ヴィエート著作集

目　次

まえおき

フランソワ・ヴィエート (François Viète，ラテン名は Franciscus Vieta : 1540–1603) は，フランス西部，現在のヴァンデ県 (Vendée)，の村フォントネー・ル・コント (Fontenay-le-Comte) に生まれ，現在のヴィエンヌ県 (Vienne) の県庁所在地ポワティエ (Poitiers) にある，ポワティエ大学で法学を修めた，本業は法律家である。ちなみに，ポワティエ大学は 1431 年の創立で，人文主義者・作家のラブレー (François Rabelais : 1483–1553) や哲学者・数学者のデカルト (René Descartes : 1596–1650) もここの出身だそうである。

ヴィエートは 1559 年に帰郷後，法律家として開業し，評判はよかったらしい。1564 年頃からユグノー派の家系であるアントワネット夫人 (Antoinette d'Aubeterre : 1532–1580) の法律顧問を務め，その娘カテリーヌ・ド・パルトネー (Cathérine de Parthenay : 1557–1631) の家庭教師にもなっている。この頃はフランス西部，現在のシャラント・マリティム県 (Charente-Maritime)，の都市ラ・ロシェル (La Rochelle) で過ごしていた。なお，ヴィエート自身は終生カトリックに留まっていたようである。

1570 年にパリに出て，翌年にはパリ高等法院の法律顧問になっている。その後，アンリ 3 世 (Henri III : 在位 1574–1589) やアンリ 4 世 (Henri IV : 在位 1589–1610) の顧問官を務め，激動期 —— カトリックとプロテスタントとの宗教対立 (これは 1598 年のナントの勅令 (Édit de Nantes) で解決) や，アンリ 3 世死後の王位継承権をめぐるスペインとの戦争 —— のフランス王権のために働いた。また，1589 年以降は暗号解読の任務に携わっていて，スペイン王・フェリペ 2 世 (Felipe II : 在位 1556–1598) あての暗号を解読したことは有名である。このことに関して，フェリペ 2 世は，フランス人が彼の軍事計画に気づいていると知ったとき，ローマ法王に「黒魔術が私の国に対して使われている」と訴えたということである。

ヴィエートにとって数学研究は趣味あるいは道楽といえるものであったようであるが，多忙な彼が比較的ヒマであった 1564〜1568 年，1584〜1589 年の 2 つの時期に行われている。そして，「数学的表」(*Canon Mathematicus* : 1579 年)，「解析法序説」(*In Artem Analyticem Isagoge* : 1591 年)，「探究法 5 巻」(*Zeteticorum Libri Quinque* : 1591 年) や「方程式の再検討および改良についての 2 つの論文」(*De Æquationum Recognitione & Emendatione Tractatus duo* : 1591 年) などの著作を残している。

これらのうち，「数学的表」は天文学の数学的準備を意図した三角法による数表である。そして，彼は「解析法序説」において未知量だけでなく既知量についても記号化を行い，自ら「新代数学」(algebra nova) と名づけて旧来の代数 (コス式代数) からの脱皮を目指し，解析幾何学への道を拓いた。そのため近代代数学の父と呼ばれている。

また，彼は円周率 π の無限積表示

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ \cdots\cdots$$

を史上初めて導いた (「数学的な事柄についてのさまざまな回答 8 巻」(*Variorum de Rebus Mathematicis Responsorum, Liber VIII*) : 1593 年，第 18 章命題 2 系) ほか，ベルギーの数学者ファン・ローメン (Adriaan van Roomen (Adrianus Romanus) : 1561–1615) が提示した 45 次方程式に 23 個の解を与えたことや改暦をめぐってのドイツ生まれのイタリアの数学者・天文学者クラヴィウス (Christoph

Clavius : 1537–1612) との論争は有名である。

なお，その 45 次方程式は，

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 - 1138500x^7 + 7811375x^9 - 34512075x^{11} + 105306075x^{13} - 232676280x^{15} + 384942375x^{17} - 488494125x^{19} + 483841800x^{21} - 378658800x^{23} + 236030652x^{25} - 117679100x^{27} + 46955700x^{29} - 14945040x^{31} + 3764565x^{33} - 740259x^{35} + 111150x^{37} - 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = A$$

であったといい (［12］p.77)，この方程式の解法がきっかけとなってヴィエートとファン・ローメンは親交を結んだという。

この方程式の左辺は，$x = 2\sin\theta$ として $2\sin 45\theta$ を x の多項式として表したもので，問題は，$A = 2\sin 45\theta$ とするとき $x = 2\sin\theta$ を求めよ，すなわち与えられた角を 45 等分せよ［左辺は 45 倍角の公式 !!］，というものであった。ヴィエートはこれを見抜いて解いたという (［12］p.86，88)。

ローマ法王グレゴリウス 13 世 (Gregorius XIII : 1502–1585) によって定められたグレゴリオ暦は 1582 年 2 月 24 日に発表されている。フランスでグレゴリオ暦が採用されたのは 1582 年 12 月 (20 日?) のことである。ついでに言うと，キリスト教 (のカトリック) の最高位聖職者に対して，かつては「法王」と「教皇」が混用されていたが，1981 年 2 月のヨハネ・パウロ 2 世 (Ioannes Paulus II : 1920–2005) の来日を機に，カトリック教会では「ローマ教皇」に統一された，ということである。

訳出にあたっては，

Francisci Vietae Opera Mathematica, In unun Volumen congesta, ac recognita, Operâ atque studio Francisci à Schooten Leydensis, Matheseos Professoris，Lugduni Batavorum, Ex Officinâ Bonaventurae & Abrahami Elzeviriorum, 1646

を使用した —— これは「編者による書きかえがあるので注意を要する」(［D2］p.81) そうであるが，他に適当なものが入手できないため —— 。なお，以下ではこれを『全集』と呼ぶ。また，

F. Viète (transl. by T. Richard Witmer)，*The Analytic Art*，Dover Publications，2006［以下では，『解析術』と呼ぶ。］

を参照した。

また，以下の文献を利用した。

［1］ Jacob Klein (transl. by Eva Brann)，*Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*，Dover Publications，1992

［2］ D. J. Struik (edited)，*A Source Book in Mathematics, 1200–1800*，Princeton U. P.，1986

［3］ Sir Thomas L. Heath，*Diophantus of Alexandria*，Dover Publications，1964

［4］ Ivor Thomas (transl.)，*Greek Mathematical Works.* vol.II，Harvard U. P. (Loeb Classical Library 362)，2005

［5］ ユークリッド (中村 幸四郎，寺阪 英孝，伊東 俊太郎，池田 美恵・訳・解説)「ユークリッド原論」，共立出版，1971 (昭和 46)

［6］ 中村 幸四郎「近世数学の歴史　— 微積分の形成をめぐって —」，日本評論社，1980 (昭和 55)

［7］ 中村 幸四郎「数学史　— 形成の立場から —」，共立出版 (共立全書 236)，1981 (昭和 56)

［8］ 佐々木 力「数学史」，岩波書店，2010 (平成 22)

［9］ V. カッツ (上野 健爾，三浦 伸夫・監訳)「カッツ 数学の歴史」，共立出版，2005 (平成 17)

［10］ 近藤 洋逸「数学の誕生　— 古代数学史入門 —」，現代数学社，1977 (昭和 52)

［11］ B. L. ヴァン・デル・ヴァルデン (村田 全，佐藤 勝造・訳)「数学の黎明　— オリエントからギリシアへ —」，みすず書房，1984 (昭和 59)

［12］ 木村 俊一「天才数学者はこう解いた，こう生きた　— 方程式四千年の歴史 —」，講談社 (講談社選書メチエ 225)，2001 (平成 13)

［13］ 大矢 真一，片野 善一郎「数字と数学記号の歴史」，裳華房 (基礎数学選書 18)，1978 (昭和 53)

［D1］ 日本数学会 (編集)「岩波　数学辞典　第 4 版」，岩波書店，2007 (平成 19)
［D2］ 伊東 俊太郎，坂本 賢三，山田 慶児，村上 陽一郎 (編集委員)「縮刷版　科学史技術史事典」，弘文堂，1994 (平成 6)

※ 1　訳文中の［　］はスホーテン (Frans van Schooten : 1615–1660)，ボーグラン (Jean Beaugrand : 1584?-1640) あるいは訳者による補足。

※ 2　字下げされた小活字の部分は訳者の覚え書。

解析法序説

『全集』pp.1–12

原題は *In Artem Analyticen Isagoge*。
初めに出版されたのは 1591 年。版によって標題が異なるという。すなわち，1591，1624，1631 年版は *In Artem Analyticem Isagoge*，1635 年版は *In Artem Analyticam Isagoge*，1646 年版は *In Artem Analyticen Isagoge* ということらしい。
代数の記号化を推進し，方程式を基礎に据えた問題解決の方法の確立を目指したもの。ヴィエートの名を不朽のものとした，代数解析の幕開けを告げる記念碑的な論文。

