh-fg}{h}+\dfrac{f}{h}x^2}=v$

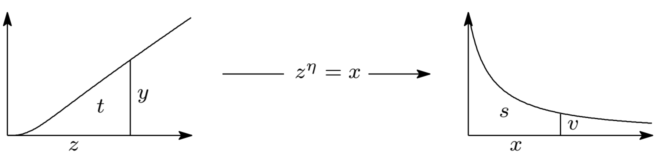
先に触れたように，問題 8 に関係する第 2 の「一覧」は円錐曲線の積分に還元するための置換積分の公式集といえる。

なお，上で絶対値記号 $|\quad|$ を用いて表したものは，ニュートンは記号 $\div$ を用いて表している。例えば，$|2xv-4s|$ は $2xv\div 4s$ と書かれている。

置換積分としての例を挙げると，第 2 の「一覧」における第 1 型の 2 つ目については，$z^{\eta}=x$ とおくと，

$$\begin{aligned}
t&=\int\frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{\eta}}\,dz=d\int\frac{xz^{\eta-1}}{e+fx}\cdot\frac{1}{\eta z^{\eta-1}}\,dx=\frac{d}{\eta}\int\frac{x}{e+fx}\,dx\\
&=\frac{d}{\eta}\int\left(\frac{1}{f}-\frac{\frac{e}{f}}{e+fx}\right)dx=\frac{d}{\eta}\int\frac{1}{f}\,dx-\frac{e}{\eta f}\int\frac{d}{e+fx}\,dx\\
&=\frac{d}{\eta}\cdot\frac{1}{f}\,x-\frac{e}{\eta f}\int v\,dx=\frac{d}{\eta f}z^{\eta}-\frac{e}{\eta f}s
\end{aligned}$$

となる。すなわち，積分 $t=\displaystyle\int\frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{\eta}}\,dz$ は積分 $s=\displaystyle\int\frac{d}{e+fx}\,dx$ から導かれる。



また，第 2 の「一覧」の第 9 型について，ホワイトサイドによれば (『数学論文集』第 3 巻 pp.258–259) $\cdots\cdots$

$x=\sqrt{\dfrac{d}{g+hz^{\eta}}}$ とおくと，$g+hz^{\eta}=\dfrac{d}{x^2}$，$z^{\eta}=\dfrac{d-gx^2}{hx^2}$ となるから，

$$\begin{aligned}
\sqrt{e+fz^{\eta}}&=\sqrt{e+f\cdot\frac{d-gx^2}{hx^2}}=\sqrt{\frac{df+(eh-fg)x^2}{hx^2}}\\
&=\frac{1}{x}\sqrt{\frac{df+(eh-fg)x^2}{h}}=\frac{v}{x}
\end{aligned}$$

であり，また

$$\frac{dx}{dz}=\frac{1}{2}\left(\frac{d}{g+hz^{\eta}}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{-dh\eta z^{\eta-1}}{(g+hz^{\eta})^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\,(-dh\eta)\,\frac{x^4}{d^2}\cdot z^{\eta-1}$$
$$=-\frac{h\eta}{2d}\,x^3z^{\eta-1}$$

である。

さて，$t_\lambda=\displaystyle\int\frac{dz^{\lambda\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}}\,dz$ とすると，

$$\begin{aligned}
t_\lambda&=\int dz^{(\lambda-1)\eta}z^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}\,(g+hz^{\eta})^{-1}\,dz\\
&=\int d\left(\frac{d-gx^2}{hx^2}\right)^{\lambda-1}z^{\eta-1}\cdot\frac{v}{x}\cdot\frac{x^2}{d}\left(-\frac{2d}{h\eta x^3z^{\eta-1}}\right)dx\\
&=-\frac{2d}{h^{\lambda}\eta}\int x^{-2\lambda}(d-gx^2)^{\lambda-1}v\,dx\\
&=-\frac{2d}{h^{\lambda}\eta}\int h^{-\frac{1}{2}}x^{-2\lambda}(d-gx^2)^{\lambda-1}\{df+(eh-fg)x^2\}^{\frac{1}{2}}\,dx
\end{aligned}$$

となるから，$I_\mu=\displaystyle\int h^{-\frac{1}{2}}x^{2\mu}\{df+(eh-fg)x^2\}^{-\frac{1}{2}}\,dx$ とおくと，

$$\begin{cases}
t_1=-\dfrac{2d}{h\eta}\,\{dfI_{-1}+(eh-fg)I_0\}\\
t_2=-\dfrac{2d}{h^2\eta}\,\{d\,(dfI_{-2}+(eh-fg)I_{-1})-g\,(dfI_{-1}+(eh-fg)I_0)\}
\end{cases}\qquad\cdots(*)$$

となる。ここで，

$$\begin{cases}
s=dfI_0+(eh-fg)I_1\\
xv=dfI_0+2(eh-fg)I_1\\
\dfrac{v}{x}=-dfI_{-1}\\
\dfrac{hv^3}{x^3}=-3df\{dfI_{-2}+(eh-fg)I_{-1}\}
\end{cases}$$

から，I_1，I_0，I_{-1}，I_{-2} を求めて上の式に代入すれば，求める結果が得られるという。

実際には，

$$I_1=\frac{x\sqrt{df+(eh-fg)x^2}}{2(eh-fg)\sqrt{h}}-\frac{df\sinh^{-1}\left(x\sqrt{\dfrac{eh-fg}{df}}\right)}{2(eh-fg)^{\frac{3}{2}}\sqrt{h}},$$

$$I_0=\frac{\sinh^{-1}\left(x\sqrt{\dfrac{eh-fg}{df}}\right)}{\sqrt{h(eh-fg)}},\quad I_{-1}=-\frac{\sqrt{df+(eh-fg)x^2}}{df\sqrt{h}\,x},$$

$$I_{-2}=\frac{(2ehx^2-2fgx^2-df)\sqrt{df-(eh-fg)x^2}}{3d^2f^2\sqrt{h}\,x^3},$$

$$\begin{aligned}
s&=\int\sqrt{\frac{df+(eh-fg)x^2}{h}}\,dx\\
&=\frac{df\sinh^{-1}\left(x\sqrt{\dfrac{eh-fg}{df}}\right)}{2\sqrt{h(eh-fg)}}+\frac{x\sqrt{df+(eh-fg)x^2}}{2\sqrt{h}}
\end{aligned}$$

である［maxima 5.18.1 による］が，上の I_1，I_0，I_{-1}，I_{-2} についての連立方程式を解いた

$$I_1=\frac{-(s-xv)}{eh-fg},\quad I_0=\frac{2s-xv}{df},\quad I_{-1}=\frac{-v}{dfx},$$

$$I_{-2}=\frac{h(3ex^2v-v^3)-3fgx^2v}{3d^2f^2x^3}$$

を $(*)$ に代入すれば，求めたい結果が得られる。

これらの部類の曲線について述べられた定理を例によって明らかにするように進む前に，［次のことを］見ておくことは有益であろう。 (487)

I　曲線を定める方程式において，量 d，e，f，g，h そして i の符号はすべて正であると見なしたけれども，それらが負になるときはいつでも，円錐曲線の底線や縦線の引き続く値，そしてまた求める面積の値において，［その符号が］替えられなければならない。

II　数 η および θ が負のとき，面積の値においてもその符号が替えられなければならない。さらに，それらの符号が替えられると，定理は新しい形を装うことができる。それゆえ，後者の一覧の第 4 型の中の第 3 の定理は，η の符号が替えられると，$\dfrac{d}{z^{-2\eta+1}\sqrt{e+fz^{-\eta}}}=y$，$\dfrac{1}{z^{-\eta}}=x$ など，すなわち $\dfrac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{ez^{2\eta}+fz^{\eta}}}=y$，$z^{\eta}=x$，$\sqrt{fx+ex^2}=v$，$\dfrac{d}{\eta e}$ in $2xv-3s=t$ ということになる。そして，他の場合も同様である。

III　それぞれの型 (もし前者の一覧の第 2 型を除けば) の系列は両方に無限に続けることができる。すなわち，前者の一覧の第 3 および第 4 の型の系列について，最初の項の数値係数 2，-4，16，-96，768，$\cdots$ は数 -2，-4，-6，-8，-10，$\cdots$ を続けて掛けることによって生成される。そして，引き続く項の係数は初項から，第 3 型においては，$-\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{5}{4}$，$-\dfrac{7}{6}$，$-\dfrac{9}{8}$，$-\dfrac{11}{10}$，$\cdots$ を 1 つずつ掛けることによって，第 4 型においては，$-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{3}{4}$，$-\dfrac{5}{6}$，$-\dfrac{7}{8}$，$-\dfrac{9}{10}$，$\cdots$ を掛けることによって，導かれる。しかし，分母の係数 1，3，15，105，$\cdots$ は数 1，3，5，7，9，$\cdots$ を互いに 1 つずつ掛けることによって得られる。 488

しかし，第 2 の一覧において，第 1，2，3，4，9 および 10 型の系列は除法だけで無限に伸ばされる。それゆえ，$\dfrac{dz^{4\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$ があるとき，もし適当な区切りまで除法を実行すれば，例えば，$\dfrac{d}{f}z^{3\eta-1}-\dfrac{de}{ff}z^{2\eta-1}+\dfrac{de^2}{f^3}z^{\eta-1}-\dfrac{\frac{de^3}{f^3}z^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$ が生じるであろう。はじめの 3 つの項は前者の一覧の第 1 型に属し，4 つ目の項はこの型の第 1 種に属する。それゆえ，面積の値は，s をその底線が $x=z^{\eta}$ で縦線が $v=\dfrac{d}{e+fx}$ である円錐曲線の面積とおいたとき，$\dfrac{d}{3\eta f}z^{3\eta}-\dfrac{de}{2\eta f^2}z^{2\eta}+\dfrac{de^2}{\eta f^3}z^{\eta}-\dfrac{e^3}{\eta f^3}s$ に一致する。

しかし，第 5 および第 6 の型の系列は，前者の一覧の第 5 型の 2 つの定理の助けによって，適当な加法および除法により —— 第 7 および第 8 の型の系列が後続する第 6 型における定理によって，そして，第 11 型の系列は前者の一覧の第 10 型の定理によってなされるのと同じように —— 無限に伸ばされる。例えば，もし先述の第 5 型の系列をより一層伸ばすのであれば，$\theta=-4\eta$ と仮定すると，もう一方の一覧の第 5 型のはじめの定理が $\left(-8\eta ez^{-4\eta-1}-5\eta fz^{-3\eta-1}\right)$ in $\dfrac{1}{2}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$，$\dfrac{R^3}{z^{4\eta}}=t$ となる。しかし，伸ばされるこの系列の 4 つ目の定理によれば，(d の代わりに $-\dfrac{5\eta f}{2}$ と書けば) $-\dfrac{5\eta}{2}fz^{-3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$，$\dfrac{1}{z^{\eta}}=x$，$\sqrt{fx+ex^2}=v$，および $\dfrac{10fv^3-15ffs}{12e}=t$ である。それゆえ，y および t の前者の値が取り去られると，$4\eta ez^{-4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$，および

$\dfrac{10fv^3-15f^2s}{12e}-\dfrac{R^3}{z^{4\eta}}=t$ が残るであろう。$\dfrac{d}{4\eta e}$ が掛けられたこれらから，望むなら $\dfrac{R^3}{z^{4\eta}}$ の代わりに xv^3 と書けば，伸ばされる系列をもつ第 5 の定理 $\dfrac{d}{z^{4\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$，$\dfrac{1}{z^{\eta}}=x$，$\sqrt{fx+ex^2}=v$，および $\dfrac{10dfv^3-15df^2s}{48\eta e^2}-\dfrac{dxv^3}{4\eta e}=t$ が現れるであろう。

IV　これらの型のいくつかは他のものから別の方法でも導くことができる。例えば，後者の一覧において，第 5，第 6，第 7 および第 11 型が第 8 型から，また第 9 型が第 10 型から［というように］。それゆえ，私は，完全には必要ではないけれども，もし使うことがないのならば，それらを省略することができた。それにもかかわらず，第 1 および第 2 型から，また第 9 および第 10 型か
489 ら導くことができたいくつかの型は，より複雑な分母に作用され，それゆえほとんど使われることがないから，省略した。

V　もしある曲線の定義方程式が異なる型の，あるいは同じ型の異なる種の，いくつかの方程式からつくられるならば，その面積は，符号 $+$ および $-$ によって正しく結び付けられるように用心して，対応する面積からつくられなければならない。なぜならば，平行な縦線と平行な縦線が，また対応する面積と対応する面積が，つねに同時に加えられたり同時に取り去られたりするのではなく，ときには，新しい縦線や対応する面積が仕上げられるために，一方ではそれらの和が他方ではそれらの差がとられるからである。そして，これは，面積の構成要素 (constituentes) が縦線の反対側に置かれたときに行われなければならない。しかし，用心深い人がこの厄介さを容易に避けることができるように，後者の一覧の第 5 と第 7 の型におけるように，たとえそれが負であっても，私はそれぞれの面積の値の前にそれらの本来の符号を付けた。

VI　さらに，面積の符号に関して，$+s$ は，底線に隣接する円錐曲線の面積が t の値における残りの量に加えられる (次の例 1 を見よ) か，あるいは縦線の他方の部分にある面積が取り去られるかのいずれかを表していることに注意すべきである。そして，反対に，$-s$ は，底線に隣接する面積が取り去られるか，あるいは縦線の他方の部分にある面積が加えられるかを，適切であると思われる方に応じて，あいまいに表している。さらに，t の値も，もしそれが正になるならば，その底線に隣接するように提示された曲線の面積を表し，逆に，もしそれが負であったならば，縦線の他方の部分にある面積を表す。

VII　しかし，その面積がより確実に決定されるためには，その境界が［慎重に］予見されなければならない。そして，確かに，底線，縦線および曲線の周における境界は決して不確実なものではないが，そこから描画が始まるはじめの境界あるいは開始線 (principium) はさまざまな位置を占める［ようにしてよい］。次の例において，それは底線の始点 (initiū basis)，あるいは無限遠，あるいは曲線とその底線との交点のいずれかである。しかし，それはどこにでも置くことができる。そして，それがどこであろうとも，t の値が零になるところにおける底線の長さを求めて，そこで縦線が立てられれば，それは見出せるであろう。なぜならば，そのように立てられた縦線は求める境界であろうからである。

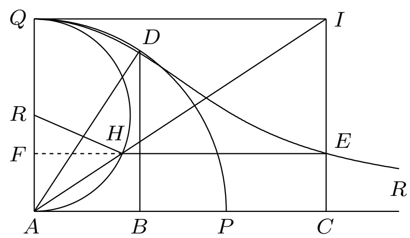
490 VIII　もし面積の何らかの部分が底線の下に置かれるならば，t はそれと底線の上の部分［の面積］との差を表すであろう。

IX　x，v および t の値における項の次元が非常に高いあるいは非常に低いことが起こるときはいつでも，単位の役割を果たすものと仮定される任意に与えられた量で，その次元が適当に高くあるいは低くなるだけ多くの回数，割ったりあるいは掛けたりして，適当な程度まで還元するのが

よい。

X　前述の一覧の他に，それらの種類 ($\sqrt{e+fx^3}=v$，あるいは $x\sqrt{e+fx^3}=v$，あるいは $\sqrt{e+fx^4}=v$ などに関するような) の中で最も単純な他の曲線に関係する曲線の一覧もつくることができて，それゆえ，提示された任意の曲線の面積を最も単純な原形から導くことができ，どんな曲線がそれと関係しているかを知ることができる。しかし，今や，いくつかの例で前述のことを説明しよう。

例1　QER を次のようなコンコイドとしよう。すなわち，半円 QHA が描かれ，直径 AQ に対して垂直に AC が立てられたとき，もし平行四辺形 $QACI$ がつくられ，対角線 AI が半円と H で交わるように引かれ，H から IC に対して垂線 HE が下ろされるならば，点 E は曲線の中に落ち，そして，面積 $ACEQ$ が求められる。



それゆえ，$AQ=a$，$AC=z$，$CE=y$ とすると，連続比 AI，AQ，AH，EC によって，EC あるいは $y=\dfrac{a^3}{a^2+z^2}$ であろう。

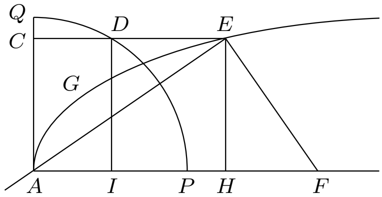
いま，これが一覧の中の方程式の形を装うように，$\eta=2$ と仮定して，分母における z^2 の代わりに z^η と，そして，分子における a^3 あるいは a^3z^{1-1} の代わりに $a^3z^{\frac{1}{2}\eta-1}$ と書くと，後者の一覧の第 2 型の最初の類の方程式 $y=\dfrac{a^3z^{\frac{1}{2}\eta-1}}{a^2+z^\eta}$ が現れるであろう。項が比較されると，$d=a^3$，$e=a^2$ および $f=1$ となるであろう。それゆえ，$\sqrt{\dfrac{a^3}{a^2+z^2}}=x$，$\sqrt{a^3-a^2x^2}=v$，および $xv-2s=t$ となる。

しかし，x および v の導かれた値が適当な次元の数に還元されるように，あたかも単位のような任意に与えられる量，例えば a，を選び，それを x の値の中の a^3 に 1 回掛け，また，v の値において a^3 を 1 回，a^2x^2 を 2 回それで割る。この方法によって $\sqrt{\dfrac{a^4}{a^2+z^2}}=x$，$\sqrt{a^2-x^2}=v$，および $xv-2s=t$ を得るであろう。その作図は次のようである。

中心 A，半径 (intervallum) AQ で 4 分円 QDP を描き，AC 上で $AB=AH$ にとり，4 分円と D で交わる垂線 BD を立て，AD を引け。すると，扇形 ADP の 2 倍は求める面積 $ACEQ$ と等しいであろう。なぜならば，$\sqrt{\dfrac{a^4}{a^2+z^2}}$ $(=\sqrt{AQ\times EC}=HA)=AB$ あるいは x，および $\sqrt{a^2-x^2}$ $(=\sqrt{AD^2-AB^2})=BD$ あるいは v であり，$xv-2s=2\triangle ADB-2ABDQ$ あるいは $=2\triangle ADB+2BDP$，すなわち，$=-2QAD$ であるか，あるいは $=2DAP$ だからである。これらの値で，正のもの $2DAP$ は EC のこちら側にある面積 $ACEQ$ に対応し，負のもの $2QAD$ は EC の向こう側に無限に伸ばされた面積 $RECR$ に対応する。 491

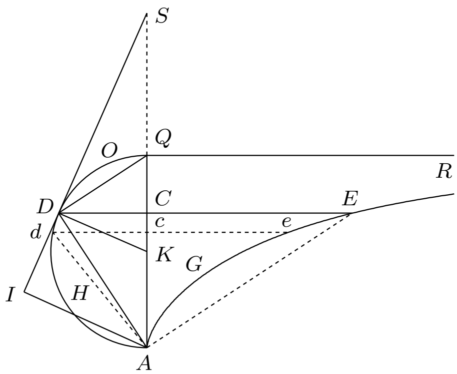
このように見出された問題の解法は［洗練された形に］整えることができる。それゆえ，この場合，円 QHA の半径 RH が引かれると，弧 QH，DP は等しいから，扇形 QRH は扇形 DAP の半分，そしてそれゆえ，面 $ACEQ$ の 4 分の 1 であろう。すなわち，点 D から AQ に対して下ろされる垂線は 4 分円 QDP における角 QAD の正弦であろう。また，DB，QA が平行であるために，弦 $AB=AH$ の角は等しいであろう［$\triangle AQH\equiv\triangle ADB$ となるから $\angle AQH=\angle QAD$］。その結果，4 分円における弧 $QD=$ 半円における弧 AH であり，それゆえ［弧 $AHQ=$ 弧 QDP であるから］弧 QH，DP は等しくなる。

例2　AGE を，無限の［長さの］一方の足 AE は与えられた点 A を通って連続的に動き，与えられた長さの他方の［足］EF は位置において与えられた直線 AF の上を滑るような，直角定規 AEF の角点 (punctum angulare) E によって描かれる曲線としよう。EH を AF に対して垂直に下ろし，平行四辺形 $AHEC$ をつくって，$AC=z$，$CE=y$，および $EF=a$ とされると，HF，HE，HA は連続比であるから，HA あるいは $y=\dfrac{z^2}{\sqrt{a^2-z^2}}$ であろう。



いま，面積 $AGEC$ が知られるようにするために，$z^2=z^{\eta}$ あるいは $\eta=2$ と仮定すると，これから $\dfrac{z^{\frac{3}{2}\eta-1}}{\sqrt{a^2-z^{\eta}}}=y$ となるであろう。ここで，z は分子に分数の次元をもつから，$z^{\frac{1}{2}\eta}$ で割って y の値を下げよ。すると，後者の一覧の第 7 型の第 2 種の方程式 $\dfrac{z^{\eta-1}}{\sqrt{a^2z^{-\eta}-1}}=y$ となるであろう。項が比較されると，$d=1$，$e=-1$ そして $f=a^2$ となるであろう。それゆえ，$z^2\left(=\dfrac{1}{z^{-\eta}}\right)=x^2$，$\sqrt{a^2-x^2}=v$，および $s-xv=t$ となるであろう。それゆえ，x および z が等しくされ，$\sqrt{a^2-x^2}=v$ をその直径が a である円の方程式とするとき，中心が A，半径が a あるいは
492 いは EF として，円 PDQ が描かれると，CE はそれと D で交わり，平行四辺形 $ACDI$ がつくられると，$AC=z$，$CD=v$ であり，求める面積は $AGEC\,(=s-xv=ACDP-ACDI)=IDP$ であろう。

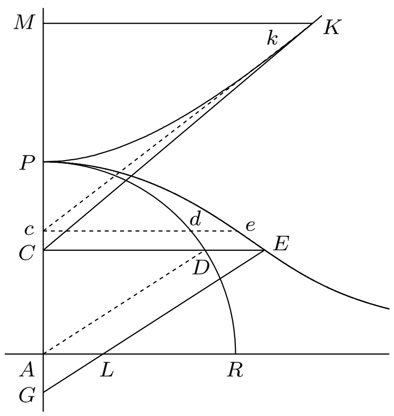
例3　AGE を直径 AQ 上に描かれた円 ADQ に関係するシッソイドとしよう。直径に垂直に DCE が引かれ，曲線と D および E で交わるものとしよう。そして，$AC=z$，$CE=y$，および $AQ=a$ と名づけると，CD，CA，CE は連続比であるから，CE あるいは $y=\dfrac{zz}{\sqrt{az-zz}}$ であろうし，z で割られると $y=\dfrac{z}{\sqrt{az^{-1}-1}}$ となるであろう。それゆえ，これは，$z^{-1}=z^{\eta}$ あるいは



$-1=\eta$ であり，後者の一覧の第 4 型の第 3 種の方程式 $\dfrac{z^{-2\eta-1}}{\sqrt{az^{\eta}-1}}=y$ である。そして，項が比較されると，$d=1$，$e=-1$，および $f=a$ となり，それゆえ $z\left(=\dfrac{1}{z^{\eta}}\right)=x$，$\sqrt{ax-xx}=v$，および $3s-2xv=t$ となる。それゆえ，$AC=x$，$CD=v$ で，そのため $ACDH=s$ であり，それゆえ $3ACDH-4\triangle ADC\,(=3s-2xv=t)=$ シッソイドの面積 $ACEGA$ である。あるいは，同じことだが，3(切片 $ADHA$) $=$ 面積 $ADEGA$，あるいは 4(切片 $ADHA$) $=$ 面積 $AHDEGA$ である。

例4　PE を，中心［極］を G，腕を AL，距離を LE として描かれた古代人の第 1［種］のコンコイドとしよう。その軸 GAP を引き，それに縦線 EC を下ろして，$AC=z$，$CE=y$，$GA=b$，そして $AP=c$ とすると，比 $AC:CE-AL=GC:CE$ により，CE あるいは $y=\dfrac{b+z}{z}\sqrt{c^2-z^2}$ であろう。いま，これからその面積 PEC が求められる［ようにする］には，縦線 CE の部分が別々に調べられなければならない。そして，確かに，もしその CE が，$CD=\sqrt{c^2-z^2}$ および $DE=\dfrac{b}{z}\sqrt{c^2-z^2}$ となるように，D で分けられるならば，CD は中心 A，半径 AP として描かれた円の縦線であろう。それゆえ，面積の部分 PDC は知られるようになり，もう一方の部分

$DPED$ を見出すことが残されるであろう。

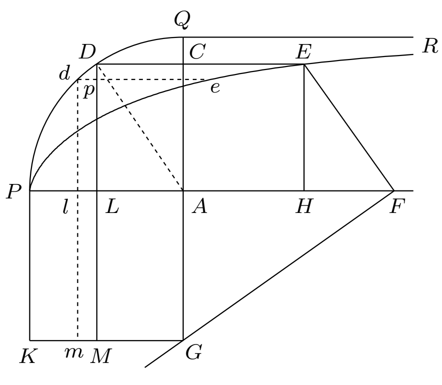


それゆえ，DE (それが描かれる縦線の部分) の値は $\frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^2}$ であるから，$2=\eta$ と仮定すれば，後者の一覧の第 3 型の最初の種の方程式 $\frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^\eta}=DE$ が現れるであろう。項が比較されると，$d=b$, $e=c^2$ および $f=-1$，それゆえ $\frac{1}{z}=\sqrt{\frac{1}{z^\eta}}=x$, $\sqrt{-1+c^2x^2}=v$，および $2bc^2s-\frac{bv^3}{x}=t$ となるであろう。これらが見出されたら，任意に与えられた量を非常に下げられた項に掛け，また，非常に高い項をそれで割って，それらを適当な次元の数に還元せよ。もしそれが c によってなされるならば，$\frac{c^2}{z}=x$, 493

$\sqrt{-c^2+x^2}=v$，および $\frac{2bs}{c}-\frac{bv^3}{cx}=t$ となるであろう。そして，それらの作図法はこうである。

中心 A，主頂点 (vertex principali) P，パラメータ［横断辺］$2AP$ として双曲線 PK を描け。次に，点 C から双曲線と K で接する直線 CK を引けば，AP が $2AG$ に対するように面積 $CKPC$ が求める面積 $DPED$ に対するであろう。

例5　［直角］定規 GFE が，その角点 F が位置において与えられた直線 AF の上を連続的に滑るように，極 G の周りを回転し，曲線 PE がその足 EF 上の任意の点 E によって描かれると仮定せよ。いま，その面積が見出されるようにするために，線 AF に垂直に GA および EH を下ろし，平行四辺形 $AHEC$ をつくって，$AC=z$，$CE=y$，$AG=b$ および $EF=c$ とすると，比 $HF:EH=AG:AF$ によって，$AF=\frac{bz}{\sqrt{c^2-z^2}}$，それゆえ CE あるいは $y=\frac{bz}{\sqrt{c^2-z^2}}-\sqrt{c^2-z^2}$ であろう。しかし，$\sqrt{c^2-z^2}$ は半径 c で描かれた円の縦線であるから，延長された CE が D で交わるように，中心 A の周りにそのような円 PDQ を描けば，$DE=\frac{bz}{\sqrt{c^2-z^2}}$ であろう。この方程式の助けによって面積 $PDEP$ あるいは $DERQ$ を決定することが残っている。ゆえに，$\eta=2$ と仮定されると，前者の一覧の第 4 型の最初の種の方程式 $DE=\frac{bz^{\eta-1}}{\sqrt{c^2-z^\eta}}$ が現れるであろう。そして，項が比較されると，$b=d$，$c^2=e$ および $-1=f$，それゆえ $-b\sqrt{c^2-z^2}\,(=-bR)=t$ となるであろう。



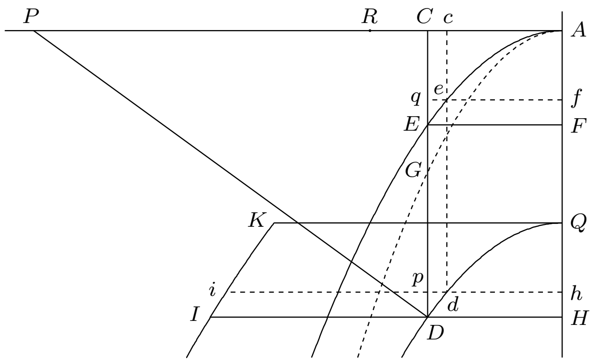
いま，t の値は負になり，それゆえ t によって表された面積は線 DE の向こう側に位置しているから，そのはじめの境界を見出すために，t が零になるような z の長さを求めると，それは c であることが分かるであろう。それゆえ，AC を $AQ=c$ となるように Q まで伸ばし，縦線 QR を立てると，$DQRED$ はその値がちょうど今見出した $-b\sqrt{c^2-z^2}$ である面積であろう。しかし，もし底線 AC の近くに置かれ，それと同じ広がりをもつ面積 PDE の量を知りたいのならば，境界 QR 494

を知ることなしに，次のようにそれを決定することができる。底線の長さ AC として割り当てられた t の値から底線の始点におけるその値を引けば，すなわち $-b\sqrt{c^2-z^2}$ から $-bc$ を引けば，求める量 $bc-b\sqrt{c^2-z^2}$ が現れるであろう。ゆえに，平行四辺形 $PAGK$ をつくり，AP に対して GK と M で交わる垂線 DM を下ろせば，平行四辺形 $PLMK$ は面積 PDE と等しいであろう。

ある曲線を定める方程式が一覧の中に見出せず，除法あるいは何か他の方法によっても，より単純な項に還元できないときはいつでも，問題 8 に見られる仕方のように，その面積がついに一覧から知られるようになるまで，それに関係する他の曲線の方程式に変形されなければならない。そして，あらゆる種類の試みが実行されたときに，もしそのようなものが与えられないならば，提示された曲線は直線図形とも円錐曲線とも比較できないことは確実である。

同様に，機械的な曲線について述べられているとき，同じ問題 8 に見られるように，それらははじめに同等な幾何学的な曲線に変形されなければならず，それゆえ，そのような幾何学的な［曲線の］面積は一覧から引き出されるであろう。このことについて次の例を挙げる。

例6　正弦 (sinus rectus) と結び付けられた何らかの円錐曲線の弧の図形［の面積］を決定することが提示されるとしよう。すなわち，A を円錐曲線の中心，AQ および AR をその半軸 (semiaxis)，CD を軸 AR に対する縦線，そして PD を点 D における法線としよう。また，AE を CD と E で交わる前述の機械的な曲線とすると，あらかじめ定められたその性質により，$CE=$ 弧 QD であろう。それゆえ，面積 AEC が求められる，あるいは平行四辺形 $ACEF$ がつくられると余分な AEF が求められる。この目的のために，a を円錐曲線の直立辺，b を横断辺あるいは $2AQ$ としよう。さらに，$AC=z$ および $CD=y$ とすると，$\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}z^2}=y$ は，知られているように，
495 円錐曲線の方程式であろう。また，$PC=\frac{b}{a}z$ であり，それゆえ $PD=\sqrt{\frac{1}{4}b^2+\frac{b^2+ab}{a^2}z^2}$ であろう。



そして，それゆえ，弧 QD の流率は底線 AC の流率に対して PD が CD に対するから，もし底線の流率が 1 であると仮定されれば，その弧 QD あるいは縦線 CE の流率は $\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}b^2+\frac{b^2+ab}{a^2}z^2}{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}z^2}}$ であろう。これを FE あるいは z に掛けると，面積 AEF の流率 $z\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}b^2+\frac{b^2+ab}{a^2}z^2}{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}z^2}}$ が現れるであろう。それゆえ，もし縦線 CD 上に $CG=z\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}b^2+\frac{b^2+ab}{a^2}z^2}{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}z^2}}$ ととれば，AC の上を進むその CG が描くであろう面積 AGC は面積 AEF と等しいであろうし，AG は幾何学的な曲線であろう。それゆえ，面積 AEF は求めら

れる。そして，この目的のために，最後の方程式において z^2 の代わりに z^η が代入されると，後者の一覧の第 11 型の第 2 種の方程式 $z^{\eta-1}\sqrt{\dfrac{\frac{1}{4}b^2+\frac{b^2+ab}{a^2}z^\eta}{\frac{1}{4}b^2+\frac{b}{a}z^\eta}}=CG$ が生じるであろう。そして，両方の項が比較されると，$d=1$，$e=\dfrac{1}{4}\,b^2=g$，$f=\dfrac{b^2+ab}{a^2}$，および $h=\dfrac{b}{a}$，それゆえ $\sqrt{\dfrac{1}{4}\,b^2+\dfrac{b}{a}\,z^2}=x$，および $\sqrt{-\dfrac{b^3}{4a}+\dfrac{a+b}{a}\,x^2}=v$，そして $\dfrac{b}{a}\,s=t$ となるであろう。すなわち，$CD=x$，$DP=v$ および $\dfrac{b}{a}\,s=t$ である。そして，［ここで］見出されたことの作図は次のようである。

Q において QA に垂直で等しい QK を立て，点 D を通ってこれに平行だが，DP に等しく HI を引け。すると，HI がそこで終る線 KI は円錐曲線であろうし，囲まれた面積 $HIKQ$ は求める面積 AEF に対して b が a に対する，あるいは PC が AC に対するあろう。

もし b の符号を替えるならば，その弧が直線 CG に等しい円錐曲線は楕円になるであろうし，さ 496
らに，もし $b=-a$ とするならば，楕円は円となって，その場合には線 KI は AQ に平行な直線になるであろうということに注意せよ。

何らかの曲線の面積がこのように見出された後で，その作図の証明について，構成された定理が装飾され，公の知るところとなるのにふさわしいように，許される限り代数的な計算なしで熟慮されなければならない。そして，証明するための一般的な方法が存在し，これを次の例で説明することにしてみよう。

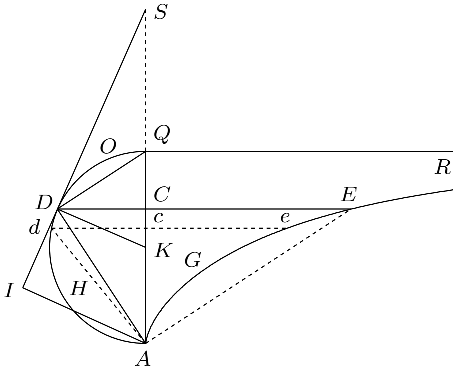
例 5 における作図の証明

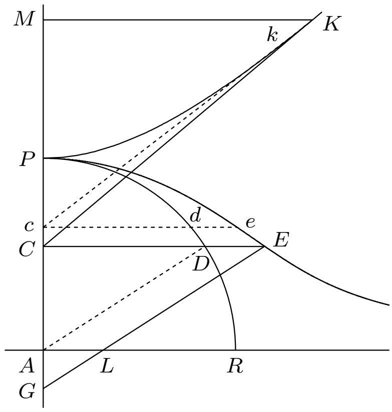
弧 PQ 上に D に非常に近い点 d をとり（141 ページの図を見よ。），de および dm を DE および DM に平行に引いて，DM および AP と p および l で交わるようにせよ。すると，$DEed$ は面積 $PDEP$ のモーメントで，$LMml$ は面積 $LMKP$ のモーメントであろう。半径 AD を引いて，無際限に小さい弧 Dd を直線と同等のものと仮定すると，三角形 Dpd と ALD は相似であり，それゆえ $Dp:pd=AL:LD$ となるであろう。しかし，$HF:EH=AG:AF$，すなわち $AL:LD=ML:DE$ である。そして，これから，$Dp:pd=ML:DE$ である。それゆえ，$Dp\times DE=pd\times ML$ である。すなわち，モーメント $DEed$ はモーメント $LMml$ に等しい。そして，このことは任意の同時のモーメントについて制限なしに証明されるから，面積 $PDEP$ のそれぞれのモーメントは面積 $PLMK$ の対応する同時のモーメントに等しく，それゆえ，それらのモーメントからつくられる全面積は等しいことは明らかである。証明終り。

例 3 における作図の証明

$DEed$ を面 $AHDE$ のモーメントとし，$AdDA$ を切片 ADH の同時のモーメントとしよう［下左図］。半径 DK を引き，de が AQ と c で交わるようにすると，$Cc:Dd=DC:DK$ であろう。さ 497
らに，$DC:QA\,(2DK)=AC:DE$ である。それゆえ，$Cc:2Dd\,(=DC:2DK)=AC:DE$，および $Cc\times DE=2Dd\times AC$ である。いま，真っ直ぐに伸ばされた円周の（すなわち，円の接線の）モーメント Dd に対して，垂線 AI を下ろすと，AI は AC と等しいであろうし，それゆえ $2Dd\times AC=2Dd\times AI=4$ 三角形 ADd であろう。それゆえ，4 三角形 $ADd=Cc\times DE=$ モーメント $DEed$ である。ゆえに，空間 $AHDE$ のそれぞれのモーメントは切片 ADH の同時のモー

メントの 4 倍であり，それゆえ空間全体は切片全体の 4 倍である。証明終り。



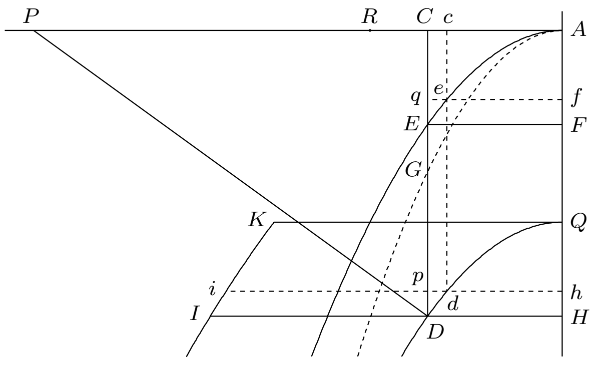


例 4 における作図の証明

CE に平行に，［そこから］無際限に小さい距離にある ce，および双曲線の接線 ck を引き，KM を AP に対して垂直に下ろせ［上右図］。すると，双曲線の性質により，$AC : AP = AP : AM$ であろう。それゆえ，$AG^2 : GL^2\,(= AC^2 : LE^2$あるいは $AP^2) = AP^2 : AM^2$ となり，分割する［除比の理による］と $AG^2 : AL^2\,(DE^2) = AP^2 : AM^2 - AP^2\,(MK^2)$ であり，逆にされると，$AG : AP = DE : MK$ である。しかし，小面積 (areola) $DEed$ は三角形 CKc に対して高さ DE
498 が高さ KM の半分に対する，すなわち、AG が $\dfrac{1}{2}\,AP$ に対する。それゆえ，空間 PDE のそれぞれのモーメントは空間 PKC のそれぞれの同時のモーメントに対して AG が $\dfrac{1}{2}\,AP$ に対する。そして，それゆえ、それらの空間全体も同じ比である。証明終り。

例 6 における作図の証明

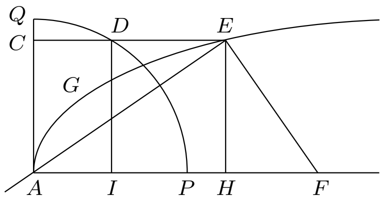
CD に平行で，非常に近い［位置にある］cd を，曲線 AE と e で交わるように引け。［さらに,］hi および fe を，DC と［それぞれ］p および q で交わるように引け。そうすると，仮定から $Dd = Eq$ であり，三角形 Dpd，DCP の相似性から $Dp : Dd\,(Eq) = CP : PD\,(HI)$ であろう。それゆえ，$Dp \times HI = Eq \times CP$ であり，これから，$Dp \times HI\,(HIih$ のモーメント$) : Eq \times AC\,(EFfe$ のモーメント$) = Eq \times CP : Eq \times AC = CP : AC$ であろう。それゆえ，PC および AC は円錐曲線 QD の横断辺が直立辺に対する与えられた比にあり，面積 $HIKQ$ および AEF のモーメント，$HIih$ および $EFfe$，もその比であるから，面積そのものも同じ比であろう。証明終り。



このような種類の証明において，私はその比が同等の比であるような量は同等であるとみなす，ということが注意されなければならない。そして，同等の比は指定することができるどのような不等の比より少なく同等性から離れている［同等性との違いが小さい］とみなされなければならない。それゆえ，最後の証明において，私が，長方形 $Eq \times AC$ あるいは $FEqf$ を空間 $FEef$ と等しい

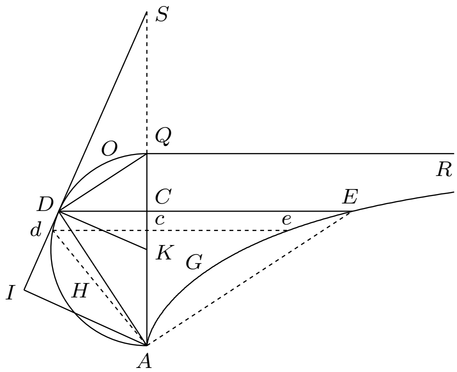
とおいたのは，差 Eqe はそれらより無限に小さいか，あるいはそれらに対して零とみなせるために，それらは不等の比をもたないからである。そして，同じ理由で，私は $Dp \times HI = HIih$ とお 499
いたし，他の場合もそうである。

私が，ここで，同等性によってあるいはそれらのモーメントの与えられた比によって，曲線が等しいあるいは与えられた比をもつということを証明するのにこの方法を用いたのは，［この方法が］これらのことについて普通の方法と密接な関係をもっているからである。しかし，流れの運動に基づく面の生成の方がより自然なものに思われる。それゆえ，もし例 2 における作図が証明されるべきであるならば，円の性質により直線 ID の流率は直線 IP の流率に対して AI が ID に対するし，曲線 AGE の性質により，$AI : ID = ID : CE$ である。そして，それゆえ，$CE \times ID$ の流率 $= ID \times IP$ の流率 である。しかし，$CE \times ID$ の流率 $=$ 面積 $ACEG$ の流率 であり，$ID \times IP$ の流率 $=$ 面積 PDI の流率 である。そして，それゆえ，等しく流れるものによって生成された，それらの面積は等しいであろう。証明終り。



さらなる説明のために，例 3 においてそれによってシッソイドの面積が決定される作図の証明を加えよう。

図の中で点で記された線が消し去られ，DQ およびシッソイドの腕 QR が引かれるとしよう。すると，円の性質により $DQ^2 = AQ \times CQ$ であり，これから問題 1 により $2DQ \times DQ$ そのものの流率 $= AQ \times CQ$ の流率 である。それゆえ，$AQ : DQ = 2(DQ$ の流率$) : CQ$ の流率 である。そして，シッソイドの性質により $ED : AD = AQ : DQ$ である。それゆえ，$ED : AD = 2(DQ$ の流率$) : CQ$ の流率 である。そして，$ED \times CQ$ の流率 $= AD \times 2(DQ$ の流率$)$, あるいは $4 \times \dfrac{1}{2} AD \times DQ$ の流率 である。いま，DQ は A の周りを回転している AD の終点でそれに垂直であるから，$\dfrac{1}{2} AD \times DQ$ の流率 $=$ 面積 $ADOQ$ を生 500
成する流率 である。そして，$ED \times CQ$ の流率の 4 倍 $=$ シッソイドの面積 $QREDO$ を生成する流率 である。それゆえ，その無限に長い面積 $QREDO$ はもう一方の $ADOQ$ の 4 倍によって生成される。証明終り。



ここでニュートンは「一覧」，すなわち公式集，の適用例を，幾何学的な証明を添えて，6 つ挙げている。すなわち，

1 $\quad y = \dfrac{a^3}{a^2 + z^2} \quad \rightarrow \quad \mathrm{II} - 2 - 1\ (\eta = 2,\ d = a^3,\ e = a^2,\ f = 1)$

2 $\quad y = \dfrac{z^2}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \dfrac{z}{\sqrt{a^2 z^{-2} - 1}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{II} - 4 - 2\ (\eta = -2,\ d = 1,\ e = -1,\ f = a^2)$

3 $\quad y = \dfrac{z^2}{\sqrt{az - z^2}} = \dfrac{z}{\sqrt{az^{-1} - 1}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{II} - 4 - 3\ (\eta = -1,\ d = 1,\ e = -1,\ f = a)$

4 $\quad y = \dfrac{b}{z}\sqrt{c^2 - z^2}\ [+\sqrt{c^2 - z^2}\,] \quad \rightarrow \quad \mathrm{II} - 3 - 1\ (\eta = 2,\ d = b,\ e = c^2,\ f = -1)$

5 $\quad y=\dfrac{bz}{\sqrt{c^2-z^2}}$ $[-\sqrt{c^2-z^2}]$ $\quad\to\quad$ I – 4 – 1 ($\eta=2$, $d=b$, $e=c^2$, $f=-1$)

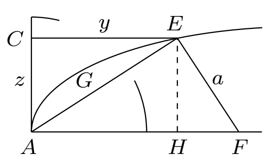
6 $\quad y=z\sqrt{\dfrac{\dfrac{1}{4}b^2+\dfrac{b^2+ab}{a^2}z^2}{\dfrac{1}{4}b^2+\dfrac{b}{a}z^2}}$ $\quad\to\quad$ II – 11 – 2 ($\eta=2$, $d=1$, $e=g=\dfrac{1}{4}b^2$, $f=\dfrac{b^2+ab}{a^2}$, $h=\dfrac{b}{a}$)

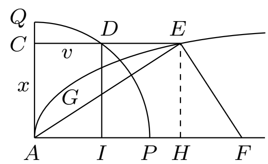
「例 1」についていうと，$x=\sqrt{\dfrac{a^4}{a^2+z^2}}$ とすると，$\dfrac{dx}{dz}=\dfrac{-a^2z}{(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{-a^4z}{(a^2+z^2)^2x}$，$a^2+z^2=\dfrac{a^4}{x^2}$，$z^2=\dfrac{a^2(a^2-x^2)}{x^2}$ であるから，

$$\begin{aligned}
t&=\int y\,dz=\int\frac{a^3}{a^2+z^2}\,dz=\int\frac{a^3}{a^2+z^2}\cdot\frac{(a^2+z^2)^2x}{-a^4z}\,dx\\
&=-\int\frac{(a^2+z^2)x}{az}\,dx=-\int\frac{\frac{a^4}{x^2}x}{a\sqrt{\frac{a^2(a^2-x^2)}{x^2}}}\,dx\\
&=-\int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=a^2\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)
\end{aligned}$$

となって，$xv-2s=t$ は $x\sqrt{a^2-x^2}-2\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=a^2\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ を意味していることになる。

「例 2」では ……





$\triangle AEF$ は直角三角形だから $HF:HE=HE:HA$［これが連続比］で，$HE=AC=z$，$HA=EC=y$ であるから，$y=HA=\dfrac{HE^2}{HF}=\dfrac{z^2}{\sqrt{a^2-z^2}}$ となる。

ゆえに，

$$AGEC=\int_0^z y\,dz=\int_0^z\frac{z^2}{\sqrt{a^2-z^2}}\,dz=\int_0^z\frac{z}{\sqrt{-1+a^2z^{-2}}}\,dz$$

となるが，これを求めるために，ニュートンは (式を変形した後)「一覧」を見て，第 2 の第 4 型の 2 番目の公式 ($\eta=-2$) を適用する。すなわち，$z^2=x^2$，$\sqrt{a^2-x^2}=v$ とすれば，$s-xv=t$ となることを利用するのであるが ……

$\sqrt{a^2-x^2}=v$ は半径が a の円の方程式だから，A を中心として半径 a の円を書き $AC=x$ とすれば，$CD=v$ となるから，

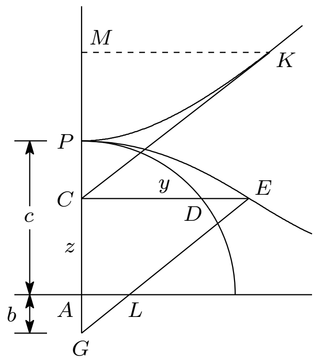
$$\begin{aligned}
AGEC&=t=s-xv=\int_0^x v\,dx-xv\\
&=(4\text{ 分円の部分 }ACDP)-(\text{長方形 }ACDI)\ [=IDP]
\end{aligned}$$

となるというのである。

直接積分すると ……

$$\begin{aligned}
AGEC&=\int_0^z\frac{u^2}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du\\
&=\int_0^\alpha\frac{a^2\sin^2\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}\cdot a\cos\theta\,d\theta\qquad\left(u=a\sin\theta,\ \alpha=\sin^{-1}\frac{z}{a}\right)\\
&=\int_0^\alpha a^2\sin^2\theta\,d\theta=\frac{a^2}{2}\int_0^\alpha(1-\cos2\theta)\,d\theta=\frac{a^2}{2}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^\alpha
\end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{2}\Big[\theta - \sin\theta\cos\theta\Big]_0^{\alpha} = \frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{z}{a} - \frac{z}{a}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{z}{a}\right)^2}\right)$$
$$= \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{z}{a} - \frac{z}{2}\sqrt{a^2-z^2}$$
となる。



また,「例 4」では,まず $GC : CE = GA : AL$ であるから $(GC-GA) : (CE-AL) = GC : CE$ なる。そして,コンコイドの性質から $AL = DE$ であるから $AC : CD = GC : CE$ となり,

$$CE = y = \frac{GC\cdot CD}{AC} = \frac{(b+z)\sqrt{c^2-z^2}}{z}$$
$$= \frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^2} + \sqrt{c^2-z^2}\ \ [=DE+CD]$$

となる。

すなわち,

$$DPED = \int_z^c \frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^2}\,dz,$$
$$PDC = \int_z^c \sqrt{c^2-z^2}\,dz$$

である。$DPED$ については,II − 3 − 1 で $\eta = 2$ のときだから,$\dfrac{1}{z} = x$,$\sqrt{-1+c^2x^2} = v$ とすれば $2bc^2s - \dfrac{bv^3}{x} = t$ となる。ここで,ニュートンは次数を調整して,$\dfrac{c^2}{z} = x$,$\sqrt{-c^2+x^2} = v$ とする。このとき,$\dfrac{2bs}{c} - \dfrac{bv^3}{cx} = t$ である。

ニュートンはこのことを基に値を求めているが,直接積分してみると次のようになる。

$$DPED = b\int_z^c \frac{\sqrt{c^2-u^2}}{u}\,du = b\int_{\sqrt{c^2-z^2}}^0 \frac{t}{u}\left(-\frac{t}{u}\,dt\right) \qquad \left(\ \sqrt{c^2-u^2} = t\ \right)$$
$$= -b\int_{\sqrt{c^2-z^2}}^0 \frac{t^2}{u^2}\,dt = b\int_0^{\sqrt{c^2-z^2}} \frac{t^2}{c^2-t^2}\,dt$$
$$= b\int_0^{\sqrt{c^2-z^2}} \left\{-1 + \frac{c}{2}\left(\frac{1}{c+t} + \frac{1}{c-t}\right)\right\}dt$$
$$= b\left[-t + \frac{c}{2}\left(\log|c+t| - \log|c-t|\right)\right]_0^{\sqrt{c^2-z^2}}$$
$$= b\left[-t + \frac{c}{2}\log\left|\frac{c+t}{c-t}\right|\right]_0^{\sqrt{c^2-z^2}}$$
$$= b\left(-\sqrt{c^2-z^2} + \frac{c}{2}\log\left|\frac{c+\sqrt{c^2-z^2}}{c-\sqrt{c^2-z^2}}\right|\right)$$
$$= b\left(-\sqrt{c^2-z^2} + \frac{c}{2}\log\frac{\left(c+\sqrt{c^2-z^2}\right)^2}{z^2}\right)$$
$$= bc\log\frac{c+\sqrt{c^2-z^2}}{z} - b\sqrt{c^2-z^2}$$

であり,

$$PDC = \int_z^c \sqrt{c^2-u^2}\,du$$
$$= \int_\beta^0 \sqrt{c^2-c^2\cos^2\theta}\,(-c\sin\theta\,d\theta) \qquad \left(\ u = c\cos\theta,\ \beta = \cos^{-1}\frac{z}{c}\ \right)$$
$$= \int_0^\beta c^2\sin^2\theta\,d\theta = \int_0^\beta \frac{c^2}{2}\left(1-\cos2\theta\right)d\theta = \left[\frac{c^2}{2}\theta - \frac{c^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^\beta$$

$$= \left[\frac{c^2}{2}\theta - \frac{c^2}{2}\sin\theta\cos\theta\right]_0^{\beta} = \frac{c^2}{2}\cos^{-1}\frac{z}{c} - \frac{c^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{c^2-z^2}}{c}\cdot\frac{z}{c}$$
$$= \frac{c^2}{2}\cos^{-1}\frac{z}{c} - \frac{1}{2}z\sqrt{c^2-z^2}$$
であるから，結局
$$CPEDC = bc\log\frac{c+\sqrt{c^2-z^2}}{z} - b\sqrt{c^2-z^2} + \frac{c^2}{2}\cos^{-1}\frac{z}{c} - \frac{1}{2}z\sqrt{c^2-z^2}$$
ということになる。
さらに，
$$ACELA = \frac{1}{2}(b+z)\left(\frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^2} + \sqrt{c^2-z^2}\right) - \frac{1}{2}b\left(\frac{b}{z}\sqrt{c^2-z^2}\right)$$
$$= b\sqrt{c^2-z^2} + \frac{1}{2}z\sqrt{c^2-z^2}$$
であるから，これも合わせると，
$$APELA = bc\log\frac{c+\sqrt{c^2-z^2}}{z} + \frac{c^2}{2}\cos^{-1}\frac{z}{c}$$
である。

さらに，「例 6」の積分については次のようになろう。

$I = \displaystyle\int z\sqrt{\frac{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b^2+ab}{a^2}z^2}{\frac{1}{4}b^2 + \frac{b}{a}z^2}}\,dz$ において，$e = \dfrac{1}{4}b^2$，$f = \dfrac{b^2+ab}{a^2}$，$h = \dfrac{b}{a}$ とおくと，
$I = \displaystyle\int z\sqrt{\frac{e+fz^2}{e+hz^2}}\,dz$ である。

そこで，$t = \sqrt{\dfrac{e+fz^2}{e+hz^2}}$ とおくと，$t^2 = \dfrac{e+fz^2}{e+hz^2} = \dfrac{f}{h} + \dfrac{e(h-f)}{h(e+hz^2)}$，$z^2 = \dfrac{e(1-t^2)}{ht^2+f}$ であるから，$e+hz^2 = \dfrac{e(h-f)}{ht^2+f}$ であり，$dz = \dfrac{-e(h-f)t}{(ht^2-f)^2 z}\,dt$ となる。

それゆえ，
$$I = \int zt\cdot\frac{-e(h-f)t}{(ht^2-f)^2 z}\,dt = e(f-h)\int\frac{t^2}{(ht^2-f)^2}\,dt$$
である。ここで，$\left(\dfrac{t}{ht^2-f}\right)' = \dfrac{1}{ht^2-f} - \dfrac{2ht^2}{(ht^2-f)^2}$ であるから，
$$2h\int\frac{t^2}{(ht^2-f)^2}\,dt = \int\frac{1}{ht^2-f}\,dt - \frac{t}{ht^2-f}$$
である。よって，
$$I = \frac{e(f-h)}{2h}\left(\int\frac{1}{ht^2-f}\,dt - \frac{t}{ht^2-f}\right)$$
となるが，$\dfrac{1}{ht^2-f} = \dfrac{1}{2\sqrt{f}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{h}\,t-\sqrt{f}} - \dfrac{1}{\sqrt{h}\,t+\sqrt{f}}\right)$ であるから，結局
$$I = \frac{e(f-h)}{2h}\left\{\frac{1}{2\sqrt{f}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{h}\,t-\sqrt{f}} - \frac{1}{\sqrt{h}\,t+\sqrt{f}}\right)dt - \frac{t}{ht^2-f}\right\}$$
$$= \frac{e(f-h)}{2h}\left\{\frac{1}{2\sqrt{f}}\left(\frac{1}{\sqrt{h}}\log\left(\sqrt{h}\,t-\sqrt{f}\right) - \frac{1}{\sqrt{h}}\log\left(\sqrt{h}\,t+\sqrt{f}\right)\right)\right.$$
$$\left. - \frac{t}{ht^2-f}\right\}$$
$$= \frac{e(f-h)}{2h}\left(\frac{1}{2\sqrt{fh}}\log\frac{\sqrt{h}\,t-\sqrt{f}}{\sqrt{h}\,t+\sqrt{f}} - \frac{t}{ht^2-f}\right)$$
$$= \frac{e(f-h)}{2h}\left(\frac{1}{2\sqrt{fh}}\log\frac{t-\sqrt{fh}}{t+\sqrt{fh}} - \frac{t}{ht^2-f}\right)$$

$$= \frac{b^3}{8a}\left(\frac{a}{2b}\sqrt{\frac{a}{a+b}}\log\frac{\sqrt{\frac{e+fz^2}{e+hz^2}}-\sqrt{\frac{a+b}{a}}}{\sqrt{\frac{e+fz^2}{e+hz^2}}+\sqrt{\frac{a+b}{a}}}+\frac{a(ab+4z^2)}{b^3}\sqrt{\frac{e+fz^2}{e+hz^2}}\right)$$

となる。(後は，$\sqrt{\frac{e+fz^2}{e+hz^2}}$ における e，f，h を元に戻せばよい。が，それは煩雑になるだけだから，省略。)

注解 (500)

前述の一覧によって，単に曲線の面積だけでなく，類似した流れの方法によって生成される他の種類の任意の量も，それらの流率から，そして，この定理 —— もしある量を生成する流率がその種類の［量の］単位に対して面積を生成する流率がその種類の単位に対するならば，すなわち，それによって面が描かれるような，底線の上を垂直に動いている線が線の単位に対するならば，任意の種類の量は同種の［量の］単位に対して曲線の面積が面の単位に対する —— を用いて，導くことができる。そして，それゆえ，どのような種類のものであれ，もし流率がそのような種類の動いている線によって述べられるならば，その流率によって生成される量はその縦線で描かれる面積によって述べられるであろう。あるいは，もし流率が縦線と同じ代数的な項によって述べられるならば，生成された量は描かれた面積と同じものによって述べられるであろう。それゆえ，任意の種類の流率を表す方程式は一覧の最初の列の中に探し出され，最後の列における t の値は生成された量を表すであろう。

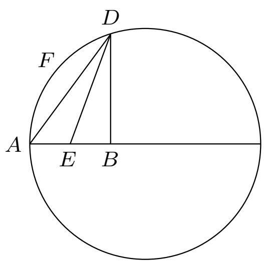
例えば，もし $\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$ が任意の種類の流率を表すならば，それを y に等しいとおき，一覧における方程式の形に還元するために z の代わりに z^η を代入すると，それは前者の一覧の第 3 型の最初の種の方程式 $z^{\eta-1}\sqrt{1+\frac{9}{4a}z^\eta}=y$ となるであろう。そして，項が比較されると，$d=1$，$e=1$，$f=\frac{9}{4a}$ となるであろうし，これから $\frac{8a+18z}{27}\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}\left(=\frac{2d}{3\eta f}R^3\right)=t$ となるであろう。それゆえ，$\frac{8a+18z}{27}\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$ は流率 $\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$ によって生成される量である。

そして，それゆえ，もし $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ が流率を表すならば，適当な還元 ($z^{\frac{2}{3}}$ が根号の外に出され，$z^{-\frac{2}{3}}$ の代わりに z^η と書かれることによる) によって後者の一覧の第 3 型の第 2 種の方程式 $\frac{1}{z^{2\eta+1}}\sqrt{z^\eta+\frac{16}{9a^{\frac{2}{3}}}}=y$ が得られるであろう。そして，項が比較されると，$d=1$，$e=\frac{16}{9a^{\frac{2}{3}}}$ 501
および $f=1$ となり，それゆえ，$z^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{z^\eta}=xx$，$\sqrt{1+\frac{16xx}{9a^{\frac{2}{3}}}}=v$，および $\frac{3}{2}s=\frac{-2d}{\eta}s=t$ となる。これらのことが見出されたら，流率 $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ によって生成された量は，それがその種類の単位に対して面積 $\frac{3}{2}s$ が面の単位に対するようにおかれることによって，あるいは，同じことになるが，量 t が，もはや面を表すのではなく，それが同じの種類の単位に対してその面が面の単位に対するような別の種類の量とおかれることによって，知られるようになるであろう。それゆえ，$\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ が線の流率を表すと仮定されたならば，t はもはや面ではなく今は線を表すと，すなわち，それは線の単位に対して，一覧に従って t によって表される，面積が面の単位に対すると，すなわち，それはその面積が線の単位に関係づけられる［割られる］ことによってつくら

れると，私は考える。この理由で，もし線の単位が e にとられるならば，前述の流率によって生成された長さは $\frac{3s}{2e}$ であろう。そして，このことを基に，それらの一覧は曲線の長さ，立体の量，および曲線の面積と同じようなものならどのようなものでも任意の他の量を決定するのに用いることができる。

第 11 章
類似した問題について
第 1 節
機械的に［機械的な技法で］曲線の面積を近似すること。

方法は，2 つあるいはより多くの直線図形の値を，それらが曲線の面積の値に非常に近くなるように，一緒に集めることである。それゆえ，方程式 $x - xx = \dot{z}\dot{z}$ で表される円 AFD について，面積 $AFDB$ の値 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} \cdots$ が見出された後で，いくつかの長方形の値が，［例えば，］$BD \times AB$ の値が $x\sqrt{x - xx}$ あるいは $x^{\frac{3}{2}} -$
502 $\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{9}{2}} \cdots$ であり，$AD \times AB$ の値が $x\sqrt{x}$ あるいは $x^{\frac{3}{2}}$ であるように，探し求められなければならない。その後，これらの値は任意の異なる文字 —— それは不定の数を表している —— が掛けられ，そして加えられて，その和の項は面積 $AFDB$ の値の対応する項と，許される限りそれらが等しくなるように，比較されることになるであろう。例えば，もし e および f が掛けられるならば，和は $\genfrac{}{}{0pt}{}{e}{+f}x^{\frac{3}{2}} - \frac{e}{2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{e}{8}x^{\frac{7}{2}} \cdots$ となるであろう。その項がこれらの項 $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} \cdots$ と比較されると，$e + f = \frac{2}{3}$，および $-\frac{e}{2} = -\frac{1}{5}$，あるいは $e = \frac{2}{5}$ および $f = \frac{2}{3} - e = \frac{4}{15}$ となる。それゆえ，近似的に $\frac{2}{5}BD \times AB + \frac{4}{15}AD \times AB =$ 面積 $AFDB$ である。確かに，$\frac{2}{5}BD \times AB + \frac{4}{15}AD \times AB$ の値は $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{40}x^{\frac{9}{2}} \cdots$ であり，これが面積 $AFDB$ から引かれたら，$\frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{90}x^{\frac{9}{2}} \cdots$ だけの誤差が残る。



それゆえ，AB を E で 2 等分すると，長方形 $AB \times DE$ の値は $x\sqrt{x - \frac{3}{4}xx}$，あるいは $x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{9}{128}x^{\frac{7}{2}} - \frac{27}{1024}x^{\frac{9}{2}} \cdots$ であろう。そして，長方形 $AD \times AB$ と比較されたこれは $\frac{8DE + 2AD}{15} \times AB =$ 面積 $AFDB$ を与え，誤差は $\frac{1}{560}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{5760}x^{\frac{9}{2}} \cdots$ だけになり，これは，たとえ $AFDB$ が 4 分円にとられるとしても，つねに全面積の $\frac{1}{1500}$ より小さい。しかし，この定理は次のように言い表すことができる。長方形 AB in DE に AD と DE の差の 15 分の 1 を加えたものは面積 $AFDB$ に対して，近似的に，3 が 2 に対する［比である］。

そして，それゆえ，2 つの長方形 $AB \times ED$ および $AB \times BD$ が，あるいは 3 つの長方形すべてがともに，寄せ集められると，あるいはさらに別の長方形が利用されると，他の規則を考案することができ，利用される長方形が多ければ多いほどより正確になるであろう。そして，双曲線の面積や他の曲線の面積についても同じことが理解されなければならない。それどころか，面積はたいていはただ 1 つの長方形によって適切に表すことができ，例えば，前述の円において，もし EB が AB に対して $\sqrt{10}$ が 5 に対するようにとられるならば，長方形 $AB \times ED$ は面積 $AFDB$ に対し

て 3 が 2 に対する比であり，誤差は $\dfrac{1}{175}x^{\frac{7}{2}}+\dfrac{11}{2250}x^{\frac{9}{2}}\cdots$ だけであろう。

第 2 節

与えられた面積から，底線および縦線を決定すること。

面積が有限方程式によって表されるときは難しいことは全く起こらない。しかし，無限［方 503
程式］によって表されるときは，底線を表す複合根が開かれなければならない。それゆえ，方程式 $\dfrac{ab}{a+z}=\dot z$ で表される双曲線については，$z=bx-\dfrac{bxx}{2a}+\dfrac{bx^3}{3aa}\cdots$ であることが見出された後で，今度は与えられた面積 z から底線 x が知られるようにするために，複合根を開けば，$x=\dfrac{z}{b}+\dfrac{zz}{2abb}+\dfrac{z^3}{6aab^3}+\dfrac{z^4}{24a^3b^4}+\dfrac{z^5}{120a^4b^5}\cdots$ が生じるであろう。そして，さらに，もし縦線 $\dot z$ が要求されたならば，ab を $a+x$ で，すなわち $a+\dfrac{z}{b}+\dfrac{zz}{2abb}+\dfrac{z^3}{6aab^3}\cdots$ で，割れば，$\dot z=b-\dfrac{z}{a}+\dfrac{zz}{2aab}-\dfrac{z^3}{6a^3bb}+\dfrac{z^4}{24a^4b^3}\cdots$ が現れるであろう。

それゆえ，方程式 $ax-\dfrac{a}{c}xx=\dot z\dot z$ で表される楕円については，面積が $z=\dfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5c}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{28cc}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{9}{2}}}{72c^3}\cdots$ であることが見出された後で，$\dfrac{3z}{2a^{\frac{1}{2}}}$ の代わりに v^3 と，$x^{\frac{1}{2}}$ の代わりに t と書けば，$v^3=t^3-\dfrac{3t^5}{10c}-\dfrac{3t^7}{56cc}-\dfrac{t^9}{48c^3}\cdots$ が現れるであろう。そして，根が開かれると $t=v+\dfrac{v^3}{10c}+\dfrac{81v^5}{1400cc}+\dfrac{1171v^7}{25200c^3}\cdots$ である。この平方 $vv+\dfrac{v^4}{5c}+\dfrac{22v^6}{175cc}+\dfrac{823v^8}{7875c^3}\cdots$ が x に等しい。そして，方程式 $ax-\dfrac{a}{c}xx=\dot z\dot z$ における x の代わりにこの値が代入され，根が開かれると $\dot z=a^{\frac{1}{2}}v-\dfrac{2a^{\frac{1}{2}}v^3}{5c}-\dfrac{38a^{\frac{1}{2}}v^5}{175cc}-\dfrac{284a^{\frac{1}{2}}v^7}{1575c^3}\cdots$ が生じるであろう。それゆえ，与えられた面積 z から，そして，それゆえ，v あるいは $\sqrt[3]{\dfrac{3z}{2a^{\frac{1}{2}}}}$ から，底線 x および縦線 $\dot z$ が与えられるであろう。これらのことはすべて，量 c が奇数の次元になるところではその符号が替えられるだけで，双曲線にも適用されるであろう。

第 12 章

［曲線の長さを見出すことについて］

問題 10

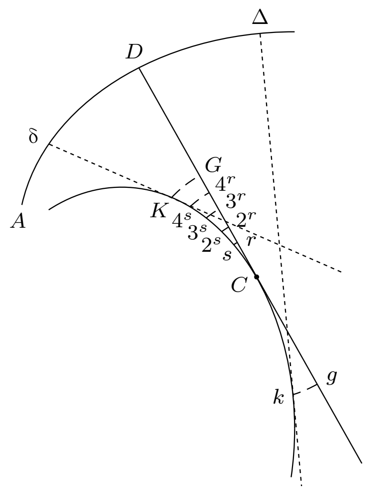
その長さを有限方程式で表すことができるような任意に多くの曲線を見出すこと。

次の前提 (positio) によってこの問題を解くための方法が用意される。

I　もし直線 DC が任意の曲線 AD の上を垂直に立ったままで動かされると仮定されるならば，
その［直線上の］それぞれの点 G，g，r などは，等距離にあり，その直線に垂直である，他の曲線 504
GK，gk，rs などを描くであろう。

II　もしその直線がいずれの方向にも無際限に延長されるならば，その先端は反対の方向へ動き，それらの反対向きの運動を区分する点，それゆえ運動の中心と呼ぶことができる点は，前に述べたように，点 D における曲線 AD の曲率中心と一致するであろう。その点を C としよう。

III　もし線 AD を円のようでなく不均一に曲げられたものと仮定し，δ における方がより大きく Δ における方がより小さく曲がっているとするならば，その中心は，K におけるようにより大きく曲がる部分により近づき，k におけるようにより小さく曲がる部分からより離れていくように，連続的にその位置を変え，その理由のために，KCk のような何らかの曲線を描くであろう。



IV　曲率中心によって描かれるこの線［縮閉線］に，直線 DC は絶えず接するであろう。なぜならば，もしこの直線上の点 D が δ の方向に動くならば，同じ時間の間に K まで移り，中心 C と同じ側にある，点 G は (第 2 の前提により) 同じ方向に動くであろうからである。さらに，もし同じ点 D が Δ の方向に動くならば，同じ時間の間に k まで移り，中心 C と反対側にある，点 g は反対の方向に，すなわち前の場合で，K まで移る間に，動いていた G と同じ方向に，動くであろう。それゆえ，K および k は直線 DC の同じ側に位置する。それゆえ，K および k は任意の点として無制限にとられるから，その曲線の全体は直線 DC の同じ側に位置し，そして，それゆえ，それを横切ることはなく接するだけであるということは明らかである。

ここでは，線 $\delta D\Delta$ は δ の部分で絶えずより大きく曲がり，Δ の部分ではより小さく曲がると仮定されている。しかし，もし曲率が D そのものにおいて極大あるいは極小であるならば，直線 DC は曲線 KC を横切るであろうが，それにもかかわらず角についてはどんな直線角よりも小さいであろう。このことは，もし接するとすれば，といわれるのと同じである。確かに，この場合，終点 C はとがった形をしており，最も傾斜した交点で終りになる，曲線の［2 つの］部分は互いに接する。それゆえ，その接触角を分割する直線 DC によって，横切られるというよりは接しられるという方がより正確であろう。

V　直線［線分］CG は曲線［弧］CK と等しい。なぜならば，その直線上のそれぞれの点 r,
505 2^r，3^r，4^r，$\cdots$ が，その直線の運動によって［その直線が］曲線 CK に近づく間に，曲線の弧 rs,
2^r2^s，3^r3^s，$\cdots$ を描くものと仮定すれば，そして，それらの弧は (第 1 の前提により) 曲線 CK に接する (前提 4 による) 直線に垂直であるから，それらはまたその曲線に垂直であろうからである。それゆえ，それらの弧の間にはさまれた CK の部分は，無限に小さいから直線とみなすことができて，それらの同じ弧の距離に等しい，すなわち (前提 1 により) 直線 CG と同じだけ多くの［対応する］部分と等しい。そして，それぞれの等しい部分が加えられれば，CK 全体は CG 全体と等しいであろう。

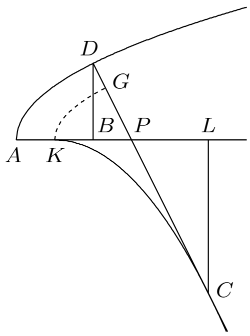
同じことは，その運動の間，直線 CG のそれぞれの部分を次々と曲線 CK のそれぞれの部分に対応させ，平面の上を前方に回転している車輪の周が接点が通過する距離を測るのと同じように，それらを測るものと仮定することによって，知ることができる。

これらのことから，問題は，任意の曲線 $A\delta D\Delta$ を随意に仮定することによって，それゆえ仮定された［曲線の］曲率中心があちこちと動き回る別の曲線［縮閉線］KCk を決定することによって，解くことができることは明らかである。

それゆえ，位置において与えられた任意の直線 AB に対して垂線 DB，CL を下ろし，AB 上に任意の点 A をとって，$AB = x$ および $BD = y$ とすると，曲線 AD を定めるために x および y の間の関係を任意に仮定すれば，それから (問題 5 によって) 曲線 KC およびその長さ GC をともに決定する点 C が引き出されるであろう。

例　$ax = y^2$ を曲線 AD，すなわちアポロニウスの放物線，の方程式としよう。すると，問題 5

によって，$AL=\dfrac{1}{2}\,a+3x$，$CL=\dfrac{4y^3}{aa}$，そして $DC=\dfrac{a+4x}{a}\sqrt{\dfrac{1}{4}\,a^2+ax}$ が見出されるであろう。

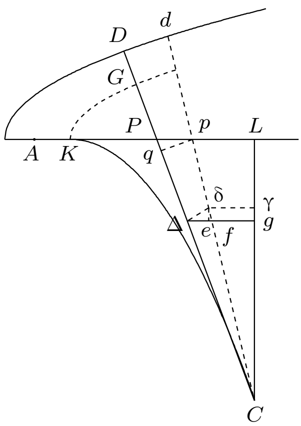


これらが得られると，曲線 KC は AL および LC によって，そして，その長さは DC によって決定される。点 K および C を曲線 KC 上のいかなるところに仮定するかは自由であるから，K を放物線の頂点における曲率中心と仮定すると，それゆえ AB および BD，すなわち x および y，を零とおくと，$DC=\dfrac{1}{2}\,a$ が生じるであろう。そして，これは AK あるいは DG の長さであり，DC の先ほどの不定の値から取り去られると，GC あるいは $KC=\dfrac{a+4x}{a}\sqrt{\dfrac{1}{4}\,a^2+ax}-\dfrac{1}{2}\,a$ が残る。

いま，もしこれはどのような種類の曲線か，そしてその長さはどれほどの大きさかを，放物線とより多くの関係をもつことなしに，知りたいと望むのであれば，$KL=z$ 506
および $LC=v$ とすれば，$z\left(=AL-\dfrac{1}{2}\,a\right)=3x$ あるいは $\dfrac{1}{3}\,z=x$，および $\dfrac{az}{3}\,(=ax)=y^2$ であろうし，それゆえ $4\sqrt{\dfrac{z^3}{27a}}\;\left(=\dfrac{4y^3}{aa}=CL\right)=v$ あるいは $\dfrac{16z^3}{27a}=v^2$ であろう。これは曲線 KC が第 2 類の放物線であることを示している。そして，CG の値における x の代わりに $\dfrac{1}{3}\,z$ と書かれると，その長さとして $\dfrac{3a+4z}{3a}\sqrt{\dfrac{1}{4}\,aa+\dfrac{1}{3}\,az}-\dfrac{1}{2}\,a$ が生じる。

問題は AP および PD (もちろん，P を底線と法線の交点とおいて) の間の関係を定める方程式を仮定することによっても解くことができる。

なぜならば，$AP=x$ および $PD=y$ として，CPD が最も小さい [無限に小さい] 空間を，例えば Cpd の位置まで，動くものとし，そして，CD および Cd において $C\Delta$ および $C\delta$ を任意に与えられた同じ長さ，例えば 1，にとり，また，CL に対して垂線 Δg および $\delta\gamma$ を，Δg (これを z とする) が Cd と f で交わるように，下ろして，平行四辺形 $g\gamma\delta e$ をつくるものと仮定すると，($\dot{x}$，$\dot{y}$ および $\dot{z}$ を前のように x，y および z の流率とするとき) $\Delta e:\Delta f\,(=\overline{\Delta e}^2:\overline{\Delta\delta}^2=\overline{Cg}^2:\overline{C\Delta}^2)=\dfrac{\overline{Cg}^2}{C\Delta}:C\Delta$ であろう。そして，$\Delta f:Pp=C\Delta:CP$ であろう。そして，比の性質により (ex aequo) $\Delta e:Pp=\dfrac{\overline{Cg}^2}{C\Delta}:CP$ であろう。しかし，Pp は底線 AP のモーメントで，それを加えることによって Ap になり，Δe は垂線 Δg の同時のモーメントで，それを取り去ることによって $\delta\gamma$ になる。それゆえ，Δe および Pp は線 Δg (z) および AP (x) の流率，すなわち $\dot{z}$ および $\dot{x}$，に比例する。それゆえ，$\dot{z}:\dot{x}=\dfrac{\overline{Cg}^2}{C\Delta}:CP$ である。そして，それゆえ，$\overline{Cg}^2\,(=\overline{C\Delta}^2-\overline{\Delta g}^2)=1-zz$，および $C\Delta=1$ であるから，$CP=\dfrac{\dot{x}-\dot{x}z^2}{\dot{z}}$ であろう。さらに，3 つの [流率] $\dot{x}$，$\dot{y}$ および $\dot{z}$ の任意の 1 つを一様な流率とし，残りのものをそれに関係づけることが許されるから，もしそれを $\dot{x}$ にとり，その量を単位とするならば，$CP=\dfrac{1-zz}{\dot{z}}$ が生じるであろう。



さらに，$C\Delta\,(1) : \Delta g\,(z) = CP : PL$，および $C\Delta\,(1) : Cg\,(\sqrt{1-zz}) = CP : CL$ である。それゆえ，$PL = \dfrac{z-z^3}{\dot{z}}$，および $CL = \dfrac{1-zz}{\dot{z}}\sqrt{1-zz}$ となる。そして，最後に，pq が無限に小さい弧 Dd に平行に，あるいは DC に垂直に，引かれると，Pq は DP のモーメントであり，それが加えられると，AP が Ap になるのと同じ時間に，dp になるであろう。それゆえ，Pp および Pq は AP (x) および PD (y) の流率，すなわち 1 および $\dot{y}$，に比例する。そして，それゆえ，相
507 似な三角形 Ppq および $C\Delta g$ により，$C\Delta$ および Δg，あるいは 1 および z は同じ比にあるから，$\dot{y} = z$ であろう。それゆえ，問題の解法は次のようになる。

x および y の間の関係を表す提示された方程式から，(問題 1 によって) 流率 $\dot{x}$ および $\dot{y}$ の関係を求めよ。すると，$\dot{x} = 1$ とおけば，$\dot{y}$ の値，それは z に等しい，が得られるであろう。それゆえ，$\dot{y}$ の代わりに z を代入して，最後の方程式の助けによって (同じく問題 1 により) 流率 $\dot{x}$，$\dot{y}$ および $\dot{z}$ の関係を求め，再び $\dot{x}$ の代わりに 1 を［，また $\dot{y}$ の代わりに z を］代入すれば，$\dot{z}$ の値が得られるであろう。これらがなされたら，$\dfrac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}} = CP$，$z \times CP = PL$，および $CP \times \sqrt{1-\dot{y}\dot{y}} = CL$ とすれば，C は曲線上にあり，その任意の部分［弧］KC は直線 CG に等しい，すなわち点 C および K から曲線 Dd に垂直に引かれた接線の差に等しいであろう。

例　$ax = yy$ を AP および PD の間の関係を表す方程式とすると，はじめに問題 1 により $a\dot{x} = 2y\dot{y}$ あるいは $a = \dfrac{2y\dot{y}}{\dot{x}} = 2yz$ であろう。すると，$0 = 2\dot{y}z + 2y\dot{z}$ あるいは $\dfrac{-zz}{y} = \dot{z}$ である。それゆえ，$CP = \left(\dfrac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}} =\right) y - \dfrac{4y^3}{aa}$，$PL = (z \times CP =)\,\dfrac{1}{2}\,a - \dfrac{2yy}{a}$，および $CL = \dfrac{aa-4yy}{2aa}\sqrt{4yy-aa}$ となる。さらに，CP および PL から y および x を取り去ると，$CD = -\dfrac{4y^3}{aa}$ および $AL = \dfrac{1}{2}\,a - \dfrac{3yy}{a}$ が残る。ところで，私が y および x を取り去るのは，CP および PL は，それらの値が正のとき，それらは点 P の D および A の方向の部分に落ち，それゆえ正の量 PD および AD が取り去られることによって減少させられなければならず，一方，それらが負の値であるときは，点 P の反対の部分に落ち，それゆえ，また，正の量 PD および AD が取り去られることによって増加させられなければならないからである。

いま，点 C が位置する曲線の任意の 2 点 K および C の間の長さを知るために，私は，点 K における接線の長さを求め，それを CD から引く。例えば，もし K を接線がそこで終る点とするならば，$C\Delta$ および Δg あるいは 1 および z を等しいとおくとき，それゆえそれが底線 AP そのものの内に位置しているとき，方程式 $a = 2yz$ における z の代わりに 1 と書けば，$a = 2y$ が現れる。それゆえ，CD の値，すなわち $-\dfrac{4y^3}{aa}$，における y の代わりに $\dfrac{1}{2}\,a$ と書けば，$-\dfrac{1}{2}\,a$ が生じる。そして，これは点 K における接線の長さあるいは DG の長さで，それと CD の上述の不定の値との差 $\dfrac{4y^3}{aa} - \dfrac{1}{2}\,a$ は GC であり，それは曲線の部分 KC と等しい。