第 1 章 1

解析の定義と分類について，および探究法にとって有用であることについて

数学においては真理を追究する［ための］ある方法があり，それはプラトン (Πλάτων (Platōn) : 前 427–前 347) が初めて発見したといわれ，［アレクサンドリアの］テオン (Θέων (Theōn of Alexandria) : 335?–405?) によって解析と名づけられ，彼によって，求めたいことをあたかも認められているかのように仮定し，その［仮定からの］帰結を通して認められている真実へと［至ること］，と定義されたものである。一方，総合とは認められていることを仮定してその［仮定からの］帰結を通して求められている結論およびその理解へと［至ることである］。そして，古代人はただ 2 つの解析，［すなわち］探究法および確証法 (ζητητικὴν και ποριστικὴν : zetetic and poristic) —— これらについてはテオンの定義が特に関係している —— だけを提示したが，私はその他に，修辞法あるいは釈義法 (ῥητικὴ ἢ ἐξηγητικὴ : rhetic or exegetic) といわれる，第 3 の種類のものを確立した。探究法とは，求められているものの大きさと与えられたもののそれとについて，方程式あるいは比例が見出されることである。確証法とは，方程式あるいは比例によって，構成された定理の真実性が確かめられることである。釈義法とは，構成された方程式あるいは比例から，求められているものの大きさが提示されることである。そして，それゆえ，3 つの解析の技法全体は，このような役割を自分のものであると主張しており，数学において［定理が］よく見出されるための教義として定義されるべきである。そして，探究法に関係することは何でも，それらの前提 (firmamenta) はそれによって方程式および比例が結論づけられる基本則 (symbola) そのものである，三段論法および省略三段論法による論証の技法によって確立され，それらは共通概念［公理］からも解析そのものの力によって構成される定理からも導かれるであろう。しかし，探究法の方法 (forma) は固有の技法によって決定され，古代の解析学者の退屈さであった，数についての計算 (logica) において用いるのではなく，同次のものの法則［同次元の法則］がはじめに提示され，そして確立されたなら，大きさを互いに比較するのにより実り多くより力強いものである，最近生み出された種［記号］(species) についての計算［記号代数］のために用いるものである。それゆえ，それ自身の力によって種類から種類へと比例的に (ex genere ad genus vi sua proportionaliter) 上がるあるいは下がる大きさの系列または階梯 (scala) が確立されたのであり，それらの比較において同じ階級 (gradus) および種類 (genus) が表され，そして区別されるのである。

ヴィエートははじめに解析の技法について述べているが，それらの用語について *An Intermediate Greek-English Lexicon*，Oxford U. P.，1968 (以下でも，ギリシア語については主にこれによる。) では次のようになっている。

ζητητικός : *disposed to search* or *inquire*, *searching*, *inquiring*

ζητέω : *to seek*, *seek for*, *to enquire for*, *to ask about* a thing, *to search after*, *search out*, *to search* or *inquire into*, *investigate*, *to require*, *demand*, *to seek after*, *desire*, *to have to seek*, *feel the want of*

ποριστικός : *able to furnish*

ποριζω : *to carry*, *to bring about*, *to furnish*, *provide*, *supply*, *procure*, *cause*

ῥητορικός : *oratorical*, *rhetorical*

ἡ ῥητορική : *rhetoric*, *the art of speaking*

ἐξηγητικός : *of* or *for interpretation*

これらの用語についての適当な訳語を見つけられなかったので，とりあえず上のように訳しておいた。佐々木［8］，カッツ［9］では，それぞれに次のように訳されている。

	佐々木［8］	カッツ［9］
zetetic	探究法	探求的解析
poristic	確認法	補完的解析
rhetic	表示法	解説的解析
exegetic		釈義的解析

佐々木 力は，ここに見られる 3 種の解析の定義は，完全なヴィエートの独創ではなく，ラムス (Petrus Ramus (Pierre de la Ramée) : 1515–1572) に由来するものであることを指摘している（［8］p.401)。

解析について，パッポス (Πάππος (Pappos，Pappus) : 4 世紀前半) は『数学集成』(Συναγωγη : *Synagoge*，*Collectio*) 第 7 巻において次のように述べている（［4］pp.596–599)。

「解析 (ἀνάλυσις : analysis) とは求められていることをあたかも認められているかのようにおいて，そこからの順序正しい帰結を通して，総合の結果として認められるあることに進んでいく方法である。つまり，解析においては，求められていることが既になされたと仮定して，このことが何から生じるのかとか，また後者の前提となる根拠は何かなどを，既に知られているかあるいは第 1 原理として挙げられているあることに出会うまで，後戻りすることによって調べるのである。そして，そのような方法を，逆向きの解法ということで，解析と呼ぶのである。

一方，総合 (σύνθεσις : synthesis) においては，［解析の］逆の方向に進むのであり，［つまり，］解析において最後に到達したことを既になされたと仮定して，以前に前提であったことの結果としてそれらを自然な順序に整理し，それらをたがいに結び付けることによって，最後に求められたことの作図へと到達する。そして，これを総合と呼ぶのである。

解析には 2 つの種類があり，1 つは，その目的が真理を追究することであって，理論的といわれ，そして他方は，その目的が発見のためにおくものを見出すことであって，問題的といわれる。」

なお，この『数学集成』第 7 巻は「解析のトポス」,「解析の宝庫」などといわれている。

第 2 章
方程式および比例の基本則について

解析は証明されたこととして，『原論』(Στοιχείωσις) に見られる，方程式および比例の，よく知られている，基本則を仮定する。それらは次のようなものである。

1　全体はその部分［の和］に等しい。

2　同じものに等しいものは互いに等しい。

3　もし等しいものが等しいものに加えられるならば，全体［和］は等しい。

4　もし等しいものが等しいものから取り去られるならば，残り［差］は等しい。

5　もし等しいものが等しいものに掛けられるならば，つくられたもの［積］は等しい。

6　もし等しいものが等しいものによって割られるならば，生じたもの［商］は等しい。

7　もし直接に比例しているものがあれば，［それは］逆にも，交替的にも比例している。 2

8　もし類似の比例が類似の比例に加えられるならば，全体［和］は比例している。

9　もし類似の比例が類似の比例から取り去られるならば，残り［差］は比例している。

10　もし比例が比例に掛けられるならば，つくられたもの［積］は比例している。

11　もし比例が比例によって割られるならば，生じたもの［商］は比例している。

12　方程式あるいは比は共通の乗数または除数によって変えられない。

13　いくつかの切片［部分］によってつくられたもの［の和］は全体によってつくられたものに等しい。

14　大きさによって連続的につくられたもの［連続的な積］，あるいはそれらから連続的に生じたもの［連続的な商］は，どのような大きさの順で導出あるいは結合が行われても，等しい。

しかし，方程式および比例の最高の (κύριον) 基本則，［そして］解析において非常に重要であるもの，は［次のものである。］

15　もし 3 つないし 4 つの大きさがあり，外項によってつくるもの［外項の積］と中項自身からあるいは中項によってつくるもの［内項の平方あるいは内項の積］が等しいならば，それらは比例している。

そして，逆に

16　もし 3 つないし 4 つの大きさがあり，第 1 のものが第 2 のものに対して第 2 のものあるいは第 3 の何かが他のもの［残りのもの］に対するならば，外項によってつくるもの［外項の積］は中項によってつくるもの［内項の積］に等しいであろう。

それゆえ，比例は方程式の構成，方程式は比例の解［比例は方程式がそれから構成されるもの，方程式は比例がそれを解決するようになるもの］ということができる。

ヴィエートは方程式や比例を扱うための基本法則を挙げているが，7 以降の比例に関する内容は次のとおり。

7　$a:b=c:d$　ならば　$b:a=d:c$，$a:c=b:d$

8　$a:b=c:d$　ならば　$(a+c):(b+d)=a:b$

9　$a:b=c:d$　ならば　$(a-c):(b-d)=a:b$

10　$a:b=c:d$，$e:f=g:h$　ならば　$ae:bf=cg:dh$

11　$a:b=c:d$，$e:f=g:h$　ならば　$a/e:b/f=c/g:d/h$

12　$ma:mb=a:b$，$a/m:b/m=a:b$

13　$ab+ac=a(b+c)$

14　$a\times b=b\times a$，$(a/b)/c=(a/c)/b$

15　$ad=bc$　ならば　$a:b=c:d$　および　$ac=b^2$　ならば　$a:b=b:c$

16　$a:b=c:d$　ならば　$ad=bc$　および　$a:b=b:c$　ならば　$ac=b^2$

なお,『原論』には次のような命題がある（［5］p.107，p.104，p.110，p.184，p.106)。

第 5 巻命題 16「もし 4 つの量が比例するならば，いれかえても比例するであろう。」すなわち，$a:b=c:d$ ならば，$a:c=b:d$ である。

第 5 巻命題 12「もし任意個の量が比例するならば，前項の 1 つが後項の 1 つに対するように，前項の総和が後項の総和に対するであろう。」すなわち，$a:a'=b:b'=c:c'=\cdots$ ならば，$a:a'=(a+b+c+\cdots):(a'+b'+c'+\cdots)$ である。

第 5 巻命題 19「全体が全体に対するように，引き去られた部分が引き去られた部分に対するなら

ば，残りの部分も残りの部分に対し，全体が全体に対するであろう。」すなわち，$a:b=c:d$ ならば，$(a-c):(b-d)=a:b$ である。
第 8 巻命題 5「平面数は互いに辺の比の積の比をもつ。」すなわち，$a=cd$，$b=ef$ ならば，$a:b=(c:e)\times(d:f)$ である。
第 5 巻命題 15「約量は同順にとられたとき，それらの同数倍と同じ比をもつ。」すなわち，m を自然数とするとき，$a:b=ma:mb$ である。

κύριος : of persons, *having power* or *authority over*, *lord* or *master of*, *having authority*, *authoritative*, *supreme* ; not of persons, *authoritative*, *decisive*, *dominant*, *supreme*, of time, *fixed*, *ordained*, *appointed*