さらに，この曲線がどのような種類のものかを明らかにするために，AL (はじめに，正になるようにその符号を替えておく) から AK を取り去れば，それは $\dfrac{1}{4}\,a$ であろう。そして，$KL = \dfrac{3yy}{a} - \dfrac{3}{4}\,a$ が残るであろうから，これを t とせよ。そして，線 CL の値 —— これを v と
508 する —— において $4yy - aa$ の代わりに $\dfrac{4at}{3}$ と書けば，上のように，$\dfrac{2t}{3a}\sqrt{\dfrac{4}{3}\,at} = v$，あるいは第 2 類の放物線の方程式 $\dfrac{16t^3}{27a} = vv$ が現れるであろう。

もしも t および v の間の関係があまり適切に方程式に還元できないときには，PC および PL の

長さを見出しただけで十分である。例えば，もし AP および PD の間の関係として (153 ページの図を見よ。) 方程式 $3a^2x+3a^2y-y^3=0$ が仮定されるならば，これから (問題 1 によって) まず $a^2+a^2z-y^2z=0$ が，それゆえ $a^2\dot{z}-2yz^2-y^2\dot{z}=0$ が現れる。それゆえ，$z=\dfrac{aa}{y^2-a^2}$，および $\dot{z}=\dfrac{2yz^2}{a^2-y^2}$ である。それゆえ，$PC=\dfrac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}$ および $PL=z\times PC$ が与えられ，これによって曲線上に位置している点 C が決定される。そして，そのような 2 つの点の間の曲線の長さは 2 つの対応する接線 DC あるいは $PC-y$ の差から知られる。

例えば，もし $a=1$ とおかれ，曲線上のある点 C を決定するために，$y=2$ にとられるならば，AP あるいは $x\left(=\dfrac{y^3-3a^2y}{3aa}\right)=\dfrac{2}{3}$，$z=\dfrac{1}{3}$，$\dot{z}=-\dfrac{4}{9}$，$PC=-2$，および $PL=-\dfrac{2}{3}$ が生じるであろう。次いで，もし別の点 C を決定するために，もし $y=3$ にとられるならば，$AP=6$，$z=\dfrac{1}{8}$，$\dot{z}=-\dfrac{3}{256}$，$PC=-84$，および $PL=-10\dfrac{1}{2}$ が生じるであろう。これらが得られたら，もし y を PC から取り去れば，DC の長さとして，はじめの場合は -4，後の場合は -87 が残るであろうし，それらの差 83 は見出された 2 つの点 C および C の間の曲線の長さである。

このことは，曲線が 2 つの点 C および c あるいは K および C の間で，尖ったようなところで終ることなく，連続しているときにそうであると理解されるべきである。しかし，そのような 1 つあるいはより多くの終点 (この終点は最大あるいは最小の PC あるいは DC を決定することによって見出される) がそれらの点の間にあるときは，それらの間の曲線のそれぞれの部分の長さおよび点 C あるいは K は別々に探し出されなければならず，そして［その後でそれらは］加えられなければならない。

ここでは，求長問題として縮閉線の求長が取り上げられる。

「例」$y=\sqrt{ax}$ については，$y'=\dfrac{a}{2\sqrt{ax}}$，$y''=-\dfrac{a}{4x\sqrt{ax}}$ であるから，

曲率中心の x 座標は $AL=x-\dfrac{\left\{1+(y')^2\right\}y'}{y''}=\dfrac{1}{2}a+3x$ で，

y 座標は $CL=y+\dfrac{1+(y')^2}{y''}=\dfrac{4x\sqrt{ax}}{a}$ であり，

曲率半径は $DC=\dfrac{\{1+(y')\}^{\frac{3}{2}}}{|y''|}=\dfrac{\left(\dfrac{4x+a}{4x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|-\dfrac{a}{4x\sqrt{ax}}\right|}=\dfrac{4x+a}{a}\sqrt{\dfrac{4ax+a^2}{4}}$ である。

よって，今日の一般的な座標系の場合，曲率半径 DC から $x=y=0$ としたときの値 $DG=AK=\dfrac{1}{2}a$ を引けば，縮閉線の弧長 $KC=GC=\dfrac{4x+a}{a}\sqrt{\dfrac{4ax+a^2}{4}}-\dfrac{1}{2}a$ が求められるという。

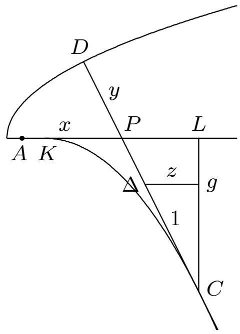
また，座標系を $AP=x$，$PD=y$ としてもよいという。

このとき，モーメントの考えを用いて $\dfrac{dz}{dt}\,(=\dot{z}):\dfrac{dx}{dt}\,(=\dot{x})=\dfrac{Cg^2}{C\Delta}:CP$ が示される。そして，$C\Delta=1$，$Cg^2=1-z^2$ であるから，$\dot{x}=1$ とすれば，$CP=\dfrac{1-z^2}{\dot{z}}$ となる。従って，$\dfrac{dy}{dt}\,(=\dot{y})=z$ となることから，

$$CP=\frac{1-\dot{y}^2}{\dot{z}},\quad PL=\frac{z(1-z^2)}{\dot{z}}=z\times CP,$$

$$CL = \frac{1-z^2}{\dot{z}}\sqrt{1-z^2} = CP \times \sqrt{1-z^2}$$

となる。これで，点 C の位置が決定される。



例えば，x と y の関係が $3a^2x + 3a^2y - y^3 = 0$ のときは ……まず，$3a^2\dot{x} + 3a^2\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$ だから，$\dot{x} = 1$，$\dot{y} = z$ より，$a^2 + a^2z - y^2z = 0$ となって，$\dot{y} = z = \dfrac{a^2}{y^2 - a^2}$ となる。

次に，$a^2\dot{z} - 2y\dot{y}z - y^2\dot{z} = 0$ すなわち $a^2\dot{z} - 2yz^2 - y^2\dot{z} = 0$ より $\dot{z} = \dfrac{2yz^2}{a^2 - y^2}$ が得られる。

$a = 1$ の場合，$y = 2$ とすると，$x = \dfrac{2}{3}$，$z = \dfrac{1}{3}$，$\dot{z} = -\dfrac{4}{27}$，$PC = -6$，$PL = -2$ であり，$DC = PC - y = -8$ である。

また，$y = 3$ とすると，$x = 6$，$z = \dfrac{1}{8}$，$\dot{z} = -\dfrac{3}{256}$，$PC = -84$，$PL = -\dfrac{21}{2}$ であり，$DC = -87$ である。

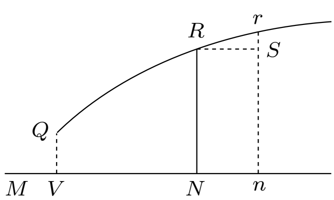
ところで，$DC = AKC$ であるから，縮閉線 KC 上の 2 点間の弧の長さは DC の差として求められ，$y = 2$ のときの曲率中心 C_2 と $y = 3$ のときの点 C_3 との間の弧の長さは $C_2C_3 = (-8) - (-87) = 79$ となる。［本文中の値は誤りのように思えるが，それは訳者の思い違いか。］

問題 11

有限方程式によって，その長さが提示された任意の曲線の長さと，あるいは与えられた線に結びつけられた［線で割られた］**面積と比較できるような任意に多くの曲線を見出すこと。**

これは，前の問題において AP および PD の間の関係を決定するのに仮定された方程式の中に提示された曲線の長さや面積を含ませることによって達成される。しかし，z および $\dot{z}$ がこれから問題 1 によって引き出されるためには，長さあるいは面積の流率が先に見出されなければならない。

509 長さの流率はそれを底線および垂直な縦線の流率の平方の和の平方根に等しいとおくことによって決定される。なぜならば，RN を底線 MN の上の垂直な縦線とし，QR を RN がそこで終る提示された曲線としよう。そして，$MN = s$，$NR = t$ および $QR = v$ とし，(それらの流率をそれぞれ $\dot{s}$，$\dot{t}$ および $\dot{v}$ として，) 線 NR が最も近い［無限に近い］位置 nr まで前進させられると仮定すれば，nr に対して垂線 RS を下ろすと，RS，Sr および Rr は線 MN，NR，および QR の同時のモーメントであり，それらが加えられると［それぞれ］Mn，nr，Qr になる。そして，これらは互いに同じ線の流率に比例するから，直角 RSr により，$\sqrt{RS^2 + Sr^2} = Rr$，それゆえ $\sqrt{\dot{s}^2 + \dot{t}^2} = \dot{v}$ であろうからである。



しかし，流率 $\dot{s}$ および $\dot{t}$ を決定するには 2 つの方程式が必要とされ，一方は MN および NR，あるいは s および t の間の関係を定めるもので，これから流率 $\dot{s}$ および $\dot{t}$ の間の関係が引き出されるはずで，他方は与えられた図における MN あるいは NR および求める AP あるいは x の間の関係を定めるもので，これから流率 $\dot{s}$ あるいは $\dot{t}$ および流率 $\dot{x}$ あるいは 1 の関係が知られるようになる。

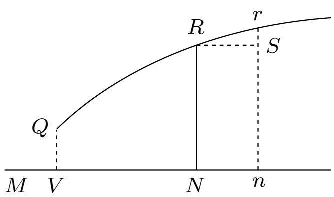
$\dot{v}$ が見出されたら，流率 $\dot{y}$ および $\dot{z}$ は，PD の長さあるいは y が定められる，3 つ目に仮定された方程式によって見出されるはずで，そして，前の問題におけるように，$PC = \dfrac{1-\dot{y}^2}{\dot{z}}$，

$PL = \dot{y} \times PC$，および $DC = PC - y$ が得られるであろう。

例1　$as - ss = tt$ を与えられた曲線 QR，すなわち円，の方程式として，$xx = as$ を線 AP および MN の間の関係，そして，$\dfrac{2}{3}\,v = y$ を与えられた曲線 QR および直線 PD の長さの間の関係としよう。第 1 のものによって，$a\dot{s} - 2s\dot{s} = 2t\dot{t}$ あるいは $\dfrac{a-2s}{2t}\,\dot{s} = \dot{t}$ となる。それゆえ，$\dfrac{a\dot{s}}{2t}\,(= \sqrt{\dot{s}\dot{s} + \dot{t}\dot{t}}) = \dot{v}$ である。第 2 のものによって，$2x = a\dot{s}$ となり，それゆえ $\dfrac{x}{t} = \dot{v}$ である。そして，第 3 のものによって，$\dfrac{2}{3}\,\dot{v} = \dot{y}$ すなわち $\dfrac{2x}{3t} = z$ となり，これから $\dfrac{2}{3t} - \dfrac{2x\dot{t}}{3tt} = \dot{z}$ となる。これらが見出されたら，$PC = \dfrac{1 - \dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}$，$PL = \dot{y} \times PC$，そして $DC = PC - y$ あるいは $PC - \dfrac{2}{3}\,QR$ にとらなければならない。ここで，与えられた曲線 QR の長さは，直線 DC の長さ，それゆえ点 C がそこに落ちる曲線の長さ，が同時に知られるようになることなしには，見出すことができないことは明らかである。そして，逆もそうである。

例2　$as - ss = tt$ はそのままにして，$x = s$ および $vv - 4ax = 4ay$ とおかれるとする。すると，第 1 のものによって，上のように，$\dfrac{a\dot{s}}{2t} = \dot{v}$ が見出される。しかし，第 2 のものによって， 510
$1 = \dot{s}$，それゆえ $\dfrac{a}{2t} = \dot{v}$ となる。そして，第 3 のものによって，$2\dot{v}v - 4a = 4a\dot{y}$，あるいは ($\dot{v}$ を消去して) $\dfrac{v}{4t} - 1 = z$ であり，これから $\dfrac{\dot{v}}{4t} - \dfrac{v\dot{t}}{4tt} = \dot{z}$ である。

例3　3 つの方程式 $aa = st$，$a + 3s = x$ および $x + v = y$ が仮定される［としよう］。すると，第 1 のもの (これは双曲線を示す) によって $0 = \dot{s}t + \dot{t}s$，あるいは $-\dfrac{\dot{s}t}{s} = \dot{t}$ が生じ，それゆえ $\dfrac{\dot{s}}{s}\sqrt{ss + tt}\,(= \sqrt{\dot{s}^2 + \dot{t}^2}) = \dot{v}$ となる。第 2 のものによって $3\dot{s} = 1$ が生じ，それゆえ $\dfrac{1}{3s}\sqrt{s^2 + t^2} = \dot{v}$ である。そして，第 3 のものによって $1 + \dot{v} = \dot{y}$ あるいは $1 + \dfrac{1}{3s}\sqrt{ss + tt} = z$ となる。それゆえ，これから，すなわち根 $\dfrac{1}{3s}\sqrt{s^2 + t^2}$ の流率を $\dot{\varphi}$ とおくと，$\dot{\varphi} = \dot{z}$ となる。もしこれ［根 $\frac{1}{3s}\sqrt{s^2 + t^2}$］が φ に等しい，あるいは $\dfrac{1}{9} + \dfrac{tt}{9s^2} = \varphi\varphi$ であると仮定されるならば，そこから $\dfrac{2t\dot{t}}{9ss} - \dfrac{2tt\dot{s}}{9s^3} = 2\varphi\dot{\varphi}$ が生じるであろう。そして，はじめに $\dot{t}$ の代わりに $-\dfrac{\dot{s}t}{s}$ が，次いで $\dot{s}$ の代わりに $\dfrac{1}{3}$ が代入されると，2φ による除法が実行されれば，$\dfrac{-2t^2}{27\varphi s^3} = (\dot{\varphi} =)\,\dot{z}$ が得られるであろう。$\dot{y}$ および $\dot{z}$ が見出されたら，残りははじめの例のようにやり遂げられるであろう。

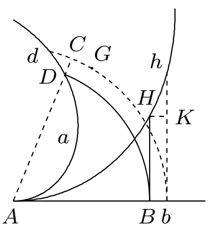


しかし，もし曲線上の任意の点 Q から垂線 QV が MN に下ろされ，その長さが面積 $QRNV$ を与えられた任意の線に結びつける［線で割る］ことによって生じる長さから知られるような，曲線が見出されなければならないならば，その与えられた線を E とし，結びつけること［割ること］によって生じる長さ $\dfrac{QRNV}{E}$ を v とおこう。すると，面積 $QRNV$ の流率は VN の上に垂直につくられる高さ E の直角の平行四辺形の面積の流率に対して，前者が描かれる縦線 NR あるいは t が，同じ時間に後者が描かれる縦線 E に対するから，そして，それらの面積を与えられた E に結びつける［E で割る］ことで生じる長さの，すなわち線 v の，および VN［『数学論文集』は MN］あるいは s の，流率 $\dot{v}$ および $\dot{s}$ は同じ比にあるから，$\dot{v} = \dfrac{\dot{s}t}{E}$ であろう。それゆえ，この規則によって $\dot{v}$ の値は探し求められ，残りは前の例のようにやり遂げられる

であろう。

例4　QR を方程式 $aa+\dfrac{ass}{c}=tt$ で定められる双曲線とすると，これから問題 1 によって，$\dfrac{as\dot{s}}{c}=t\dot{t}$，あるいは $\dfrac{as\dot{s}}{ct}=\dot{t}$ が生じるであろう。それゆえ，もし別の 2 つの方程式として $x=s$ および $y=v$ が仮定されるならば，前者は $1=\dot{s}$ を与えるであろうし，それゆえ $\dot{v}\left(=\dfrac{\dot{s}t}{E}\right)=\dfrac{t}{E}$
511 となり，後者ははじめに $\dot{y}=\dot{v}$，あるいは $z=\dfrac{t}{E}$ を，それゆえこれから $\dot{z}=\dfrac{\dot{t}}{E}$ を与えるであろう。そして，$\dot{t}$ の代わりに $\dfrac{as\dot{s}}{ct}$ あるいは $\dfrac{as}{ct}$ が代入されると $\dot{z}=\dfrac{as}{Ect}$ が生じるであろう。$\dot{y}$ および $\dot{z}$ が見出されたら，前のように，$\dfrac{1-\dot{y}\dot{y}}{\dot{z}}=CP$ および $\dot{y}\times CP=PL$ とすれば，点 C は，そしてそのようなすべての点が落ちる曲線も，決定されるであろう。十分に示されたように，その曲線の長さは，$CP-v$ に等しい，DC の長さから知られるようになる。

また，問題が解かれることになる別の方法がある。すなわち，その流率が，提示された曲線の流率に等しいか，あるいはそれと他の線の流率とから合成されているかのいずれかであるような曲線を探し求めることによって［問題が解かれる］。そして，これは特に機械的な曲線をそれと等しい幾何学的な曲線に変換するときにときどき使われる。このことの顕著な例は螺線におけるものである。



AB を位置において与えられた直線，BD を底線としての AB の上を，その間は A を中心として保ちながら，前進している弧［A を中心とする円弧］，ADd をその弧が絶えずそこで終るような螺線，bd を［弧 BD に］最も近い弧あるいは弧 BD が進むとして［それが］最も近くまで動かされたときの位置，DC を弧 bd に対する垂線，dG をそれらの弧の差，AH を螺線 AD に等しい別の曲線，BH を AB の上を垂直に進み曲線 AH で終る直線，bh をその直線が進むときの最も近くの位置，そして HK を bh の垂線としよう。すると，無限に小さい三角形 DCd および HKh において，DC および HK は同じ第 3 の［線］Bb に等しいから，それゆえ互いに等しく，そして Dd および Hh は仮定から等しい曲線の対応する部分であり，それゆえ［それらも］また等しく，そして確かにまた C および K における角は直角であるから，第 3 の辺 dC および hK もまた等しくなるであろう。それゆえ，さらに，$AB:BD=Ab:bC=Ab-AB\,(Bb):bC-BD\,(CG)$ となるから，それゆえ，$\dfrac{BD\times Bb}{AB}=CG$ であり，もしこれが dG から取り去られれば，$dG-\dfrac{BD\times Bb}{AB}\,(=dC)=hK$ が残るであろう。それゆえ，$AB=z$，$BD=v$ および $BH=y$ (とし，それらの流率をそれぞれ $\dot{z}$，$\dot{v}$ および $\dot{y}$) とすれば，Bb，dG および hK は，それらが加えられると［それぞれ］Ab，bd および bh となる，同じものの同時のモーメントであり，それゆえ互いにそれらの流率に比例するから，最後の方程式においてモーメントの代わりに流率が，同様に線［の長さ］の代わりにそれらの記号が代入されると，$\dot{v}-\dfrac{v\dot{z}}{z}=\dot{y}$ が現れるであろう。ここで，もし，それらの流率について，$\dot{z}$ が均一であるとみなされ，
512 そして，他のものがそれに関連づけられる単位であると仮定されるならば，$\dot{v}-\dfrac{v}{z}=\dot{y}$ が生じるであろう。

そのため，それによって螺線が定められる AB および BD (あるいは z および v) の間の関係が何らかの方程式によって与えられるとき，流率 $\dot{v}$ が (問題 1 によって) 与えられ，それから，流率 $\dot{y}$

も，それを $\dot{v}-\dfrac{v}{z}$ に等しいとおくことによって，与えられるであろう。そして，このことは，問題 2 によって，それがその流率である，線 y あるいは BH を与えるであろう。

例1　もし $\dfrac{zz}{a}=v$，すなわちアルキメデスの螺線の方程式，が与えられるならば，これから (問題 1 により) $\dfrac{2z}{a}=\dot{v}$ が引き出されるであろう。これから $\dfrac{v}{z}$ あるいは $\dfrac{z}{a}$ を取り去れば，$\dfrac{z}{a}=\dot{y}$ が残るであろうし，これから問題 2 により $\dfrac{zz}{2a}=y$ となる。これは，この螺線 AD がそれに等しい曲線 AH は，直立辺が $2a$ であるようなアポロニウスの放物線であること，あるいはその縦線 BH はいたるところで弧 BD の半分に等しいことを示している。

例2　もし方程式 $z^3=av^2$ あるいは $v=\dfrac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ によって定められる螺線が提示されるならば，問題 1 によって $\dfrac{3z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}}=\dot{v}$ が現れるであろう。これからもし $\dfrac{v}{z}$ あるいは $\dfrac{z^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ が取り去られるならば，$\dfrac{z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}}=\dot{y}$ が残るであろうし，これから問題 2 により $\dfrac{z^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}}=y$ が生じるであろう。すなわち，$\dfrac{1}{3}BD=BH$ であり，AH は第 2 類の放物線になる。

例3　もし螺線［の方程式］を $z\sqrt{\dfrac{a+z}{c}}=v$ とするならば，これから問題 1 により $\dfrac{2a+3z}{2\sqrt{ac+cz}}=\dot{v}$ が引き出されるであろう。これからもし $\dfrac{v}{z}$ あるいは $\sqrt{\dfrac{a+z}{c}}$ が取り去られるならば，$\dfrac{z}{2\sqrt{ac+cz}}=\dot{y}$ が残るであろう。いま，この流率 $\dot{y}$ によって生成された量は，無限級数に展開することなしには，問題 2 を利用して見出すことはできないから，問題 9 の注解の趣旨に従って，z の代わりに z^{η} を代入することによって，それを一覧の最初の列にある方程式の形に還元すると，$\dfrac{z^{2\eta-1}}{2\sqrt{ac+cz^{\eta}}}=\dot{y}$，すなわち前者の一覧の第 4 型の第 2 種の方程式，が現れる。そして，項が比較されると $d=\dfrac{1}{2}$，$e=ac$ および $f=c$ となり，それゆえ $\dfrac{z-2a}{3c}\sqrt{ac+cz}\,(=t)=y$［$-\dfrac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}c^{-\frac{1}{2}}$］となる。これが［長さにおいて］螺線 AD と等しい幾何学的な曲線 AH の方程式である。

これも曲線の求長に関する問題。

$$\left\{\begin{array}{l}\text{MN と NR の間の関係式，すなわち曲線の方程式を $f(s,\,t)=0$}\\ \text{底線 $AP=x$ と MN (あるいは NR) の間の関係式を $g(x,\,s)=0$ (あるいは $g(x,\,t)=0$)}\\ \text{曲線 QR の長さと縦線 $PD=y$ の間の関係式を $h(v,\,y)=0$}\end{array}\right.$$

とするとき，問題 1 によって

$$\left\{\begin{array}{l} f(s,\,t)=0 \quad\longrightarrow\quad \varphi(\dot{s},\dot{t})=0\\ g(x,\,s)=0\ \text{(あるいは $g(x,\,t)=0$)} \quad\longrightarrow\quad \psi(\dot{x},\dot{s})=0\ \text{(あるいは $\psi(\dot{x},\dot{t})=0$)}\\ h(v,\,y)=0 \quad\longrightarrow\quad \zeta(\dot{v},\dot{y})=0\end{array}\right.$$

とした 3 つの式と $\sqrt{\dot{s}^2+\dot{t}^2}=\dot{v}$ を用いて，［そして，$\dot{x}=1$，$z=\dot{y}$ として］$F(x,\,y)=0$ の弧長を求めようというのである。ただし，縮閉線の長さに関しては $PC=\dfrac{1-\dot{y}^2}{\dot{z}}$，$PL=\dot{y}\times PC$，$DC=PC-y$ を利用することになる。

はじめの「例」の場合，$as-s^2=t^2$，$x^2=as$，$\dfrac{2}{3}v=y$ であるから，

まず，第 1 式から $a\dot{s}-2s\dot{s}=2t\dot{t}$ であるから，$\dot{t}=\dfrac{a-2s}{2t}\,\dot{s}$ となり，

$$\dot{v}=\sqrt{\dot{s}^2+\dot{t}^2}=\sqrt{\dot{s}^2+\frac{a^2-4as+4s^2}{4t^2}\,\dot{s}^2}=\sqrt{\frac{4t^2+(a^2-4as+4s^2)}{4t^2}\,\dot{s}^2}$$
$$=\sqrt{\frac{4(as-s^2)+(a^2-4as+4s^2)}{4t^2}\,\dot{s}^2}=\frac{a\dot{s}}{2t}$$
となる。

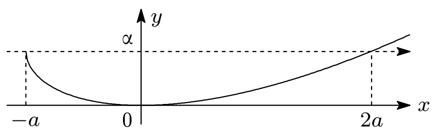
次に，第 2 式から $2x\dot{x}=a\dot{s}$ であるが，$\dot{x}=1$ とするので $2x=a\dot{s}$ となって，$\dfrac{a}{2}=\dfrac{x}{\dot{s}}$ が得られるから，上の式と合わせて $\dot{v}=\dfrac{x}{t}$ となる。

そして，第 3 式から $\dfrac{2}{3}\dot{v}=\dot{y}$ となるから，$\dot{y}=\dfrac{2x}{3t}$ となる。

ところで，$t^2=as-s^2=x^2-\left(\dfrac{x^2}{a}\right)^2=\dfrac{x^2(a^2-x^2)}{a^2}$ であるから，$t=\dfrac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a}$ となる。

従って，$\dot{y}=\dfrac{2a}{3\sqrt{a^2-x^2}}$ であるから，$y=\dfrac{2a}{3}\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$ となる。

［直交座標系をとれば，$F(x,\ y)=0$ を求めるのならこれでいいような気がするのだが，ニュートンは縮閉線と関連づけている。］



$y=\dfrac{x-2a}{3c}\sqrt{ac+cx}+\dfrac{2}{3}\,a^{\frac{3}{2}}\,c^{-\frac{1}{2}}$

［$a=1,\ c=2$］

「例 3」の結果 $\dfrac{z-2a}{3c}\sqrt{ac+cz}\,(=t)=y$ について，ホワイトサイドは「$AB=z$ および $BH=y$ が A において同時に零になるというニュートンの暗黙の初期条件に従うためには」$\dfrac{z-2a}{3c}\sqrt{ac+cz}\,(=t)=y-\dfrac{2}{3}\,a^{\frac{3}{2}}\,c^{-\frac{1}{2}}$ とすべきであるという（『数学論文集』第 3 巻 p.315）。［実際，修正前の式で $z=0$ とすると $y=\dfrac{-2a}{3c}\sqrt{ac}=-\dfrac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}c^{-\frac{1}{2}}$ である。］

このとき，$\alpha=\dfrac{2}{3}\,a^{\frac{3}{2}}\,c^{-\frac{1}{2}}$ とおくと，$(y-\alpha)^2=\dfrac{1}{4}\,a^{-3}\alpha^2(z-2a)^2(a+z)$ となるが，これは「直径が $y=\alpha$ である発散放物線 (divergent parabola)」であるという (同上)。

ところで，$I=\displaystyle\int\frac{z}{2\sqrt{ac+cz}}\,dz$ は直接積分してもそんなに面倒ではないが，その都度部分積分をする手間を省くために公式化したのであろう ……

$$I=\frac{1}{2\sqrt{c}}\int\frac{z}{\sqrt{a+z}}\,dz=\frac{1}{2\sqrt{c}}\left(2z\sqrt{a+z}-\int 2\sqrt{a+z}\,dz\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{c}}\left(2z\sqrt{a+z}-\frac{4}{3}(a+z)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{c}}\left(3z\sqrt{a+z}-2(a+z)\sqrt{a+z}\right)$$
$$=\frac{z-2a}{3\sqrt{c}}\sqrt{a+z}$$

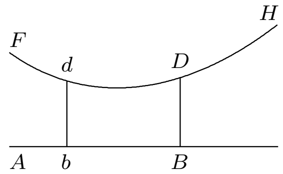
513 **問題 12**

曲線の長さを決定すること。

前の問題において，私たちは，曲線の流率は底線の流率と垂直な縦線の流率の平方の和の平方根に等しいことを示した。それゆえ，もし底線の流率を，他の流率がそれに関係づけられる，一様で定められた大きさ，もちろん単位，であるとみなすならば，そして，さらに，曲線を定める方程式によって縦線の流率を探し求めるならば，曲線の流率が得られるであろうし，それからその長さが，問題 2 によって，引き出されるはずである。

例1　方程式 $\dfrac{z^3}{aa}+\dfrac{aa}{12z}=y$，もちろん $z=$ 底線 AB および $y=$ 縦線 DB とおかれるとして，が定める曲線 FDH が提示されるとしよう。すると，この方程式から問題 1 により，もちろん

z の流率を 1 として，$\dfrac{3zz}{aa} - \dfrac{aa}{12z^2} = \dot{y}$ が引き出されるであろう。それゆえ，これらの流率の平方を加えると，その和は $\dfrac{9z^4}{a^4} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{a^4}{144z^4} = \dot{t}\dot{t}$ となり，根が開かれると $\dfrac{3zz}{aa} + \dfrac{aa}{12zz} = \dot{t}$ となって，これから問題 2 により $\dfrac{z^3}{aa} - \dfrac{aa}{12z} = t$ となる。［ここで，$\dot{t}$ は曲線の流率を，そして t はその長さを表している。］



それゆえ，もしこの曲線の何らかの部分，dD とする，の長さが要求されるならば，点 d および D から AB に対して垂線 db および DB を下ろし，t の値において z の代わりに量 Ab および AB を別々に代入すれば，その結果の差が求める長さ dD であろう。例えば，もし $Ab = \dfrac{1}{2}\,a$ および $AB = a$ とするならば，z の代わりに $\dfrac{1}{2}\,a$ と書けば $t = -\dfrac{a}{24}$ となるであろう。続いて，z の代わりに a と書けば $t = \dfrac{11a}{12}$ となるであろうし，これからもし前の値が取り去られるならば dD の長さとして $\dfrac{23a}{24}$ が残るであろう。あるいは，もし Ab だけが $\dfrac{1}{2}\,a$ であると定められ，AB は不定であると考えられるならば，$\dfrac{z^3}{aa} - \dfrac{aa}{12z} + \dfrac{a}{24} = dD$ が残るであろう。

しかし，もし t が表す曲線の部分を知りたいと切望するならば，t の値を零に等しいと仮定すれば，$z^4 = \dfrac{a^4}{12}$，あるいは $z = \dfrac{a}{\sqrt[4]{12}}$ が生じるであろう。それゆえ，もし $Ab = \dfrac{a}{\sqrt[4]{12}}$ ととられ，そして bd が立てられるならば，弧 dD の長さは t あるいは $\dfrac{z^3}{aa} - \dfrac{aa}{12z}$ であろう。そして，この 514
ことは一般に他の曲線についても［成り立つと］理解されるべきである。

この長さを決定したのと同じ方法で，もし他の曲線を定めるものとして方程式 $\dfrac{z^4}{a^3} + \dfrac{a^3}{32z^2} = y$ が提示されるならば，$\dfrac{z^4}{a^3} - \dfrac{a^3}{32z^2} = t$ が現れるであろう。あるいは，もし $\dfrac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{1}{3}\,a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} = y$ が提示されるならば，$\dfrac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{3}\,a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} = t$ が現れるであろう。あるいは，一般に，もし $cz^\theta + \dfrac{z^{2-\theta}}{4\theta\theta c - 8\theta c} = y$ とする —— ここで θ は整数であろうと分数であろうと任意の数を表すのに使われる —— ならば，$cz^\theta - \dfrac{z^{2-\theta}}{4\theta\theta c - 8\theta c} = t$ であろう。

この求長に関する問題は，曲線の長さを t とするとき，関係式 $\sqrt{(\dot{z})^2 + (\dot{y})^2} = \dot{t}$ を用いて解決される。すなわち，$\dot{z} = 1$ としているから，$t = \displaystyle\int \sqrt{1 + (\dot{y})^2}\,dz$ ということになる。

$z = \alpha$，$z = \beta$ に対応する 2 点間の曲線の長さ s は $t(\beta) - t(\alpha)$ として求めることは，もちろんである。すなわち，$s = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (\dot{y})^2}\,dz$ と，今日見慣れた公式となる。

この「例 1」の $y = \dfrac{z^3}{a^2} + \dfrac{a^2}{12z}$ については，$\dot{y} = \dfrac{3z^2}{a^2} - \dfrac{a^2}{12z^2}$ ［$\dot{z} = 1$ に注意］であるから，

$$\begin{aligned}\dot{t} &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{3z^2}{a^2} - \frac{a^2}{12z^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9z^4}{a^4} + \frac{1}{2} + \frac{a^4}{144z^4}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3z^2}{a^2} + \frac{a^2}{12z^2}\right)^2} = \frac{3z^2}{a^2} + \frac{a^2}{12z^2}\end{aligned}$$

となって，$t = \dfrac{z^3}{a^2} - \dfrac{a^2}{12z}$ となるという訳である。

ここで，$t = 0$ すなわち $z = \dfrac{a}{\sqrt[4]{12}}$ に対応する点 d を基準とすれば，曲線上の任意の点 D までの曲線の長さ dD は $t = \dfrac{z^3}{a^2} - \dfrac{a^2}{12z}$ そのものになる，という。

例2　方程式 $\dfrac{2a^2 + 2z^2}{3a^2}\sqrt{a^2 + z^2} = y$ が定める曲線が提示されるとすると，問題 1 により $\dot{y} = \dfrac{4a^4 z + 8a^2 z^3 + 4z^5}{3a^4 y}$，あるいは y を消去すれば $\dot{y} = \dfrac{2z}{aa}\sqrt{a^2 + z^2}$ が得られるであろう。この平方に 1 を加えれば，和は $1 + \dfrac{4zz}{aa} + \dfrac{4z^4}{a^4}$ であろう。そして，その根は $1 + \dfrac{2z^2}{aa} = \dot{t}$ で，それゆえ，問題 2 により $z + \dfrac{2z^3}{3a^2} = t$ が得られるであろう。

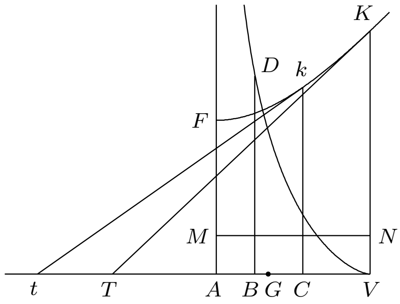
例3　方程式が $z^3 = ay^2$ あるいは $\dfrac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = y$ である，第 2 類の放物線が提示されるとすると，これから (問題 1 により) $\dfrac{3z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = \dot{y}$ が引き出され，それゆえ $\sqrt{1 + \dfrac{9z}{4a}}$ $(= \sqrt{1 + \dot{y}\dot{y}}) = \dot{t}$ である。いま，流率 $\dot{t}$ によって生成された長さは，単純な項の無限級数に展開することなしには，問題 2 によって見出すことができないから，問題 9 における一覧を調べ，その注解に含まれていることに従うと，$t = \dfrac{8a + 18z}{27}\sqrt{1 + \dfrac{9z}{4a}}$ が生じる。

そして，このように，放物線 $z^5 = ay^4$，$z^7 = ay^6$，$z^9 = ay^8$ などの長さを見出すことができる。

例4　方程式が $z^4 = ay^3$ あるいは $\dfrac{z^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = y$ である，放物線が提示されるとすると，これから問題 1 により $\dfrac{4z^{\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}} = \dot{y}$ が現れるであろう。それゆえ，$\sqrt{1 + \dfrac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ $(= \sqrt{\dot{y}\dot{y} + 1}) = \dot{t}$ である。これが見出されたら，前述の注解に従って一覧を調べ，後者の一覧の第 5 型の第 2 の定理との
515 比較が行われたら，$z^{\frac{1}{3}} = x$，$\sqrt{1 + \dfrac{16xx}{9a^{\frac{2}{3}}}} = v$，および $\dfrac{3}{2}s = t$ が生じる。ここで，x は底線を表し，y は縦線，そして s は双曲線の面積で，t は面積 $\dfrac{3}{2}s$ を線の単位に関係づける［線の単位で割る］ことによって生じる長さである。

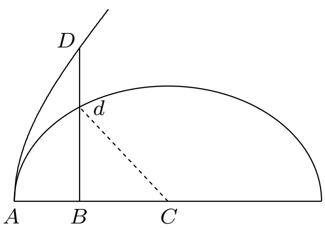
同じ方法で，放物線 $z^6 = ay^5$，$z^8 = ay^7$，$z^{10} = ay^9$ などの長さも双曲線の面積によって決定される。

例5　古代人のシッソイドが提示され，その方程式が $\dfrac{aa - 2az + zz}{\sqrt{az - zz}} = y$ であるとすると，これから問題 1 により $\dfrac{-a - 2z}{2zz}\sqrt{az - zz} = \dot{y}$ が引き出され，結果として $\dfrac{a}{2z}\sqrt{\dfrac{a + 3z}{z}}$ $(= \sqrt{\dot{y}\dot{y} + 1}) = \dot{t}$ であろうし，$\dfrac{1}{z}$ あるいは z^{-1} の代わりに z^{η} と書かれると, 後者の一覧の第 5 型の最初の種の方程式 $\dfrac{a}{2z}\sqrt{az^{\eta} + 3} = \dot{t}$ が現れる。そして, 項が比較されると $\dfrac{a}{2} = d$, $3 = e$ および $a = f$ となり, それゆえ, $z\left(= \dfrac{1}{z^{\eta}}\right) = x^2$, $\sqrt{a + 3x^2} = v$, および $6s - \dfrac{v^3}{x}\left(= \dfrac{4de}{\eta f} \text{ in } \dfrac{v^3}{2ex} - s\right) = t$ となる。そして，a が単位として用いられると，これらの量が適当な次元の数に還元されるように乗法あるいは除法を行うことによって，$az = xx$，$\sqrt{aa + 3xx} = v$ および $\dfrac{6s}{a} - \dfrac{v^3}{ax} = t$ が現れる。これがその作図である。



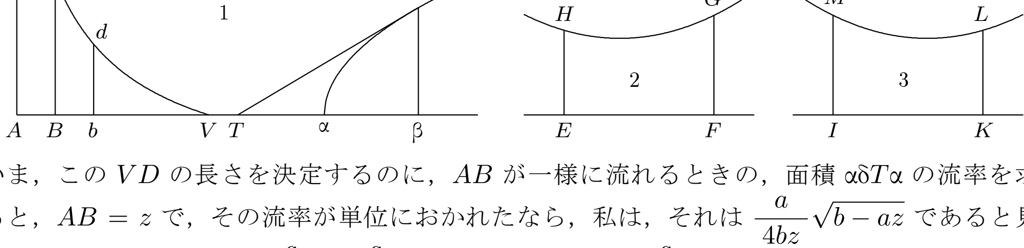
VD がシッソイド，AV がそれに適合される［関係する］円の直径，AF がその腕，そして DB が AV に垂直であるとき，半軸を $AF = AV$ および半パラメータ［半横断辺］を $AG = \dfrac{1}{3}AV$ として双曲線 FkK が描かれるとしよう。そして，AB および AV の間に中間比 AC がとられ，C および V において垂線 Ck および VK が立てられ，直線 kt および KT が双曲線と k および K で接し，AV と t および T で交わるように引かれ，AV 上に空間［面積］$TKkt$ に等しい長方形 VM［$AVNM$］がつくられると，シッソイドの長さ VD は高さ［長さ］VN の 6 倍であろう。

例6　Ad が方程式 $\sqrt{az-2zz} = y$ が定める楕円であるとき，もし Bd あるいは y がこの曲線と D で交わるまで伸ばされるならば，BD が楕円の弧 Ad と等しくなるような，機械的な曲線 AD が提示されるとしよう。いま，この長さが決定されるために，方程式 $\sqrt{az-2zz} = y$ は $\dfrac{a-4z}{2\sqrt{az-2zz}} = \dot{y}$ を与えるであろう。この平方にもし 1 が加えられるならば，弧 Ad の流率の平方 $\dfrac{a^2-4az+8z^2}{4az-8z^2}$ が現われ，これにもし再び 1 が加えられるならば，$\dfrac{aa}{4az-8zz}$ が生じ，この 516
根 $\dfrac{a}{2\sqrt{az-2zz}}$ は曲線 AD の流率であろう。ここで，もし z が根号の外に出され，z^{-1} の代わりに z^{η} と書かれると，後者の一覧の第 4 型の最初の種の流率 $\dfrac{a}{2z\sqrt{az^{\eta}-2}}$ が得られるであろう。そして，項が比較されると，$d = \dfrac{1}{2}a$，$e = -2$ および $f = a$ となり，それゆえ $z\left(=\dfrac{1}{z^{\eta}}\right) = x$，$\sqrt{ax-2x^2} = v$ および $\dfrac{8s}{a} - \dfrac{4xv}{a} + v\left(=\dfrac{8de}{\eta ff}\text{ in } s - \dfrac{1}{2}xv - \dfrac{fv}{4e}\right) = t$ となる。



その作図は次のようである。楕円の中心 C に向かって直線 dC が引かれ，AC の上に，扇形 ACd に等しい，平行四辺形がつくられ，その高さの 2 倍が曲線 AD の長さにおかれる。

例7　$A\beta = \varphi$ であり (図 1)，$\alpha\delta$ をその方程式が $\sqrt{-a+b\varphi\varphi} = \beta\delta$ である双曲線として，その接線 δT が引かれたとき，その底線 AB が $\dfrac{1}{\varphi\varphi}$ で，縦線 BD が面積 $\alpha\delta T\alpha$ が線の単位に関係づけられる［線の単位で割られる］ことで生じる長さであるような，曲線 VdD が提示されるとしよう。