第 3 章
同次のものの法則および比較された大きさの階級と種類について

同次のものについて考えられたものであるために，同次のものの法則［同次元の法則］といわれる，方程式または比例の最も重要で不朽の法則はこれである。

同次のものは同次のものによって比較されること。
［同次のものだけが互いに比較されるべきである。］

なぜならば，アドラストス (Ἄδραστος (Adrastus)) が言ったように，異質であるものはどのように互いに影響を与えるかを知ることができないからである。

アドラストスは 2 世紀に活躍した，アフロディシアス (Aphrodisias : 現トルコ) 出身のアリストテレス学派 (逍遥学派) の哲学者・数学者。アリストテレス (Ἀριστοτέλης (Aristoteles) : 前 384–前 322) の著作や彼の哲学体系についての論文がシンプリキオス (Σιμπλίκιος (Simplicius) : 490?–560?) やアキレス・タティウス (Ἀχιλλεύς Τάτιος (Achilles Tatius) : 3 世紀) に引用されている。プラトンの『ティマイオス』(Τίμαιος περὶ φύσεως) の注釈なども著しているようであるが，和声学についての論文 Περὶ Ἁρμονικῶν 以外は残っていない。この和声学についての論文はスミュルナのテオン (Θέων (Theon of Smyrna) : 70?–135?) に引用されているという。
ところで，アドラストスというと，他に ……
ギリシア神話に登場する人物で，ギリシアの都市アルゴス (Ἄργος (Argos)) の王。7 将でテーバイ (Θήβαι (Thebes)) を攻めたが失敗し，7 将のうち自分 1 人だけが生還した。10 年後に再びエピゴノイ (επιγονοι (epigonoi) : テーバイ攻めの 7 将の子供たち) がテーバイを攻め，勝利した。その際に息子のアイギアレウス (Αἰγιαλεύς (Aigialeus)) が戦死したため，悲しみのあまりアドラストス自身も死んでしまった。テーバイ伝説を題材にしたものに古代アテネの詩人アイスキュロス (Αισχύλος (Aischylos) : 前 525?–前 456?) の悲劇『テーバイ攻めの七将』(Ἑπτά ἐπί Θήβας) などがある。

T. Richard Witmer はアドラストスの言明についての典拠は［アレクサンドリアの］テオンの『原論』(Theon's Euclid) であろうという (『解析術』p.15)。

それゆえ，

大きさが大きさに加えられるならば，これ［和］はそれ［元の大きさ］と同次のものである。
大きさが大きさから取り去られるならば，これ［差］はそれ［元の大きさ］と同次のものである。
大きさが大きさに掛けられるならば，つくられるもの［積］はこれおよびそれ［の双方］と同次のものである。
大きさが大きさで割られるならば，これ［商］はそれ［被除数］と同次のものである。

これらのことに注目しなかったことが古代の解析学者の大いなる無知と盲目性の原因であった。

2　それ自身の力によって種類から種類へと比例的に上がるあるいは下がる大きさは階梯的 3
(scalares) といわれる。

3　最初の階梯的な大きさは

辺 (latus) または根 (radix)

である。［そして，］

［第］2［もののは］平方 (quadratum)

［第］3［のものは］立方 (cubus)

［第］4［のものは］平方の平方 (quadrato-quadratum)

［第］5［のものは］平方の立方 (quadrato-cubus)

［第］6［のものは］立方の立方 (cubo-cubus)

［第］7［のものは］平方の平方の立方 (quadrato-quadrato-cubus)

［第］8［のものは］平方の立方の立方 (quadrato-cubo-cubus)

［第］9［のものは］立方の立方の立方 (cubo-cubo-cubus)

［である。］

そして，残りは同じ系列および方法によって連続して名づけられる。

4　比較された大きさの種類は，階梯［的な大きさ］の順に述べられると，

［第］1［のものは］長さ (longitudo) あるいは幅 (latitudo)

［第］2［のものは］平面 (planum)

［第］3［のものは］立体 (solidum)

［第］4［のものは］平面的平面 (plano-planum)

［第］5［のものは］平面的立体 (plano-solidum)

［第］6［のものは］立体的立体 (solido-solidum)

［第］7［のものは］平面的平面的立体 (plano-plano-solidum)

［第］8［のものは］平面的立体的立体 (plano-solido-solidum)

［第］9［のものは］立体的立体的立体 (solido-solido-solidum)

であり，残りは同じ系列および方法によって連続して名づけられる。

5　階梯的な［大きさの］系列の中で，辺に関してより高い階級，それゆえ比較された大きさが一致する［階級］，はベキ (potestas) といわれる。残りのより低い階梯的な大きさはベキへと至る階級 (gradus parodici ad potestatem) である。

6　ベキは，［加法あるいは減法で］作用するものがないとき，純粋である。同次のものがベキへと至る階級および結び付けられた補足的な大きさ［係数］(adscita coefficiente magnitudo) によって［加法あるいは減法で］作用されたものは混ぜ合わされている。

7　それおよびあるベキへと至る階級によってつくられるものが，それ［積］を作用するであろ 4
うベキと同次のものである，結び付けられた［補足的な］大きさは下位階級的 (sub-gradualis)［な大きさ］といわれる。

ヴィエートにとっては同次のものの法則［同次元の法則］という制約があるため，方程式の各項は同次元である必要があった。その基となる次元・次数に関することが述べられている。
彼は次数の系列あるいは構造のことを階梯と呼ぶ。そして，未知量について，それぞれの次数の

項は階級といわれ，辺，平方，立方などと表現される。一方，既知量については各々の次数の項を種類といって，長さ，平面，立体などの幾何学的な用語を用いている。すなわち，

階梯的な大きさ (未知量)	現代記号	比較された大きさ (既知量)	現代記号
辺 または 根	x	長さ または 幅	a
平方	x^2	平面	a^2
立方	x^3	立体	a^3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

のようになっている。

辺に関して次数が高い (すなわち 2 次以上の) 階級，現代風にいえば未知量 x の 2 次以上の累乗 (x^n)，を「ベキ」といい，それより低い次数のもの (x，x^2，$\cdots$，x^{n-1}) をその「ベキへと至る階級」という。

そして，平方，立方，平方の平方など，ベキ単独の単項式を「純粋な」ベキという。一方，純粋なベキに係数を伴う累乗 (ax^m) を作用させた［すなわち，加法・減法を施した］もの ($x^n \pm ax^m$) を「混ぜ合わされている」ベキという。このとき，係数 a が「結び付けられた補足的な大きさ」であり，ベキ x^m が x^n に関して「ベキへと至る階級」である。そして，ax^m が x^n と同次元になるとき，a を「下位階級的［な大きさ］」という。

例えば，多項式 $x^4 + ax^2$ は混ぜ合わされているベキであり，a が結び付けられた補足的な大きさ，x^2 が x^4 に関してベキへと至る階級である。この場合，ax^2 は見かけ上 x^4 と同次元ではないから，各項を 4 次元に合わせるためには，a は 2 次元［すなわち，平面］であると考えることになる。このようにみなしたときの平面 a が下位階級的な大きさである。同様に，$x^4 + ax$ について，x は x^4 に関してベキへと至る階級で，結び付けられた補足的な大きさである "立体" a は下位階級的な大きさである。

もちろん，同次元の法則を明確にしておきたいのなら，はじめから $x^4 + a^2x^2$ のように表しておくとよい。このように表したとき，a^2 は結び付けられた補足的な大きさではあるが，下位階級的な大きさとはいわないことになる。

なお，スホーテン (Franciscus van Schooten : 1615–1660) はこの論文についての注釈において，混ぜ合わされているベキとして次のようなものを挙げている (『全集』pp.3–4)。

「第 2 の階級

1　辺と長さまたは幅の積である平面を伴う平方。[$x^2 + ax$]

第 3 の階級

1　平方と長さまたは幅の積である立体を伴う立方。[$x^3 + ax^2$]

2　辺と平面の積である立体を伴う立方。[$x^3 + a^2x$]

3　一方は平方と長さまたは幅の積，他方は辺と平面の積という，二様の立体を伴う立方。[$x^3 + (ax^2 + b^2x)$]

第 4 の階級

1　立方と長さまたは幅の積である平面的平面を伴う平方の平方。[$x^4 + ax^3$]

2　平方と平面の積である平面的平面を伴う平方の平方。[$x^4 + a^2x^2$]

3　辺と立体の積である平面的平面を伴う平方の平方。[$x^4 + a^3x$]

4　一方は立方と長さまたは幅の積，他方は平方と平面の積という，二様の平面的平面を伴う平方の平方。[$x^4 + (ax^3 + b^2x^2)$]

5　一方は立方と長さまたは幅の積，他方は辺と立体の積という，二様の平面的平面を伴う平方の平方。[$x^4 + (ax^3 + b^3x)$]

6　一方は平方と平面の積，他方は辺と立体の積という，二様の平面的平面を伴う平方の平方。[$x^4 + (a^2x^2 + b^3x)$]

7　1 つ目は立方と長さまたは幅の積，2 つ目は平方と平面の積，3 つ目は辺と立体の積という，三様の平面的平面を伴う平方の平方。[$x^4 + (ax^3 + b^2x^2 + c^3x)$]」

第 4 章

種［記号］による計算の規則について

数計算 (logistice numerosa) は数によって，記号計算 (logistice speciosa) は記号あるいはものの形によって，すなわちアルファベットの字母によって，表される。

記号計算には，数［計算］のように，4 つの標準的な規則がある。

規則 I

大きさを大きさに加えること。

2 つの大きさを A および B としよう。一方に他方を加えなければならない。

それゆえ，大きさが大きさに加えられなければならないが，同次のもの［の大きさ］は異質のもの［の大きさ］に作用しないから，加えられることに関係するものは 2 つの同次のものの大きさである。しかし，より大きいものあるいはより小さいものは異なった種類をつくらない。それゆえ，それらは結合または付加［加法］の記号によって適切に加えられるであろう。そして，もしそれらが単純な長さまたは幅であるならば，加えられたもの［和］は A plus B であろう。

しかし，もしそれらが［上で］説明された階梯に関して上がっている［より高い次数である］ものか，あるいは上がっている種類を共有するものであるならば，それらにふさわしい呼び方によって表されるものは，例えば A quadratum plus B plano［$A^2 + B^2$］，あるいは A cubus plus B solido［$A^3 + B^3$］などといわれるであろうし，残りも同様である。

しかし，解析学者は記号 $+$ によって加法の作用を表すのが常である。

規則 II

大きさを大きさから取り去ること。

2 つの大きさを A および B とし，前者がより大きく，後者がより小さいとしよう。小さいものを大きいものから取り去らなければならない。

それゆえ，大きさが大きさから取り去られなければならないが，同次のものの大きさは異質のもの［の大きさ］に作用しないから，［減法に］関係するものは 2 つの同次のものの大きさである。しかし，より大きいものあるいはより小さいものは異なった種類をつくらない。それゆえ，分離または除去［減法］の記号によって小さいものを大きいものから適切に取り去ることが起きるであろう。そして，もしそれらが単純な長さまたは幅であるならば，取り去られたもの［差］は A minus B であろう。

しかし，もしそれらが［上で］説明された階梯に関して上がっている［より高い次数である］ものか，あるいは上がっている種類を共有するものであるならば，それらにふさわしい呼び方によって表されるものは，例えば A quadratum minus B plano［$A^2 - B^2$］，あるいは A cubus minus B solido［$A^3 - B^3$］などといわれるであろうし，残りも同様である。

もし，いま，取り去られるものの大きさ自身が作用されたものであるとしても，全体およびその部分は異なった仕方で考察されるべきではないから，操作は異なるものではない。例えば，もし A から B plus D が引き去られると，残りは A minus B minus D であろうし，大きさ B および D は 1 つずつ取り去られる。

しかし，もし，いま，D が B 自身から拒否されていて［D が B から取り去られていて］，B minus D が A から取り去られるならば，大きさ B を取り去ることは大きさ D によってより大き

く取り去られることと等しいから，それらは相殺されて加えることになるので，残りは A minus B plus D であろう。

しかし，解析学者は記号 − によって減法の作用を表すのが常である。そして，この残余 (λείψις) は，加法の作用が増大 (ὕπαρξις) であるのと同様，ディオファントス (Διόφαντος (Diophantos) : 250 頃活躍) によるものである。

しかし，どちらの大きさがより大きいかあるいはより小さいかが提示されず，しかも，それでも減法が行われなければならないとき，差，すなわち不確かな小ささ，の記号は = である。例えば，A quadrato および B plano が提示されると，差は A quadratum = B plano あるいは B planum = A quadrato であろう。

Henry George Liddell and Robert Scott, *A Greek-English Lexicon*, Oxford. Clarendon Press によれば，
λείψις は *omission*, *failure*, *lack*, Math., *negative term* in an algebraic expression
ὕπαρξις は *existence*, *reality*, in Logic, *existence in a subject*, Math., *positive term*; *substance*
両語とも (そのままの形では) *An Intermediate Greek-English Lexicon* にはない。

規則 III
大きさを大きさに掛けること。

2 つの大きさを A および B としよう。一方に他方を掛けなければならない。

それゆえ，大きさが大きさに掛けられなければならないから，それらはそれらの積 (ductu) によってそれら自身とは異質の大きさにされるであろう。そして，それゆえ，それらがつくるもの［積］は用語 IN または SUB［*times* または *by*］によって適切に表されるであろう。例えば，これ［後者］にそれ［前者］が掛けられたものは A in B と，あるいは，さもなければ，もし A および B が単純な長さまたは幅であるならば，つくられたもの［積］は単純に sub A & B と表されるであろう。

しかし，もし階梯において上がっている［次数が高い］，あるいは［高い次数の］同じ種類を共有しているならば，それらの階梯あるいは共有している種類をそれらの呼び方に付け加えるのがよい。例えば，A quadratum in B あるいは A quadratum in B planum solidum のように，また残りも同様に。

掛けられる大きさあるいはそれらのうちのいずれかが 2 つあるいはより多くの項からなるとしても，操作において異なることは起こらない。全体はその部分［の和］に等しいから，それゆえある大きさの切片［部分］によってつくられたもの［の和］は全体によってつくられたものに等しい［からである］。そして，ある正の大きさの項 (adfirmatum unius magnitudinis nomen) に別の正の大きさの項が掛けられると，つくられたものは正になるであろうし，負［の項］が掛けられると負になるであろう。

6 さらに，この規則によって，ある負の項が別の負の項に掛けられるとつくられたものは正なることが従う。例えば，$A = B$ に $D = G$ が掛けられるときのように。［このとき，］正の A 掛ける負の G から負のものが残り，A は前に導かれたものが不正確に掛けられる大きさである［A は掛けられるべき本当の大きさではない］から，非常に多くのものが拒否される［取り去られる］か減らされるかである。そして同様に，負の B 掛ける正の D から負のものが残り，D は前に導かれたも

のが不正確に掛けられる大きさであるから，非常に多くのものが再び拒否される。それゆえ，負の B 掛ける負の G のときは，相殺されて，つくられたものは正である。

種類から種類へと比例的に (proportionaliter ex ganere ad genus) 上がる大きさからつくられたものの名前は互いに正確な仕方をもっている。

辺掛けるそれ自身は平方をつくる。[$x \times x = x^2$]

辺掛ける平方は立方をつくる。[$x \times x^2 = x^3$]

辺掛ける立方は平方の平方をつくる。[$x \times x^3 = x^4$]

辺掛ける平方の平方は平方の立方をつくる。[$x \times x^4 = x^5$]

辺掛ける平方の立方は立方の立方をつくる。[$x \times x^5 = x^6$]

そして，逆に，平方掛ける辺は立方をつくり，立方掛ける辺は平方の平方をつくる，など。また，

平方掛けるそれ自身は平方の平方をつくる。[$x^2 \times x^2 = x^4$]

平方掛ける立方は平方の立方をつくる。[$x^2 \times x^3 = x^5$]

平方掛ける平方の平方は立方の立方をつくる。[$x^2 \times x^4 = x^6$]

そして，逆に。また，

立方掛けるそれ自身は立方の立方をつくる。[$x^3 \times x^3 = x^6$]

立方掛ける平方の平方は平方の平方の立方をつくる。[$x^3 \times x^4 = x^7$]

立方掛ける平方の立方は平方の立方の立方をつくる。[$x^3 \times x^5 = x^8$]

立方掛ける立方の立方は立方の立方の立方をつくる。[$x^3 \times x^6 = x^9$]

そして，逆に。そして，この順で続く。

同次のもの［の大きさ］についても同様で，

幅掛ける長さは平面をつくる。[$a \times a = a^2$]

幅掛ける平面は立体をつくる。[$a \times a^2 = a^3$]

幅掛ける立体は平面的平面をつくる。[$a \times a^3 = a^4$]

幅掛ける平面的平面は平面的立体をつくる。[$a \times a^4 = a^5$]

幅掛ける平面的立体は立体的立体をつくる。[$a \times a^5 = a^6$]

そして，逆に。

平面掛ける平面は平面的平面をつくる。[$a^2 \times a^2 = a^4$]

平面掛ける立体は平面的立体をつくる。[$a^2 \times a^3 = a^5$]

平面掛ける平面的平面は立体的立体をつくる。[$a^2 \times a^4 = a^6$]

そして，逆に。

立体掛ける立体は立体的立体をつくる。[$a^3 \times a^3 = a^6$]

立体掛ける平面的平面は平面的平面的立体をつくる。[$a^3 \times a^4 = a^7$]

立体掛ける平面的立体は平面的立体的立体をつくる。[$a^3 \times a^5 = a^8$]

立体掛ける立体的立体は立体的立体的立体をつくる。[$a^3 \times a^6 = a^9$]

そして，逆に。そして，この順で続く。

規則 IV

大きさを大きさで割ること。

2 つの大きさを A および B としよう。一方を他方で割らなければならない。

それゆえ，大きさが大きさで割られなければならないが，しかもより高いもの［高次の項］がよ

り低いもの［低次の項］で，［すなわち］同次のものが異質のもので割られるのであるから，提示されるものは異質のものである。実際，A を長さ，B を平面としよう。それゆえ，割られるものであるより高い B とより低い A との間に小枝［横線］をはさむのがよく，それによって除法が行われる。

しかし，大きさ自身にはそれらについていた，あるいは比例的なまたは同次のものの階梯に持ち
7 込まれた，それらの種類に応じて，名前が付けられるであろう。例えば，$\dfrac{B \text{ planum}}{A}$ のようなとき，この記号によって平面 B が長さ A で割られることによってつくられる幅が表される。

そして，もし B が立体，A が平面として与えられるならば，［それらの商は］$\dfrac{B \text{ cubus}}{A \text{ plano}}$ で示され，この記号によって立体 B が平面 A で割られることによってつくられる幅が表される。

そして，B が立体，A が長さとおかれるならば，［それらの商は］$\dfrac{B \text{ cubus}}{A}$ で示され，この記号によって立体 B が A で割られることによって生じる平面が表される。そして，この順で無限にそうである。