いま，この VD の長さを決定するのに，AB が一様に流れるときの，面積 $\alpha\delta T\alpha$ の流率を求めると，$AB = z$ で，その流率が単位におかれたなら，私は，それは $\dfrac{a}{4bz}\sqrt{b-az}$ であると見出す。なぜならば，$AT = \dfrac{a}{b\varphi} = \dfrac{a}{b}\sqrt{z}$ で，その流率は $\dfrac{a}{2b\sqrt{z}}$ であり，この半分に高さ $\beta\delta$ あるいは $\sqrt{-a+\dfrac{b}{z}}$ が掛けられたものは，接線 δT によって描かれた面積 $\alpha\delta T$ の流率だからであ

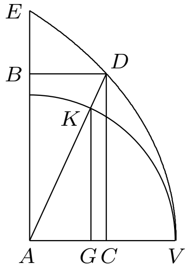
る。それゆえ，その流率は $\dfrac{a}{4bz}\sqrt{b-az}$ であり，単位に関係づけられた［単位で割られた］これは縦線 BD の流率となる。その平方 $\dfrac{aab-a^3z}{16b^2z^2}$ に，AB の流率の平方である，1 を加えれば，$\dfrac{a^2b-a^3z+16b^2z^2}{16b^2z^2}$ が生じ，その根 $\dfrac{1}{4bz}\sqrt{a^2b-a^3z+16b^2z^2}$ は曲線 VD の流率である。しかし，これは後者の一覧の第 7 型の最初の種の流率である。そして，項が比較されると $\dfrac{1}{4b}=d$, $aab=e$，$-a^3=f$，$16b^2=g$ となり，それゆえ $z=x$ および $\sqrt{a^2b-a^3x+16b^2x^2}=v$ (ある円錐曲線，例えば HG (図 2)，の方程式で，$EF=x$ および $FG=v$ であるとき，面積 $EFGH$ が s
517 になる) となる。同様に，$\dfrac{1}{z}=\xi$ および $\sqrt{16b^2-a^3\xi+a^2b\xi^2}=\Upsilon$ (別の円錐曲線，例えば ML (図 3)，の方程式で，$IK=\xi$ および $KL=\Upsilon$ であるとき，面積 $IKLM$ が σ になる) である。最後に，$\dfrac{2aabb\xi\Upsilon-a^3b\Upsilon-a^4v-4a^2b^2\sigma-32abbs}{64b^4-2a^4}=t$ である。

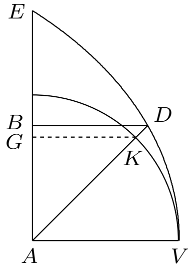
それゆえ，曲線 VD の何らかの部分 Dd の長さが知られるようになるために，AB に対して垂線 db を下ろし，$Ab=z$ と仮定して，そこからいま見出されたものによって t を求め，次いで，$AB=z$ と仮定して，そこから再び t を求めると，それら 2 つの t の［値の］差が［求める］長さ Dd であろう。

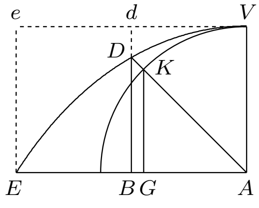
例8　方程式が $\sqrt{aa+bzz}=y$ である双曲線が提示されるとすると，これから (問題 1 により) $\dot{y}=\dfrac{bz}{y}$ あるいは $\dfrac{bz}{\sqrt{aa+bzz}}$ が生じ，この平方に 1 を加えれば，その和の［平方］根は $\sqrt{\dfrac{aa+bzz+bbzz}{aa+bzz}}=\dot{t}$ であろう。この流率は一覧には見出せないから，無限級数に還元する。まず，除法によって $\dot{t}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}z^2-\dfrac{b^3}{a^4}z^4+\dfrac{b^4}{a^6}z^6-\dfrac{b^5}{a^8}z^8\cdots}$ が現われ，次いで，根の開平によって $\dot{t}=1+\dfrac{b^2}{2a^2}z^2-\dfrac{4b^3+b^4}{8a^4}z^4+\dfrac{8b^4+4b^5+b^6}{16a^6}z^6\cdots$ が現れる。それゆえ，問題 2 により，t あるいは双曲線の長さ $=z+\dfrac{b^2}{6a^2}z^3-\dfrac{4b^3+b^4}{40a^4}z^5+\dfrac{8b^4+4b^5+b^6}{112a^6}z^7\cdots$ が得られる。

しかし，もし楕円 $\sqrt{aa-bzz}=y$ が提示されるならば，いたるところで b の符号が替えられなければならず，そうすると，その長さとして $z+\dfrac{b^2}{6a^2}z^3+\dfrac{4b^3-b^4}{40a^4}z^5+\dfrac{8b^4-4b^5+b^6}{112a^6}z^7\cdots$ が得られるであろう。そして，さらに，b が単位におかれると，円弧の長さとして $z+\dfrac{z^3}{6a^2}+\dfrac{3z^5}{40a^4}+\dfrac{5z^7}{112a^6}\cdots$ が現れるであろう。この級数の数値係数は，この数列 $\dfrac{1\times1}{2\times3}$，$\dfrac{3\times3}{4\times5}$，$\dfrac{5\times5}{6\times7}$，$\dfrac{7\times7}{8\times9}$，$\dfrac{9\times9}{10\times11}$，$\cdots$ の項を続けて掛けることによって，無限に見出される。

例9　最後に，頂点が V，A が中心，AV がそれに適合される［関係する］内円の半径，そして



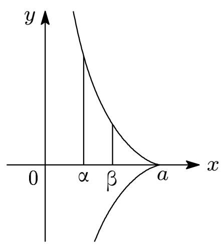




この例の説明図について，『全集』は左図を載せているが，『数学論文集』は中図を，『遺稿集』および『英訳版方法』は右図を載せている。この「例 9」の本文は，『全集』によらず，『数学論文集』などによる。

角 VAE が直角である，円積線 VDE が提示されるとしよう。いま，任意の直線 AKD が，K でその円を，D で円積線を横切るように引かれ，AE に垂線 KG，DB が下ろされて，AV を a，AG を z，VK を x そして BD を y とすると，上の例のように，$x = z + \dfrac{z^3}{6a^2} + \dfrac{3z^5}{40a^4} + \dfrac{5z^7}{112a^6} \cdots$ であろう。根 z を開くと，$z = x - \dfrac{x^3}{6a^2} + \dfrac{x^5}{120a^4} - \dfrac{x^7}{5040a^6} + \cdots$ が現れるであろう。この平方を AK^2 から取り去れば，残りの根 $a - \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{x^4}{24a^3} - \dfrac{x^6}{720a^5} + \cdots$ は GK であろう。いま， 518
円積線の性質により $AB =$ 弧 $VK = x$ であり，さらに $AG : GK = AB : BD\,(y)$ であるから，$AB \times GK$ を AG で割れば，$y = a - \dfrac{x^2}{3a} - \dfrac{x^4}{45a^3} - \dfrac{2x^6}{945a^5} \cdots$ が生じるであろう。そして，これから問題 1 により，$\dot{y} = -\dfrac{2x}{3a} - \dfrac{4x^3}{45a^3} - \dfrac{4x^5}{315a^5} \cdots$ となり，この平方に 1 を加えれば，その和の［平方］根は $1 + \dfrac{2x^2}{9a^2} + \dfrac{14x^4}{405a^4} + \dfrac{604x^6}{127575a^6} \cdots = \dot{t}$ であろう。それゆえ，問題 2 により t あるいは円積線の弧 $VD = x + \dfrac{2x^3}{27a^2} + \dfrac{14x^5}{2025a^4} + \dfrac{604x^7}{893025a^6} \cdots$ が得られるであろう。

この最後の求長に関する問題では，放物線，楕円，双曲線，シッソイド，円積線などの求長が取り上げられている。



例えば，「例 5」のシッソイドについては，ニュートンはシッソイドの方程式を［左の図のように座標軸を定めて］$y = \dfrac{(a-x)^2}{\sqrt{ax - x^2}}$ としているから，$y' = \dfrac{-(a-x)(2x+a)}{2x\sqrt{x(a-x)}}$ となり，

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a}{2} \sqrt{\frac{3x+a}{x^3}}\, dx$$
$$= \frac{a}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} \sqrt{3 + \frac{a}{x}}\, dx = \frac{a}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} \sqrt{3 + ax^{-1}}\, dx$$

である。これを「一覧」に基づいて求めようというのが彼の方針である。

なお，シッソイドの方程式を $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{a-x}}$ とするなら，$y' = \dfrac{x(3a-2x)}{2(a-x)\sqrt{x(a-x)}}$ となり，

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\frac{a^2(4a-3x)}{4(a-x)^3}}\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{a}{2} \sqrt{\frac{4a-3x}{(a-x)^3}}\, dx = \frac{a}{2} \int_{a-\beta}^{a-\alpha} \sqrt{\frac{3u+a}{u^3}}\, du$$

ということになる。

ところで，
$$\int \frac{1}{x} \sqrt{3 + \frac{a}{x}}\, dx = \int -t^{-1}(3+at)^{\frac{1}{2}}\, dt \qquad \left(\frac{1}{x} = t,\ dx = -t^{-2}dt \right)$$
$$= -\int \frac{a}{u-3}\, u^{\frac{1}{2}}\, \frac{1}{a}\, du = -\int u^{\frac{1}{2}}\, (u-3)^{-1}\, du \qquad \left(3 + at = u \right)$$
$$= -\int v \left(v^2 - 3\right)^{-1} \cdot 2v\, dv = -2 \int v^2 \left(v^2 - 3\right)^{-1}\, dv \qquad \left(u = v^2 \right)$$
$$= -2 \int \left\{ 1 - \frac{3}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1}{v+\sqrt{3}} - \frac{1}{v-\sqrt{3}} \right) \right\} dv$$
$$= -2v + \frac{3}{\sqrt{3}} \left(\log\left|v+\sqrt{3}\right| - \log\left|v-\sqrt{3}\right| \right) = -2v + \sqrt{3}\, \log\left| \frac{v+\sqrt{3}}{v-\sqrt{3}} \right|$$
$$= -2\sqrt{3 + \frac{a}{x}} + \sqrt{3}\, \log\left| \frac{\sqrt{3 + \dfrac{a}{x}} + \sqrt{3}}{\sqrt{3 + \dfrac{a}{x}} - \sqrt{3}} \right|$$

$$= -2\sqrt{3 + \frac{a}{x}} + \sqrt{3}\,\log\left|\frac{1}{a}\,\left(a + 6x + 2\sqrt{3}\sqrt{3x^2 + ax}\right)\right|$$

である。

曲線の求積について

『全集』第 1 巻 pp.333–386

原題は De Quadratura Curvarum (On the Quadrature of Curves)。
『光学』(*Opticks*：1704 年) の「付録」として「3 次曲線の列挙」(*Enumeratio linearum tertii ordinis*) とともに公表されたもので，1691–93 年の執筆であると推定されている。ただし，2 回改稿しているようである。
流率論に関する論文としては最初に公表されたものである。「求積論」と略称されることが多い。

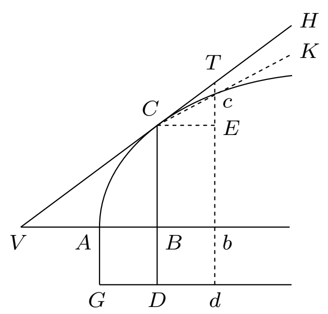
曲線の求積についての序文 333

私は，ここでは，数学的な量を非常に小さい部分からなるのではなく，連続的な運動によって描かれる［つくられる］ものと考える。線は，［小さな］部分の結合によってではなく，点の連続的な運動によって描かれ，そして描かれることでつくられるのである。面は線の運動によって，立体は面の運動によって，角はその辺の回転によって，時間は連続的な流れによって［つくられ］，他のものについてもそうである。これらの生成されたものは確かにものの本性の中に位置を占め，日々物体の運動の中に見られる。そして，この方法で，古代人は運動できない［静止している］直線の長さの中に可動な直線を引くことによって長方形がつくられることを指摘した。

それゆえ，等しい時間において増加し，そして増加することで生成された量は，それらが増加し生成する速さの大小に応じて［それらの量の］大小が生じると考えることで，私は，それらが生成される運動あるいは増加の速さから量［の大きさ］を決定する方法を見出し，それらの運動あるいは増加の速さを**流率**と名づけ，生成された量を**流量**と名づけて，1665 年と 1666 年に徐々に，ここで曲線の求積に利用した，流率の方法に思い至った。

流率は非常に小さい等しい時間の部分において生成された流量の増加にとてもよく比例しており，正確にいえば，［流率は］生まれつつある増加の最初の比にあるが，それらに比例する任意の線によって説明することができる。

例えば，もし面 ABC，$ABDG$ が底線 (basis) AB 上を一様な運動で前進している縦線 (ordinatam) BC，BD によって描かれるならば，これらの面の流率は それぞれ描いているその縦線 334
BC および BD に比例し，それらの縦線によって表すことができる。というのも，それらの縦線はそれらの面の生まれつつある増加に比例するからである。



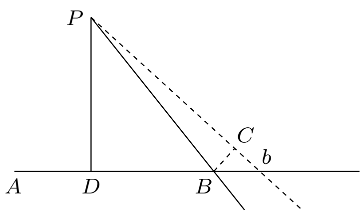
縦線 BC がその位置 BC から任意の新しい位置 bc に進むものとしよう。平行四辺形 $BCEb$ がつくられ，C において曲線に接し，そして，延長された bc および BA と T および V で交わる直線 VTH が引かれると，底線 (abscissæ) AB，縦線 BC および曲線［の弧］ACc の，いま生成された，増加は［それぞれ］Bb，Ec および Cc であり，これらの増加の生まれつつある最初の比は三角形 CET の辺である。それゆえ，それら AB，BC および AC の流率はその三角形 CET の辺 CE，ET および CT に比例し，それらの同じ辺によって，あるいは同じことだが，それと相似な三角形 VBC の辺によって表すことができる。

もし，流率を消えつつある部分の最後の比にあるとしても同じことになる。直線 Cc を引き，そ

れを K まで伸ばす。縦線 bc をその以前の位置 BC に戻し，点 C および c を一致させせると，直線 CK は接線 CH と一致するであろうし，その最後の形において消えつつある三角形 CEc は三角形 CET と相似になり，消えつつあるその辺 CE，Ec および Cc は最後にはそれぞれ他方の三角形 CET の辺 CE，ET および CT に比例するあろう。それゆえ，直線 AB，BC および AC の流率はこの比にあるであろう。もし点 C および c がそれぞれ互いに任意に小さい距離離れているならば，直線 CK は接線 CH から小さい距離離れているであろう。直線 CK が接線 CH と一致し，線 CE，Ec および Cc の最後の比が見出されると，点 C および c は近づかなければならず，完全に一致しなければならない。数学的なことがらでは，ほんの小さな誤差は無視される。

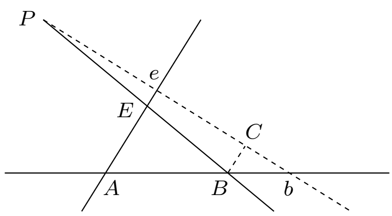
同様の議論によって，もし中心 B，半径 BC で描かれた円が，底線 AB の長さに沿ってそれと垂直に一様な運動によって引かれるならば，つくられた立体 ABC の流率はその生成円に比例し，その面の流率はその円の周に比例し，曲線 AC の流率も同様である。なぜならば，その円が底線
335 AB の長さに沿って引かれて立体 ABC がつくられる時間に，同じくその円の周が曲線 AC の長さに沿って引かれてその面がつくられるからである。さらに，この方法の例を次に挙げる。

与えられた極 P の周りを回転している直線 PB が位置において与えられた別の直線 AB を切断するとき，それらの直線 AB および PB の流率の比［を求めること］が要求される。



直線 PB がその位置 PB から新しい位置 Pb に進むものとしよう。Pb において PC が PB に等しくとられ，AB まで，角 bPD が角 bBC に等しくなるように，PD が引かれると，三角形 bBC，bPD は相似であるから，増分 (augmentum) Bb は増分 Cb に対して Pb が Db に対するであろう。いま，Pb がその以前の位置 PB に戻ると，それらの増分は消滅し，それらの消えつつある増分の最後の比，すなわち Pb の Db に対する最後の比は，角 PDB が直角であって，PB が DB に対するであろう。それゆえ，AB の流率は PB の流率に対してこの比にあるであろう。

与えられた極 P の周りを回転している直線 PB が位置において与えられた 2 つの直線 AB および AE を B および E で切断するとき，それらの直線 AB および AE の流率の比［を求めること］が要求される。



回転している直線 PB がその位置 PB から新しい位置 Pb に進み，直線 AB，AE を点 b と e で切断し，直線 AE に平行に BC が引かれ，Pb と C で交わるとすると，Bb は BC に対して Ab が Ae に対し，BC は Ee に対して PB が PE に対するであろうし，これらの比を結合すれば Bb は Ee に対して $Ab \times PB$ が $Ae \times PE$ に対するであろう。いま，線 Pb がその以前の位置 PB に戻るとすると，消えつつある増分 Bb は消えつつある増分 Ee に対して $AB \times PB$ が $AE \times PE$ に対するあろう。それゆえ，直線 AB の流率は直線 AE の流率に対してこの比にあるであろう。

それゆえ，もし回転している直線 PB が位置において与えられた任意の曲線を点 B と E で切断し，いま，可動な直線 AB，AE が切断点［交点］B および E においてその曲線に接するならば，直線 AB が接する曲線の流率は直線 AE が接する曲線の流率に対して $AB \times PB$ が $AE \times PE$ に

対するであろう。また，もし直線 PB が 位置において与えられたある曲線とその可動点 P におい 336
て絶えず接するとしても同じことが起きるであろう。

量 x が一様に流れるとして，量 x^n の流率が見出されるようにしよう。量 x が流れて $x+o$ になる時間［の間］に，量 x^n は $(x+o)^n$ に，すなわち無限級数の方法によれば $x^n + nox^{n-1} + \dfrac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \cdots$ になるであろう。そして，増分 o および $nox^{n-1} + \dfrac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \cdots$ は 互いに 1 および $nx^{n-1} + \dfrac{nn-n}{2}ox^{n-2} + \cdots$ に比例する。いま，それらの増分が消滅すると 337
すると，それらの最後の比は 1 が nx^{n-1} に対するであろう。それゆえ，量 x の流率は量 x^n の流率に対して 1 が nx^{n-1} に対する。

同様の推論で，最初と最後の比の方法によって，真っ直ぐであろうと曲がっていようと，どのよ 338
うな場合であっても，線の流率を，面や角やその他の量の流率と同様に，得ることができる。しかし，有限量において，この方法で解析法を確立し，有限量の生まれつつあるあるいは消えつつある最初のあるいは最後の比を調べることは古代人の幾何学と調和している。そして，流率の方法において幾何学に無限に小さい図形を持ち込むことは必要ではないことを私は明らかにしたいと思う。なぜならば，この解析法は，有限であれ無限小であれ，消えつつある図形と同様であるとみなされる，どのような図形においても実行され，ただ注意深く進めるだけで，無限小と考えられる図形についても不可分者の方法によって実行されるからである。

流率から流量を見出すことはより難しい問題であり，その解の最初の段階は曲線の求積と同じことであって，このことについて私はかつて次のように書いた。

> ニュートンは線，面，立体などの「数学的な量」をそれより 1 つ次元の低いものの運動によってつくられるものとしている。角や時間も運動，流れによるものとして捉えられる。そして，その運動の速さを「流率」と呼び，その運動によって生成されたものを「流量」と呼ぶ。すなわち，流量の微小な増加を流率と考え，流率を無限小三角形，あるいはそれと相似な三角形，の辺として表そうというのである。ここに，流率法を幾何学的に提示しようとする意図を見ることができる。ここで触れられている「生まれつつある最初の比」や「消えつつある最後の比」は『自然哲学の数学的諸原理 (プリンキピア)』(*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* : 1687 年) に見られる (［6］pp.95–96)。
>
> 「…… 古代幾何学者流の，ながながとした退屈な証明のつまらない演繹を逃れるために，これらの補助定理を先に出したわけです。と申しますのは，それらの証明は不可分量の方法によってもっと短くされるからです。しかし不可分量の仮説はいささかぎこちないようにみえますし，またその方法は非幾何学的と思われますから，以下のことがらの証明には，消滅してゆく量の最後の和と比および生まれてくる量の最初の和と比に，すなわち，それらの和と比の極限に帰せしめるという途をとりました。…… ですから今後，量を微小部分からなるかのように考えるとか，直線のかわりに短い曲線を使おうとかいう場合，不可分量を意味するのでなく，消滅してゆく可分量と解していただきたいのです。確定した部分の和や比ではなく，和や比の極限といつも考えてほしいのです。……
>
> …… 極限の速度とは，それでもって物体が，最終の場所に達しその運動がやむ前でも後でもなく，ちょうど到達するその瞬間に，運動する速度を意味するとするのです。すなわち，それをもって物体がその最終の場所に達し，それでもって運動がやむその速度です。また同様に零になってゆく諸量の極限の比というものも，零になる前でもなく後でもなくそれでもって零になるところの比と解されるべきです。同じように，生じてくる量の最初の比とはそれでもって生じてくるところの比です。そして最初と最後の和というのも諸量がそれでもって〔増大または減少し〕始めまた終えるところのものです。速度が運動の終りに達することはできるが超えることはでき

ない極限が存在するでしょう。これが最終の極限の速度です。$\cdots\cdots$」(第 1 篇第 1 章「それによって以下の命題が証明される最初の比および最後の比の方法について」の注解)

また，そこで触れられている補助定理は全部で 11 個あり，例えば補助定理 1 は次のような内容である。

「いくつかの量が，またいくつかの量の間の比が，任意の有限な時間中たえず相等しくなる方向に向かい，その時間の終りに近づくほどますます任意に与えられた差に対するよりもたがいに近づくとすると，それらの量ならびに比は極限においては相等しい。」

この論考では「古代人」の幾何学やそこで用いられている方法が強く意識されているようであるが，自身が創出した流率法と無限小に基づく理論との対比にも留意されている。

最後の文に見られるように，この論考の「序文」であるここまでの部分 (と最後にある「注解」) は続く「本文」と執筆時期にズレがある。それ (ら) は 1704 年の『光学』の出版に合わせて書かれたということである。

曲線の求積について

以下において，私は不定な量 (quantitates indeterminatas) を永続的な運動によって増加あるいは減少するもの，すなわち前方あるいは後方に流れるもの (fluentes vel defluentes) と考え，それらを文字 z，y，x，v で表して，それらの流率あるいは増加する速さを同じ文字に点をつけたもの $\dot{z}$，$\dot{y}$，$\dot{x}$，$\dot{v}$ で表す。そして，これらの流率の流率あるいはより大きなまたはより小さな速さへの変化もあり，それは z，y，x，v 自身の第 2 の流率と呼ぶことができ，$\ddot{z}$，$\ddot{y}$，$\ddot{x}$，$\ddot{v}$ と表される。そして，これらの最初の流率あるいは z，y，x，v 自身の第 3 の流率を $\dddot{z}$，$\dddot{y}$，$\dddot{x}$，$\dddot{v}$ と，第 4［の流率］を $\ddddot{z}$，$\ddddot{y}$，$\ddddot{x}$，$\ddddot{v}$ と表す。そして，$\dddot{z}$，$\dddot{y}$，$\dddot{x}$，$\dddot{v}$ が量 $\ddot{z}$，$\ddot{y}$，$\ddot{x}$，$\ddot{v}$ の流率であるように，それらは量 $\dot{z}$，$\dot{y}$，$\dot{x}$，$\dot{v}$ の流率であり，それらは最初の量 z，y，x，v の流率である。これらの量は，$\overset{\prime}{z}$，$\overset{\prime}{y}$，$\overset{\prime}{x}$，$\overset{\prime}{v}$ と表される，別の［量の］流率と考えることができ，それらは別の $\overset{\prime\prime}{z}$，$\overset{\prime\prime}{y}$，$\overset{\prime\prime}{x}$，$\overset{\prime\prime}{v}$ の流率であり，それらは別の $\overset{\prime\prime\prime}{z}$，$\overset{\prime\prime\prime}{y}$，$\overset{\prime\prime\prime}{x}$，$\overset{\prime\prime\prime}{v}$ の流率である。それゆえ，$\overset{\prime\prime}{z}$，$\overset{\prime}{z}$，$z$，$\dot{z}$，$\ddot{z}$，$\dddot{z}$，$\ddddot{z}$，$\cdots$ は，どこ
339 であろうと後者の量が前者の流率であり，どこであろうと前者は後続の量をもつ流量の流率であるような量の系列を表している。系列 $\sqrt{\overset{\prime\prime}{az-zz}}$，$\sqrt{\overset{\prime}{az-zz}}$，$\sqrt{az-zz}$，$\sqrt{\overset{\cdot}{az-zz}}$，$\sqrt{\overset{\cdot\cdot}{az-zz}}$，$\sqrt{\overset{\cdot\cdot\cdot}{az-zz}}$，および系列 $\dfrac{az \overset{\prime\prime}{+} zz}{a-z}$，$\dfrac{az \overset{\prime}{+} zz}{a-z}$，$\dfrac{az+zz}{a-z}$，$\dfrac{az \dot{+} zz}{a-z}$，$\dfrac{az \ddot{+} zz}{a-z}$，$\dfrac{az \dddot{+} zz}{a-z}$ も同様である。

そして，この系列のどこであろうと，前者の量は，直角をなす縦線が後者の量で底線が z である，曲線図形の面積であることが注意されなければならない。例えば，$\sqrt{\overset{\prime}{az-zz}}$ はその縦線が $\sqrt{az-zz}$ で底線が z である曲線の面積である。しかし，これらすべてのことに関しては以下の命題の中で明らかになるであろう。

ここで，いわゆるダッシュ・ドット記号が導入される。これまでニュートンは x の流率を p と表していたが，$\dot{x}$ と表すことにしたのである。(ただし，本翻訳ではすでに使用している。) こうすることで，高次の流率［高次導関数］を表現する見通しがよくなった。また，後者を求積すれば前者が得られるという。

$$\cdots \longrightarrow \overset{\prime\prime}{x} \xrightarrow{\text{流率}} \overset{\prime}{x} \xrightarrow{\text{流率}} x \xrightarrow{\text{流率}} \dot{x} \xrightarrow{\text{流率}} \ddot{x} \xrightarrow{\text{流率}} \dddot{x} \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longleftarrow \overset{\prime\prime}{x} \xleftarrow{\text{求積}} \overset{\prime}{x} \xleftarrow{\text{求積}} x \xleftarrow{\text{求積}} \dot{x} \xleftarrow{\text{求積}} \ddot{x} \xleftarrow{\text{求積}} \dddot{x} \longleftarrow \cdots$$

この図式は流率法と求積法が，すなわち微分法と積分法が逆の演算であることを明確に物語っている。

命題 1　問題 1

任意個数の流量を含む方程式が与えられたとき，流率［の関係］を見出すこと。

解

方程式のそれぞれの項にそこに含まれるそれぞれの流量のベキ指数 (index dignitatis) が掛けられ，それぞれの乗法においてベキの辺 (latus dignitatis) がその流率に替えられてから，それぞれの文字 (signum) についての積がすべて加えられたものは［流率についての］新しい方程式であろう。

説明

a，b，c，d，$\cdots$ を確定した変更できない量［定量］とし，流量 z，y，x，$\cdots$ を含む任意の方程式，例えば $x^3 - xyy + aaz - b^3 = 0$，が提示されるとしよう。はじめに，［それぞれの］項に x のベキ指数が掛けられ，それぞれの乗法においてベキの辺，あるいは 1 次元の x，の代わりに $\dot{x}$ と書かれると，それらの積の和は $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2$ であろう。y について同様にすると，$-2xy\dot{y}$ が生じるであろう。z について同様にすると，$aa\dot{z}$ が生じるであろう。これらの積の和が零に等しいとおかれると，方程式 $3\dot{x}x^2 - \dot{x}y^2 - 2xy\dot{y} + a^2\dot{z} = 0$ が得られるであろう。私は，この方程式によって流率の関係が定められるという。

証明

なぜならば。o を非常に小さい量［無限小量］とし，$o\dot{z}$，$o\dot{y}$，$o\dot{x}$ を量 z，y，x のモーメント，すなわ
ちそれらの同時の瞬間的な増加であるとしよう。そして，もし流量が，いま，z，y および x である 340
ならば，それらは，増分 $o\dot{z}$，$o\dot{y}$，$o\dot{x}$ が増やされた時間の瞬間の後では，$z+o\dot{z}$，$y+o\dot{y}$，$x+o\dot{x}$ となるであろう。これは，はじめの方程式において z，y および x の代わりにそれらが書かれると，方程式 $x^3+3x^2o\dot{x}+3xo^2\dot{x}\dot{x}+o^3\dot{x}^3-xy^2-o\dot{x}y^2-2xo\dot{y}y-2\dot{x}o^2\dot{y}y-xo^2\dot{y}\dot{y}-\dot{x}o^3\dot{y}\dot{y}+a^2z+a^2o\dot{z}-b^3=0$ を与える。

最初の方程式が取り去られ，残りが o で割られると $3\dot{x}x^2+3\dot{x}\dot{x}ox+\dot{x}^3o^2-\dot{x}y^2-2x\dot{y}y-2\dot{x}o\dot{y}y-xo\dot{y}\dot{y}-\dot{x}o^2\dot{y}\dot{y}+a^2\dot{z}=0$ であろう。量 o が無限に小さくされるとし，消えていく項が無視されると $3\dot{x}x^2-\dot{x}y^2-2x\dot{y}y+a^2\dot{z}=0$ が残るであろう。証明終り。

さらなる説明 341

同じ仕方で，もし方程式が $x^3 - xy^2 + a^2\sqrt{ax-yy} - b^3 = 0$ ならば，$3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y + a^2\overset{\cdot}{\sqrt{ax-yy}} = 0$ が生じたものである。もし流率 $\overset{\cdot}{\sqrt{ax-yy}}$［の項］をなくしたいのならば，$\sqrt{ax-yy} = z$ とおけば，$ax - y^2 = z^2$ であり，(この定理により) $a\dot{x} - 2\dot{y}y = 2\dot{z}z$，あるいは $\dfrac{a\dot{x}-2\dot{y}y}{2z} = \dot{z}$ であり，すなわち $\dfrac{a\dot{x}-2\dot{y}y}{2\sqrt{ax-yy}} = \overset{\cdot}{\sqrt{ax-yy}}$ であろう。そして，それゆえ，$3x^2\dot{x} - \dot{x}y^2 - 2x\dot{y}y + \dfrac{a^3\dot{x}-2aa\dot{y}y}{2\sqrt{ax-yy}} = 0$ である。

そして，この操作を繰り返すことによって第 2，第 3 などの流率に進むことができる。方程式を $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$ とするならば，最初の操作により $\dot{z}y^3 + 3z\dot{y}y^2 - 4\dot{z}z^3 = 0$ となり，第 2［回目
の操作］により $\ddot{z}y^3 + 6\dot{z}\dot{y}y^2 + 3z\ddot{y}y^2 + 6z\dot{y}^2y - 4\ddot{z}z^3 - 12\dot{z}^2z^2 = 0$ と，第 3［回目の操作］によ 342
り $\dddot{z}y^3 + 9\ddot{z}\dot{y}y^2 + 9\dot{z}\ddot{y}y^2 + 18\dot{z}\dot{y}^2y + 3z\dddot{y}y^2 + 18z\ddot{y}\dot{y}y + 6z\dot{y}^3 - 4\dddot{z}z^3 - 36\ddot{z}\dot{z}z^2 - 24\dot{z}^3z = 0$ となるであろう。

しかし，［この方法で］第 2，第 3 などの流率に進むときは，一様に流れる何らかの量を考え，その最初の流率の代わりに単位を書き，第 2 以下の［の流率］は零にするのがよい。方程式を上の

ように $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$ とし，z が一様に流れ，その流率を単位であるとすると，最初の操作で $y^3 + 3z\dot{y}y^2 - 4z^3 = 0$ となり，第 2［の操作］では $6\dot{y}y^2 + 3z\ddot{y}y^2 + 6z\dot{y}^2y - 12z^2 = 0$ と，第 3［の操作］では $9\ddot{y}y^2 + 18\dot{y}^2y + 3z\dddot{y}y^2 + 18z\ddot{y}\dot{y}y + 6z\dot{y}^3 - 24z = 0$ となるであろう。

しかし，このような種類の方程式においては，それぞれの項における流率は同じ階数 (ordo) である, すなわち, 最初の階はすべて $\dot{y}$, $\dot{z}$ で, 第 2［の階］はすべて $\ddot{y}$, $\dot{y}^2$, $\dot{y}\dot{z}$, $\dot{z}^2$ で, 第 3［の階］はすべて $\dddot{y}$, $\ddot{y}\dot{y}$, $\ddot{y}\dot{z}$, $\dot{y}^3$, $\dot{y}^2\dot{z}$, $\dot{y}\dot{z}^2$, $\dot{z}^3$ などである, と考えられなければならない。そして, そうでないときには, その階数は一様に流れる流量の流率を補って考えることによってそろえられなければならない。それゆえ, 最後の方程式を第 3 の階数にそろえると $9\dot{z}\ddot{y}y^2 + 18\dot{z}\dot{y}^2y + 3z\dddot{y}y^2 + 18z\ddot{y}\dot{y}y + 6z\dot{y}^3 - 24z\dot{z}^3 = 0$ となる。

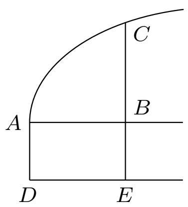
［最初の方程式の項はこの命題によって最初［の方程式］から生ずる何らかの方程式の項の父と，そして同じ父から生まれた［つくられた］項は兄弟あるいは身内 (socij) と考えることができる。兄弟，そして兄弟からその父，は流率を流量に変えることでつきとめられる。それゆえ，最後の方程式において，最後以外のすべての項は，流率を流量に変えると，zy^3 が生じ，それゆえ兄弟であり，mzy^3 を父としてもち，孤立した最後の項は同じ理由で z^4 となり，父として nz^4 をもつ。ここで，m および n は，［任意の］定量の係数として無制限におかれ，そしてその父から兄弟を探し，与えられた兄弟と比較することによって見出すことができるであろう。すなわち，父 mzy^3 から兄弟 $9m\dot{z}\ddot{y}y^2$，$18m\dot{z}\dot{y}^2y$，$3mz\dddot{y}y^2$，$18mz\ddot{y}\dot{y}y$，$6mz\dot{y}^3$ が生じ，そして nz^4 から $24nz\dot{z}^3$ となり，それらを与えられた兄弟と照合すると $m = n = 1$ を与える。］(『数学論文集』第 7 巻 p.516)

この命題は流率法［微分法］に関するもので目新しいものではないが，「1666 年論文」などに見られる表現よりかなり簡略化されている。
ここに述べられている「ベキの辺」とは，「説明」を見れば，x^n に対して $\dot{x}$ であることが分かる。
なお，『プリンキピア』第 2 篇第 2 章の補助定理 2 に次のような記述がある（［6］pp.278–280)。
「ゲニタ (被生成量) のモメントゥム (積率) は，(そのゲニタを) 生ずる各辺 (項) のそれぞれのモメントゥムに，同じ辺 (項) の冪指数 (に等しい数) とその辺のコエフィキエンス (相乗量) とをかけて得られるものに等しい。
ゲニタとわたくしが呼ぶのは，いくつかの任意の辺または項から，算術ではかけ算，わり算，開平によって，幾何学では面積・体積や辺とか比例中項や端項とかをとることによって，よせ算やひき算なしに生ぜられる，あらゆる量のことである。そのような量とは，積，商，冪根，矩形，正方形，立方体，辺の 2 乗，辺の 3 乗，等々である。これらの量は，不定かつ流動的なもので，たえず増大または減少している流れの運動のようなものであるとし，モメントゥムという名前でそれらの量の瞬間的な増し高または減り高を考えることにする。したがって増し高は相加的なあるいは正のモメントゥムで，また減り高は減殺的なあるいは負のモメントゥムで得られる。しかし有限な微小部分を考えるさいには注意しなければならない。有限な微小部分はモメントゥムではなく，このモメントゥムから生ぜられる量である。(モメントゥムは) いままさに生じつつある有限な大きさの根源と解されねばならない。この補助定理ではモメントゥムの大きさではなく，生成されるさいの最初の比を見ているのだからである。モメントゥムのかわりに，増加および減少の速度〔それはまた量の運動とか変動とか流率とか名づけてもよい〕を使っても，あるいはこの速度に比例する任意の量を使っても，同じことになる。また (ゲニタを) 生成する各辺 (項) のコエフィキエンス (相乗量) とは，その辺 (項) にかけることによってゲニタを生ずるような量のことである。$\cdots\cdots$ 」
ニュートンにとって流量 x は時刻 t の関数だから，$\dfrac{d}{dt}x^n = \dfrac{d}{dx}x^n \times \dfrac{dx}{dt} = nx^{n-1} \times \dfrac{dx}{dt}$ な

のである。

命題 2　問題 2

求積ができる曲線を見出すこと。



ABC を見出されるべき図形［曲線］とし，BC を直角をなす縦線，AB を底線としよう。CB を $BE=1$ となるように E まで延長し，平行四辺形 $ABED$ をつくると，面 ABC，$ABED$ の流率は［それぞれ］BC および BE に比例するであろう。それゆえ，それによって面積の関係が定められる任意の方程式が仮定されると，命題 1 によって縦線 BC および BE の関係が与えられるであろう。これが見出されるべきことであった。

このことの例は次の 2 つの命題によって示されるであろう。

命題 3　定理 1 343

もし底線 AB および面 AE あるいは $AB\times 1$ の代わりにでたらめに z と書かれ，そして，もし $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+hz^{3\eta}+\cdots$ の代わりに R と書かれるならば，曲線の面積が $z^{\theta}R^{\lambda}$ であれば，縦線 BC は

$$\overline{\theta e \begin{matrix}+\theta\\+\lambda\eta\end{matrix} \times fz^{\eta} \begin{matrix}+\theta\\+2\lambda\eta\end{matrix} \times gz^{2\eta} \begin{matrix}+\theta\\+3\lambda\eta\end{matrix} \times hz^{3\eta}+\cdots} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$$

に等しいであろう。

証明

なぜならば。もし $z^{\theta}R^{\lambda}=v$ とすれば，(命題 1 により) $\theta\dot{z}z^{\theta-1}R^{\lambda}+\lambda z^{\theta}\dot{R}R^{\lambda-1}=\dot{v}$ であろう。方程式のはじめの項における R^{λ} および第 2［の項］における z^{θ} の代わりに［それぞれ］$RR^{\lambda-1}$, $zz^{\theta-1}$ と書けば，$(\theta\dot{z}R+\lambda z\dot{R})\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}=\dot{v}$ となるであろう。しかし，$R=e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+hz^{3\eta}+\cdots$ であったから，(命題 1 により) $\dot{R}=\eta f\dot{z}z^{\eta-1}+2\eta g\dot{z}z^{2\eta-1}+3\eta h\dot{z}z^{3\eta-1}+\cdots$ となり，これら［R, $\dot{R}$］が代入され，$\dot{z}$ の代わりに BE あるいは 1 が書かれれば，

$$\overline{\theta e \begin{matrix}+\theta\\+\lambda\eta\end{matrix} \times fz^{\eta} \begin{matrix}+\theta\\+2\lambda\eta\end{matrix} \times gz^{2\eta} \begin{matrix}+\theta\\+3\lambda\eta\end{matrix} \times hz^{3\eta}+\cdots} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}=\dot{v}=BC$$

となるであろう。証明終り。

命題 4　定理 2

もし曲線の底線 AB を z とし，そして，もし $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots$ の代わりに R と書かれ，$k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\cdots$ の代わりに S と書かれるならば，曲線の面積が $z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}$ であれば，縦線 BC は

$$\left.\begin{array}{lllll}
\theta ek \begin{matrix}+\theta\\+\lambda\eta\end{matrix} \times fkz^{\eta} & \begin{matrix}+\theta\\+2\lambda\eta\end{matrix} \times gkz^{2\eta} & *\cdots & *\cdots & *\cdots \\[1ex]
\quad\begin{matrix}+\theta\\+\mu\eta\end{matrix} \times elz^{\eta} & \begin{matrix}+\theta\\+\lambda\eta\\+\mu\eta\end{matrix} \times flz^{2\eta} & \begin{matrix}+\theta\\+2\lambda\eta\\+\mu\eta\end{matrix} \times glz^{3\eta} & *\cdots & *\cdots \\[1ex]
 & \begin{matrix}+\theta\\+2\mu\eta\end{matrix} \times emz^{2\eta} & \begin{matrix}+\theta\\+\lambda\eta\\+2\mu\eta\end{matrix} \times fmz^{3\mu\eta} & \begin{matrix}+\theta\\+2\lambda\eta\\+2\mu\eta\end{matrix} \times gmz^{4\eta} & *\cdots \\[1ex]
 & & *\cdots & *\cdots & *\cdots
\end{array}\right\} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$$