種類から種類へと比例的に上がる大きさで割られることで生じたものの名前は互いに正確な仕方をもっている。

平方割る辺は辺を返す。［$x^2 \div x = x$］

立方割る辺は平方を返す。［$x^3 \div x = x^2$］

平方の平方割る辺は立方を返す。［$x^4 \div x = x^3$］

平方の立方割る辺は平方の平方を返す。［$x^5 \div x = x^4$］

立方の立方割る辺は平方の立方を返す。［$x^6 \div x = x^5$］

そして，逆に，立方割る平方は辺を返し，平方の平方割る立方は辺を返す，など。また，

平方の平方割る平方は平方を返す。［$x^4 \div x^2 = x^2$］

平方の立方割る平方は立方を返す。［$x^5 \div x^2 = x^3$］

立方の立方割る平方は平方の平方を返す。［$x^6 \div x^2 = x^4$］

そして，逆に。また，

立方の立方割る立方は立方を返す。［$x^6 \div x^3 = x^3$］

平方の立方の立方割る立方は平方の立方を返す。［$x^8 \div x^3 = x^5$］

立方の立方の立方割る立方は立方の立方を返す。［$x^9 \div x^3 = x^6$］

そして，逆に。そして，この順で続く。

同次のものついても同様で，

平面割る幅は長さを返す。［$a^2 \div a = a$］

立体割る幅は平面を返す。［$a^3 \div a = a^2$］

平面的平面割る幅は立体を返す。［$a^4 \div a = a^3$］

平面的立体割る幅は平面的平面を返す。［$a^5 \div a = a^4$］

立体的立体割る幅は平面的立体を返す。［$a^6 \div a = a^5$］

そして，逆に。

平面的平面割る平面は平面を返す。［$a^4 \div a^2 = a^2$］

平面的立体割る平面は立体を返す。［$a^5 \div a^2 = a^3$］

立体的立体割る平面は平面的平面を返す。［$a^6 \div a^2 = a^4$］

そして，逆に。

立体的立体割る立体は立体を返す。$[a^6 \div a^3 = a^3]$

平面的平面的立体割る立体は平面的平面を返す。$[a^7 \div a^3 = a^4]$

平面的立体的立体割る立体は平面的立体を返す。$[a^8 \div a^3 = a^5]$

立体的立体的立体割る立体は立体的立体を返す。$[a^9 \div a^3 = a^6]$

そして，逆に。そして，この順で続く。

さらに，大きさの加法および減法，あるいは乗法および除法において，除法は［上で］説明された規則によ［ってつくられ］るものを妨げない。除法において，より高いあるいはより低い大きさは同じ大きさが掛けられるとき，除法は乗法がもたらすものについて同じものを取り除くから，大きさの操作は除法によって生じたもの［商］の種類あるいは値に加えられるもの，あるいはそこから取り去られるものは何もない，ことが分かる。例えば，$\dfrac{B \text{ in } A}{B}$ は A であり，$\dfrac{B \text{ in } A}{B}$ planum は A planum である。

それゆえ，加法において，$\dfrac{A \text{ plano}}{B}$ に Z を加えることを要求する。和は $\dfrac{A \text{ planum} + Z \text{ in } B}{B}$ であろう。

あるいは，$\dfrac{A \text{ plano}}{B}$ に $\dfrac{Z \text{ quadratum}}{G}$ を加えることを要求する。和は 8
$\dfrac{G \text{ in } A \text{ planum} + B \text{ in } Z \text{ quadrat}}{B \text{ in } G}$ であろう。

減法において，$\dfrac{A \text{ plano}}{B}$ から Z を取り去ることを要求する。残り［差］は $\dfrac{A \text{ planum} - Z \text{ in } B}{B}$ であろう。

あるいは，$\dfrac{A \text{ plano}}{B}$ から $Z \dfrac{\text{quadratum}}{G}$ を取り去ることを要求する。残り［差］は $\dfrac{A \text{ planum in } G - Z \text{ quad. in } B}{B \text{ in } G}$ であろう。

乗法において，$\dfrac{A \text{ planum}}{B}$ に B を掛けることを要求する。積 (effecta) は A planum であろう。

あるいは，$\dfrac{A \text{ planum}}{B}$ に Z を掛けることを要求する。積は $\dfrac{A \text{ planum in } Z}{B}$ であろう。

あるいは，最後に，$\dfrac{A \text{ planum}}{B}$ に $Z \dfrac{\text{quadratum}}{G}$ を掛けることを要求する。積は $\dfrac{A \text{ planum}}{B \text{ in } G}$ in Z quadratum であろう。

除法において，$\dfrac{A \text{ cubum}}{B}$ を D で割ることを要求する。両方の大きさに B を掛けて，商 (ortiva) は $\dfrac{A \text{ cubus}}{B \text{ in } D}$ であろう。

あるいは，B in G が $\dfrac{A \text{ planum}}{D}$ で割ることを要求する。両方の大きさに D を掛けて，商は $\dfrac{B \text{ in } G \text{ in } D}{A \text{ plano}}$ であろう。

あるいは，最後に，$\dfrac{B \text{ cubum}}{Z}$ を $\dfrac{A \text{ cubum}}{D \text{ plano}}$ で割ることを要求する。商は $\dfrac{B \text{ cubus in } D \text{ planum}}{Z \text{ in } A \text{ cubum}}$ であろう。

この章では記号計算についての四則が述べられる。2 つの「大きさ」A，B について，加法は A plus B あるいは $A+B$ と，減法は A minus B あるいは $A-B$ と，乗法は A in B あるいは sub A & B と，除法は $\dfrac{A}{B}$ と表される。ただし，A，B の大小関係が不明のときの減法は $A=B$ と表される。すなわち，$A=B$ は今日の $A\sim B$ を意味するものである。
ところで，$A-(B-D)$ については，$A-B$ をつくると求めるべき差より D だけ多く引き去ったことになってしまうから，その分の D を加えなければならず，結果として $A-B+D$ となるという。
なお，ヴィエートは等号記号をもっていず，相等関係は aequari (等しくされる) という言葉を使って表している。
最後に挙げられている例を現代風に書き直してみると次のようになる。

$$\frac{A^2}{B}+Z=\frac{A^2+ZB}{B}$$
$$\frac{A^2}{B}+\frac{Z^2}{G}=\frac{GA^2+BZ^2}{BG}$$
$$\frac{A^2}{B}-Z=\frac{A^2-ZB}{B}$$
$$\frac{A^2}{B}-\frac{Z^2}{G}=\frac{A^2G-Z^2B}{BG}$$
$$\frac{A^2}{B}\times B=A^2$$
$$\frac{A^2}{B}\times Z=\frac{A^2Z}{B}$$
$$\frac{A^2}{B}\times\frac{Z^2}{G}=\frac{A^2Z^2}{BG}$$
$$\frac{A^3}{B}\div D=\left(\frac{A^3}{B}\div D\right)\times\frac{B}{B}=\left(\frac{A^3}{B}\times B\right)\div(D\times B)=\frac{A^3}{BD}$$
$$BG\div\frac{A^2}{D}=\left(BG\div\frac{A^2}{D}\right)\times\frac{D}{D}=(BG\times D)\div\left(\frac{A^2}{D}\times D\right)=\frac{BGD}{A^2}$$
$$\begin{aligned}\frac{B^3}{Z}\div\frac{A^3}{D^2}&=\left(\frac{B^3}{Z}\div\frac{A^3}{D^2}\right)\times\frac{ZD^2}{ZD^2}=\left(\frac{B^3}{Z}\times ZD^2\right)\div\left(\frac{A^3}{D^2}\times ZD^2\right)\\&=\frac{B^3D^2}{ZA^3}\end{aligned}$$

これらを見れば，ヴィエートの記号法が，多少ぎこちないものではあるが，今日のものと変わらないことが分かる。
なお，原文では「立方の立方割る立方」を「平方の平方」としている (ので，「立方」に修正した)。

第 5 章
探究法の法則について

探究法をやり遂げる方法は，一般に，これらの法則に含まれる。

1　もし長さについて求められる，さらに提示されるものによって方程式あるいは比例が秘密に包まれている (lateat sub involucris) ならば，求められる長さを辺とする。

2　もし平面について求められている，さらに提示されているものによって方程式あるいは比例が秘密に包まれているならば，求められる平面を平方とする。

3　もし立体について求められている，さらに提示されているものによって方程式あるいは比例が秘密に包まれているならば，求められる立体を立方とする。それゆえ，求められているもの［の階級］は，比較された大きさのいくつかの階級を通って，それ自身の力によって［比例的に］上がるあるいは下がるであろう。

4　与えられた大きさは，求められているものと同様に，問題に述べられた条件に従って，加法，減法，乗法および除法によって，［そして］いたるところに見られる同次のものの法則によって，同化されそして比較されるべきである。

それゆえ，ついに，与えられた大きさ全体によってつくられたもの，あるいは与えられた大きさの部分および求められている不確かなものまたはそれのベキへと至る階級によってつくられたものである，求められている大きさあるいはそれが上がるであろうそれ自身のベキに等しいものが見出されるであろうことは明らかである。

5　何らかの技法によってこの作業を助けるために，変わることのない永続的な，そして非常に明白な記号によって，与えられた大きさが不確かな求められているものから区別されるようにしよう。例えば，求められている大きさが字母 A，その他の母音 E，I，O，U，Y によって，与えられたものが字母 B，G，D，その他の子音によって表されるように。

6　与えられた大きさによって完全につくられたものが，それらの作用の記号に従って，一方が他方に加えられ，あるいは［一方が他方から］取り去られ，そして，比較または与えられた程度において同次のものである，1 つのものに結び付けられて，そして，それは方程式の 1 つの部分［一方の辺］になるであろう。

7　同様に，与えられた大きさや同じベキへと至る階級によってつくられたものが，それらの作用の記号に従って，一方が他方に加えられ，あるいは［一方が他方から］取り去られ，その作用または階級において同次のものである，1 つのものに結び付けられる。

8　［ベキへと至る］階級における同次のものは，それが作用するあるいはそれによって作用される，ベキを伴い，そのベキそのものとともに，方程式の一方の部分［辺］をつくるであろう。そして，それゆえ，与えられた程度における同次のものは，その種類あるいは順序に関して，指示されたベキに従って表現されるであろう。もしそれ［ベキ］が作用によるものではないならば，［それは］純粋である。しかし，もし作用による同次のものがそれを伴うならば，それ自身も結び付けられた補足的な大きさの階級も作用や階級の記号によって表される。

9　そして，それゆえ，もし与えられた程度による同次のものが［ベキへと至る］階級によって 9
混ぜ合わされることが起きるならば，［項の］対照 (antithesis)［移項］が起きる。

対照は，作用された大きさが，反対の作用の記号の下に，方程式の 1 つの部分［辺］から他方へ越えるときに作用するものである。この操作によって，方程式は変わらない。さらに，これはすぐに証明されるであろう。

命題 I

対照によって，方程式は変わらない。

A quadratum minus D plano が G quadrato minus B in A に等しい［$A^2 - D^2 = G^2 - BA$］ことが提示されるとしよう。私は，A quadratum plus B in A は G quadrato plus D plano に等しく［$A^2 + BA = G^2 + D^2$］，反対の作用の記号の下のこの移項 (transpositio) によって方程式は変わらない，という。なぜならば，A quadratum minus D plano は G quadrato minus B in A に等しいから，両辺に D plano plus B in A が加えられると，共通の調査により，A quadratum minus D plano plus D plano plus B in A は G quadrato minus B in A plus D plano plus B in A に等しく，いま，方程式の同じ部分［辺］において，拒否された作用［減法］が立証されたもの［等しいもの］を追い出すと，そこでは D plani の作用，B in A の作用は消滅して，A quadratum plus B in A が G quadrato plus D plano に等しいことが残るであろうからである。

10　そして，もしすべての与えられた大きさに［ベキへと至る］階級が掛けられる，それゆえ，すべての与えられた程度による同次のものがすぐには現れないことが起きるならば，［次数の］降下 (hypobibasmus) が起きる。

降下は，観察されている階梯の順序において，より低い階級による同次のものが，残りのものが同等とみなされるような同次のものに完全に下りるまで，ベキおよび［ベキへと］至る階級が等しく低下することである。この操作によって，方程式は変わらない。さらに，これはすぐに証明されるであろう。

命題 II

降下によって，方程式は変わらない。

A cubus plus B in A quadratum が Z plano in A に等しい［$A^3 + BA^2 = Z^2A$］ことが提示されるとしよう。私は，降下によって，A quadratum plus B in A が Z plano に等しくなる［$A^2 + BA = Z^2$］，という。

なぜならば，これらの立体全体を共通の除数［A］で割ると，そのことによって方程式が変わらないことが示されるからである。

11　そして，もしより高い階級が求められた大きさのそれまで，そのことのために止められることなく，しかし何らかの与えられた大きさが掛けられて，上がることが起きるならば，縮小 (parabolismus) が起きる。

縮小は，求められている［大きさの］より高い階級が掛けられている，与えられた大きさについての方程式がそれによってつくられている，同次のものを，共通に割ることであり，その階級は自身でそのベキの名前を主張し，そのことによってついにはその方程式が残る。この操作によって，方程式は変わらない。さらに，これはすぐに証明されるであろう。

命題 III

縮小によって，方程式は変わらない。

B in A quadratum plus D plano in A が Z solido に等しい［$BA^2 + D^2A = Z^3$］ことが提示されるとしよう。私は，縮小によって，A quadratum plus $\dfrac{D \text{ plano}}{B}$ in A が $\dfrac{Z \text{ solido}}{B}$ に等しくなる［$A^2 + \dfrac{D^2A}{B} = \dfrac{Z^3}{B}$］，という。なぜならば，これらの立体全体を共通の除数 B で割ると，そのことによって方程式が変わらないことが示されるからである。

12　そして，この［ように整理された］とき，方程式はきちんと表されているとみなされ，よく整理された (ordinatus) といわれるであろう。比例 (analogismus) について，もし望むなら，特に次のような注意が思い起こさせられるであろう。すなわち，［その比例の］外項の積はベキや作用された同次のものに相当し，一方，内項の積は与えられた程度による同次のものに相当しなければならない。

13　それゆえ，よく整理された比例は，求められているものを除いてすべてが与えられているか，［あるいは］そのベキおよびその［ベキへと至る］階級であるような，純粋なあるいは混ぜ合わされている項によって述べられた，3 つあるいは 4 つの大きさの系列として定義されなければならない。

14　最後に，方程式や比例がこのようによく整理されたとき，探究法はその機能をやり遂げたと

して評価される。

しかし，ディオファントスは，算術的なことについて書かれたそれらの本の中で，非常に巧妙に探究法のすべてを実行した。しかし，彼は，彼の巧妙さと技能が驚くべきものであったために，それをあたかも，種［記号］によってではなく (それにもかかわらず，彼はそれらを使った。)，数によって確立されたかのように提示した。それらは，数計算においてより巧妙でそして難解なものに見えるために，記号［計算］においては実に親しみやすくすぐに明らかになるものである。

> ヴィエートによれば，探究法の手順はおおむね次のようになる。
>
> まず，求めるべきものをそれらの次元に応じて変数化し (1，2，3)，
> 同次元の法則に注意して立式する (4) のであるが，
> その際に，未知量，既知量ともに記号化して (5)，
> それらに四則演算を適用して方程式の辺とし (6，7，8)，数式によって表現する。
> そして，得られた方程式に移項，低次元化，縮小［簡約］の処理を施して (9，10，11)，
> 「よく整理された」方程式に変換する (12)。
> 比例による場合は，3 つないし 4 つの項を基に立式する (13) が，
> そのときでも同次元の法則に留意する (12) 必要がある。
> あとは，その方程式や比例によって求めるべきものを見出せばよい，という訳である。
> ディオファントスは，完全には記号化されていないが，これらのことを巧妙に行った，という。
>
> 代数解析に関して最も重要なのは「5」の既知量・未知量の記号化である。これによって「一般の」場合の考察が可能になり，方程式論が展開できるようになったし，さらには，解析幾何学から微分積分法へと続く道が用意された。

第 6 章
確証法による定理の検証について

探究法がやり遂げられたら，解析学者は仮説から命題へと移り，自分自身が発見した定理を，規則 κατὰ παντὸς, καθ᾽ αὑτὸ, καθ᾽ ὅλου πρῶτον によって，規定された方法に従って提示する。それら［定理］は，探究法からの証明および確実性をもっているけれども，それにもかかわらず，証明するためのより論理的な (λογικωτέρη) 方法である，総合の法則に委ねられ，そして，もし必要なときはいつでも，偉大な驚くべき発見の技法である，それによって確かめられる。そして，そのために解析の段階が遡って調べられる。それはそれ自身解析的であり，記号計算が導入されたおかげで今や骨の折れるものではない。しかし，もしよく知られていない発見が提示される，あるいは，評価され調査されなければならないその真実が偶然に示されたならば，はじめに確証法による方法が試されるべきであり，その後で総合に戻ることは容易である。このことの例は［アレクサンドリアの］テオンによって『原論』の中で，ペルガのアポロニウス (Ἀπολλώνιος (Apollonius)：前 262–前 200?) によって『円錐曲線論』(*Conics*) の中で，そしてアルキメデス (Ἀρχιμήδης (Archimēdēs)：前 287?–前 212) によってもさまざまな本の中で述べられていた。

> κατὰ παντὸς, καθ᾽ αὑτὸ, καθ᾽ ὅλου πρῶτον について ……
>
> κατὰ : Radical sense *down*, *downwards*.
> WITH GENIT. denoting *motion from above*, *down from*; denoting *downwards motion*, *down upon* or *over*, *down into*, *against*, *upon*, *in respect of*, *concernig*
> WITH ACCUS. of motion *downwards*, *on*, *over*, *throughout*, *opposite*, *over against*, *distributively*, *according to*, *in relation to*, *concerning*, *by the favour of* a god, of

Time *during*, *sometime* in a period, *about*

καθά : for καθ' ἅ, *according as*, *just as*

πάντη : *every way*, *on every side*, *in every way*, *by all means*, *altogether*, *entirely*

πάντως : まったく, *altogether*, in affirmations, *at all events*, *at any rate*, in answers, *yes by all means*

αὐτός : *self*, *him*, *her*, *it*; *myself*, *oneself*, *one's true self*, *of oneslef*, *of one's own accord*, *by oneself*, *alone*; *he*, *she*, *it*

αὐτοῦ : *at the very place*, *just here*, *just there*

καθόλου : *on the whole*, *in general*

πρωτεύω : *to be the first*, *hold the first place*, *to be first in* a thing, *to be first of* or *among*

πρῶτον : 最初に

E. Brann は次のように言う（［1］p.268)。

「i.e., in school language : predicated "of every instance of its subject," "essentially," "commensurately with the universal"」