に等しいであろう。

これは前の命題と同様に証明される。

面積から流率を求めれば縦線が得られる［すなわち，$\dfrac{d}{dt}$(面積) = (縦線) である］ことについての一般論が命題 2 で，その具体例が命題 3，命題 4 である。

命題 3 では，$R=\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i\eta}$ とするとき，

$$v=z^{\theta}R^{\lambda}\ \text{の流率は}\ \dot{v}=z^{\theta-1}R^{\lambda-1}\sum_{i=0}^{\infty}(\theta+i\lambda\eta)a_i z^{i\eta}\ \text{である}$$

ことを述べている。

命題 4 については，言わずもがなではあるが，次のとおり。

$R=e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+hz^{3\eta}+\cdots$，$S=k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+nz^{3\eta}+\cdots$ であるから，

$\dot{R}=\eta f\dot{z}z^{\eta-1}+2\eta g\dot{z}z^{2\eta-1}+3\eta h\dot{z}z^{3\eta-1}+\cdots$，$\dot{S}=\eta l\dot{z}z^{\eta-1}+2\eta m\dot{z}z^{2\eta-1}+3\eta n\dot{z}z^{3\eta-1}+\cdots$

となり，$\dot{z}=1$ とすれば，

$$\begin{cases}\dot{R}=\eta fz^{\eta-1}+2\eta gz^{2\eta-1}+3\eta hz^{3\eta-1}+\cdots\\ \dot{S}=\eta lz^{\eta-1}+2\eta mz^{2\eta-1}+3\eta nz^{3\eta-1}+\cdots\end{cases}$$

となる。

面積は $v=z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}$ であるとしているから，縦線 BC は

$$\begin{aligned}
BC=\dot{v}&=\theta\dot{z}z^{\theta-1}R^{\lambda}S^{\mu}+\lambda z^{\theta}\dot{R}R^{\lambda-1}S^{\mu}+\mu z^{\theta}R^{\lambda}\dot{S}S^{\mu-1}\\
&=\theta z^{\theta-1}R^{\lambda}S^{\mu}+\lambda z^{\theta}\dot{R}R^{\lambda-1}S^{\mu}+\mu z^{\theta}R^{\lambda}\dot{S}S^{\mu-1}\\
&=\left(\theta RS+\lambda z\dot{R}S+\mu zR\dot{S}\right)z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}\\
&=\big\{\theta(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+hz^{3\eta}+\cdots)(k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+nz^{3\eta}+\cdots)\\
&\qquad+\lambda z(\eta fz^{\eta-1}+2\eta gz^{2\eta-1}+3\eta hz^{3\eta-1}+\cdots)(k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+nz^{3\eta}+\cdots)\\
&\qquad+\mu z(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+hz^{3\eta}+\cdots)(\eta lz^{\eta-1}+2\eta mz^{2\eta-1}+3\eta nz^{3\eta-1}+\cdots)\big\}\\
&\qquad\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}\\
&=\big\{(\theta ek+\theta(el+fk)z^{\eta}+\theta(em+fl+gk)z^{2\eta}+\theta(en+fm+gl+hk)z^{3\eta}+\cdots)\\
&\qquad+(\lambda\eta fkz^{\eta}\quad+\lambda\eta(fl+2gk)z^{2\eta}\quad+\lambda\eta(fm+2gl+3hk)z^{3\eta}+\cdots)\\
&\qquad+(\mu\eta elz^{\eta}\quad+\mu\eta(fl+2em)z^{2\eta}\quad+\mu\eta(gl+2fm+3en)z^{3\eta}+\cdots)\big\}\\
&\qquad\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}\\
&=\{\theta ek+(\theta+\lambda\eta)fkz^{\eta}+(\theta+\mu\eta)elz^{\eta}\\
&\qquad+(\theta+2\lambda\eta)gkz^{2\eta}+(\theta+\lambda\eta+\mu\eta)flz^{2\eta}+(\theta+2\mu\eta)emz^{2\eta}\\
&\qquad+(\theta+3\lambda\eta)hkz^{3\eta}+(\theta+2\lambda\eta+\mu\eta)glz^{3\eta}+(\theta+\lambda\eta+2\mu\eta+\cdots)fmz^{3\eta}+\cdots\}\\
&\qquad\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}
\end{aligned}$$

ということになる。

すなわち，$R=\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i\eta}$，$S=\sum_{j=0}^{\infty} b_j z^{j\eta}$ とするとき，

$$v=z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}\ \text{の流率は}\ \dot{v}=z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}(\theta+i\lambda\eta+j\mu\eta)a_i b_j z^{(i+j)\eta}\ \text{である}$$

とニュートンはいう。

344

命題 5　定理 3

もし曲線の底線 AB を z とし，そして，$e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+hz^{3\eta}+\cdots$ の代わりに R と書かれるならば，そして，縦線を $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}\times(a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+dz^{3\eta}+\varepsilon z^{4\eta}+\cdots)$ として，$\dfrac{\theta}{\eta}=r$，$r+\lambda=s$，$s+\lambda=t$，$t+\lambda=v$，$\cdots$ とおかれるとしよう。［そうすると，］

$$
\begin{aligned}
\text{面積} = z^{\theta}R^{\lambda}\ \text{in}\ &+ \frac{\frac{1}{\eta}a}{re} \\
&+ \frac{\frac{1}{\eta}b - sfA}{(r+1)\times e}\,z^{\eta} \\
&+ \frac{\frac{1}{\eta}c - (s+1)\times fB - tgA}{(r+2)\times e}\,z^{2\eta} \\
&+ \frac{\frac{1}{\eta}d - (s+2)\times fC - (t+1)\times gB - vhA}{(r+3)\times e}\,z^{3\eta} \\
&+ \frac{\frac{1}{\eta}\varepsilon - (s+3)\times fD - (t+2)\times gC - (v+1)\times hB + \cdots}{(r+4)\times e}\,z^{4\eta} \\
&+ \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

であろう。ここに，A，B，C，D，$\cdots$ はその符号 $+$ および $-$ を含めてこの系列におけるそれぞ 345
れの項の与えられた係数の全体を表す。すなわち，

A は最初の項の係数 $\dfrac{\frac{1}{\eta}a}{re}$,

B は第 2 項の係数 $\dfrac{\frac{1}{\eta}b - sfA}{(r+1)\times e}$,

C は第 3 項の係数 $\dfrac{\frac{1}{\eta}c - (s+1)\times fB - tgA}{(r+2)\times e}$

であり，以下同様である。

証明

第 3 の命題によれば

$$
\begin{array}{clllll}
 & & \text{曲線の縦線} & & & \\
1 & \theta eA & \begin{matrix}+\theta\\+\lambda\eta\end{matrix}\times fAz^{\eta} & \begin{matrix}+\theta\\+2\lambda\eta\end{matrix}\times gAz^{2\eta} & \begin{matrix}+\theta\\+3\lambda\eta\end{matrix}\times hAz^{3\eta}\ \cdots \\
2 & \cdots & (\theta+\eta)\times eBz^{\eta} & \begin{matrix}+\theta+\eta\\+\lambda\eta\end{matrix}\times fBz^{2\eta} & \begin{matrix}+\theta+\eta\\+2\lambda\eta\end{matrix}\times gBz^{3\eta}\ \cdots \\
3 & \cdots & \cdots\cdots\cdots & +(\theta+2\eta)\times eCz^{2\eta} & \begin{matrix}+\theta+2\eta\\+\lambda\eta\end{matrix}\times fCz^{3\eta}\ \cdots \\
4 & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & +(\theta+3\eta)\times eDz^{3\eta}\ \cdots
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}
\quad
\begin{array}{l}
\text{面積} \\
\left\{\begin{array}{l}
Az^{\theta}R^{\lambda} \\[1em]
Bz^{\theta+\eta}R^{\lambda} \\[1em]
Cz^{\theta+2\eta}R^{\lambda} \\[0.5em]
Dz^{\theta+3\eta}R^{\lambda}
\end{array}\right.
\end{array}
$$

である。そして，もし縦線の和が縦線 $a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + dz^{3\eta} + \cdots$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ に等しいとおかれ
るならば，面積の和 $z^{\theta}R^{\lambda}$ in $A + Bz^{\eta} + Cz^{2\eta} + Dz^{3\eta} + \cdots$ はそれがその縦線である曲線の面積 346
に等しいであろう。それゆえ，対応する縦線の項を等しいとすれば，

$a = \theta eA$,

$b=(\theta+\lambda\eta)\times fA+(\theta+\eta)\times eB,$
$c=(\theta+2\lambda\eta)\times gA+(\theta+\eta+\lambda\eta)\times fB+(\theta+2\eta)\times eC$

などであり，それゆえ

$$A=\frac{a}{\theta e},\ B=\frac{b-(\theta+\lambda\eta)\times fA}{(\theta+\eta)\times e},\ C=\frac{c-(\theta+2\lambda\eta)\times gA-(\theta+\eta+\lambda\eta)\times fB}{(\theta+2\eta)\times e}$$

などであって，そして，無際限に続く。

いま，$\frac{\theta}{\eta}=r$，$r+\lambda=s$，$s+\lambda=t$，$\cdots$ とおき，面積 $z^{\theta}R^{\lambda}$ in $A+Bz^{\eta}+Cz^{2\eta}+Dz^{3\eta}+\cdots$ において，それら A，B，C，$\cdots$ の求められた値を書けば，提示された系列が現れるであろう。証明終り。

そして，それぞれの縦線は 2 つの仕方で系列に展開されることが注意されなければならない。なぜならば，指数 η は正にも負にもなることができるからである。

347 縦線 $\frac{3k-lzz}{zz\sqrt{kz-lz^3+mz^4}}$ が提示されたとすると，これは $z^{-\frac{5}{2}}\times(3k-lzz)\times(k-lzz+mz^3)^{-\frac{1}{2}}$ のように，あるいは $z^{-2}\times(-l+3kz^{-2})\times(m-lz^{-1}+kz^{-3})^{-\frac{1}{2}}$ のように書くことができる。

前者の場合では $a=3k$，$b=0$，$c=-l$，$e=k$，$f=0$，$g=-l$，$h=m$，$\lambda=-\frac{1}{2}$，$\eta=1$，$\theta-1=-\frac{5}{2}$，$\theta=-\frac{3}{2}=r$，$s=-1$，$t=-\frac{1}{2}$，$v=0$ である。

後者の場合では $a=-l$，$b=0$，$c=3k$，$e=m$，$f=-l$，$g=0$，$h=k$，$\lambda=\frac{1}{2}$，$\eta=-1$，$\theta-1=-2$，$\theta=-1$，$r=1$，$s=1\frac{1}{2}$，$t=2$，$v=2\frac{1}{2}$ である。

いずれの場合も確かめられる必要がある。そして，もしいずれか一方の系列が，ついにその項がなくなるために，打ち切られ終りにされるならば，曲線の面積は有限項となるであろう。それゆえ，この例の前者の場合では系列において a，b，c，e，f，g，h，λ，θ，r，s，t，v の値を書くと，最初［の項］より後ろのすべての項は無際限に消滅し，曲線の面積は $-2\sqrt{\frac{k-lz^2+mz^3}{z^3}}$ となる。そして，この面積は負の符号であるから縦線を越えて伸ばされた底線に隣接している。なぜならば，正の面積はすべて縦線と底線の双方に隣接し，反対に負の面積は縦線の反対の部分の方に落ち，縦線の符号はそのままだから，伸ばされた底線に隣接するからである。もし曲線が幾何学的に求積できるならば，この方法によって，いずれかの，そしてときには両方の，系列はつねに終り，
348 有限であることが分かる。しかし，もし曲線がそのような求積を許容しないのであれば，両方の系列は無限に続き，そして，それらの一方は収束するであろうし，r が (面積が無限であるため) 零であるか負の整数であるか，あるいは $\frac{z}{e}$ が単位に等しいときを除いて，近似によって面積を与えるであろう。もし $\frac{z}{e}$ が単位より小さければ，指数 η が正である系列は収束し，一方 $\frac{z}{e}$ が単位より大きければ，他方の系列が収束するであろう。もし一方の場合に面積が縦線まで引かれた底線に隣接しているなら，他方では縦線を越えて伸ばされた底線に隣接するであろう。

349 さらに，もし縦線が有理数の因子 (factor) Q および還元できない無理数の因子 R^{π} の積で，無理数の因子の辺 R が有理数の因子 Q を割らないならば，$\lambda-1=\pi$ で，$R^{\lambda-1}=R^{\pi}$ であろうことに注意せよ。しかし，もし無理数の因子の辺 R が有理数の因子を 1 回だけ割るならば，$\lambda-1=\pi+1$ で，$R^{\lambda-1}=R^{\pi+1}$ であろう。もし 2 回割るならば，$\lambda-1=\pi+2$ で，$R^{\lambda-1}=R^{\pi+2}$ であろう。もし 3 回ならば，$\lambda-1=\pi+3$ で，$R^{\lambda-1}=R^{\pi+3}$ であろう，など。

もし縦線が，その分母が 2 つあるいはより多くの項から合成されているような，還元できない有

理数の分数ならば，分母はそのすべての素因子に分解されなければならない。そして，もし他のど
れとも等しくないような因子があるならば，曲線は求積できない。しかし，もし 2 つあるいはより 350
多くの等しい因子があるならば，そのうちの 1 つを捨てなければならず，そして，もし互いに等し 351
いが前のものとは等しくない 2 つあるいはより多くの因子がまだあるのならば，それらのうちの 1
つもまた捨てなければならず，さらに，もしまだより多くあれば，他の等しいものすべてについて
同様である。その後で，残された因子あるいは，もしいくつかあるのなら，残されたすべての因子
の積は R の代わりにおかれなければならず，(その積が平方あるいは立方あるいは平方の平方など 352
であるとき —— このときはその辺［根］が R の代わりにおかれなければならず，そのベキ指数 2
あるいは 3 あるいは 4［など］は λ の代わりに負の数にとられる —— を除いて) その平方の逆数
R^{-2} を $R^{\lambda-1}$ の代わりにおかなければならず，その縦線は分母 R^2 あるいは R^3 あるいは R^4 ある
いは R^5 などに還元されなければならない。

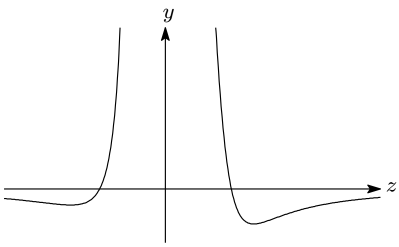
例えば，もし縦線が $\dfrac{z^5+z^4-8z^3}{z^5+z^4-5z^3-z^2+8z-4}$ であるならば，この分数は還元できず，その分母の因子，すなわち $z-1$，$z-1$，$z-1$ および $z+2$，$z+2$，は対等であるから，それぞれの種類の因子を 1 つずつ捨て，残りの $z-1$，$z-1$，$z+2$ の積，z^3-3z+2，を R の代わりにおき，その平方の逆数 $\dfrac{1}{R^2}$ あるいは R^{-2} を $R^{\lambda-1}$ の代わりにおく。それから，縦線を分母 R^2 あるいは $R^{1-\lambda}$ に還元すると，$\dfrac{z^6-9z^4+8z^3}{(z^3-3z+2)^2}$ すなわち $z^3\times(8-9z+z^3)\times(2-3z+z^3)^{-2}$ となる。そして，それゆえ $a=8$，$b=-9$，$c=0$，$d=1$，$\cdots$，$e=2$，$f=-3$，$g=0$，$h=1$，$\lambda-1=-2$，$\lambda=-1$，$\eta=1$，$\theta-1=3$，$\theta=4=r$，$s=3$，$t=2$，$v=1$ である。そして，これら［の値］が系列の中に書かれると，系列全体において最初の項の後ろのすべての項は消滅して，面積 $\dfrac{z^4}{z^3-3z+2}$ が生じる。

最後に，もし縦線が還元できない分数で，その分母が有理数の因子 Q と還元できない無理数の因
子 R^{π} の積であるならば，その辺 R のすべての素因子を見出さなければならず，それぞれの種類の 353
因子を 1 つ［ずつ］捨て，それから残っている因子を，もしあれば，有理数の因子 Q に掛ける。そして，もし積が辺 R，あるいは指数が整数であるようなその辺の何らかのベキに等しければ，その指数を m とすると，$\lambda-1=-\pi-m$ で，$R^{\lambda-1}=R^{-\pi-m}$ であろう。

例えば，もし縦線が $\dfrac{3q^5-q^4x+9q^3x^2-q^2x^3-6qx^4}{(q^2-x^2)\times(q^3+q^2x-qx^2-x^3)^{\frac{2}{3}}}$ であるならば，無理数の辺 R あるいは $q^3+q^2x-qx^2-x^3$ は 2 つの種類の因子 $q+x$，$q+x$，$q-x$ をもつから，両方の因子を 1 つずつ捨て，残った因子 $q+x$ を有理数の因子 q^2-x^2 に掛ける。そして，積 $q^3+q^2x-qx^2-x^3$ は辺 R に等しいから，$m=1$ とおくと，π は $\dfrac{1}{3}$ だから，$\lambda-1=-\dfrac{4}{3}$ となる。それゆえ，縦線を分母 $R^{\frac{4}{3}}$ に還元すると，$z^0\times(3q^6+2q^5x+8q^4x^2+8q^3x^3-7q^2x^4-6qx^5)\times(q^3+q^2x-qx^2-x^3)^{-\frac{4}{3}}$ となる。これから，$a=3q^6$，$b=2q^5$，$\cdots$，$e=q^3$，$f=q^2$，$\cdots$，$\theta-1=0$，$\theta=1=\eta$，$\lambda=-\dfrac{1}{3}$，$r=1$，$s=\dfrac{2}{3}$，$t=\dfrac{1}{3}$，$v=0$ である。そして，これら［の値］が系列の中に書かれると，系列全体において 3 つ目［の項］より後ろのすべての項は消滅して，面積 $\dfrac{3q^2x+3x^3}{(q^3+q^2x-qx^2-x^3)^{\frac{1}{3}}}$ が生じる。

この「命題 5」以下は求積法［積分法：$\displaystyle\int(\text{縦線})\,dt=(\text{面積})$］に関する内容である。

$R = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{i\eta}$ とするとき，縦線が $BC = z^{\theta-1}R^{\lambda-1}\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j z^{j\eta}$ であるとして，$r_0 = \dfrac{\theta}{\eta}$，$r_{n+1} = r_n + \lambda$ $(n \geqq 0)$ とすると，面積は $z^{\theta}R^{\lambda}\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} A_i z^{i\eta}$ である，という。ただし，$A_i = \dfrac{\frac{1}{\eta}\alpha_i - \sum_{j=1}^{i}\{r_j + (i-j)\}a_j A_{i-j}}{(r_0+i)a_0}$ $(i \geqq 0)$ である。



$$y = \frac{3k - lz^2}{z^2\sqrt{kz - lz^3 + mz^4}}$$

はじめの例では，まず，

$$\begin{aligned} BC &= \frac{3k - lz^2}{z^2\sqrt{kz - lz^3 + mz^4}} \\ &= \frac{3k - lz^2}{z^2\sqrt{z}\sqrt{k - lz^2 + mz^3}} \\ &= z^{-\frac{5}{2}} \times (k + 0z - lz^2 + mz^3)^{-\frac{1}{2}} \\ &\qquad \times (3k + 0z - lz^2) \end{aligned}$$

とすれば，$\eta = 1$，$\theta = -\dfrac{3}{2}$，$\lambda = \dfrac{1}{2}$，$e = k$，$f = 0$，$g = -l$，$h = m$，$a = 3k$，$b = 0$，$c = -l$ であるから，$r = -\dfrac{3}{2}$，$s = -1$，$t = -\dfrac{1}{2}$，$v = 0$ となる。

また，

$$\begin{aligned} BC &= \frac{3k - lz^2}{z^2\sqrt{kz - lz^3 + mz^4}} = \frac{(3k - lz^2) \div z^2}{z^2\sqrt{kz - lz^3 + mz^4 \div z^2}} \\ &= \frac{\frac{3k}{z^2} - l}{z^2\sqrt{\frac{k}{z^3} - \frac{l}{z} + m}} = \frac{-l + 3kz^{-2}}{z^2\sqrt{m - lz^{-1} + kz^{-3}}} \\ &= z^{-2} \times (m - lz^{-1} + 0z^{-2} + kz^{-3})^{-\frac{1}{2}} \times (-l + 0z^{-1} + 3kz^{-2}) \end{aligned}$$

とすれば，$\eta = -1$，$\theta = -1$，$\lambda = \dfrac{1}{2}$，$e = m$，$f = -l$，$g = 0$，$h = k$，$a = -l$，$b = 0$，$c = 3k$ であるから，$r = 1$，$s = \dfrac{3}{2}$，$t = 2$，$v = \dfrac{5}{2}$ となる。

前者の場合，$a_0 = k$，$a_1 = 0$，$a_2 = -l$，$a_3 = m$，$a_4 = a_5 = \cdots = 0$，$\alpha_0 = 3k$，$\alpha_1 = 0$，$\alpha_2 = -l$，$\alpha_3 = \alpha_4 = \cdots = 0$ であるから，$r_0 = \dfrac{-\frac{3}{2}}{1} = -\dfrac{3}{2}$，$r_1 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2} = -1$，$r_2 = -1 + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$，$\cdots$，$r_n = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}n$ で，$A_0 = \dfrac{\frac{1}{1} \times 3k}{(-\frac{3}{2}+0) \times k} = -2$，$A_1 = \dfrac{\frac{1}{1} \times 0 - (-1+0) \times 0 \times (-2)}{(-\frac{3}{2}+1) \times k} = 0$，$A_2 = \dfrac{\frac{1}{1} \times (-l) - (-1+1) \times 0 \times 0 - (-\frac{1}{2}+0) \times (-l) \times (-2)}{(-\frac{3}{2}+2) \times k} = 0$，$A_3 = A_4 = \cdots = 0$ となって，面積は

$$\begin{aligned} &z^{-\frac{3}{2}} \times (k + 0z - lz^2 + mz^3)^{\frac{1}{2}} \times (-2 + 0z + 0z^2 + 0z^3 + \cdots) \\ &\qquad = -2\sqrt{\frac{k - lz^2 + mz^3}{z^3}} \end{aligned}$$

となる。

第 2 の例では，

$$\begin{aligned} BC &= \frac{z^5 + z^4 - 8z^3}{z^5 + z^4 - 5z^3 - z^2 + 8z - 4} = \frac{z^3(z^2 + z - 8)}{(z-1)^3(z+2)^2} \\ &= \frac{z^3(z^2 + z - 8) \times (z-1)}{(z-1)^3(z+2)^2 \times (z-1)} = \frac{z^3(z^3 - 9z + 8)}{\{(z-1)^2(z+2)\}^2} \\ &= \frac{z^3(z^3 - 9z + 8)}{(z^3 - 3z + 2)^2} = z^3 \times (2 - 3z + z^3)^{-2} \times (8 - 9z + z^3) \end{aligned}$$

として，面積 $\dfrac{z^4}{z^3 - 3z + 2}$ を求めている。

第 3 の例では，

$$\begin{aligned}
BC &= \frac{3q^5 - q^4x + 9q^3x^2 - q^2x^3 - 6qx^4}{(q^2 - x^2)\sqrt[3]{q^3 + q^2x - qx^2 - x^3}} \\
&= \frac{(3q^5 - q^4x + 9q^3x^2 - q^2x^3 - 6qx^4) \times (q + x)}{(q + x)(q - x)\sqrt[3]{(q + x)^2(q - x)} \times (q + x)} \\
&= \frac{3q^6 + 2q^5x + 8q^4x^2 + 8q^3x^3 - 7q^2x^4 - 6qx^5}{\sqrt[3]{(q + x)^8(q - x)^4}} \\
&= \frac{3q^6 + 2q^5x + 8q^4x^2 + 8q^3x^3 - 7q^2x^4 - 6qx^5}{\sqrt[3]{\{(q + x)^2(q - x)\}^4}} \\
&= x^0 \times (q^3 + q^2x - qx^2 - x^3)^{-\frac{4}{3}} \\
&\qquad \times (3q^6 + 2q^5x + 8q^4x^2 + 8q^3x^3 - 7q^2x^4 - 6qx^5)
\end{aligned}$$

としている。

なお，ニュートンは最初の例に関連して，縦線 BC が幾何学的に求積できるときは面積を表す級数は有限級数になり，幾何学的に求積できずに無限級数になる場合でも $r = r_0$ が 0 か負の整数であるか $\dfrac{z}{e} = \dfrac{z}{a_0} = 1$ であるとき以外はその無限級数は収束する，ことに言及している。

ところで，第 2 の例については

$$\frac{z^5 + z^4 - 8z^3}{(z - 1)^3(z + 2)^2} = 1 - \frac{2}{3(z - 1)^3} - \frac{11}{9(z - 1)^2} - \frac{16}{9(z + 2)^2}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
&\int \frac{z^5 + z^4 - 8z^3}{(z - 1)^3(z + 2)^2}\,dz \\
&\qquad = \int dz - \frac{2}{3}\int \frac{1}{(z - 1)^3}\,dz - \frac{11}{9}\int \frac{1}{(z - 1)^2}\,dz - \frac{16}{9}\int \frac{1}{(z + 2)^2}\,dz \\
&\qquad = z + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2(z - 1)^2} + \frac{11}{9}\cdot\frac{1}{z - 1} + \frac{16}{9}\cdot\frac{1}{z + 2} \\
&\qquad = \frac{z^4}{z^3 - 3z + 2}
\end{aligned}$$

とすることもできる。［というか，今日では普通こうする。］

命題 6　定理 4 354

もし曲線の底線 AB が z で，$e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} + \cdots$ の代わりに R と，$k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} + nz^{3\eta} + \cdots$ の代わりに S と書かれるならば，縦線を $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}S^{\mu-1}$ in $a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + dz^{3\eta} + \cdots$ とすると，もし項 e，f，g，h，$\cdots$ および k，l，m，n，$\cdots$ の長方形［積］が

$$\begin{array}{ccccc}
ek & fk & gk & hk & \cdots \\
el & fl & gl & hl & \cdots \\
em & fm & gm & hm & \cdots \\
en & fn & gn & hn & \cdots
\end{array}$$

であり，もしそれらの長方形［積］の数係数がそれぞれ

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{\theta}{\eta} = r & r + \lambda = s & s + \lambda = t & t + \lambda = v & \cdots \\
r + \mu = s' & s + \mu = t' & t + \mu = v' & v + \mu = w' & \cdots \\
s' + \mu = t'' & t' + \mu = v'' & v' + \mu = w'' & w' + \mu = x'' & \cdots \\
t'' + \mu = v''' & v'' + \mu = w''' & w'' + \mu = x''' & x'' + \mu = y''' & \cdots
\end{array}$$

であるならば，曲線の面積は 355

$$
\begin{aligned}
z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}\ \text{in}\ & +\frac{\frac{1}{\eta}a}{rek} \\
& +\frac{\frac{1}{\eta}b\begin{matrix}-sfk\\ -\overset{\prime}{s}el\end{matrix}A}{(r+1)\times ek}z^{\eta} \\
& +\frac{\frac{1}{\eta}c\begin{matrix}-(s+1)\times fk\\ -(\overset{\prime}{s}+1)\times el\end{matrix}B\begin{matrix}-tgk\\ -\overset{\prime}{t}fl\\ -\overset{\prime\prime}{t}em\end{matrix}A}{(r+2)\times ek}z^{2\eta} \\
& +\frac{\frac{1}{\eta}d\begin{matrix}-(s+2)\times fk\\ -(\overset{\prime}{s}+2)\times el\end{matrix}C\begin{matrix}-(t+1)\times gk\\ -(\overset{\prime}{t}+1)\times fl\\ -(\overset{\prime\prime}{t}+1)\times em\end{matrix}B\begin{matrix}-vhk\\ -\overset{\prime}{v}gl\\ -\overset{\prime\prime}{v}fm\\ -\overset{\prime\prime\prime}{v}en\end{matrix}A}{(r+3)\times ek}z^{3\eta} \\
& +\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

であろう。

ここで，A は，その符号 $+$ あるいは $-$ を含めて，最初の項の与えられた係数 $\dfrac{\frac{1}{\eta}a}{rek}$ を表し，B は第 2［項］の与えられた係数，C は第 3［項］の与えられた係数を表して，以下同様である。しかし，項 a，b，c，$\cdots$，e，f，g，$\cdots$，k，l，m，$\cdots$ は 1 つあるいはより多くを欠くことができる。

命題は前の［命題の証明の］方法で証明され，そこで示されたことはここでも成り立つ。さらに，このような命題の系列は無限に進み，その系列の進行は明らかである。

356 **命題 7　定理 5**

もし，上のように，$e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots$ の代わりに R と書かれ，何らかの曲線の縦線 $z^{\theta\pm\eta\sigma}R^{\lambda\pm\tau}$ において，与えられた量 θ，η，λ，e，f，g，$\cdots$ はそのままで，σ および τ の代わりに任意の整数が連続して書かれるならば，そして，もし，縦線が根のつながりにおいて (in vinculo radicis) 2 項式なら，そのような無数の縦線によって描かれる曲線のうちの 1 つの面積が，あるいは縦線が根のつながりにおいて 3 項式なら，そのような曲線のうちの 2 つの面積が，あるいは縦線が根のつながりにおいて 4 項式なら，そのような曲線のうちの 3 つの面積が与えられ，そして［このことが］無際限に続くならば，すべての曲線の面積が与えられるであろうと私は主張する。

ここで「項式 (nomen)」とは根のつながりにおける，［どれかが］欠けていても完全であっても，それらのベキ指数が算術級数［等差数列］にあるような，すべての項であると考える。それゆえ，縦線 $\sqrt{a^4-ax^3+x^4}$ は，a^4 と $-ax^3$ の間の 2 つの項が欠けているから，5 項式として考えられる
357 べきである。しかし，$\sqrt{a^4+x^4}$ は 2 項式であり，$\sqrt{a^4+x^4-\dfrac{x^8}{a^4}}$ は 3 項式であって，それは今は数列はより大きい差［公差］で進むからである。そして，命題は次のように証明される。

場合 1

R を 3 項量 (quantitas trium nominum) $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}$ として，2 つの曲線の縦線を $pz^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ および $qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$ とし，それらの面積を pA および qB としよう。すると，命題 3 により $z^{\theta}R^{\lambda}$ はその縦線が $\theta e+(\theta+\lambda\eta)\times fz^{\eta}+(\theta+2\lambda\eta)\times gz^{2\eta}$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ である曲線の面積であるから，前者の縦線および面積を後者の縦線および面積から取り去れば，曲線の新しい縦線として $\left\{\begin{array}{lll}\theta e-p & +(\theta\times f-q)\times z^{\eta} & +\theta\times gz^{2\eta}\\ & +\lambda\eta & +2\lambda\eta\end{array}\right\}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ が，その面積として $z^{\theta}R^{\lambda}-pA-qB$ が残るであろう。$\theta e=p$，$\theta f+\lambda\eta f=q$ とおけば，縦線は $\left\{(\theta+2\lambda\eta)\times gz^{2\eta}\right\}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ で，面積は $z^{\theta}R^{\lambda}-\theta eA-\theta fB-\lambda\eta fB$ となるであろう。両方を $\theta g+2\lambda\eta g$ で割り，現れる面積を C と名づけると，r は任意に仮定されるから，rC は，その縦線が $rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$ である，曲線の面積であろう。そして，面積 pA および qB から縦線 $rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$ に対応する面積 rC を見出した方法によって，面積 qB および rC から縦線 $sz^{\theta+3\eta-1}R^{\lambda-1}$ に対応する第 4 の面積，sD とする，を見出せるであろうし，無際限にそうである。そして，面積 B および A から反対の方向に進める方法も同様である。もし項 θ，$\theta+\lambda\eta$ および $\theta+2\lambda\eta$ のいずれかが欠けることで系列を打ち切るなら 358
ば，面積 pA が 1 つの系列のはじめのものと，そして面積 qB が他の［系列の］はじめのものと仮定されれば，それら 2 つの面積からいずれの系列における面積もすべて与えられるであろう。そして逆に，仮定された［任意の］他の 2 つの面積から，面積 A および B に対する解析により，逆に戻ることができ，確かに［任意に］与えられた 2 つ［の面積］から残りのすべて［の面積］が与えられる。これが示されるべきことであった。

これは，z の指数 θ が，量 η が絶えず加えられるあるいは引かれることによって，増加あるいは減少するような曲線の場合である。もう一方の場合は指数 λ が単位だけ増加あるいは減少するときの曲線の場合である。

場合 2

もし，いま面積 pA および qB が適合すべき，縦線 $pz^{\theta-1}R^{\lambda}$ および $qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda}$ は，R あるいは $e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}$ が掛けられ，次いで，逆に，R で割られるならば，それらは $(pe+pfz^{\eta}+pgz^{2\eta})\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$，および $(qez^{\eta}+qfz^{2\eta}+qgz^{3\eta})\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ となるであろう。

そして，(命題 3 により) $az^{\theta}R^{\lambda}$ は，その縦線が $\left\{\theta ae+(\theta+\lambda\eta)\times afz^{\eta}+(\theta+2\lambda\eta)\times agz^{2\eta}\right\}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ である，曲線の面積であり，$bz^{\theta+\eta}R^{\lambda}$ は，その縦線が $\left\{(\theta+\eta)\times bez^{\eta}+(\theta+\eta+\lambda\eta)\times bfz^{2\eta}+(\theta+\eta+2\lambda\eta)\times bgz^{3\eta}\right\}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ である，曲線の面積である。

そして，これらの 4 つの面積の和は $pA+qB+az^{\theta}R^{\lambda}+bz^{\theta+\eta}R^{\lambda}$ であり，それらに適合する縦 359
線の和は

$$\begin{array}{lllll}
\theta ae & +(\theta+\lambda\eta)\times afz^{\eta} & +(\theta+2\lambda\eta)\times agz^{2\eta} & +(\theta+\eta+2\lambda\eta)\times bgz^{3\eta} & \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}\\
+pe & +(\theta+\eta)\times be & +(\theta+\eta+\lambda\eta)\times bf & +1\times qg & \\
 & +1\times pf & +1\times pg & & \\
 & +1\times qe & +1\times qf & &
\end{array}$$

$$\left[\left(\begin{array}{l}(\theta ae+pe)+\{(\theta+\lambda\eta)af+(\theta+\lambda\eta)be+pf+qe\}\,z^{\eta}\\ \quad+\{(\theta+2\lambda\eta)ag+(\theta+\eta+\lambda\eta)bf+pg+qf\}\,z^{2\eta}\\ \quad+\{(\theta+\eta+2\lambda\eta)bg+qg\}\,z^{3\eta}\end{array}\right)\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}\right]$$

である。

もし第 1，第 3，および第 4 の項がそれぞれ零に等しいとおかれると，第 1 項により $\theta ae+pe=0$ あるいは $-\theta a=p$，第 4 項により $-\theta b-\eta b-2\lambda\eta b=q$ となり，そして第 3 項により（p および q を消去すれば）$\dfrac{2ag}{f}=b$ となるであろう。それゆえ，第 2 項は $\dfrac{\lambda\eta aff-4\lambda\eta age}{f}$ となり，従って 4 つの縦線の和は $\dfrac{\lambda\eta aff-4\lambda\eta age}{f}\,z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$ であり，適合する等しい個数の面積の和は $az^{\theta}R^{\lambda}+\dfrac{2ag}{f}\,z^{\theta+\eta}R^{\lambda}-\theta aA-\dfrac{2\theta+2\eta+4\lambda\eta}{f}\,agB$ である。これらの和が $\dfrac{\lambda\eta aff-4\lambda\eta age}{f}$ で割られると，もし後者の商を D と呼ぶなら，D は，その縦線が前者の商 $z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$ である，曲線の面積であろう。そして，同じ仕方で，第 1 項を除く，縦線のすべての項が零に等しいとおかれると，その縦線が $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ である曲線の面積を求めることができる。その面積が C と呼ばれると，面積 A および B から面積 C および D を求めた方法によって，これらの面積 C および D から，縦線 $z^{\theta-1}R^{\lambda-2}$ および $z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-2}$ に対応する別の 2 つ，E および F，を見出すことができ，そのように無際限に続く。そして，逆の解析により，面積 E および F から面積 C および D に戻ることができ，それゆえ面積 A および B や，系列中に続いている他のものに戻ることができる。
360 それゆえ，もし指数 λ が，絶えず単位が加えられあるいは引かれることによって，増加あるいは減少し，そのように得られる縦線に適合する面積から 2 つの最も単純なものが得られるならば，他のものすべてが無際限に与えられるであろう。これが示されるべきことであった。

場合 3

そして，これら 2 つの場合を結合することによって，もし指数 θ が絶えず η だけ加えられあるい
361 は引かれ，しかも指数 λ が絶えず単位が加えられあるいは引かれることで，増加するかあるいは減少するならば，得られるそれぞれの縦線に適合する面積が与えられるであろう。これが示されるべきことであった。

場合 4

そして，同様の推論によって，もし縦線が根のつながりにおいて 4 項式からなり 3 つの面積が与えられる，あるいはもしそれが 5 項式からなり 4 つの面積が与えられる，さらにもしこれが続くのであるならば，指数 θ に数 η が，あるいは指数 λ に単位が，加えられあるいは引かれることで得ることができるすべての面積が与えられるであろう。そして，縦線が 2 項式の結合であり，幾何学的には求積できない面積の 1 つが与えられるような曲線に対しても方法は同様である。これが示されるべきことであった。

自然数 σ，τ に対して，縦線が $z^{\theta\pm\eta\sigma}R^{\lambda\pm\tau}$ であるような曲線の系列を考えるとき，R が n 項式ならば，$(n-1)$ 個の曲線の面積が与えられると，その系列のすべての曲線の面積が得られる，というのがこの命題の内容である。追跡してみると，次のようになる。

いま，R が 3 項式 $a_0+a_1z^{\eta}+a_2z^{2\eta}$ ［一般には，$R=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}a_iz^{i\eta}$ となる］で表されるとする。

「場合 1」は z の指数に関する内容で，縦線が $pz^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ で面積が pA である曲線と，縦線が $qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}=qz^{\eta}z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ で面積が qB である曲線をとると，

$$z^{\theta}R^{\lambda}\longleftrightarrow\left\{\theta a_0+(\theta+\lambda\eta)a_1z^{\eta}+(\theta+2\lambda\eta)a_2z^{2\eta}\right\}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}\qquad［命題 3］$$

であるから，これから先の 2 つの曲線に関する面積・縦線を引けば，

$$\begin{aligned}&z^{\theta}R^{\lambda}-pA-qB\\&\qquad\longleftrightarrow\left\{(\theta a_0-p)+\left[(\theta+\lambda\eta)a_1-q\right]z^{\eta}+(\theta+2\lambda\eta)a_2z^{2\eta}\right\}\times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}\end{aligned}$$

となる。

そこで，$\theta a_0 - p = 0$，$(\theta + \lambda\eta)a_1 - q = 0$，すなわち $\theta a_0 = p$，$(\theta + \lambda\eta)a_1 = q$ とすれば，

$$z^\theta R^\lambda - \theta a_0 A - (\theta + \lambda\eta)a_1 B \longleftrightarrow (\theta + 2\lambda\eta)a_2 z^{2\eta} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$$

となる。

ここで，$z^\theta R^\lambda - \theta a_0 A - (\theta + \lambda\eta)a_1 B = (\theta + 2\lambda\eta)a_2 C$ とおくと，

$$C \longleftrightarrow z^{2\eta} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1} = z^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1}$$

となるから，任意の r について

$$\begin{cases} pA,\ qB \longrightarrow rC \\ pz^{\theta-1}R^{\lambda-1},\ qz^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1} \longrightarrow rz^{\theta+2\eta-1}R^{\lambda-1} \quad [z \text{ の指数が } \eta \text{ だけ増えた}] \end{cases}$$