また，次のようにも言う（［1］pp.345–346)。

「確証法の命題 (例えば，A cube is equal to B plane in C のような) に適用されるように，これらの規則は次のことを意味するように思われる。

(1)　述部は，主部がそれを参照するものと理解されている "それぞれの場合について真実" でなければならない。

(2)　それは "本質的に"，同次元の法則と同じものであろう，主部について断定されなければならない。

(3)　述部は，述部が主部に関して "等しく普遍的" であるときの場合のように，主部に関して完全に可逆的でなければならない。

最後の規則については，もし段階をさかのぼる，あるいは引き返すことによって "解析" から "総合" を構成するつもりであるならば，それぞれの言明は完全に可逆的でなければならない，と言うことができる。」

λογικωτέρη は λογῐκός (*of* or *for speaking* or *speech*, *of* or *belonging to the reason*, *logical*, *logic*) であろう。

λόγος : *the word* or *that by which the inward thought is expressed*, Lat. *oratio*; *the inward thought itself*, Lat. *ratio*

第 7 章

修辞法の機能について

求められている大きさの，よく整理されている方程式によって，解析法の残りの部分であると，そして技法の順序に特に関連している (残りの 2 つは先に得られたもの［規則］よりも様式に強く関連しているから，それは論理的に正しいものと認められる) と見なされている，修辞法あるいは釈義法 (ῥητικὴ ἢ ἐξηγητικὴ) は，もし問題が数の大きさについて表されるならば，数に関して，［そして］同様に，もし［問題が］そのこと自身の大きさを表すならば，長さ，表面，［立］体に関しても，その機能を果たす。そして，後者の場合，解析学者は，似たような真実によって他の解をもたらした後で，その操作が真実をもたらすであろうことによって，幾何学者［としての姿］を見せ，前者の場合，純粋であっても混ぜ合わされていても，提示されたベキが何であれ，数によって解くことによって，論理学者［としての姿］を見せる。そして，算術的にもあるいは幾何学的にも，［彼は］自分自身の技法の例を，［自分が］見出した方程式の，あるいはそれから順序正しく導いた比例の条件に従って，提出しないことはない。

そして，すべての幾何学的な結果 (effectio) がきちんとしている訳ではないのは確かであり，それはそれぞれの問題がそれ自身の正確さをもっているからである。これ［幾何学的な結果］は，方程式からその構成を隠すのではなく，その構成に従って方程式を明示し証明するような，他のものを好むことも確かであり，結果はそれ自身で確かである。それゆえ，熟練した幾何学者は，たとえ教え込まれた解析学者であるとしても，そのことを隠して，彼の問題を総合的に，あたかも操作が遂行されたかのように考えて，述べ，そして明らかにする。それから，論理学者［算術家］の助けを借りて，そこで見つけられた比例あるいは方程式に従って定理を構成し，そして証明する。

第 8 章 11

方程式の用語および技法［について］の結語

［1］ 解析において，方程式という言葉は，単に，探究法に従って適切に整理された同等性について述べたものと理解される。

2　それゆえ，方程式は不確かな大きさと確定した大きさとの比較である。

3　不確かな大きさは根あるいはベキである。

4　そして，ベキは純粋であるかあるいは混ぜ合わされているかである。

5　作用は否定［減法］あるいは肯定［加法］によるものである。

6　作用している大きさがベキから拒否される［取り去られる］とき，否定［減法］は順的 (directa) である［といわれる］。

7　一方，ベキが［ベキへと至る］階級によって作用している大きさから拒否される［取り去られる］とき，否定［減法］は逆的 (inversa) である［といわれる］。

> 順的な減法とは，例えば $x^3-(gx^2+hx^2)$ のようなものであり，逆的な減法とは，例えば $(gx^2+hx^2)-x^3$ のようなものである，という（［1］pp.347–348)。

8　評価している下位階級［的な大きさ］は作用している同次のもの［の大きさ］の階級の程度そのものである。

9　しかし，方程式の部分［辺］においては不確かな大きさがベキのあるいは階級の順に，そして作用の属性または記号についても，整理される必要がある。さらに，結び付けられた下位階級的な大きさ［係数］が与えられなければならない。

10　ベキへと至る最初の階級は求められているものの根である。最後［の階級］は，階梯において，ベキより 1 つ下の階級である。そして，これは参照 (epanaphora) という言葉で識別されるのが常である。

> スホーテンによれば，「それゆえ，平方は立方の参照であり，立方は平方の平方の，平方の平方は平方の立方の参照であり，無限の系列において同様である。」(『全集』p.11)
> なお，epanaphora の原語は ἐπαναφέρω (*to throw back upon*，*ascribe*，*refer*，*to put into the account*，*to bring back a message*，*to come back*，*return*，*to rise*) であろう。

11　ベキへと至る階級は，ベキが［同じ階級の］一方［の大きさ］を他方［の大きさ］に掛けてつくられるとき，相互的 (reciprocus) である［といわれる］。それゆえ，この結び付けられた階級［係数］はそれを支えている階級と相互的である。

スホーテンは「例えば，もし立方へと至る階級である辺があるならば，相互的な階級は平方であろう。なぜなら，立方は平方が掛けられた辺から生じるからである。しかし，立体は平面が掛けられた辺から生じるものであり，確かにその大きさは立方と同じ階級であるから，辺に関して平面は相互的な大きさであろう。」という（『全集』p.11)。

12　根に関して，長さによってベキへと至る階級は階梯の中で表されたもの自身である。

13　根に関して，平面によってベキへと至る階級は，

平方は平面，

平方の平方は平面的平方 (plani quadratum)，

立方の立方は平面的立方 (plani cubus)

であり，この順で続く。

14　根に関して，立体によってベキへと至る階級は，

立方は立体，

立方の立方は立体的平方 (solidi quadratum)，

立方の立方の立方は立体的立方 (solidi cubus)

である。

15　平方，平方の平方，平方の立方の立方，およびこの順で連続的に生じるものは単純な中間のベキであり，残りは多様 (multiplicis)［なベキ］である［といわれる]。

「それゆえ，単純な中間のベキは，その数の列［指数］が 2 倍ずつの幾何学的比例［等比数列］に従って進むようなものであると，定義することもできる。それゆえ，2 次の，4 次の，8 次の，16 次のベキは単純な中間のベキであろう。それらの中間の次数にある残りのものは多様［なベキ］である。」(スホーテン，『全集』p.11)

16　残りのものが比較される，確定した大きさは比較の同次のものである。

「例えば，もし A cubus $+$ A in B quadratum が B in Z planum に等しい，ことがあるならば，B in Z planum は比較の同次のものであろう。

A cubus は，求められている，それ自身の性質によって不確かな大きさへと上がるベキである。

A in B quadratum は作用された同次のものである。

A はベキへと至る階級である。

B quadatum は下位階級的な大きさ，または比較 (Parabola) である。」(スホーテン，『全集』p.11)

12　17　数［の場合］において，比較の同次のものは単一の数である。

18　求められている根が，その基礎からなり［最初のベキであり]，与えられた同次のものの大きさと比較される［等しい］とき，方程式は完全に単純である［といわれる]。

19　求められている根のベキが，作用されたものがなく，与えられた同次のものと比較される［等しい］とき，方程式は階梯的に (climactica) 単純である［といわれる]。

20　求められている根のベキが，指定された階級および与えられた補足的な大きさによって作用されていて，与えられた同次のものと比較される［等しい］とき，方程式は多数で多様な作用についての多項式である［といわれる]。

それぞれの例としては次のようなものがある（［1］p.350)。
完全に単純な方程式としては，$x = a$。
階梯的に単純な方程式としては，$x^3 = a$。ただし a は立体であると理解する。
多数で多様な作用についての多項式としては，$x^3 + ax^2 - bx = c$。ただし b は平面，c は立体とする。

21　ベキは，そのベキへと至る階級と同様に多くの作用を含むことができる。

それゆえ，平方は辺［の階級における大きさ］によって作用されることができる。

立方は辺および平方によって［作用されることができる］。

［そして,］平方の平方は辺，平方および立方によって，平方の立方は辺，平方および立方［および平方の平方］によって，そして，無限の系列においてそうである。

22　比例は，それらが解かれた方程式の種類から，［互いに］区別され，その［種類からの］用語法を受け入れる。

23　算術における釈義法について，熟練した解析学者は［次のことを］教えられる。

数を数に加えること。

数を数から取り去ること。

数を数に掛けること。

数を数で割ること。

さらに，技法［解析法］は，純粋なものであれ (古代の人々も最近の人々も知らなかった) 混ぜ合わされているものであれ，［すべての］ベキ［について］の解法をもたらす。

24　幾何学における釈義法について，それ［解析法］は，それによって辺および平方の方程式が完全に説明される，より標準的な結果を選び，列挙する。

25　立方および平方の平方について，それ［解析法］は，あたかも幾何学が幾何学の不完全さを埋め合わせるように，［次のことを］要請する。

任意の点から，任意の 2 つの直線の間にある切片 (segmentum) がどこにあろうと予め決められている［ものと等しい］ように，それら［2 つの直線］を切断する直線を引くことができる。

これが認められる (さらに，これは困難 (δυσμήχανον) ではない仮定 (αἴτημα) である) ことによって，これまで不可能である (ἄλογα) といわれてきた，有名な問題が上手に (ἐντεχνῶς) 解決される。作図法の中央に位置する (mesographicum)［問題，すなわち］，角を等しい 3 つの部分に分けること，［正］7 角形の辺を見出すこと，そして，立方が立体，平方の平方，平面的平面と比較される［等しい］ような，純粋なものであれ混ぜ合わされているものであれ，方程式の形になるものと同じだけ多くの他のことが。