となって，pA，qB から rC が得られることになる。

「場合 2」は R の指数に関するもので，縦線が $pz^{\theta-1}R^\lambda$ で面積が pA である曲線と，縦線が $qz^{\theta+\eta-1}R^\lambda$ で面積が qB である曲線をとると，まず，

$$\begin{aligned} pz^{\theta-1}R^\lambda \times R \div R &= pz^{\theta-1}R^\lambda \times (a_0 + a_1 z^\eta + a_2 z^{2\eta}) \div R \\ &= (pa_0 + pa_1 z^\eta + pa_2 z^{2\eta}) \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1} \\ qz^{\theta+\eta-1}R^\lambda \times R \div R &= (qa_0 z^\eta + qa_1 z^{2\eta} + qa_2 z^{3\eta}) \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1} \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} pA &\longleftrightarrow (pa_0 + pa_1 z^\eta + pa_2 z^{2\eta}) \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1} \\ qB &\longleftrightarrow (qa_0 z^\eta + qa_1 z^{2\eta} + qa_2 z^{3\eta}) \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1} \end{aligned}$$

となる。

また，任意の a，b に対して

$$az^\theta R^\lambda \longleftrightarrow \left\{\theta aa_0 + (\theta + \lambda\eta)aa_1 z^\eta + (\theta + 2\lambda\eta)aa_2 z^{2\eta}\right\} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$$

$$\begin{aligned} &bz^{\theta+\eta}R^\lambda \\ &\quad \longleftrightarrow \left\{(\theta + \eta)ba_0 z^\eta + (\theta + \eta + \lambda\eta)ba_1 z^{2\eta} + (\theta + \eta + 2\lambda\eta)ba_2 z^{3\eta}\right\} \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1} \end{aligned}$$

であるから，これらおよび先の 2 つの曲線に関する面積・縦線を加えれば，

$$\begin{aligned} &pA + qB + az^\theta R^\lambda + bz^{\theta+\eta}R^\lambda \\ &\quad \longleftrightarrow [\{(pa_0 + \theta aa_0) + \{pa_1 + qa_0 + (\theta + \lambda\eta)aa_1 + (\theta + \eta)ba_0\}\, z^\eta \\ &\qquad + \{pa_2 + qa_1 + (\theta + 2\lambda\eta)aa_2 + (\theta + \eta + \lambda\eta)ba_1\}\, z^{2\eta} \\ &\qquad + \ \{qa_2 + (\theta + \eta + 2\lambda\eta)ba_2\}\, z^{3\eta}\}] \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1} \end{aligned}$$

となる。

そこで，第 1 項 $pa_0 + \theta aa_0 = 0$，第 2 項 $qa_2 + (\theta + \eta + 2\lambda\eta)ba_2 = 0$，すなわち $-\theta a = p$，$-(\theta + \eta + 2\lambda\eta)b = q$ とし，さらに第 3 項 $pa_2 + qa_1 + (\theta + 2\lambda\eta)aa_2 + (\theta + \eta + \lambda\eta)ba_1 = 0$ とすれば，

$$\frac{2aa_2}{a_1} = b \qquad [\text{第 3 項から}]$$

$$pa_1 + qa_0 + (\theta + \lambda\eta)aa_1 + (\theta + \eta)ba_0 = \frac{\lambda\eta aa_1 a_1 - 4\lambda\eta aa_0 a_2}{a_1} \qquad [\text{第 2 項}]$$

となって，

$$\begin{aligned} &-\theta aA - (\theta + \eta + 2\lambda\eta)\frac{2aa_2}{a_1}\,B + az^\theta R^\lambda + \frac{2aa_2}{a_1}\,z^{\theta+\eta}R^\lambda \\ &\quad \longleftrightarrow \frac{\lambda\eta aa_1 a_1 - 4\lambda\eta aa_0 a_2}{a_1}\,z^\eta \times z^{\theta-1}R^{\lambda-1} \\ &\qquad = \frac{\lambda\eta aa_1 a_1 - 4\lambda\eta aa_0 a_2}{a_1} \times z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1} \end{aligned}$$

となる。

ここで，$-\theta aA - (\theta + \eta + 2\lambda\eta)\dfrac{2aa_2}{a_1}\,B + az^\theta R^\lambda + \dfrac{2aa_2}{a_1}\,z^{\theta+\eta}R^\lambda = \dfrac{\lambda\eta(aa_1 a_1 - 4aa_0 a_2)}{a_1}\,D$ とおくと，

$$D \longleftrightarrow z^{\theta+\eta-1}R^{\lambda-1}$$

となる。

一方，第 2 項 $pa_1 + qa_0 + (\theta + \lambda\eta)aa_1 + (\theta + \eta)ba_0 = 0$，第 3 項 $pa_2 + qa_1 + (\theta + 2\lambda\eta)aa_2 + (\theta + \eta + \lambda\eta)ba_1 = 0$，第 4 項 $qa_2 + (\theta + \eta + 2\lambda\eta)ba_2 = 0$ とすれば，

$$
\begin{aligned}
&p = \frac{2\theta b a_0 a_2 - \theta b a_1 a_1 + 4\lambda\eta b a_0 a_2 - \lambda\eta b a_1 a_1}{a_1 a_2} \\
&q = -(\theta + \eta + 2\lambda\eta)b \\
&a = \frac{b a_1 a_1 - 2 b a_0 a_2}{a_1 a_2}
\end{aligned}
$$

となって，

$$
\begin{aligned}
\frac{2\theta b a_0 a_2 - \theta b a_1 a_1 + 4\lambda\eta b a_0 a_2 - \lambda\eta b a_1 a_1}{a_1 a_2} A - (\theta + \eta + 2\lambda\eta) bB& \\
+ \frac{b a_1 a_1 - 2 b a_0 a_2}{a_1 a_2} z^{\theta} R^{\lambda} + b z^{\theta+\eta} R^{\lambda}& \\
\longleftrightarrow \frac{p a_0 a_1 a_2 + \theta(b a_1 a_1 - 2 b a_0 a_2) a_0}{a_1 a_2} \times z^{\theta-1} R^{\lambda-1}&
\end{aligned}
$$

となる。

ここで，$\dfrac{2\theta b a_0 a_2 - \theta b a_1 a_1 + 4\lambda\eta b a_0 a_2 - \lambda\eta b a_1 a_1}{a_1 a_2} A - (\theta+\eta+2\lambda\eta) bB + \dfrac{b a_1 a_1 - 2 b a_0 a_2}{a_1 a_2} z^{\theta} R^{\lambda} + b z^{\theta+\eta} R^{\lambda} = \dfrac{p a_0 a_1 a_2 + \theta(b a_1 a_1 - 2 b a_0 a_2) a_0}{a_1 a_2} C$ とおくと，

$$
C \longleftrightarrow z^{\theta-1} R^{\lambda-1}
$$

となる。

以上のことから，任意の r，s について

$$
\begin{cases}
pA,\ qB \longrightarrow rC,\ sD \\
p z^{\theta-1} R^{\lambda},\ q z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda} \longrightarrow r z^{\theta-1} R^{\lambda-1},\ s z^{\theta+\eta-1} R^{\lambda-1} \quad [R \text{ の指数が } 1 \text{ だけ減った}]
\end{cases}
$$

となって，pA，qB から rC，sD が得られることになる。

「場合 1」を続ければ，pA と $qB \longrightarrow rC$，qB と $rC \longrightarrow sD$，…… と，

「場合 2」を続ければ，pA と $qB \longrightarrow rC$ と sD，rC と $sD \longrightarrow tE$ と uF，…… とでき，

逆の操作を行えば逆向きにも曲線が導けるから，この「場合 1」および「場合 2」によって z の指数に対しても R の指数に対しても系列中の曲線が導けることになり，R が 3 項式の場合に命題の主張が示されるという訳である。

「場合 4」では n 項式でも同様にできることに触れられている。

362 **命題 8　定理 6**

もし，上のように，$e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \cdots$ および $k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} + \cdots$ の代わりに R および S
363 と書かれ，そして，何らかの曲線の縦線 $z^{\theta\pm\eta\sigma} R^{\lambda\pm\tau} S^{\mu\pm\upsilon}$ において，与えられた量 θ，η，λ，μ，e，f，g，k，l，m，$\cdots$ はそのままで，σ，τ，υ の代わりに任意の整数が連続して書かれるならば，そして，もし，量 R および S が 2 項式なら，そのように現れる縦線によって描かれる曲線のうちの
364 2 つの面積が与えられるならば，あるいはもし，R および S がともに 5 項式からなるなら，3 つの曲線の面積が与えられるならば，そしてそれが無際限に続くのであれば，すべての曲線の面積が与
365 えられるであろうと私は主張する。

これは前の命題［の証明］の方法で証明される。

368 **命題 9　定理 7**

それらの縦線が相互にそれらの底線の流率に比例するような曲線の面積は互いに等しい。

なぜならば，縦線と底線の流率の積 (contenta) は等しいであろうし，面積の流率はその積に比例するからである。

座標系 $(z,\ y)$ における曲線 $y = f(z)$ および座標系 $(x,\ v)$ における曲線 $v = g(x)$ について，$y : v = \dot{x} : \dot{z}$ ［すなわち $\dot{z}y = \dot{x}v$］であれば，それぞれの曲線の下の部分の面積は等しいという。

面積 $= \sum^{\infty}$(縦線 × 底線の流率) であることから明らかであろう。

ある曲線の求積に際して，命題の条件を満たすように座標系を変換できれば，変換された座標系での求積に還元できるということである。すなわち，ここで述べられているのは置換積分のことである。

系 1

もし 2 つの曲線の底線の間の任意の関係が仮定されるならば，命題 1 により，これから底線の流率の関係が求められ，縦線が相互にそれらの流率に比例するようにおかれると，それらの面積が互いに等しいであろう無数の曲線を見出すことができる。

系 2

それゆえ，確かに，その縦線が $z^{\theta-1}\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots)^{\lambda}$ である各々の曲線は，ν の代わりに任意の量が仮定され，$\dfrac{\eta}{\nu}=s$ および $z^s=x$ とおかれると，その縦線が $\dfrac{\nu}{\eta}x^{\frac{\nu\theta-\eta}{\eta}}\times(e+fx^{\nu}+$ 369
$gx^{2\nu}+\cdots)^{\lambda}$ であるものに等しい別のものに変化する。

$\dfrac{\eta}{\nu}=s$，$z^s=x$ とすると，$z^{\eta}=x$，$z=x^{\frac{\nu}{\eta}}$ であるから，$\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\nu}{\eta}x^{\frac{\nu}{\eta}-1}$ となり，

$$\begin{aligned}
&\int z^{\theta-1}\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots)^{\lambda}\,dz\\
&\qquad=\int\left(x^{\frac{\nu}{\eta}}\right)^{\theta-1}\times(e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\cdots)^{\lambda}\times\frac{\nu}{\eta}x^{\frac{\nu}{\eta}-1}\,dx\\
&\qquad=\int\frac{\nu}{\eta}x^{\frac{\nu}{\eta}\theta-1}\times(e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\cdots)^{\lambda}\,dx
\end{aligned}$$

ということになる。

「命題 9」の内容に照らしていうと ……

$x=z^s=z^{\frac{\eta}{\nu}}$ とするのだから，$\dot{x}=\dfrac{\eta}{\nu}\dot{z}z^{\frac{\eta}{\nu}-1}$ であり，

$$\begin{aligned}
\dot{x}v&=\dot{x}\times\frac{\nu}{\eta}x^{\frac{\nu\theta-\eta}{\eta}}\left(e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\cdots\right)^{\lambda}\\
&=\frac{\eta}{\nu}\dot{z}z^{\frac{\eta}{\nu}-1}\times\frac{\nu}{\eta}\left(z^{\frac{\eta}{\nu}}\right)^{\frac{\nu\theta-\eta}{\eta}}\left\{e+f\left(z^{\frac{\eta}{\nu}}\right)^{\nu}+g\left(z^{\frac{\eta}{\nu}}\right)^{2\nu}+\cdots\right\}^{\lambda}\\
&=\dot{z}\times z^{\theta-1}\left(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots\right)^{\lambda}=\dot{z}y
\end{aligned}$$

である。

系 3

そして，その縦線が $z^{\theta-1}\times(a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\cdots)\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots)^{\lambda}$ である各々の曲線は，ν の代わりに任意の量が仮定され，$\dfrac{\eta}{\nu}=s$ および $z^s=x$ とおかれると，その縦線が $\dfrac{\nu}{\eta}x^{\frac{\nu\theta-\eta}{\eta}}\times(a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\cdots)\times(e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\cdots)^{\lambda}$ であるものに等しい別のものに変化する。

系 4

そして，その縦線が $z^{\theta-1}\times(a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\cdots)\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots)^{\lambda}\times(k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\cdots)^{\mu}$ である各々の曲線は，ν の代わりに任意の量が仮定され，$\dfrac{\eta}{\nu}=s$ および $z^s=x$ とおかれると，その縦線が $\dfrac{\nu}{\eta}x^{\frac{\nu\theta-\eta}{\eta}}\times(a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\cdots)\times(e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\cdots)^{\lambda}\times(k+lx^{\nu}+mx^{2\nu}+\cdots)^{\mu}$ であるものに等しい別のものに変化する。

370 **系 5**

そして，その縦線が $z^{\theta-1}\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots)^{\lambda}$ である各々の曲線は，$\dfrac{1}{z}=x$ とおかれると，その縦線が $\dfrac{1}{x^{\theta+1}}\times(e+fx^{-\eta}+gx^{-2\eta}+\cdots)^{\lambda}$ —— すなわち，根のつながりにおいて 2 項式なら $\dfrac{1}{x^{\theta+1+\eta\lambda}}\times(f+ex^{\eta})^{\lambda}$ であり，あるいは，3 項式なら $\dfrac{1}{x^{\theta+1+2\eta\lambda}}\times(g+fx^{\eta}+ex^{2\eta})^{\lambda}$ であり，以下そのように —— であるものに等しい別のものに変化する。

$x=\dfrac{1}{z}=z^{-1}$ であるから，$\dot{x}=-\dot{z}\dfrac{1}{z^{2}}=-\dot{z}z^{-2}$ となり，

$$\begin{aligned}\dot{x}v&=-\dot{z}z^{-2}\times\frac{1}{\left(z^{-1}\right)^{\theta+1}}\left\{e+f\left(z^{-1}\right)^{-\eta}+g\left(z^{-1}\right)^{-2\eta}+\cdots\right\}^{\lambda}\\&=-\dot{z}\times z^{\theta-1}\left(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots\right)^{\lambda}\\&=-\dot{z}y\end{aligned}$$

である。このときには符号 $-$ が出てきてしまうが，その点については次の「系 6」の後段を参照のこと。

特に, 2 項式の場合, 縦線は $\dfrac{1}{x^{\theta+1}}\left(e+fx^{-\eta}\right)^{\lambda}=\dfrac{1}{x^{\theta+1}}\left(\dfrac{ex^{\eta}+f}{x^{\eta}}\right)^{\lambda}=\dfrac{1}{x^{\theta+1+\eta\lambda}}\left(f+ex^{\eta}\right)^{\lambda}$ となる。

直接には，$z=x^{-1}$ より，$\dfrac{dz}{dx}=-x^{-2}$ であるから，

$$\begin{aligned}&\int z^{\theta-1}\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots)^{\lambda}\,dz\\&\qquad=\int x^{-\theta+1}\times(e+fx^{-\eta}+gx^{-2\eta}+\cdots)^{\lambda}\times\left(-x^{-2}\,dx\right)\\&\qquad=\int -x^{-\theta-1}\times(e+fx^{-\eta}+gx^{-2\eta}+\cdots)^{\lambda}\,dx\end{aligned}$$

となる。

系 6

そして，その縦線が $z^{\theta-1}\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots)^{\lambda}\times(k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\cdots)^{\mu}$ である各々の曲線は，$\dfrac{1}{z}=x$ とおかれると，その縦線が $\dfrac{1}{x^{\theta+1}}\times(e+fx^{-\eta}+gx^{-2\eta}+\cdots)^{\lambda}\times(k+lx^{-\eta}+mx^{-2\eta}+\cdots)^{\mu}$ —— すなわち，根のつながりにおいて 2 項式なら $\dfrac{1}{x^{\theta+1+\eta\lambda+\eta\mu}}\times(f+ex^{\eta})^{\lambda}\times(l+kx^{\eta})^{\mu}$ であり，あるいは，根のつながりにおいて前者が 3 項式で後者は 2 項式なら $\dfrac{1}{x^{\theta+1+2\eta\lambda+\eta\mu}}\times(g+fx^{\eta}+ex^{2\eta})^{\lambda}\times(l+kx^{\eta})^{\mu}$ であり，他もそのように —— であるものに等しい別のものに変化する。

371 そして，これら最後の 2 つの系において，2 つの等しい面積はそれらの縦線の反対の部分にあることに注意せよ。もし一方の曲線の面積が底線に隣接しているならば，それと等しい他方の曲線の面積は延長された底線に隣接している。

系 7

もしある曲線の縦線 y および底線 z の間の関係がこの形式のような任意の複合方程式 (aequatio affectam) $y^{\alpha}\times(e+fy^{\eta}z^{\delta}+gy^{2\eta}z^{2\delta}+hy^{3\eta}z^{3\delta}+\cdots)=z^{\beta}\times(k+ly^{\eta}z^{\delta}+my^{2\eta}z^{2\delta}+\cdots)$ によって定められるならば，この曲線は，$s=\dfrac{\eta-\delta}{\eta}$，$x=\dfrac{1}{s}z^{s}$，$\lambda=\dfrac{\eta-\delta}{\alpha\delta+\beta\eta}$ と仮定されると，その底線 x が与えられた縦線 v から非複合方程式 (aequatio non affectam) $\dfrac{1}{s}v^{\alpha\lambda}\times(e+fv^{\eta}+gv^{2\eta}+hv^{3\eta}+\cdots)^{\lambda}\times(k+lv^{\eta}+mv^{2\eta}+\cdots)^{-\lambda}=x$ によって定められるものに等しい別のものに変化する。

系 8

もしある曲線の縦線 y および底線 z の間の関係がこの形式のような任意の複合方程式

$$y^{\alpha} \times (e + fy^{\eta}z^{\delta} + gy^{2\eta}z^{2\delta} + \cdots) = z^{\beta} \times (k + ly^{\eta}z^{\delta} + my^{2\eta}z^{2\delta} + \cdots) + z^{\gamma} \times (p + qy^{\eta}z^{\delta} + ry^{2\eta}z^{2\delta} + \cdots)$$

によって定められるならば，この曲線は，$s = \dfrac{\eta - \delta}{\eta}$，$x = \dfrac{1}{s}z^{s}$，$\mu = \dfrac{\alpha\delta + \beta\eta}{\eta - \delta}$ および $\nu = \dfrac{\alpha\delta + \gamma\eta}{\eta - \delta}$ と仮定されると，その底線 x が与えられた縦線 v から弱複合方程式 (aequatio minus affectam) 372

$$v^{\alpha} \times (e + fv^{\eta} + gv^{2\eta} + \cdots) = s^{\mu}x^{\mu} \times (k + lv^{\eta} + mv^{2\eta} + \cdots) + s^{\nu}x^{\nu} \times (p + qv^{\eta} + rv^{2\eta} + \cdots)$$

によって定められるものに等しい別のものに変化する。

はじめ，「系 9」として次の命題が挙げられていて，以下の命題はそれぞれ「系 10」「系 11」であったという (『数学論文集』第 7 巻 p.541)。

「その縦線が $\dfrac{fz^{\eta-1} + 2gz^{2\eta-1} + 3hz^{3\eta-1} + \cdots}{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} + \cdots}$ である各々の曲線は，$fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} + \cdots = x$ と仮定すると，その縦線が $\dfrac{1}{\eta e + \eta x}$ であるような，それと等しい双曲線に変化する。」

系 9

その縦線が

$$\pi z^{\theta-1} \times \left\{\nu e + (\nu+\eta)fz^{\eta} + (\nu + 2\eta)gz^{2\eta} + \cdots\right\} \times (e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + \cdots)^{\lambda-1}$$
$$\text{in } \left\{a + b(ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} + \cdots)^{\tau}\right\}^{\omega}$$

である各々の曲線は，$\theta = \lambda\nu$ とし，$x = (ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} + \cdots)^{\pi}$，$\sigma = \dfrac{\tau}{\pi}$，および $\vartheta = \dfrac{\lambda - \pi}{\pi}$ と仮定されると，その縦線が $x^{\vartheta} \times (a + bx^{\sigma})^{\omega}$ であるものと等しい別のものに変化する。そして，この系において前者の縦線は，$\lambda = 1$ とおかれると，あるいは $\tau = 1$ とおかれ，その指数が ω であるベキの根を引き出すことができるようにすると，あるいはまた $\omega = -1$，$\lambda = 1 = \tau = \sigma = \pi$ と 373
おくことによって他の場合を無視すると，より単純になることに注意せよ。

系 10

$\left\{ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} + \cdots\right\}$，$\left\{\nu ez^{\nu-1} + (\nu+\eta)fz^{\nu+\eta-1} + (\nu+2\eta)gz^{\nu+2\eta-1} + \cdots\right\}$，$\left\{k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} + \cdots\right\}$ および $\left\{\eta lz^{\eta-1} + 2\eta mz^{2\eta-1} + \cdots\right\}$ の代わりにそれぞれ R，r，S および s と書かれると，その縦線が $(\pi Sr + \varphi Rs) \times R^{\lambda-1}S^{\mu-1} \times (aS^{-\upsilon} + bR^{\tau})^{\omega}$ である各々の曲線は，もし $\dfrac{\mu - \upsilon\omega}{\lambda} = \dfrac{\upsilon}{\tau} = \dfrac{\varphi}{\pi}$，$\dfrac{\tau}{\pi} = \sigma$，$\dfrac{\lambda - \pi}{\pi} = \vartheta$ および $R^{\pi}S^{\varphi} = x$ であるならば，その縦線が $x^{\vartheta} \times (a + bx^{\sigma})^{\omega}$ であるものと等しい別のものに変化する。そして，前者の縦線は，τ，υ および，λ あるいは μ の代わりに単位がおかれ，その指数が ω であるベキの根を引き出すことができるよう 374
にすると，あるいは $\omega = -1$ あるいは $\mu = 0$ とおかれると，より単純になることに注意せよ。

この「系 10」では ……

$$R = ez^{\nu} + fz^{\nu+\eta} + gz^{\nu+2\eta} + \cdots,$$
$$r = \nu ez^{\nu-1} + (\nu+\eta)fz^{\nu+\eta-1} + (\nu+2\eta)gz^{\nu+2\eta-1} + \cdots$$
$$S = k + lz^{\eta} + mz^{2\eta} + \cdots,$$

$$s = \eta l z^{\eta-1} + 2\eta m z^{2\eta-1} + \cdots$$

と表すとき，$\dfrac{\mu-\upsilon\omega}{\lambda} = \dfrac{\upsilon}{\tau} = \dfrac{\varphi}{\pi}$，$\dfrac{\tau}{\pi} = \sigma$，$\dfrac{\lambda-\pi}{\pi} = \vartheta$，$R^{\pi}S^{\varphi} = x$ とすれば，まず

$$\dot{R} = \dot{z}\left\{\nu e z^{\nu-1} + (\nu+\eta) f z^{\nu+\eta-1} + \cdots\right\} = \dot{z}r,$$
$$\dot{S} = \dot{z}\left(\eta l z^{\eta-1} + 2\eta m z^{2\eta-1} + \cdots\right) = \dot{z}s$$

であり，

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \pi\dot{R}R^{\pi-1}S^{\varphi} + \varphi R^{\pi}\dot{S}S^{\varphi-1} = \pi\dot{z}rR^{\pi-1}S^{\varphi} + \varphi R^{\pi}\dot{z}sS^{\varphi-1} \\ &= \dot{z}\left(\pi Sr + \varphi Rs\right)R^{\pi-1}S^{\varphi-1}\end{aligned}$$

である。次に，

$$\begin{aligned}(a+bx^{\sigma})^{\omega} &= \left\{a + b\left(R^{\pi}S^{\varphi}\right)^{\frac{\tau}{\pi}}\right\}^{\omega} = \left(a + bR^{\tau}S^{\upsilon}\right)^{\omega} = \left\{S^{\upsilon}\left(aS^{-\upsilon} + bR^{\tau}\right)\right\}^{\omega} \\ &= S^{\upsilon\omega}\left(aS^{-\upsilon} + bR^{\tau}\right)^{\omega}\end{aligned}$$

であるから，

$$v = x^{\vartheta}\left(a+bx^{\sigma}\right)^{\omega} = R^{\lambda-\pi}S^{\frac{\varphi}{\pi}\lambda-\varphi}S^{\upsilon\omega}\left(aS^{-\upsilon}+bR^{\tau}\right)^{\omega} = R^{\lambda-\pi}S^{\mu-\varphi}\left(aS^{-\upsilon}+bR^{\tau}\right)^{\omega}$$

となって，

$$\begin{aligned}\dot{x}v &= \dot{z}\left(\pi Sr+\varphi Rs\right)R^{\pi-1}S^{\varphi-1} \times R^{\lambda-\pi}S^{\mu-\varphi}\left(aS^{-\upsilon}+bR^{\tau}\right)^{\omega} \\ &= \dot{z} \times \left(\pi Sr+\varphi Rs\right)R^{\lambda-1}S^{\mu-1}\left(aS^{-\upsilon}+bR^{\tau}\right)^{\omega} \\ &= \dot{z}y\end{aligned}$$

が示され，命題の条件が満たされる。従って，曲線下の面積は等しくなる。

命題 10　問題 3

その縦線 y が与えられた底線 z から非複合方程式によって決定される任意の曲線と幾何学的に比較することができる最も単純な図形を見出すこと。

場合 1

縦線を［底線のベキに与えられた量が掛けられたもの，例えば］$az^{\theta-1}$ としよう。すると，命題 5 により，$b=0=c=d=f=g=h=\cdots$，$e=1$ とおかれると，容易に得られるように，面積は $\dfrac{1}{\theta}az^{\theta}$ であろう。

場合 2

縦線を $az^{\theta-1}\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots)^{\lambda-1}$ としよう。そして，もし曲線が直線図形と幾何学的に比較できるならば，$b=0=c=d$ とおかれると，命題 5 により求積されるであろう。しかし，もしそうでなければ，命題 9 の系 2 により，その縦線が $\dfrac{a}{\eta}x^{\frac{\theta-\eta}{\eta}}\times(e+fx+gxx+\cdots)^{\lambda-1}$ であるものに等しい別の曲線に変換されるであろう。次に，もしベキの指数 $\dfrac{\theta-\eta}{\eta}$ および $\lambda-1$ から，それらが可能な限り小さくなるまで，(命題 7 により) 単位が捨てられるならば，ついにはこの方法によって得ることができる最も単純な図形に行きつくであろう。それから，命題 9 の
375 系 5 により，これらの各々はときにはより単純である別のものを与える。そして，これらが互いに比較されると，命題 3 および命題 9 の系 9 と 10 により，いつかは一層単純な図形が現れる。最後に，逆に戻れば，得られた最も単純な図形から求める面積が計算されるであろう。［縦線が $az^{\theta-1}\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots)^{\lambda-1}$ である曲線が決定されるであろう。］

場合 3

縦線を $z^{\theta-1}\times(a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\cdots)\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots)^{\lambda-1}$ としよう。この図形は，もし求積できるならば，命題 5 により求積されるであろう。しかし，もしそうでなければ，縦線は $z^{\theta-1}\times a\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots)^{\lambda-1}$，$z^{\theta-1}\times bz^{\eta}\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots)^{\lambda-1}$ などの部分に分

離されなければならず，場合 2 により，それらに対応している部分が比較できるような図形のうちで最も単純な図形を見出さなければならない。

なぜならば，図形の面積はそれらに対応する部分を符号 $+$ および $-$ で結合することによって求める全体の面積がつくられるからである。

場合 4

縦線を $z^{\theta-1}\times(a+bz^{\eta}+cz^{2\eta}+\cdots)\times(e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}+\cdots)^{\lambda-1}\times(k+lz^{\eta}+mz^{2\eta}+\cdots)^{\mu-1}$ とすると，もし曲線が求積できるならば，命題 6 により求積されるであろう。しかし，もしそうでなければ，命題 9 の系 4 によって，より単純なものに変換され，それから，命題 8 および命題 9 の系 6，9 および 10 により，場合 2 および 3 でなされたように，最も単純な図形と比較されるであろう。

場合 5 376

もし縦線がいろいろな部分からなるならば，各々の部分は同数の曲線の縦線とみなされなければならず，求積できる個数のそれらの曲線は別々に求積されて，それらの縦線が全体の縦線から取り去られる。次いで，縦線の残された部分が表す曲線は，(場合 2，3 および 4 におけるように) 比較できる最も単純な曲線と別々に比較されるであろう。そして，それらの面積全体の和は提示された曲線の面積とみなされなければならない。

系 1

このため，さらに，その縦線が方程式の複合平方根 (radix quadratica affecta) である各々の曲線は最も単純な曲線，それが真っ直ぐでも曲っていても，と比較することができる。なぜならば，別々に考えられている，いつも 2 つの部分からなるその根は方程式の複合根ではないからである。

方程式 $a^2y^2+z^2y^2=2a^3y+2z^3y-z^4$ が提示されると，引き出された根は $y=\dfrac{a^3+z^3+a\sqrt{a^4+2az^3-z^4}}{aa+zz}$ であろう。その有理［量の］部分 $\dfrac{a^3+z^3}{aa+zz}$ および無理［量の］部分 $\dfrac{a\sqrt{a^4+2az^3-z^4}}{aa+zz}$ は，この命題により，求積することができるか，あるいは幾何学的な比較が許容される最も単純な図形と比較されるような，曲線の縦線である。

系 2

そして，その縦線が，命題 9 の系 7 により，非複合方程式に変化するような任意の複合方程式によって定められる各々の曲線は，もしそれが求積できるならばこの命題によって求積されるか，あるいは比較することができる最も単純な図形と比較されるであろう。そして，この方法によって，その方程式が 3 項からなる各々の曲線は求積される。なぜならば，その方程式は，もし複合していれば命題 9 の系 7 によって複合していないものに変えられ，それから命題 9 の系 2 および 5 により最も単純なものに変化されると，もしそれが求積できるならば図形の求積を，あるいはそれと比較できる最も単純な曲線を与えるからである。

系 3

そして，その縦線が，命題 9 の系 8 によって，複合 2 次方程式に変化するような任意の複合方程式によって定められる各々の曲線は，もしそれが求積できるならばこの命題およびその系 1 により 377
求積されるか，あるいは幾何学的な比較が許容される最も単純な曲線と比較される。

注解

図形が求積されなければならないとき，つねにこれらの一般的な規則に戻ることはとても面倒であろう。より単純でより有用な図形を 1 度求積し，それらの求積［されたもの］を表として記録しておくことはよりよいことである。すると，この種のある曲線を求積しなければならないときはいつでもこの表を調べることができる。そして，次の 2 つの表はそのようなもので，そこでは z は底線を表し，y は直角をなす縦線を，t は求積されるべき曲線の面積を表し，d，e，f，g，h，η は，その符号が $+$ および $-$ である，与えられた量である。

求積することができるより単純な種類の曲線の表			
曲線の型			面積の値
I		$dz^{\eta-1}=y$	$\dfrac{d}{\eta}\,z^{\eta}=t$
II		$\dfrac{dz^{\eta-1}}{e^2+2efz^{\eta}+f^2z^{2\eta}}=y$	$\dfrac{dz^{\eta}}{\eta e^2+\eta efz^{\eta}}=t$ あるいは $\dfrac{-d}{\eta ef+\eta f^2z^{\eta}}=t$
III	1	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\dfrac{2d}{3\eta f}\,R^3=t$　ここに $R=\sqrt{e+fz^{\eta}}$
	2	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\dfrac{-4e+6fz^{\eta}}{15\eta f^2}\,dR^3=t$
	3	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\dfrac{16e^2-24efz^{\eta}+30f^2z^{2\eta}}{105\eta f^3}\,dR^3=t$
	4	$dz^{4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$\dfrac{-96e^3+144e^2fz^{\eta}-180ef^2z^{2\eta}+210f^3z^{3\eta}}{945\eta f^4}\,dR^3=t$
IV	1	$\dfrac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{2d}{\eta f}\,R=t$
	2	$\dfrac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{-4e+2fz^{\eta}}{3\eta f^2}\,dR=t$
	3	$\dfrac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{16e^2-8efz^{\eta}+6f^2z^{2\eta}}{15\eta f^3}\,dR=t$
	4	$\dfrac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{-96e^3+48e^2fz^{\eta}-36ef^2z^{2\eta}+30f^3z^{3\eta}}{105\eta f^4}\,dR=t$

楕円および双曲線と比較できるより単純な曲線の表

いま，aGD あるいは PGD あるいは GDS を，その面積が提示された曲線の求積の際に必要とされる，円錐曲線とし，その中心を A，軸を Ka，頂点を a，共役な半軸 (semiaxis conjugatus) を AP，その底線の与えられた始点 (principium) を A あるいは a あるいは α，底線を AB あるいは aB あるいは $\alpha B=x$，［直角をなす］縦線を $BD=v$ とし，αG が点 α における縦線であるような面積を $ABDP$ あるいは $aBDG$ あるいは $\alpha BDG=s$ としよう。KD，AD，aD が結ばれ，接線 DT が底線 AB と T で交わるように引かれ，平行四辺形 $ABDO$ がつくられる。そして，もし提示された曲線の求積に 2 つの円錐曲線の面積が必要なときには，後者の底線を ξ，縦線を Υ，面積を σ と呼ぼう。［さらに，$\div$ を 2 つの量の差とし，それが不確かなときには，後者を前者からあるいは前者を後者から取り去らなければならないとしよう。そして，第 6 型においては，$\sqrt{ff-4eg}$ の代わりに p と書かれる。］

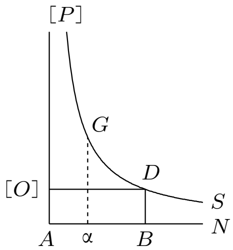


図 1

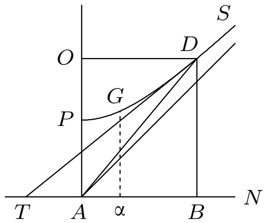


図 2

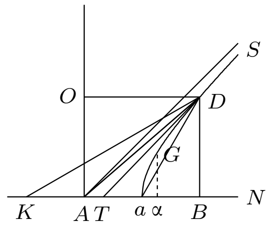


図 3

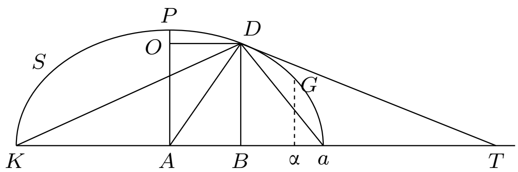


図 4

型		曲線 円錐曲線の底線	面積の値 円錐曲線の縦線
I	1	$\dfrac{dz^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\dfrac{1}{\eta}\,s=t=\dfrac{\alpha GDB}{\eta}$ (図 1)
		$z^{\eta}=x$	$\dfrac{d}{e+fx}=v$
	2	$\dfrac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\dfrac{d}{\eta f}\,z^{\eta}-\dfrac{e}{\eta f}\,s=t$
		$z^{\eta}=x$	$\dfrac{d}{e+fx}=v$
	3	$\dfrac{dz^{3\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\dfrac{d}{2\eta f}\,z^{2\eta}-\dfrac{de}{\eta f^2}\,z^{\eta}+\dfrac{e^2}{\eta f^2}\,s=t$
		$z^{\eta}=x$	$\dfrac{d}{e+fx}=v$
II	1	$\dfrac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\dfrac{2xv\div 4s}{\eta}=t=\dfrac{4}{\eta}\,ADGa$ (図 3，4)
		$\sqrt{\dfrac{d}{e+fz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\dfrac{d}{f}-\dfrac{e}{f}\,x^2}=v$
	2	$\dfrac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\dfrac{2de}{\eta f}\,z^{\frac{1}{2}\eta}+\dfrac{4es-2exv}{\eta f}=t$
		$\sqrt{\dfrac{d}{e+fz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\dfrac{d}{f}-\dfrac{e}{f}\,x^2}=v$
	3	$\dfrac{dz^{\frac{5}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}}=y$	$\dfrac{2de}{3\eta f}\,z^{\frac{3}{2}\eta}-\dfrac{2de^2}{\eta f^2}\,z^{\frac{1}{2}\eta}+\dfrac{2e^2xv-4e^2s}{\eta f^2}=t$
		$\sqrt{\dfrac{d}{e+fz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\dfrac{d}{f}-\dfrac{e}{f}x^2}=v$

型		曲線 円錐曲線の底線	面積の値 円錐曲線の縦線
III	1	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fx^{\eta}}=y$	$\frac{4de}{\eta f}\times\overline{\frac{v^3}{2ex}}-s=t=\frac{4de}{\eta f}$ in $aGDT$, あるいは in $APDB\div TDB$　(図 2，3，4)
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$
		あるいは,	$\frac{8de^2}{\eta f^2}\times\overline{s-\frac{1}{2}xv-\frac{fv}{4e}+\frac{f^2v}{4e^2x}}=t$ $=\frac{8de^2}{\eta f^2}$ in $aGDA+\frac{f^2v}{4e^2x}$　(図 3，4)
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$
	2	$\frac{d}{z^{\eta+1}}\sqrt{e+fx^{\eta}}=y$	$\frac{-2d}{\eta}s=t=\frac{2d}{\eta}APDB$ あるいは $\frac{2d}{\eta}aGDB$　(図 2，3，4)
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$
		あるいは,	$\frac{4de}{\eta f}\times\overline{s-\frac{1}{2}xv-\frac{fv}{2e}}=t=\frac{4de}{\eta f}\times aGDK$　(図 3，4)
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$
	3	$\frac{d}{z^{2\eta+1}}\sqrt{e+fx^{\eta}}=y$	$\frac{-d}{\eta}s=t=\frac{d}{\eta}\times -aGDB$ あるいは $BDPK$　(図 4)
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$
	4	$\frac{d}{z^{3\eta+1}}\sqrt{e+fx^{\eta}}=y$	$\frac{3dfs-2dv^3}{6\eta e}=t$
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$
IV	1	$\frac{d}{z\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{4d}{\eta f}\times\overline{\frac{1}{2}xv\div s}=t=\frac{4d}{\eta f}$ in PAD あるいは in $aGDA$　(図 2，3，4)
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$
		あるいは,	$\frac{8de}{\eta f^2}\times\overline{s-\frac{1}{2}xv-\frac{fv}{4e}}=t=\frac{8de}{\eta f^2}$ in $aGDA$　(図 3，4)
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$

型		曲線	面積の値
		円錐曲線の底線	円錐曲線の縦線
IV	2	$\frac{d}{z^{\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{2d}{\eta e}\times\overline{s-xv}=t=\frac{2d}{\eta e}$ in POD あるいは in $AODGa$　（図 2，3，4）
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x^2$	$\sqrt{f+ex^2}=v$
		あるいは,	$\frac{4d}{\eta f}\times\overline{\frac{1}{2}xv\div s}=t=\frac{4d}{\eta f}$ in $aGDA$　（図 3，4）
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$
	3	$\frac{d}{z^{2\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{d}{\eta e}\times\overline{3s\div 2xv}=t$ $=\frac{d}{\eta e}$ in $3aDGA\div\triangle aDB$　（図 3，4）
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$
	4	$\frac{d}{z^{3\eta+1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{10dfxv-15dfs-2dex^2v}{6\eta e^2}=t$
		$\frac{1}{z^{\eta}}=x$	$\sqrt{fx+ex^2}=v$
V	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$\frac{xv-2s}{\eta}=t$
		$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{g}+\frac{f^2-4eg}{4g^2}x^2}=v$
		あるいは,	$\frac{2s-xv}{\eta}=t$
		$\sqrt{\frac{dz^{2\eta}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{e}+\frac{f^2-4eg}{4e^2}x^2}=v$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$\frac{d\sigma+2fs-fxv}{2\eta g}=t$
		$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\frac{d}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=x\\ fz^{\eta}+gz^{2\eta}=\xi\end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\frac{d}{g}+\frac{f^2-4eg}{4g^2}x^2}=v\\ \frac{1}{e+\xi}=\Upsilon\end{array}\right\}$
VI	1	$\frac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$\frac{2xv-4s-2\xi\Upsilon+4\sigma}{\eta p}=t$
		$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\frac{2dg}{f-p+2gz^{\eta}}}=x\\ \sqrt{\frac{2dg}{f+p+2gz^{\eta}}}=\xi\end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{l}\sqrt{d+\frac{-f+p}{2g}x^2}=v\\ \sqrt{d+\frac{-f-p}{2g}\xi^2}=\Upsilon\end{array}\right\}$

型		曲線	面積の値
		円錐曲線の底線	円錐曲線の縦線
VI	2	$\dfrac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}=y$	$\dfrac{4s-2xv-4\sigma+2\xi\Upsilon}{\eta p}=t$
		$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{2dez^\eta}{fz^\eta-pz^\eta+2e}}=x\\ \sqrt{\dfrac{2dez^\eta}{fz^\eta+pz^\eta+2e}}=\xi\end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{l}\sqrt{d+\dfrac{-f+p}{2e}x^2}=v\\ \sqrt{d+\dfrac{-f-p}{2e}\xi^2}=\Upsilon\end{array}\right\}$
VII	1	$\dfrac{d}{z}\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}=y$	$\dfrac{4de^2\xi\Upsilon+2def\Upsilon-2dfgxv+4degv-2df^2v-8de^2\sigma+4dfgs}{4\eta eg-\eta f^2}=t$
		$\left\{\begin{array}{l}z^\eta=x\\ \dfrac{1}{z^\eta}=\xi\end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{l}\sqrt{e+fx+gx^2}=v\\ \sqrt{g+f\xi+e\xi^2}=\Upsilon\end{array}\right\}$
	2	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}=y$	$\dfrac{d}{\eta}s=t=\dfrac{d}{\eta}\times\alpha GDB$ (図 2，3，4)
		$z^\eta=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$
	3	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}=y$	$\dfrac{d}{3\eta g}v^3-\dfrac{df}{2\eta g}s=t$
		$z^\eta=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$
	4	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}=y$	$\dfrac{6dgx-5df}{24\eta g^2}v^3+\dfrac{5df^2-4deg}{16\eta g^2}=t$
		$z^\eta=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$
VIII	1	$\dfrac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}}=y$	$\dfrac{8dgs-4dgxv-2dfv}{4\eta eg-\eta f^2}=t$ $=\dfrac{8dg}{4\eta eg-\eta f^2}$ in $\alpha GDB\pm\triangle DBA$ (図 2，4)
		$z^\eta=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$
	2	$\dfrac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}}=y$	$\dfrac{-4dfs+2dfxv+4dev}{4\eta eg-\eta f^2}=t$
		$z^\eta=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$
	3	$\dfrac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}}=y$	$\dfrac{(3df^2-4deg)s+(-2df^2+4deg)xv-2defv}{4\eta eg^2-\eta f^2g}=t$
		$z^\eta=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$
	4	$\dfrac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}}=y$	$\dfrac{\begin{matrix}36defg\\-15df^3\end{matrix}\,s\;\begin{matrix}+8deg^2\\-2df^2g\end{matrix}\,x^2v\;\begin{matrix}+10df^3\\-28defg\end{matrix}\,xv\;\begin{matrix}+10def^2\\-16de^2g\end{matrix}\,v}{24\eta eg^3-6\eta f^2g^2}=t$
		$z^\eta=x$	$\sqrt{e+fx+gx^2}=v$

型		曲線	面積の値
		円錐曲線の底線	円錐曲線の縦線
IX	1	$\dfrac{dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}}=y$	$\dfrac{(4fg-4eh)s+(-2fg+2eh)xv+2df\,\frac{v}{x}}{\eta fh}=t$
		$\sqrt{\dfrac{d}{g+hz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\dfrac{df}{h}+\dfrac{eh-fg}{h}\,x^2}=v$
	2	$\dfrac{dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}}=y$	$\dfrac{(4egh-4fg^2)s+(-2egh+2fg^2)xv+\frac{2}{3}\,dh\,\frac{v^3}{x^3}-2dfg\,\frac{v}{x}}{\eta fh^2}=t$
		$\sqrt{\dfrac{d}{g+hz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\dfrac{df}{h}+\dfrac{eh-fg}{h}\,x^2}=v$
X	1	$\dfrac{dz^{\eta-1}}{(g+hz^{\eta})\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{2xv-4s}{\eta f}=t=\dfrac{4}{\eta f}\,ADGa$　(図 3，4)
		$\sqrt{\dfrac{d}{g+hz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\dfrac{df}{h}+\dfrac{eh-fg}{h}\,x^2}=v$
	2	$\dfrac{dz^{2\eta-1}}{(g+hz^{\eta})\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{4gs-2gxv+2d\,\frac{v}{x}}{\eta fh}=t$
		$\sqrt{\dfrac{d}{g+hz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\dfrac{df}{h}+\dfrac{eh-fg}{h}\,x^2}=v$
XI	1	$dz^{-1}\sqrt{\dfrac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{dxv^3z^{-\eta}-4dfs-4de\sigma}{\eta fg-\eta eh}=t$
		$\begin{cases}\sqrt{g+hz^{\eta}}=x\\ \sqrt{h+gz^{-\eta}}=\xi\end{cases}$	$\left.\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{eh-fg}{h}+\dfrac{f}{h}\,x^2}=v\\ \sqrt{\dfrac{fg-eh}{g}+\dfrac{e}{g}\,\xi^2}=\Upsilon\end{array}\right\}$
	2	$dz^{\eta-1}\sqrt{\dfrac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{2d}{\eta h}\,s=t$
		$\sqrt{g+hz^{\eta}}=x$	$\sqrt{\dfrac{eh-fg}{h}+\dfrac{f}{h}\,x^2}=v$
	3	$dz^{2\eta-1}\sqrt{\dfrac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}}=y$	$\dfrac{dhxv^3+(-3dfg-deh)s}{2\eta fh^2}=t$
		$\sqrt{g+hz^{\eta}}=x$	$\sqrt{\dfrac{eh-fg}{h}+\dfrac{f}{h}\,x^2}=v$

これらの表において，それぞれの型の曲線の系列は両方の方向に無限に延長することができる。 379
すなわち，はじめの表において，第 3 および第 4 の型の面積の分子では最初の項の係数 (2，-4，16，-96，768，$\cdots$) は連続的に数 -2，-4，-6，-8，-10，$\cdots$ を互いに掛けることで得られ，引き続く項の係数は最初の項の係数から，第 3 の型では $-\dfrac{3}{2}$，$-\dfrac{5}{4}$，$-\dfrac{7}{6}$，$-\dfrac{9}{8}$，$-\dfrac{11}{10}$，$\cdots$ を，第 4 の型では $-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{3}{4}$，$-\dfrac{5}{6}$，$-\dfrac{7}{8}$，$-\dfrac{9}{10}$，$\cdots$ を 1 つずつ掛けていくことで導かれる。そして，分母の係数 3，15，105，$\cdots$ は連続的に数 1，3，5，7，9，$\cdots$ を互いに掛けるこ

とで得られる。

一方，第 2 の表において，第 1，第 2，第 4，第 6，第 9 および第 10 の型の曲線の系列は除法によるだけで延長され，残りの型は命題 3 および 4 によって両方の方向に無限に延長される。

さらに，これらの系列は数 η の符号を替えることでたいていは違ったものになる。実際，例えば，曲線 $\dfrac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$ は $\dfrac{d}{z^{\frac{1}{2}\eta+1}}\sqrt{f+ez^{\eta}}=y$ となる。

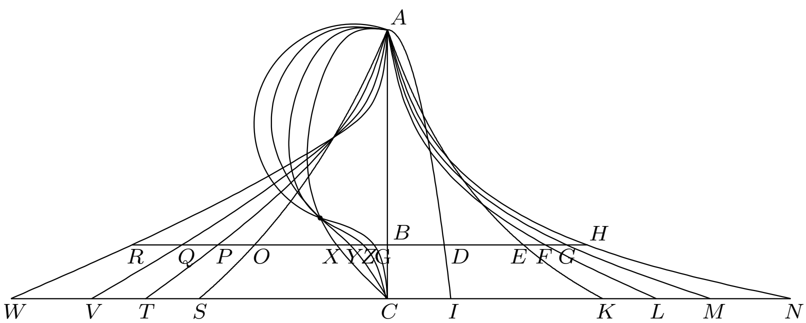
第 1 の表の第 3 型における分子の係数に関する記述は次のことをいっている。

$$
\begin{tikzcd}
+2 \arrow[r, "\times -2"] & -4 \arrow[r, "\times -4"] \arrow[d, "\times -\frac{3}{2}"] & +16 \arrow[r, "\times -6"] \arrow[d, "\times -\frac{3}{2}"] & -96 \arrow[r, "\times -8"] \arrow[d, "\times -\frac{3}{2}"] & +768 \arrow[r] \arrow[d, "\times -\frac{3}{2}"] & \cdots\cdots \\
 & +6 & -24 \arrow[d, "\times -\frac{5}{4}"] & +144 \arrow[d, "\times -\frac{5}{4}"] & -1152 \arrow[d, "\times -\frac{5}{4}"] & \cdots\cdots \\
 & & +30 & -180 \arrow[d, "\times -\frac{7}{6}"] & +1440 \arrow[d, "\times -\frac{7}{6}"] & \cdots\cdots \\
 & & & +210 & -1680 \arrow[d, "\times -\frac{9}{8}"] & \cdots\cdots \\
 & & & & +1890 & \cdots\cdots
\end{tikzcd}
$$

このようにして，(文字部分に気をつければ) 求積の結果を限りなく導き出せるというのである。

命題 11　定理 8

$ADIC$ を底線 $AB=z$ および縦線 $BD=y$ をもっている任意の曲線としよう。そして，$AEKC$ をその縦線 BE が前者［の曲線］の面積 ADB を単位で割ったものに等しい別の曲線，そして，$AFLC$ をその縦線 BF が第 2［の曲線］の面積 AEB を単位で割ったものに等しい第 3 の曲線，そ



して，$AGMC$ をその縦線 BG が第 3［の曲線］の面積 AFB を単位で割ったものに等しい第 4 の曲線，そして，$AHNC$ をその縦線 BH が第 4［の曲線］の面積 AGB を単位で割ったものに等しい第 5 の曲線とし，そのように無限に続くものとしよう。そして，A，B，C，D，E，$\cdots$ を縦線
380 y，zy，z^2y，z^3y，z^4y，$\cdots$ および共通の底線 z をもっている曲線の面積としよう。

任意の底線 $AC=t$ が与えられるとし，$BC=t-z=x$ として，P，Q，R，S，T を縦線 y，
381 xy，x^2y，x^3y，x^4y，$\cdots$ および共通の底線 x をもっている曲線の面積とする。

さらに，これらのすべての面積は与えられた底線 AC 全体，および位置において与えられ，しかも無限に伸ばされた縦線 CI に終るものとしよう。

すると，はじめにおかれた面積について

最初は $ADIC = A = P$

第 2 は $AEKC = tA - B = Q$

第 3 は $AFLC = \dfrac{t^2A - 2tB + C}{2} = \dfrac{1}{2}\,R$

第 4 は $AGMC = \dfrac{t^3A - 3t^2B + 3tC - D}{6} = \dfrac{1}{6}\,S$

第 5 は $AHNC = \dfrac{t^4A - 4t^3B + 6t^2C - 4tD + E}{24} = \dfrac{1}{24}\,T$

であろう。

系 382

それゆえ，もし縦線が y，zy，z^2y，z^3y，$\cdots$ あるいは y，xy，x^2y，x^3y，$\cdots$ である曲線が求 383
積できるならば，曲線の面積 $ADIC$，$AEKC$，$AFLC$，$AGMC$，$\cdots$ もまた求積されるであろうし，曲線の面積に比例する縦線 BE，BF，BG，BH，$\cdots$ をもつであろう。

ここでは，次のような曲線の無限列を考える。すなわち，まず，任意の $y = f(z) = f_0(z)$ が与えられたとして，

$f_{n+1}(z) = \displaystyle\int_0^z f_n(z)\,dz \ (n \geqq 0)$ で定められる

$f_0(z)$ ［ADI］，$f_1(z)$ ［AEK］，$f_2(z)$ ［AFL］，$\cdots$

をつくる。［文言通りなら，$f_{n+1}(z) = \displaystyle\int_0^z f_n(z)\,dz \div 1$ である。］

次に，無限列 $\{A_n\}$，$\{P_n\}$ を

$A_n = \displaystyle\int_0^t z^n f(z)\,dz \ (n \geqq 0)$ で定められる A_0，A_1，A_2，$\cdots$

$P_n = \displaystyle\int_0^t (t-z)^n f(z)\,dz \ (n \geqq 0)$ で定められる P_0，P_1，P_2，$\cdots$

とする。

そうすると，

$$\int_0^t f_0(z)\,dz = A_0 = P_0,$$

$$\int_0^t f_n(z)\,dz = \frac{\sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r(-1)^r t^{n-r} A_r}{n\,!} = \frac{P_n}{n\,!} \qquad (n \geqq 1)$$

が成り立つという。

$f(z) = f_0(z) = z + 2$ という具体例で確かめてみると $\cdots\cdots$

$$f_1(z) = \int_0^z (z+2)\,dz = \frac{1}{2}\,z^2 + 2z,$$

$$f_2(z) = \int_0^z \left(\frac{1}{2}\,z^2 + 2z\right) dz = \frac{1}{6}\,z^3 + z^2,$$

$$f_3(z) = \int_0^z \left(\frac{1}{6}\,z^3 + z^2\right) dz = \frac{1}{24}\,z^4 + \frac{1}{3}\,z^3,$$

$$f_4(z) = \int_0^z \left(\frac{1}{24}\,z^4 + \frac{1}{3}\,z^3\right) dz = \frac{1}{120}\,z^5 + \frac{1}{12}\,z^4,$$

$$f_5(z) = \int_0^z \left(\frac{1}{120}\,z^5 + \frac{1}{12}\,z^4\right) dz = \frac{1}{720}\,z^6 + \frac{1}{60}\,z^5,$$

$\cdots\cdots$

$$A_0 = \int_0^t (z+2)\,dz = \frac{1}{2}\,t^2 + 2t,$$

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^t z(z+2)\,dz = \frac{1}{3}\,t^3 + t^2,\\
A_2 &= \int_0^t z^2(z+2)\,dz = \frac{1}{4}\,t^4 + \frac{2}{3}\,t^3,\\
A_3 &= \int_0^t z^3(z+2)\,dz = \frac{1}{5}\,t^5 + \frac{1}{2}\,t^4,\\
A_4 &= \int_0^t z^4(z+2)\,dz = \frac{1}{6}\,t^6 + \frac{2}{5}\,t^5,\\
A_5 &= \int_0^t z^5(z+2)\,dz = \frac{1}{7}\,t^7 + \frac{1}{3}\,t^6,\\
&\cdots\cdots\\
P_0 &= \int_0^t (z+2)\,dz = \frac{1}{2}\,t^2 + 2t,\\
P_1 &= \int_0^t (t-z)(z+2)\,dz = \frac{1}{6}\,t^3 + t^2,\\
P_2 &= \int_0^t (t-z)^2(z+2)\,dz = \frac{1}{12}\,t^4 + \frac{2}{3}\,t^3,\\
P_3 &= \int_0^t (t-z)^3(z+2)\,dz = \frac{1}{20}\,t^5 + \frac{1}{2}\,t^4,\\
P_4 &= \int_0^t (t-z)^4(z+2)\,dz = \frac{1}{30}\,t^6 + \frac{2}{5}\,t^4,\\
P_5 &= \int_0^t (t-z)^5(z+2)\,dz = \frac{1}{42}\,t^7 + \frac{1}{3}\,t^6,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

であるから，［$n=0$ の場合は明らかだから省略して］

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \left(\frac{1}{2}\,z^2 + 2z\right) dz = \frac{1}{6}\,t^3 + t^2 = tA_0 - A_1 = P_1\\
&\int_0^t \left(\frac{1}{6}\,z^3 + z^2\right) dz = \frac{1}{24}\,t^4 + \frac{1}{3}\,t^3 = \frac{1}{2}(t^2A_0 - 2tA_1 + A_2) = \frac{1}{2}\,P_2\\
&\int_0^t \left(\frac{1}{24}\,z^4 + \frac{1}{3}\,z^3\right) dz = \frac{1}{120}\,t^5 + \frac{1}{12}\,t^4 = \frac{1}{6}(t^3A_0 - 3t^2A_1 + 3tA_2 - A_3) = \frac{1}{6}\,P_3\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

となる。

従って，$\{A_n\}$ あるいは $\{P_n\}$ が求積できれば，$f_n(z)$ も求積できることになる。

384 **注解**

流量の流率には第 1，第 2，第 3，第 4，などのものがあることが上で述べられた。それらの流率は収束する無限級数の項に比例する。

例えば，もし z^η を流量とし，それが流れることで $(z+o)^\eta$ になり，次いで，収束する級数 $z^\eta + \eta o z^{\eta-1} + \dfrac{\eta\eta - \eta}{2}\,ooz^{\eta-2} + \dfrac{\eta^3 - 3\eta\eta + 2\eta}{6}\,o^3z^{\eta-3} + \cdots$ に展開されるならば，この級数の最初の項 z^η は流量であろうし，第 2 の［項］$\eta o z^{\eta-1}$ はその最初の増加あるいは最初の差であって，生まれつつあるこれに比例するものはその最初の流率であろうし，第 3 の［項］$\dfrac{\eta\eta-\eta}{2}\,ooz^{\eta-2}$ はその第 2 の増加あるいは第 2 の差であって，生まれつつあるこれに比例するものはその第 2 の流率であろうし，第 4 の［項］$\dfrac{\eta^3 - 3\eta\eta + 2\eta}{6}\,o^3z^{\eta-3}$ はその第 3 の増加あるいは第 3 の差であって，生まれつつあるこれに比例するものはその第 3 の流率であろう。そして，無限にそうである。

しかし，これらの流率は曲線の縦線 BD，BE，BF，BG，BH，$\cdots$ によって表すことができる。(196 ページの図を見よ。)

例えば，もし縦線 $BE\left(=\dfrac{ADB}{1}\right)$ が流量ならば，その最初の流率は縦線 BD に比例するであろう。

もし $BF\left(=\dfrac{AEB}{1}\right)$ が流量ならば，その最初の流率は縦線 BE に比例し，その第 2 の流率は縦線 BD に比例するであろう。

もし $BH\left(=\dfrac{AGB}{1}\right)$ が流量ならば，その最初の，第 2 の，第 3 のそして第 4 の流率はそれぞれ縦線 BG，BF，BE，BD に比例するであろう。

そして，それゆえ，2 つだけの未知量を含む方程式において，一方が一様に流れる量であり，他方がどのようなものであれ別の流量の流率であれば，その他方の流量は曲線の求積によって見出すことができる。なぜならば，その流率が縦線 BD によって表されると，もしそれが最初の流率ならば面積 $ADB = BE \times 1$ が探し出され，もし第 2 の流率ならば面積 $AEB = BF \times 1$ が探し出され，もし第 3 の流率ならば面積 $AFB = BG \times 1$ が探し出されるなどして，見出された面積は求め 385
る流量の指数であろうためである。

しかし，ある流量とその最初の流率を含み別の流量を含まない，あるいはある同じ流量の 2 つの流率，［例えば,］最初のと第 2 の，第 2 のと第 3 の，第 3 のと第 4 のなど，を含みそのいずれの流量も含まない，方程式においては，曲線の求積によって流量を見出すことができる。方程式を $aa\dot{v} = av + vv$ とすると，$v = BE$，$\dot{v} = BD$，$z = AB$ および $\dot{z} = 1$ であり，その流率の次元をそろえると，その方程式は $aa\dot{v} = av\dot{z} + vv\dot{z}$，あるいは $\dfrac{aa\dot{v}}{av + vv} = \dot{z}$ となるであろう。

いま，v が一様に流れ，その流率が $\dot{v} = 1$ であるとすると，$\dfrac{aa}{av + vv} = \dot{z}$ であろうし，その縦線が $\dfrac{aa}{av + vv}$ で底線が v である曲線が求積されると，流量 z が得られるであろう。さらに，方程式を $aa\ddot{v} = a\dot{v} + \dot{v}\dot{v}$ とすると，$v = BF$，$\dot{v} = BE$，$\ddot{v} = BD$，$z = AB$ であり，$\ddot{v}$ および $\dot{v}$，あるいは BD と BE，の間の関係によって，上の例のように，AB および BE の間の関係が見出されるであろう。それゆえ，この関係によって，曲線 AEB が求積されることによって AB および BF の間の関係が見出されるであろう。

3 つの未知量を含む方程式は 2 つだけを含む方程式に還元できるときがあり，その場合には流量は，上のように，それらの流率から見出されるであろう。方程式を $a - bx^m = cxy^{\eta}\dot{y} + dy^{2\eta}\dot{y}\dot{y}$ とすると，$y^{\eta}\dot{y} = \dot{v}$ とおかれると，$a - bx^m = cx\dot{v} + d\dot{v}\dot{v}$ であろう。その底線が x で縦線が $\dot{v}$ である曲線が求積されると，この方程式は面積 v を与え，もう 1 つの方程式 $y^{\eta}\dot{y} = \dot{v}$ は，流量に戻されると，$\dfrac{1}{\eta + 1}\,y^{\eta+1} = v$ を与える。これから，流量 y が得られる。

さらに，3 つの未知量を含み，2 つだけを含む方程式に還元できない方程式において，流量は曲線の求積によって生じることがある。方程式を $(ax^m + bx^{\eta})^p = rex^{r-1}y^s + sex^r\dot{y}y^{s-1} - f\dot{y}y^t$ とし，$\dot{x} = 1$ とすると，後ろの部分［右辺］$rex^{r-1}y^s + sex^r\dot{y}y^{s-1} - f\dot{y}y^t$ は，流量に戻されると，$ex^ry^s - \dfrac{f}{t+1}\,y^{t+1}$ になり，それゆえ，これは底線が x で縦線が $(ax^m + bx^{\eta})^p$ である曲線の面積に比例し，これから流量 y が与えられる。

方程式を $\dot{x} \times (ax^m + bx^n)^p = \dfrac{d\dot{y}y^{\eta-1}}{\sqrt{e + fy^{\eta}}}$ としよう。すると，その流率が $\dot{x} \times (am^m + bx^n)^p$ 386
である流量はその底線が x で縦線が $(ax^m + bx^n)^p$ である曲線の面積に比例するであろう。同じく，その流率が $\dfrac{d\dot{y}y^{\eta-1}}{\sqrt{e + fy^{\eta}}}$ である流量はその底線が y で縦線が $\dfrac{dy^{\eta-1}}{\sqrt{e + fy^{\eta}}}$ である曲線の面

積，すなわち (表 1 の第 1 型の場合 1 により) 面積 $\dfrac{2d}{\eta f}\sqrt{e+fy^{\eta}}$ に比例するであろう。ゆえに，$\dfrac{2d}{\eta f}\sqrt{e+fy^{\eta}}$ をその底線が x で縦線が $(ax^m+bx^n)^p$ である曲線の面積に等しいとおけば，流量 y が得られるであろう。

そして，最初の流率から得られるすべての流量は流量ではない任意の量によって増加あるいは減少させることができ，第 2 の流率から得られるものはその第 2 の流率が零であるような任意の量によって増加あるいは減少させることができ，第 3 の流率から得られるものはその第 3 の流率が零であるような任意の量によって増加あるいは減少させることができ，そして無限にそうである，ことに注意せよ。

流量が流率から得られた後で，もし結論の正しさが疑われるのであれば，逆に，見出された流量の流率が得られなければならず，そして，それが最初に提示された流率と比較されなければならない。なぜならば，もしそれらが等しくなれば，結論は正しく，しかし，もしそうでなければ，その流率が最初に提示された流率と等しくなるように，流量が修正されなければならないからである。すなわち，流量は随意に仮定することができて，仮定された流量の流率が提示された流率と等しいとおかれ，対応する項を互いに比較することによって，仮定が修正される。

そして，これらの原理によって道はより大きく拓かれる。

前の書簡

『全集』第 4 巻 pp.524–532

ニュートンは 1676 年に，オルデンバーグ (Henry Oldenburg : 1618?–1677) を介して，ライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz : 1646–1716) に流率法に関連する書簡を 2 通出している。
ここに訳出したものは，1676 年 6 月 13 日付けのオルデンバーグ宛の第 1 の書簡で「前の書簡」(Epistola Prior) といわれるもの。もう 1 通は 1676 年 10 月 24 日付けで「後の書簡」(Epistola Posterior) といわれている。これらに対してライプニッツはそれぞれ 1676 年 8 月 17 日付け，1677 年 6 月 21 日付けで，オルデンバーグ宛に返信を送っている。

なお，イギリスで新暦が採用されたのは 1752 年，フランスでは 1582 年であり［ライプニッツは 1672 年から 1676 年にかけてパリに滞在していた］，ドイツのカトリック諸都市では 1583 年から 1587 年にかけて［プロテスタント諸都市では 1700 年］であるから，ニュートンの書簡の日付は旧暦ということになろう。
イギリスにおいては 1700 年は閏年として扱っていたから，イギリスとフランス・ドイツとでは，1700 年以前は 10 日，1700 年 2 月 28 日以後は 11 日のずれがあり，例えば，イギリスでの 3 月 1 日は，フランス・ドイツでは 1700 年以前は 3 月 11 日，1700 年以後は 3 月 12 日になるとのことである（［12］I p.14)。

あなたが最近私に送ってくださった彼の手紙からの抜粋の中での，ライプニッツ氏の慎み深さ 524
が，たとえ，今から話を始めます，無限級数の何らかの理論 (speculatio) に関して私たちに多大な敬意を表しているといたしましても，それにもかかわらず，(彼が主張しますように) 確かに彼が，
どのような量であろうともそれをそのような種類の級数に還元する方法だけでなく，もしあなたが 525
改良していないのであれば，おそらくは私たちのものと類似しているさまざまな近道を発見したことを，私は疑いません。

しかし，彼がこのことについてイギリス人によって見出されたことを知りたいと強く望んでおり，そして，私自身は何年も前にこの理論に思い至っていましたから，少なくとも彼の願望の一部を何らかの仕方で満足させるような，私に起こったそれらのことの若干のものをあなたにお送りしました。

10 進数において通常行われているのと同じように文字 (species) における操作が行われることによって，分数は除法によって，そして根の量は根の開平によって，無限級数に還元されます。これらがそれらの還元の基本です。

しかし，根の開平はこの定理［いわゆる一般二項定理］

$$\overline{P+PQ}\Big|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \cdots$$

によって非常に簡略化されます。

ここに，$P+PQ$ は，その根あるいはその任意の次元［ベキ］あるいは次元の根［ベキ根］が求められるべき量を表します。P はその量の最初の項，Q は最初［の項］で割った残りの項です。そして，$\dfrac{m}{n}$ は $P+PQ$ そのものの次元の指数で，その次元は整数であったり，文字どおり，分数であったり，正であったり負であったりします。すなわち，解析において aa，aaa，$\cdots$ の代わりに a^2，a^3，$\cdots$ と通常書かれているのと同様に，私は，$\sqrt{a}$，$\sqrt{a^3}$，$\sqrt[3]{a^5}$，$\cdots$ の代わりに $a^{\frac{1}{2}}$，$a^{\frac{3}{2}}$，$a^{\frac{5}{3}}$，$\cdots$ と，$\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{aa}$，$\dfrac{1}{a^3}$ の代わりに a^{-1}，a^{-2}，a^{-3} と書きます。そして，$\dfrac{aa}{\sqrt[3]{a^3+bbx}}$ の代わりに $aa \times \left(a^3+bbx\right)^{-\frac{1}{3}}$ と書き，$\dfrac{aab}{\sqrt[3]{(a^3+bbx)\times(a^3+bbx)}}$ の代わりに $aab \times \left(a^3+bbx\right)^{-\frac{2}{3}}$ と書きます。最後の場合において，もし $\left(a^3+bbx\right)^{-\frac{2}{3}}$ が規則における $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$ であると考えられると，$P=a^3$，$Q=\dfrac{bbx}{a^3}$，$m=-2$，$n=3$ でしょう。最後に，操作の間に商の中に見出

された項の代わりに A，B，C，D，$\cdots$ を用います。すなわち，最初の項 $P^{\frac{m}{n}}$ の代わりに A を，第 2 の［項］$\dfrac{m}{n}AQ$ の代わりに B を［用い］，以下同様にです。

そして，この規則の使い方は［次の］例によって明らかになるでしょう。

例 1　$\sqrt{cc+xx}$ $\left(\text{あるいは}\,(cc+xx)^{\frac{1}{2}}\right) = c + \dfrac{xx}{2c} - \dfrac{x^4}{8c^3} + \dfrac{x^6}{16c^5} - \dfrac{5x^8}{128c^7} + \dfrac{7x^{10}}{256c^9} - \cdots$ です。なぜならば, この場合では, $P = cc$, $Q = \dfrac{xx}{cc}$, $m = 1$, $n = 2$ で, $A\left(= P^{\frac{m}{n}} = (cc)^{\frac{1}{2}}\right) = c$, $B\left(= \dfrac{m}{n}AQ\right) = \dfrac{xx}{2c}$，$C\left(= \dfrac{m-n}{2n}BQ\right) = -\dfrac{x^4}{8c^3}$ であって，以下同様だからです。

例 2　$\sqrt[5]{c^5+c^4x-x^5}$ $\left(\text{すなわち}\left(c^5+c^4x-x^5\right)^{\frac{1}{5}}\right) = c + \dfrac{c^4x-x^5}{5c^4} - \dfrac{2c^8xx+4c^4x^6-2x^{10}}{25c^9} + \cdots$ です。前述の規則において，m の代わりに 1 が，n の代わりに 5 が，P の代わりに c^5 が，そして Q の代わりに $\dfrac{c^4x-x^5}{c^5}$ が代入されることによって明らかになるでしょう。さらに，P の代わりに $-x^5$ を，Q の代わりに $\dfrac{c^4c+c^5}{-x^5}$ を代入することができて，こ

526 のときは $\sqrt[5]{c^5+c^4x-x^5} = -x + \dfrac{c^4x+c^5}{5x^4} + \dfrac{2c^8xx+4c^9x+c^{10}}{25x^9} + \cdots$ が現れるでしょう。x が非常に小さければ前の方法が，非常に大きければ後のものが選ばれるでしょう。

例 3　$\dfrac{N}{\sqrt[3]{y^3-a^2y}}$ $\left(\text{すなわち}\,N\times\left(y^3-a^2y\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$ $= N\times\left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{aa}{3y^3} + \dfrac{2a^4}{5y^5} + \dfrac{14a^6}{81y^7} + \cdots\right)$ です。なぜならば，$P = y^3$，$Q = -\dfrac{aa}{yy}$，$m = -1$，$n = 3$，$A\left(= P^{\frac{m}{n}} = y^{3\times-\frac{1}{3}}\right) = y^{-1}$ すなわち $\dfrac{1}{y}$，$B\left(= \dfrac{m}{n}\times AQ = -\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{y}\times-\dfrac{aa}{yy}\right) = \dfrac{aa}{3y^3}$，$\cdots$ だからです。

例 4　$d+e$ の平方の平方の立方根, すなわち $(d+e)^{\frac{4}{3}}$, は $d^{\frac{4}{3}} + \dfrac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3} + \dfrac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}} - \dfrac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}} + \cdots$ です。なぜならば，$P = d$，$Q = \dfrac{e}{d}$，$m = 4$，$n = 3$，$A\left(= P^{\frac{m}{n}}\right) = d^{\frac{4}{3}}$，$\cdots$ だからです。

例 5　同じ仕方で単純なものも見出すことができます。例えば，もし $d+e$ の平方の立方 $\Big($すなわち $(d+e)^5$，あるいは $(d+e)^{\frac{5}{1}}\Big)$ が知りたいのならば，規則に従うと，$P = d$，$Q = \dfrac{e}{d}$，$m = 5$，$n = 1$ でしょう。それゆえ，$A\left(= P^{\frac{m}{n}}\right) = d^5$，$B\left(= \dfrac{m}{n}AQ\right) = 5d^4e$ で，$C = 10d^3ee$，$D = 10dde^3$，$E = 5de^4$，$F = e^5$，そして $G\left(= \dfrac{m-5n}{6n}FQ\right) = 0$ です。すなわち，$(d+e)^5 = d^5 + 5d^4e + 10d^3ee + 10dde^3 + 5de^4 + e^5$ です。

例 6　さらに，除法，あるいは単純化，あるいは逆算も，同じ規則によってやり遂げられます。例えば，もし $\dfrac{1}{d+e}$ $\left(\text{すなわち}\,(d+e)^{-1}\text{，あるいは}\,(d+e)^{-\frac{1}{1}}\right)$ を単純な項の級数に展開したいのならば, 規則に従えば, $P = d$, $Q = \dfrac{e}{d}$, $m = -1$, $n = 1$ でしょうし, $A\left(= P^{\frac{m}{n}} = d^{\frac{-1}{1}}\right) = d^{-1}$ あるいは $\dfrac{1}{d}$，$B\left(= \dfrac{m}{n}\times AQ = -1\times\dfrac{1}{d}\times\dfrac{e}{d}\right) = -\dfrac{e}{dd}$，そして $C = \dfrac{ee}{d^3}$，$D = -\dfrac{e^3}{d^4}$，$\cdots$ でしょう。すなわち，$\dfrac{1}{d+e} = \dfrac{1}{d} - \dfrac{e}{dd} + \dfrac{ee}{d^3} - \dfrac{e^3}{d^4} + \cdots$ です。

例 7　そして，それゆえ，$(d+e)^{-3}$ は，すなわち単位を $d+e$ で 3 回，あるいはその立方で 1 回，割ったものは，$\dfrac{1}{d^3} - \dfrac{3e}{d^4} + \dfrac{6ee}{d^5} - \dfrac{10e^3}{d^6} + \cdots$ になります。

例 8　そして，$N\times(d+e)^{-\frac{1}{3}}$ は，すなわち N を $d+e$ の立方根で割ったものは，$N\times\left(\dfrac{1}{d^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{e}{3d^{\frac{4}{3}}}+\dfrac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}}-\dfrac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}}+\cdots\right)$ になります。

例 9　そして，$N\times(d+e)^{-\frac{3}{5}}$ は，すなわち N を $d+e$ の立方の，平方の立方根で割ったもの，あるいは $\dfrac{N}{\sqrt[5]{d^3+3dde+3dee+e^3}}$ は，$N\times\left(\dfrac{1}{d^{\frac{3}{5}}}-\dfrac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}}+\dfrac{12ee}{25d^{\frac{13}{5}}}-\dfrac{52e^3}{125d^{\frac{18}{5}}}+\cdots\right)$ になります。

同じ規則によって，ベキの生成，ベキによるまたは根の量による除法，そして数においてより高い根の開平も適切に決定されます。

文字についての複合方程式の根の開平は数におけるこれらの開平が模倣されます。しかし，ヴィ 527
エート (François Viète : 1540–1603) やオートレッド (William Oughtred : 1574 - 1660) の方法は私たちのこの作業にはあまり適していません。そのため，別のことを考えるよう強いられました。〔その仕方は繰り返されないから，「解析について」などを見よ。(*1)〕

［ここから補足部分］次の表はその仕方 (specimen) を表しています。ここで，右側の列［の式］は，左側の列に書かれた p，q，r，$\cdots$ の値が中央の列［にある式］に代入されることによって生じます。

前の表はこの数値［係数の］方程式 $y^3-2y-5=0$ の解法を表しています。そして，この一番上の行で根の負の部分の数を正の部分から取り去れば，完全な根 2.09455148 が残ります。

そして，後の表はこの文字［係数の］方程式 $y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0$ の解法を表しています。

$y^3-2y-5=0$		$+2.10000000\cdots$ -0.00544852 $2.09455148\cdots=y$
$+2+p=y$	$+y^3$	$+8\quad +12p\quad +6pp\quad +p^3$
	$-2y$	$-4\quad -2p$
	-5	-5
	和	$-1\quad +10p\quad +6pp\quad +p^3$
$+0.1+q=p$	$+p^3$	$+0.001\quad +0.03q\quad +0.3qq\quad +q^3$
	$+6pp$	$+0.06\quad +1.2\quad +6$
	$+10p$	$+1\quad +10$
	-1	-1
	和	$+0.061\quad +11.23q\quad +6.3qq\quad +q^3$
$-0.0054+r=q$	$+q^3$	$-0.0000001\quad +0.000r\quad \cdots$
	$+6.3qq$	$+0.0001837\quad -0.068$
	$+11.23q$	$-0.060642\quad +11.23$
	$+0.061$	$+0.061$
	和	$+0.0005416\quad +11.162r$
$-0.00004852+s=r$		

(*1) として，『全集』では方程式の解法に関する部分が省略されている。ここでは，『書簡集』によってその部分を補うことにする。

$y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0 \quad \Big(a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}+\frac{131x^3}{512aa}+\frac{509x^4}{16384a^3}\cdots[=y]$		
$+a+p=y$	y^3	$a^3+3aap+3app+p^3$
	$+axy$	$+aax+axp$
	$+aay$	$+a^3+aap$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	p^3	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}xxq\ \cdots$
	$+3app$	$+\frac{3}{16}axx-\frac{3}{2}axq+3aqq$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}axx+axq$
	$+4aap$	$-aax+4aaq$
	$+aax$	$+aax$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{xx}{64a}+r=q$	$+3aqq$	$+\frac{3x^4}{4096a}\ \cdots$
	$+\frac{3}{16}xxq$	$+\frac{3x^4}{1024a}\ \cdots$
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$
	$+4aaq$	$+\frac{1}{16}axx+4aar$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$
	$-\frac{1}{16}axx$	$-\frac{1}{16}axx$
$+4aa-\frac{1}{2}ax\Big)$	$+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}\ \Big(+\frac{131x^3}{512aa}+\frac{509x^4}{16384a^3}\cdots$	

第 1 の表において，最初の列における p，q，r［，$\cdots$］そのものの値の最初の項はその上にある最後の和の最初の項がその和の第 2 項の係数で (–1 が 10 で，あるいは 0.061 が 11.23 で，のように) 割られ，商の符号が替えられることによって，見出されます。

そして同様に，第 2 の表においても同じ項は通常は同じ方法によって見出されます。しかし，このことの独特の困難は根の最初の項の発見にあります。それは一般的な方法によってなし遂げられることですが，簡潔さのために，さらに，操作が整えられるであろう何か別のものを考察するにしても，ここではこの［方法の］利点を述べる暇がありませんから，今はこれを［説明することを］省略します。しかし，［ここまで補足部分］

私は，1 度引き出されたこのような方程式の根は似たような方程式が解かれるであろう規則の代わりに使うことができますし，多くのこのような種類の規則からたいていは一般的な規則をつくることができ，単純なものであれ複雑なものであれすべての根は無限の方法で引き出すことができますから，つねに単純なものが考察されるでしょう，とだけ言っておきます。

方程式から，それが無限級数に還元されたとして，曲線の面積や長さ，立体の体積や表面積が，あるいは任意の図形のどのような切片も，さらに重心も決定されるように，そしてまた，すべての機械的な曲線がそのような無限級数の方程式に還元できるように，それゆえ，私は，それらに関する問題を，あたかもそれが幾何学的なものであるかのように，解きました。それを表すととても長くなります。そのような種類の問題の例を列挙すれば十分でしょう。それらを述べるのに，簡単の

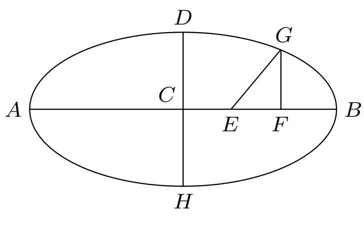
ために，文字 A，B，C，D，$\cdots$ を級数の項の代わりに，はじめに述べたように，用いることがあるでしょう。

1　もし与えられた正弦 (sinus rectus) あるいは反正弦 (sinus versus) から弧が熱望されるのであれば, 半径を r とし, 正弦を x としましょう。すると, 弧 $= x+\dfrac{x^3}{6rr}+\dfrac{3x^5}{40r^4}+\dfrac{5x^7}{112r^6}\cdots$ でしょう。すなわち，$= x+\dfrac{1\times 1\times xx}{2\times 3\times rr}A+\dfrac{3\times 3\,xx}{4\times 5\,rr}B+\dfrac{5\times 5\,xx}{6\times 7\,rr}C+\dfrac{7\times 7\,xx}{8\times 9\,rr}D+\cdots$ でしょう。あるいは，d を直径とし，x を反正弦とすると，弧 $= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+\dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{1}{2}}}+\cdots$ でしょう。すなわち，$=\sqrt{dx}\times\left(1+\dfrac{x}{6d}+\dfrac{3xx}{40dd}+\dfrac{5x^3}{112d^3}+\cdots\right)$ でしょう。

2　逆に，もし与えられた弧から正弦が熱望されるのであれば，半径を r とし，弧を z としましょう。すると，正弦 $= z-\dfrac{z^3}{6rr}+\dfrac{z^5}{120r^4}-\dfrac{z^7}{5040r^6}+\dfrac{z^9}{362880r^8}-\cdots$ でしょう。すなわち，$= z-\dfrac{zz}{2\times 3\,rr}A-\dfrac{zz}{4\times 5\,rr}B-\dfrac{zz}{6\times 7\,rr}C-\cdots$ でしょう。そして，反正弦 $=\dfrac{zz}{2r}-\dfrac{z^4}{24r^3}+\dfrac{z^6}{720r^5}-\dfrac{z^8}{40320r^7}+\cdots$ でしょう。すなわち，$\dfrac{zz}{1\times 2\,r}-\dfrac{zz}{3\times 4\,rr}A-\dfrac{zz}{5\times 6\,rr}B-\dfrac{zz}{7\times 8\,rr}C-\cdots$ でしょう。

3　もし弧が別の弧に対して与えられた比となるようにとられるならば, 直径 $= d$, 与えられた弧の弦 $= x$ とし，求められる弧がその与えられた弧に対して n が 1 に対するとしましょう。すると，求められる弧の弦 $= nx+\dfrac{1-nn}{2\times 3\,dd}xxA+\dfrac{9-nn}{4\times 5\,dd}xxB+\dfrac{25-nn}{6\times 7\,dd}xxC+\dfrac{49-nn}{8\times 9\,dd}xxD+\dfrac{81-nn}{10\times 11\,dd}xxE+\cdots$ でしょう。

ここで, n が奇数 (numerus impar) であるために級数が無限でなくなるとき，一般代数 (vulgaris algebra) によって現れるものは与えられた［中心］角にその数 n が掛けられたものと同じになるであろうことに注意してください。



4　もし楕円 ADB (その中心が C で，他方の軸が DH) 528
の一方の軸 AB 上に任意の点 E が与えられて，楕円と G で交わっている直線 EG がその周りを角運動によって動かされ，そして，与えられた楕円の切片 BEG の面積から，点 G から軸に垂直に下ろされた直線 GF が求められるのであれば，$BC=q$，$DC=r$，$EB=t$ とし，BEG の面積の 2 倍 $=z$ としましょう。

すると，$GF=\dfrac{z}{t}-\dfrac{q}{6rrt^4}z^3+\dfrac{10qq-9qt}{120r^4t^7}z^5-\dfrac{280q^3+504qqt-225qtt}{5040r^6t^{10}}z^7+\cdots$ でしょう。それゆえ，天文学上のケプラー (Johannes Kepler : 1571–1630) の問題を解くことができます。

5　同じ楕円において，もし $CD=r$，$\dfrac{CB^2}{CD}=c$，$CF=x$ とおかれるならば，楕円の弧

$$
\begin{aligned}
DG = x &+ \frac{1}{6cc}x^3 + \frac{1}{10rc^3}x^5 + \frac{1}{14rrc^4}x^7 + \frac{1}{18r^3c^5}x^9 + \frac{1}{22r^4c^6}x^{11}+\cdots\\
& \qquad\qquad - \frac{1}{40c^4} \qquad - \frac{1}{28rc^5} \qquad - \frac{1}{24rrc^6} \qquad - \frac{1}{22r^3c^7}\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{112c^6} \qquad + \frac{1}{48rc^7} \qquad + \frac{3}{88rrc^8}\\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{5}{1152c^8} \qquad - \frac{5}{352rc^9}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{7}{2816c^{10}}$$

でしょう。

このとき，一番上にある項の数値係数 $\left(\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{10},\dfrac{1}{14},\cdots\right)$ は音楽的数列 (musica progressio)［調和数列］であって，ある 1 つの列におけるそれより下のすべての数値係数は一番上の項の数値係数にこの系列 $\dfrac{\frac{1}{2}n-1}{2}$，$\dfrac{\frac{3}{3}n-3}{4}$，$\dfrac{\frac{5}{4}n-5}{6}$，$\dfrac{\frac{7}{5}n-7}{8}$，$\dfrac{\frac{9}{6}n-9}{10}$，$\cdots$ を続けて掛けることによって生じます。ここに，n はその一番上の項の分母における c の次元の数［ベキ指数］を表します。例えば，$\dfrac{1}{22r^4c^6}$ の下の項の数値係数を見出すには，$n=6$ とおいて，$\dfrac{1}{22}$ $\left(\dfrac{1}{22r^4c^6}\right.$ の数値係数$\Big)$ に $\dfrac{\frac{1}{2}n-1}{2}$ すなわち 1 を掛けるとすぐ下の項の数値係数 $\dfrac{1}{22}$ になり，次に，この $\dfrac{1}{22}$ に $\dfrac{\frac{3}{3}n-3}{4}$ あるいは $\dfrac{n-3}{4}$，すなわち $\dfrac{3}{4}$，を掛けるとその列の 3 番目の項の数値係数 $\dfrac{3}{88}$ になります。そして，それゆえ $\dfrac{3}{88}\times\dfrac{\frac{5}{4}n-5}{6}$ は 4 番目の項の数値係数 $\dfrac{5}{352}$ となり，$\dfrac{5}{352}\times\dfrac{\frac{7}{5}n-7}{8}$ は一番下の項の数値係数 $\dfrac{7}{2816}$ となります。同様に他の列においても［数値係数を］無限に与えることができますから，DG の値はこの規則によって望むだけ伸ばされます。

さらに，もし BF を $=x$ とし，楕円の直立辺を r として，$e=\dfrac{r}{AB}$ とするならば，楕円の弧

529 $$BG=\sqrt{rx}\ \text{in}\ \overline{1+\frac{\left.\begin{array}{l}2\\ -\frac{3}{2}e\end{array}\right\}}{3r}x\quad\frac{\left.\begin{array}{l}-2\\ +3e\\ -\frac{5}{8}ee\end{array}\right\}}{5rr}x^2\quad\frac{\left.\begin{array}{l}+4\\ -9e\\ +\frac{23}{4}e^2\\ -\frac{7}{16}e^3\end{array}\right\}}{7r^3}x^3\quad\frac{\left.\begin{array}{l}-10\\ +30e\\ -\frac{123}{4}e^2\\ +\frac{91}{8}e^3\\ -\frac{45}{128}e^4\end{array}\right\}}{9r^4}x^4+\cdots}$$

でしょう。

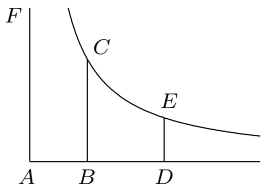
それゆえ，もし楕円全体の周が熱望されるのであれば，CB を F で 2 等分し，弧 DG を前の定理によって，そして弧 BG を後［の定理］によって求めます。

6　逆に, 楕円の与えられた弧 DG からその正弦 CF を求めるのであれば, その際には, $CD=r$, $\dfrac{CB^2}{CD}=c$，その弧 $DG=z$ とすると，

$$CF=z-\frac{1}{6cc}z^3-\begin{array}{l}\dfrac{1}{10rc^3}\\ +\dfrac{13}{120c^4}\end{array}z^5-\begin{array}{l}\dfrac{1}{14rrc^4}\\ +\dfrac{71}{420rc^5}\\ -\dfrac{493}{5040c^6}\end{array}z^7-\cdots$$

でしょう。

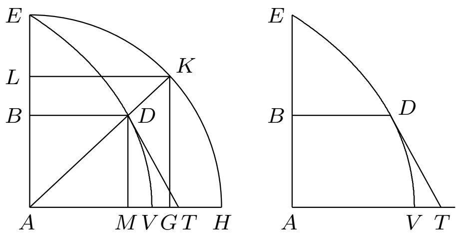
そして，楕円について述べられたことは，c および e が奇数の次元であるときにそれらの符号を替えるだけで，すべて双曲線に簡単に適用されます。



7　さらに，もし CE を双曲線とし，その漸近線 AD，AF が直角 FAD をつくり，AD に対して，双曲線と C および E で交わる，垂線 BC，DE が何らかの仕方で立てられ，AB が a，BC が b，面積 $BCED$ が z とされるならば，

$$BD = \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5} + \cdots$$

でしょう。ここで，分母の係数はこの算術数列 1，2，3，4，5，$\cdots$ の項を互いに続けて掛けることによって生じます。そして，それゆえ，与えられた対数からそれに対する数［真数］を見出すことができます。

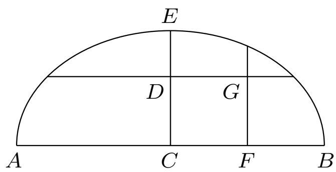


［ここでの図について，『全集』は上の左図を載せているが，『遺稿集』，『書簡集』は上の右図を載せている。］

8　VDE を，その頂点が V で，A が中心，AE がそれに適合される［関係する］円の半径，角 VAE が直角である，円積線としましょう。AE に対して任意の垂線 DB が下ろされ，その軸 AV と T で交わる円積線の接線 DT が引かれるとき，$AV = a$，$AB = x$ とすると，$DB = a - \dfrac{xx}{3a} - \dfrac{x^4}{45a^3} - \dfrac{2x^6}{945a^5} - \cdots$，および，$VT = \dfrac{xx}{3a} + \dfrac{x^4}{15a^3} + \dfrac{2x^6}{189a^5} + \cdots$，および，面積 $AVDB = ax - \dfrac{x^3}{9a} - \dfrac{x^5}{225a^3} - \dfrac{2x^7}{6615a^5} - \cdots$，および，弧 $VD = x + \dfrac{2x^3}{27aa} + \dfrac{14x^5}{2025a^4} + \dfrac{604x^7}{893025a^6} + \cdots$ でしょう。それゆえ，逆に，与えられた BD，あるいは VT，または面積 $AVDB$，あるいは弧 VD から，複合方程式の解法によって，x あるいは AB を捜し出すことができます。

9　最後に，AEB を楕円 AEB の軸 AB の周りの回転によってつくられた回転楕円体とし，回
転軸 AB，AB に平行な DG，軸を垂直に 2 等分する CDE，および CE に平行な FG の 4 つの平 530
面によって切り取られたとしましょう。そして，直線 $CB = a$，$CE = c$，$CF = x$，$FG = y$ とすると，前述の 4 つの平面に囲まれた立体の切片 $CDGF$ は

$$\begin{array}{lllll}
+\,2cxy & -\,\dfrac{x}{3c}\,y^3 & -\,\dfrac{x}{20c^3}\,y^5 & -\,\dfrac{x}{56c^5}\,y^7 & -\,\dfrac{5x}{576c^7}\,y^9 \quad -\cdots\cdots \\
-\,\dfrac{cx^3}{3aa} & -\,\dfrac{x^3}{18caa} & -\,\dfrac{x^3}{40c^3aa} & -\,\dfrac{5x^3}{336c^5aa} & -\cdots\cdots \\
-\,\dfrac{cx^5}{20a^4} & -\,\dfrac{x^5}{40ca^4} & -\,\dfrac{3x^5}{160c^3a^4} & -\cdots\cdots & \\
-\,\dfrac{cx^7}{56a^6} & -\,\dfrac{5x^7}{336ca^6} & -\cdots\cdots & & \\
-\,\dfrac{5cx^9}{576a^8} & -\cdots\cdots & & & \\
-\cdots\cdots & & & &
\end{array}$$

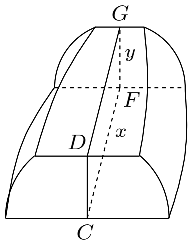


でしょう。

ここで，一番上にある項の数値係数 $\left(2,\ -\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{20},\ -\dfrac{1}{56},\ -\dfrac{1}{576},\ \cdots\right)$ は最初の係数 2 にこの系列 $-\dfrac{1\times1}{2\times3}$，$\dfrac{1\times3}{4\times5}$，$\dfrac{3\times5}{6\times7}$，$\dfrac{5\times7}{8\times9}$，$\dfrac{7\times9}{10\times11}$，$\cdots$ を続けて掛けることによって無限にもたらされます。そして，それぞれの列において下りていく項の数値係数は，最初の列においては一番上の項の係数に同じ系列を，しかし，第 2［の列］においてはこの項 $\dfrac{1\times1}{2\times3}$，$\dfrac{3\times3}{4\times5}$，

$\dfrac{5\times5}{6\times7}$，$\dfrac{7\times7}{8\times9}$，$\cdots$ を，第 3［の列］においてはこの項 $\dfrac{3\times1}{2\times3}$，$\dfrac{5\times3}{4\times5}$，$\dfrac{7\times5}{6\times7}$，$\dfrac{9\times7}{8\times9}$，$\cdots$ を，第 4［の列］においてはこの項 $\dfrac{5\times1}{2\times3}$，$\dfrac{7\times3}{4\times5}$，$\dfrac{9\times5}{6\times7}$，$\cdots$ を，第 5［の列］においてはこの項 $\dfrac{7\times1}{2\times3}$，$\dfrac{9\times3}{4\times5}$，$\dfrac{11\times5}{6\times7}$，$\cdots$ を，そして無限にそのように，続けて掛けることによって無限にもたらされます。

そして，他の立体の切片も同じ方法で表され，それらの値はときには何らかの適当な数列によって無限に伸ばすことができます。



回転楕円体 (sphæroides < σφαιροειδής : (英) spheroid) はラグビーボールのような，あるいはよく見かける形のスイートポテトを 2 つあわせたような形をした立体。ここでニュートンが問題にしているのは，(1 つの) スイートポテトを底面に平行な平面によって山の上部をカットし (て，真ん中およびそこから適当な距離離れたところで切り取っ) たような形である (左図参照)。

ここでの楕円 AEB は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{c^2}=1$ と表せるから，この回転楕円体全体の体積 V_s は

$$V_s=2\pi\int_0^a y^2dx=2\pi\int_0^a\left(c^2-\frac{c^2}{a^2}\,x^2\right)dx=\frac{4}{3}\,\pi ac^2$$

である。

さて，$x=u$ のときの切り口は半径が $r=\dfrac{\sqrt{c^2(a^2-u^2)}}{a}$ の円の上部が切り取られたものであるから，その面積 S_u は $S_u=2\displaystyle\int_0^y\sqrt{\frac{c^2(a^2-u^2)}{a^2}-v^2}\,dv$ となる。

よって，求める体積 V は $V=2\displaystyle\int_0^x\int_0^y\sqrt{\frac{c^2(a^2-u^2)}{a^2}-v^2}\,dv\,du$ である。

ところで，この回転楕円体の表面は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{c^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $\Bigl($ 内部を含めるなら $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{c^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqq 1\Bigr)$ と表せるから，$V=2\displaystyle\int_0^x\int_0^y z\,dy\,dx$ である，としても同じ。

ところで，この積分は，ニュートンなら次のように求めたであろう。

まず，一般二項定理によれば

$$\begin{aligned}
\sqrt{c^2-\frac{c^2}{a^2}\,u^2-v^2}&=\left\{c^2+c^2\left(-\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{c^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&=\left(c^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\,c\left(-\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{c^2}\right)\\
&\quad+\frac{1-2}{2\times2}\left\{\frac{1}{2}\,c\left(-\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{c^2}\right)\right\}\left(-\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{c^2}\right)\\
&\quad+\frac{1-2\times2}{3\times2}\left\{-\frac{1}{8}\,c\left(-\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right\}\left(-\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{c^2}\right)\\
&\quad+\frac{1-3\times2}{4\times2}\left\{\frac{1}{16}\,c\left(-\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{c^2}\right)^3\right\}\left(-\frac{u^2}{a^2}-\frac{v^2}{c^2}\right)\\
&\quad+\cdots\cdots\\
&=c-\frac{cu^2}{2a^2}-\frac{v^2}{2c}-\frac{cu^4}{8a^4}-\frac{u^2v^2}{4a^2c}-\frac{v^4}{8c^3}\\
&\quad-\frac{cu^6}{16a^6}-\frac{3u^4v^2}{16a^4c}-\frac{3u^2v^4}{16a^2c^3}-\frac{v^6}{16c^c}
\end{aligned}$$

$$-\frac{5cu^8}{128a^8}-\frac{5u^6v^2}{32a^6c}-\frac{15u^4v^4}{64a^4c^3}-\frac{5u^2v^6}{32a^2c^5}-\frac{5v^8}{128c^7}$$
$$-\cdots\cdots$$

である。それゆえ，

$$\begin{aligned}
S_u = 2\Big[cv &- \frac{cu^2v}{2a^2} - \frac{v^3}{6c} - \frac{cu^4v}{8a^4} - \frac{u^2v^3}{12a^2c} - \frac{v^5}{40c^3} \\
&- \frac{cu^6v}{16a^6} - \frac{u^4v^3}{16a^4c} - \frac{3u^2v^5}{80a^2c^3} - \frac{v^7}{112c^5} \\
&- \frac{5cu^8v}{128a^8} - \frac{5u^6v^3}{96a^8c} - \frac{3u^4v^5}{64a^4c^3} - \frac{5u^2v^7}{224a^2c^5} - \frac{5v^9}{1152c^7} - \cdots\cdots\Big]_0^y \\
= 2\Big(cy &- \frac{cyu^2}{2a^2} - \frac{y^3}{6c} - \frac{cyu^4}{8a^4} - \frac{y^3u^2}{12a^2c} - \frac{y^5}{40c^3} \\
&- \frac{cyu^6}{16a^6} - \frac{y^3u^4}{16a^4c} - \frac{3y^5u^2}{80a^2c^3} - \frac{y^7}{112c^5} \\
&- \frac{5cyu^8}{128a^8} - \frac{5y^3u^6}{96a^8c} - \frac{3y^5u^4}{64a^4c^3} - \frac{5y^7u^2}{224a^2c^5} - \frac{5y^9}{1152c^7} - \cdots\cdots\Big)
\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
V = 2\Big[cyu &- \frac{cyu^3}{6a^2} - \frac{y^3u}{6c} - \frac{cyu^5}{40a^4} - \frac{y^3u^3}{36a^2c} - \frac{y^5u}{40c^3} \\
&- \frac{cyu^7}{112a^6} - \frac{y^3u^5}{80a^4c} - \frac{y^5u^3}{80a^2c^3} - \frac{y^7u}{112c^5} \\
&- \frac{5cyu^9}{1152a^8} - \frac{5y^3u^7}{672a^6c} - \frac{3y^5u^5}{320a^4c^3} - \frac{5y^7u^3}{672a^2c^5} - \frac{5y^9u}{1152c^7} - \cdots\cdots\Big]_0^x \\
= 2\Big(cxy &- \frac{cx^3y}{6a^2} - \frac{xy^3}{6c} - \frac{cx^5y}{40a^4} - \frac{x^3y^3}{36a^2c} - \frac{xy^5}{40c^3} \\
&- \frac{cx^7y}{112a^6} - \frac{x^5y^3}{80a^4c} - \frac{x^3y^5}{80a^2c^3} - \frac{xy^7}{112c^5} \\
&- \frac{5cx^9y}{1152a^8} - \frac{5x^7y^3}{672a^6c} - \frac{3x^5y^5}{320a^4c^3} - \frac{5x^3y^7}{672a^2c^5} - \frac{5xy^9}{1152c^7} - \cdots\cdots\Big) \\
= 2cxy &- \frac{xy^3}{3c} - \frac{xy^5}{20c^3} - \frac{xy^7}{56c^5} - \frac{5xy^9}{576c^7} \\
- \frac{cx^3y}{3a^2} &- \frac{x^3y^3}{18a^2c} - \frac{x^3y^5}{40a^2c^3} - \frac{5x^3y^7}{336a^2c^5} \\
- \frac{cx^5y}{20a^4} &- \frac{x^5y^3}{40a^4c} - \frac{3x^5y^5}{160a^4c^3} \\
- \frac{cx^7y}{56a^6} &- \frac{5x^7y^3}{336a^6c} \\
- \frac{5cx^9y}{576a^8} &- \cdots\cdots
\end{aligned}$$

となる。

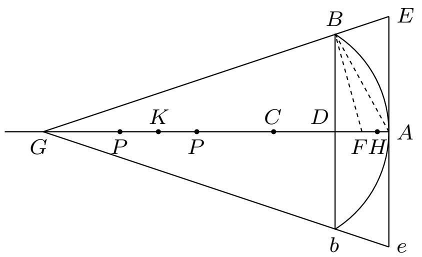
これらのことから，このような種類の無限方程式によって解析の限界がどれほど拡げられるかが (530)
分かるはずです。実際，これらのおかげで［解析の限界は］，もしディオファントス (Diophantus (Διόφαντος)：246?–330?) の数値の問題や類似のものを除けば，私が述べたほとんどすべての問題にまで拡がりました。

しかし，無限級数を引き出す何らかのさらなる方法によらない限り，それはまだ完全には普遍的なものになっていないでしょう。なぜならば，除法あるいは単純なまたは複合した根の展開によっては無限級数に達することができないような問題がいくつかあるからです。しかし，その場合に［解法を］どのように進めるかを説明することも，無限級数の有限［級数］への還元に関して，その

ことの性質が必要であったときに私が工夫した，何か別のことを述べることも，今はその暇がありません。確かに，今ではおよそ 5 年もの間それらを遠ざけていたほど，これらの理論は長い間私にとって嫌気をもたらしたものですから，より手短に書くことにします。

そうは言っても，1 つ付け加えましょう。何らかの問題が無限方程式に還元された後では，そこから，知られている他の方法では手間がかかり時間の浪費であると思われるのが常であるような，さまざまな類似したものを，全く面倒なことなく，機械的に扱うことができるようになる，ということを。

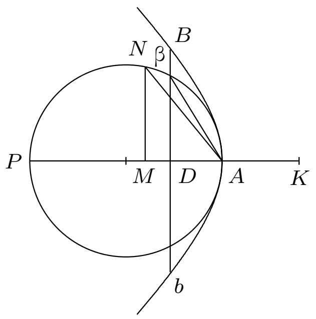
このことについて，円の求積についてのホイヘンス (Christiaan Huygens : 1629–1695) の，そし
531 て別の論考を例として引用することができます。すなわち，与えられた弧の弦 A およびその半分の弧の弦 B からその弧の近似を得たいとき，その弧を z とし，円の半径を r とすると，上と同様に，A (もちろん，半正弦 (sinus dimidii) z の 2 倍) $= z - \dfrac{z^3}{4 \times 6\,rr} + \dfrac{z^5}{4 \times 4 \times 120\,r^4} - \cdots$ でしょう。そして，$B = \dfrac{1}{2}\,z - \dfrac{z^3}{2 \times 16 \times 6\,rr} + \dfrac{z^5}{2 \times 16 \times 16 \times 120\,r^4} - \cdots$ でしょう。いま，B に［任意に］仮の数 n を掛け，そしてその積から A を取り去って生じる残りの第 2 の項 $\left(\text{すなわち} - \dfrac{nz^3}{2 \times 16 \times 6\,rr} + \dfrac{z^3}{4 \times 6\,rr}\right)$ を消去するのに，$= 0$ とおけば，そこから $n = 8$ が現われ，$8B - A = 3z * - \dfrac{3z^3}{64 \times 120\,r^4} + \cdots$，すなわち $\dfrac{8B - A}{3} = z$ でしょうし，誤差としてただ $\dfrac{z^5}{7680\,r^4} - \cdots$ だけの超過が現われます。これがホイヘンスの定理です。



さらに，もし弧 Bb の，無際限に伸ばされた，矢 (sagitta) AD において，そこから引かれた直線 GB，Gb が接線からその弧にできる限り等しい［部分］Ee を切り取るような点 G を求めたいのであれば，円の中心を C，直径を $AK = d$，矢を $AD = x$ としましょう。すると，$DB\,(= \sqrt{dx - x^2}) = d^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}} - \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}} - \cdots$ でしょう。そして，$AE = AB = d^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} + \cdots$ でしょう。そして，$AE - DB : AD = AE : AG$ です。それゆえ，$AG = \dfrac{3}{2}\,d - \dfrac{1}{5}\,x - \dfrac{12xx}{175d} \mp \cdots$ でしょう。ゆえに，$AG = \dfrac{3}{2}\,d - \dfrac{1}{5}\,x$ とすれば，反対に，$DG\left(\dfrac{3}{2}\,d - \dfrac{6}{5}\,x\right) : DB = DA : AE - DB$ でしょう。それゆえ，$AE - DB = \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}} + \cdots$ でしょう。DB を加えると，$AE = d^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \dfrac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}} + \cdots$ が現われます。ここから上で得られた AE の値を取り去ると，誤差 $\dfrac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}} \pm \cdots$ が残るでしょう。それゆえ，AG において，DA の 5 分の 1 である AH をとって，$KG = HC$ とすると，引かれた GBE，Gbe は接線から弧 BAb にできる限り等しい［部分］Ee を切り取るでしょう。誤差として，確かに，ホイヘンスの定理におけるものよりはるかに小さい $\dfrac{16x^3}{525d^3}\sqrt{dx} \pm \cdots$ だけが現われます。しかし，もし $7AK : 3AH = DH : n$ として，$KG = CH - n$ にとられるならば，誤差はさらにはるかに小さいでしょう。

それゆえ，さらに，もし円の何らかの切片 BAb が機械的に表されなければならなかったならば，はじめにその面積を無限級数に還元すべきで，これを $BbA=\dfrac{3}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{x^{\frac{9}{2}}}{36d^{\frac{5}{2}}}-\cdots$ とおきます。次いで，この級数に最も近いものを得るために機械的な作図を求めるべきです。その方法はこうです。直線 AB を引くと，近似的に 切片 $BbA=\left(\dfrac{2}{3}AB+BD\right)\times\dfrac{4}{5}AD$ でしょう。明らかに，誤差としてただ $\dfrac{x^3}{70d^2}\sqrt{rx}+\cdots$ だけの不足が現われます。あるいはより近似的に，その切片 (AD が F で 2 等分され，直線 BF が引かれると) $=\dfrac{4BF+AB}{15}\times 4AD$ でしょう。誤差として $\dfrac{x^3}{560d^2}\sqrt{rx}+\cdots$ だけが現われ，たとえその切片 532
が半円になるまで大きくされるとしても，つねに切片全体の $\dfrac{1}{1500}$ より小さいでしょう。

そして，それゆえ，楕円 BAb において (先の図を見てください。)，その頂点を A，一方の軸を AK，直立辺を AP とするとき，$PG=\dfrac{1}{2}AP+\dfrac{19AK-21AP}{10AK}$ にとります。一方，双曲線においては，$PG=\dfrac{1}{2}AP+\dfrac{19AK+21AP}{10AK}$ にとります。そして，その弧がたいして大きくない限りは，引かれた直線 GBE は接線から楕円あるいは双曲線の弧 AB にできる限り等しい［部分］AE を切り取るでしょう。



そして，双曲線の切片 BbA の面積［を求める］ために，DP において $MD=\dfrac{3AD^2}{4AK}$ にとり，D および M において，直径 AP の上に描かれた半円と交わる，垂線 $D\beta$，MN を立てます。すると，近似的に $\dfrac{4AN+A\beta}{15}\times 4AD=BbA$ でしょう。あるいは，もし $DM=\dfrac{5AD^2}{7AK}$ とだけとられるのであれば，より近似的に $\dfrac{21AN+4A\beta}{75}\times 4AD=BbA$ でしょう。

この「前の書簡」でははじめにいわゆる一般二項定理が述べられている。ニュートンはウォリス (John Wallis : 1616–1703) による円の求積に関連して，1664 年から 1665 年にかけてこの定理を得たようである。
ニュートンはこの一般二項定理に関して，「後の書簡」(『全集』第 4 巻 pp.540–558) では次のように述べている (同上 pp.540–542)。

「私の数学研究の初期の頃，私たちの有名なウォリスの著作に出会ったときに，それ自身が円や 540
放物線の面積を表しているものの挿入によって［曲線の］系列を詳しく調べることによって，すなわち，その共通の底線または軸が x で，縦線が $(1-xx)^{\frac{0}{2}}$，$(1-xx)^{\frac{1}{2}}$，$(1-xx)^{\frac{2}{2}}$，$(1-xx)^{\frac{3}{2}}$，$(1-xx)^{\frac{4}{2}}$，$(1-xx)^{\frac{5}{2}}$，$\cdots$ である曲線の系列において，もし 1 つおきの面積 —— それらは x，$x-\dfrac{1}{3}x^3$，$x-\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5$，$x-\dfrac{3}{3}x^3+\dfrac{3}{5}x^5-\dfrac{1}{7}x^7$，$\cdots$ です —— を補間することができるならば，その最初，［すなわち］$(1-xx)^{\frac{1}{2}}$，が円であるような
中間の面積を得るでしょう。これらが挿入されることに関して，私は，すべて［の面積］につ 541
いて，最初の項は x であり，第 2 の項 $\dfrac{0}{3}x^3$，$\dfrac{1}{3}x^3$，$\dfrac{2}{3}x^3$，$\dfrac{3}{3}x^3$，$\cdots$ は算術数列ですから，それゆえ，挿入される系列の最初の 2 つの項は $x-\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{3}$，$x-\dfrac{\frac{3}{2}x^3}{3}$，$x-\dfrac{\frac{5}{2}x^3}{3}$，$\cdots$ でなければならないことを認識しました。

残りを挿入することについて，私は，分母 1，3，5，7，$\cdots$ は算術数列であり，それゆえ，分子の数値係数が見出されなければならないことだけであると考えました。しかし，これは，1

つおきに与えられた面積について,［それぞれ］数 11 のベキ，すなわち 11^0，11^1，11^2，11^3，11^4，$\cdots$，の数字でした。すなわち，最初が 1，次が 1，1，三つ目が 1，2，1，四つ目が 1，3，3，1，五つ目が 1，4，6，4，1，$\cdots$，です。

そこで，この系列において，どのようにしたら与えられた最初の 2 つの数字から残りを導くことができるかを研究しました。そして，私は，2 番目の数字が m とおかれたなら，残りはこのような系列 $\dfrac{m-0}{1} \times \dfrac{m-1}{2} \times \dfrac{m-2}{3} \times \dfrac{m-3}{4} \times \dfrac{m-4}{5} \times \cdots$ の項を続けて掛けることによってつくり出されることを発見しました。

例えば，第 2 の項を $m = 4$ であるとしましょう。すると，$4 \times \dfrac{m-1}{2}$ すなわち 6 が 3 番目の項で，$6 \times \dfrac{m-2}{3}$ すなわち 4 が 4 番目，$4 \times \dfrac{m-3}{4}$ すなわち 1 が 5 番目，$1 \times \dfrac{m-4}{5}$ すなわち 0 が 6 番目でしょうし，この場合は系列はここで終わります。

そこで，挿入されるであろう系列にこの規則を適用しました。すると，円に対して第 2 の項は $\dfrac{\frac{1}{2}x^3}{3}$ ですから，私は $m = \dfrac{1}{2}$ とおきました。すると，項 $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\frac{1}{2}-1}{2}$ あるいは $-\dfrac{1}{8}$，$-\dfrac{1}{8} \times \dfrac{\frac{1}{2}-2}{3}$ あるいは $\dfrac{1}{16}$，$\dfrac{1}{16} \times \dfrac{\frac{1}{2}-3}{4}$ あるいは $-\dfrac{5}{128}$ が現れましたし，無限にそうでしょう。それゆえ，求めていた円の切片の面積は $x - \dfrac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \dfrac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \dfrac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \dfrac{\frac{5}{128}x^9}{9} - \cdots$ であると分かりました。」

541 「しかし，これらのことを研究していたとき，間もなく，私は，項 $(1-xx)^{\frac{0}{2}}$，$(1-xx)^{\frac{2}{2}}$，$(1-xx)^{\frac{4}{2}}$，$(1-xx)^{\frac{6}{2}}$，$\cdots$，すなわち 1，$1-xx$，$1-2xx+x^4$，$1-3xx+3x^4-x^6$，$\cdots$ を，それらから生成された面積と同じ方法によって，補間することができることを詳しく調べました。すると，［このためには］面積を表している項における分母 1，3，5，7，$\cdots$ を省略すること以外には何も必要がありませんでした。すなわち，挿入されるであろう量 $(1-xx)^{\frac{1}{2}}$，あるいは $(1-xx)^{\frac{3}{2}}$，あるいは一般に $(1-xx)^m$ の項の係数はこのような系列
542 $m \times \dfrac{m-1}{2} \times \dfrac{m-2}{3} \times \dfrac{m-3}{4} \times \cdots$ の項を続けて掛けることによって生じるのです。

ですから，(例えば，) $(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ は $1 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{1}{16}x^6 - \cdots$ に等しくなります。そして，$(1-xx)^{\frac{3}{2}}$ は $1 - \dfrac{3}{2}xx + \dfrac{3}{8}x^4 + \dfrac{1}{16}x^6 + \cdots$ に等しく，$(1-xx)^{\frac{1}{3}}$ は $1 - \dfrac{1}{3}xx - \dfrac{1}{9}x^4 - \dfrac{5}{81}x^6 - \cdots$ に等しくなります。

それゆえ，私は，前の書簡のはじめに書いたような，［そして,］より以前に私が根の開平を理解することになった，根の無限級数への一般的な還元法を知ることとなりました。」

「後の書簡」には一般二項定理発見の経緯が述べられているが, そこでの方法によれば, $\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ を展開したときの各項の係数は, $m = \dfrac{1}{2}$ であるから, 順次 $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{\frac{1}{2}-1}{2} \times \dfrac{\frac{1}{2}-2}{3} \times \dfrac{\frac{1}{2}-3}{4} \times \dfrac{\frac{1}{2}-4}{5} \times \dfrac{\frac{1}{2}-5}{6} \times \cdots$, すなわち $\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times \left(-\dfrac{5}{8}\right) \times \left(-\dfrac{7}{10}\right) \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) \times \cdots$ を掛けていくことで得られる。

すなわち，初項の係数は 1 であるから,

第 2 項の係数は $1 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$，　第 3 項の係数は $\dfrac{1}{2} \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{1}{8}$，

第 4 項の係数は $-\dfrac{1}{8} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{16}$，　第 5 項の係数は $\dfrac{1}{16} \times \left(-\dfrac{5}{8}\right) = -\dfrac{5}{128}$，

第 6 項の係数は $-\dfrac{5}{128} \times \left(-\dfrac{7}{10}\right) = \dfrac{7}{256}$，

第 7 項の係数は $\dfrac{7}{256} \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) = -\dfrac{21}{1024}$，$\cdots$ となって，

$$\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}\times\left(-x^2\right)^1+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\left(-x^2\right)^2+\left(-\frac{1}{8}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-x^2\right)^3+\cdots$$
$$= 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\frac{5}{128}x^8-\frac{7}{256}x^{10}-\frac{21}{1024}x^{12}-\cdots$$

ということになる。

一方,「前の書簡」に述べられた方法では,$P=1$, $Q=\dfrac{-x^2}{1}=-x^2$, $m=1$, $n=2$ であるから,$\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}$ の展開式における初項は $P^{\frac{m}{n}}=1^{\frac{1}{2}}=1$ であり,

第 2 項は $\dfrac{m}{n}AQ=\dfrac{1}{2}\times 1\times\left(-x^2\right)=-\dfrac{1}{2}x^2$,

第 3 項は $\dfrac{m-n}{2n}BQ=\dfrac{1-2}{4}\times\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)\times\left(-x^2\right)=-\dfrac{1}{8}x^4$,

第 4 項は $\dfrac{m-2n}{3n}CQ=\dfrac{1-4}{6}\times\left(-\dfrac{1}{8}x^4\right)\times\left(-x^2\right)=-\dfrac{1}{16}x^6$,

第 5 項は $\dfrac{m-3n}{4n}DQ=\dfrac{1-6}{8}\times\left(-\dfrac{1}{16}x^6\right)\times\left(-x^2\right)=-\dfrac{5}{128}x^8$, $\cdots$ となる。

このように,「後の書簡」にある方法では係数だけが見出されるため,級数として表すときには各項の符号に注意する必要がある。一方で,「前の書簡」で示されている一般二項定理ではそのままで級数の形になる。確かに,「前の書簡」にある方がより洗練されている,というか間違えにくいといえよう。

訳し終えて

ここに訳出した論考を中心にニュートンの主な作品を整理してみると

1666年 「流率に関する1666年10月論文」(公表は1962年)
それまでの研究成果をまとめたもので，ウェストフォール (Richard S. Westfall : 1924–1996) は「ヨーロッパの数学者たちを感嘆とうらやみと畏敬で息を飲ませるほどの巨匠の偉業であった」と言っている (［12］pp.149–150)。

1669年 「無限個の項をもつ方程式による解析について」(出版は1711年)
1668年に出版されたメルカトール (Nicolaus Mercator : 1620–1687) の『対数技法』(*Logarithmotechnia*) に対して無限級数展開の方法の一般性についての先取権を主張するために急いで書かれたもの。

1670–1671年 「級数と流率の方法について」(英訳版の出版は1737年，ラテン語版は1779年)
ニュートンが自身の流率法について数学の専門家に向けて書いたもの。

1672年 「級数と流率の方法について (補遺)」(公表は1969年)
ニュートンが「手持ちの言葉の限界を突き破り，自分の方法をその中心的な着想からすればもっとも適切な新しい基礎の上に据えた」(［12］pp.246–247) もの。

1676年 「前の書簡」「後の書簡」
「前の書簡」はオルデンバーグ (Henry Oldenburg : 1618?–1677) の要請に応じて，「後の書簡」はライプニッツ (Gottfried Wilhelm Leibniz : 1646–1716) の求めに返答する形で書かれたもの。「前の書簡」では流率法に触れておらず，「後の書簡」では流率法の要点が暗号文で記されている。

1680年 「曲線の幾何学」(公表は1971年)
デカルト (René Descartes : 1596–1650) の‘近代的な’数学に対する反抗から，かつて自らが手掛けた問題を幾何学的に解くことを意図して書かれたもの。

1687年 『自然哲学の数学的諸原理 (プリンキピア)』刊行 (第1部は1686年頃執筆)

1691–1693年 「曲線の求積について」(『光学』の「付録」として1704年に出版)
ライプニッツとの先取権論争に関連して，それほど関係があるとは思えない『光学』の付録として，出版した。流率方程式の解法や「後の書簡」の暗号文の謎解きを含む，より大きなものの簡略版ということである。

1704年 『光学』(英語版) 刊行

となる。そして，上記の諸論考で取り上げられている内容は次のようなものである。

① 流量から流率を求める方法［すなわち，微分法］
② 流率から流量を求める方法［すなわち，積分法，微分方程式］
③ 上の①，②の間の関係の確立［すなわち，微分積分法の基本定理］
④ 曲線の接線を引く方法
⑤ 流量の極大・極小を求める方法
⑥ 曲線の曲率を求める方法

⑦　変曲点を求める方法

⑧　曲線下の面積を求める方法

⑨　曲線の長さを求める方法

さらに，それらに関連して縮閉線が取り上げられたり，詳細な積分表が挙げられたりしている。また，「前の書簡」ではいわゆる一般二項定理が述べられている。[無限級数展開に関連して，一般二項定理は重要な要素であるから，「前の書簡」をあわせて訳出した。]

ニュートンによる流率法の開拓の様子は『数学論文集』,『書簡集』などを丁寧に見ていくしかないのだが，これらの諸論考を見る限り，彼が取り上げた内容はすべて 1666 年頃までには基本構想ができ上がっていたといえる。それ以降は，洗練と深化が中心である。

ところで，上に見るように，ニュートンは諸論考の公表を，最初の出版まで 40 年近くかかるほど，渋っていた。ただし，親しい人たちには見せてもいたし，書写も許していたようである。一方で，ライプニッツは微分法に関して「分数式にも無理式にも煩わされない極大・極小ならびに接線を求める新しい方法，またそれらのための特別な計算法」(*Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*) を 1684 年に，積分法に関して「深奥な幾何学ならびに不可分者と無限の解析について」(*De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum*) を 1686 年に公表している。なお，ライプニッツが微分積分法にたどり着いたのは 1672–1676 年 (1675 年頃) のことである。

いま，微分積分法に関する演習書「詳解 微積分演習 I」(福田安蔵・鈴木七緒・安岡善則・黒崎千代子・共編，共立出版 (大学課程数学演習シリーズ 2)，昭和 35) で取り上げられている主な内容を見てみると，

微分計算，接線と法線，速度・加速度，近似値と誤差

平均値の定理，テイラー (Brook Taylor : 1685–1731) の定理，関数の増減と凹凸

極大・極小，方程式の実根，曲線の凹凸と変曲点，曲率・曲率半径・曲率中心，縮閉線，曲線の概形

原始関数，有理関数の積分，無理関数の積分，超越関数の積分，積分の漸化式

定積分の値，広義積分，定積分の近似値

平面積，平面曲線の長さ，空間曲線の長さ，体積，曲面積

などがある。ここに見られるものの多くはニュートンがすでに取り組んだものであり，彼の流率法がかなり広い範囲を射程に収めていたことが分かる。

訳し終わってから，朝倉書店から『ニュートン著作集』(全 3 巻) の出版の計画があることを知った。そちらでは流率法だけでなく，ニュートンのさまざまな論考が，しかも詳細な注を付けて，取り上げられるものと思われる。従って，ニュートンの数学の研究ということならば，そちらを参照することになろう。ここに訳出したものがそれまでの “つなぎ” になればと思っている。

索 引

ニュートンの流率法

平成 23 年 11 月 09 日　第 2 版

著者　Sir Isaac Newton
訳者　ひでちゃん

発行した人　ひでちゃん
発行した所　ひでちゃんち
印刷した所　いずこかのプリンタ
製本した所　あなた次第