δυσμήξανος : *hard to effect*
αἴτημα : *a request, demand*
ἄλογος : *without speech, speechless, infans, unutterable, without reason, irrational, not reckoned upon, unexpected*
ἔντεχνος : *within the province of art, artificial, artistic*
mesographicum の原語は μεσόγρᾶφος (*drawn in the middle, a mean proportional*) であろう。

graphicum は graphice (製図術，画法；見事に，巧みに，写実的に，生き生きと，迫真的に) の属格・複数形か。また，meso は「中央」「中間」の意味の連結語か。

角の 3 等分問題は，ネウシス (νεῦσις，傾斜) という作図法，あるいは円積線 (τετραγωνίζουσα : quadratrix) といわれる超越曲線などを用いて解かれている。また，正 7 角形の作図は，アルキメデスによってなされているようである (［10］pp.311–313)。

なお，この項目については，「幾何学への補遺」(*Supplementum Geometriae*) を参照のこと。

26　しかし，すべての大きさは線，表面あるいは［立］体であるから，おそらく，私たちが角の分割において，辺からその形の角を，あるいは角からその辺を得るかも知れないようなときを除いて，人間の営みの中で，3 倍のあるいは高々 4 倍の比を越えて，どれだけ大きな比例を使うことができるであろうか？

27　それゆえ，［解析法は，］これまで誰も気づかなかった，角の分割の秘密を算術的にあるいは幾何学的に明らかにし，そして［次のことを］教える。

与えられた角の比から，辺の比を見出すこと。

数が数に対するように，角が角に対してそのように［同じ比にあるように］すること。

28　直線が曲線と比較されない［等しくならない］というのは，角は直線と平面図形との間の中間の何らかのものであるからである。それゆえ，これ［このような比較］は同次のものの法則に反すると思われる。

29　最後に，探究法，確証法および釈義法という 3 つの様式からなる，解析法は，ついに，あらゆる問題の中でも誇り高い問題をそれ自身［のため］に正しく用意すると主張する。それは［次のことである。］**解けない問題はない** (Nullum non problema solvere)。

記号計算についての前の注釈

『全集』pp.13–41

原題は *Ad Logisticen Speciosam Notae Priores*。
「解析法序説」(*In Artem Analyticen Isagoge* : 1591 年) と同時期に執筆されたようであるが，出版されたのは 1631 年である。なお，この 1631 年版の原題は *Ad Logisticem Speciosam Notae Priores* であるという (『解析術』p.33)。
ヴィエートの「記号計算」の内容が具体的に示され，直角三角形の生成への言及もある。「解析法序説」の実践編という意味で書かれたものであろう。
なお,「後の注釈」もありそうなものだが，スホーテン (Franciscus van Schooten : 1615–1660) による『全集』には掲載されていない。「出版された形跡がない」(［8］p.405) ということであるが，書かれなかったのか，あるいは散逸してしまったのか。

記号計算の原理は，「解析法序説」の中で説明された 4 つの標準的な規則に要約される。しかし 13
ながら，しばしば用いられるいくつかの操作を例示し，そして，そのような［記号］計算によって，ときには近道を思いついたり，次には似たような回り道を妨げたりするようなことを書き留めておくことはよいことである。そのような種類のものは次のようなものである。

「4 つの標準的な規則」について次のような (スホーテンによる) 脚注がついている。
「すなわち,『解析法序説』の第 4 章で述べられている，加法，減法，乗法および除法であり，以下の諸定理はこれらに依存する。」

命題 I

提示された 3 つの大きさから，第 4 の比例［する大きさ］を示すこと。

第 1 の，第 2 の，および第 3 の，3 つの大きさが提示されるとしよう。第 4 の比例［する大きさ］を示さなければならない。第 2［の大きさ］に第 3［の大きさ］が掛けられ，その積 (factum) が第 1［の大きさ］で割られる。それゆえ，私は，その除法によって生じる大きさは，またはそうでなければその比較は，第 4 の比例［する大きさ］であると言う。なぜならば，第 1［の大きさ］はその第 4［の大きさ］が掛けられると，第 2［の大きさ］に第 3［の大きさ］が掛けられたものと同じになり，それゆえ，それらは比例するからである。それゆえ，それらの大きさを

$$\left.\begin{array}{c|c|c} \text{第 }1 & \text{第 }2 & \text{第 }3 \\ A & B & G \\ \dfrac{A \text{ quadratum}}{D} & B & G \\ \dfrac{A \text{ cubus}}{D \text{ plano}} & \dfrac{B \text{ quadrat.}}{Z} & G \end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{とすると，第}\\ 4\text{ の比例［す}\\ \text{る大きさ］は}\end{array} \left\{\begin{array}{c} \dfrac{B \text{ in } G}{A} \\ \dfrac{B \text{ in } G \text{ in } D}{A \text{ quadrat.}} \\ \dfrac{B \text{ q. in } G \text{ in } D \text{ pl.}}{Z \text{ in } A \text{ cubum}} \end{array}\right.$$

であろう。

命題 II

提示された 2 つの大きさから，第 3 の比例［する大きさ］，第 4 の，第 5 の，および無限に続くそれ以上の順位の比例［する大きさ］を示すこと。

2 つの大きさ A および B が提示されるとしよう。第 3 の比例［する大きさ］，第 4 の，第 5 の，および無限に続くそれ以上の順位の比例［する大きさ］を示さなければならない。

それゆえ， 14

$$\left.\begin{array}{c|c|c|c}
\text{これが} & \text{これに対して} & \text{これが} & \text{これに対する} \\
A & B & B & \dfrac{B \text{ quadr.}}{A} \\
A & B & \dfrac{B \text{ quadr.}}{A} & \dfrac{B \text{ cubus}}{A \text{ quadr.}} \\
A & B & \dfrac{B \text{ cubus}}{A \text{ quadr.}} & \dfrac{B \text{ q.quad.}}{A \text{ cubo}}
\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{である}\\ \text{から}\end{array} \left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{B \text{ quadratum}}{A} & \text{は第 3 の} \\
\dfrac{B \text{ cubus}}{A \text{ quadra.}} & \text{は第 4 の} \\
\dfrac{B \text{ quad.quadratum}}{A \text{ cubo}} & \text{は第 5 の}
\end{array}\right\}$$

比例［する大きさ］であろう。

そして，このように無限に進むことができる。

帰結

それゆえ，もし連続して比例する大きさの系列があるならば，

第 1 のものが第 3 のものに対するように，第 1 のものの平方が第 2 のものの平方に対する。

そして，第 1 のものが第 4 のものに対するように，第 1 のものの立方が第 2 のものの立方に対する。

そして，第 1 のものが第 5 のものに対するように，第 1 のものの平方の平方が第 2 のものの平方の平方に対する。

そして，それゆえ，この順序で無限に続く。確かに，確立された命題から，それらは連続して比例［する大きさ］である。

第 1［の大きさ］は A，第 2［の大きさ］は B，第 3［の大きさ］は $\dfrac{B \text{ quadr.}}{A}$，第 4［の大きさ］は $\dfrac{B \text{ cubus}}{A \text{ quadr.}}$，第 5［の大きさ］は $\dfrac{B \text{ qu.quadr.}}{A \text{ cubo}}$，など。

そして，第 1［の大きさ］が A であり，第 3［の大きさ］が $\dfrac{B \text{ quadrtum}}{A}$ であるから，後者に A が掛けられると，共通のものが掛けられるときにその積によって比は変えられないであろうから，それゆえ，A が $\dfrac{B \text{ quadrat.}}{A}$ に対するように A の平方が B の平方に対するであろう。

同様に，第 1［の大きさ］が A であり，第 4［の大きさ］が $\dfrac{B \text{ cubus}}{A \text{ quadr.}}$ であるから，後者に A quadratum が掛けられると，共通のものが掛けられるときにその積によって比は変えられないであろうから，それゆえ，A が $\dfrac{B \text{ cubum}}{A \text{ quadrat.}}$ に対するように A の立方が B の立方に対するであろう。

同じように，第 1［の大きさ］を A，第 5［の大きさ］を $\dfrac{B \text{ quadrato. quadr.}}{A \text{ cubo}}$ とするとき，後者に A cubum が掛けられると，共通のものが掛けられるときにその積によって比は変えられないであろうから，それゆえ，A が $\dfrac{B \text{ quadr. quadr.}}{A \text{ cubo}}$ に対するように A の平方の平方が B の平方の平方に対するであろう。

残りのより高い［順位の］ものについても異なることはなく，辺が相互に単純な比 (ratio simpla) にあるとき，それらのベキは累乗の比 (ratio multipla) にあることを明らかにし，例示することができる。2 乗の比 (ratio duplae) にあるベキは平方であり，3 乗［の比にあるベキ］は立方，4 乗［の比にあるベキ］は平方の平方，5 乗［の比にあるベキ］は平方の立方であり，同じ系列および方法によって無限に［続く］。

命題 III

提示された 2 つの平方の間に，比例中項 (medium proportionale) を示すこと。

2 つの平方［，すなわち］A quadratum，B quadratum が提示されるとしよう。それらの間に

比例中項を見出さなければならない。しかし，確かに，A を最初［の比例する大きさ］，B を第 2［の比例する大きさ］とすると，前述のことから，第 3 の比例［する大きさ］が示され，それはこのような系列となる。[すなわち,]

$$\text{最初は } A\text{，第 2 は } B\text{，第 3 は } \frac{B \text{ quadr.}}{A}\text{ 。}$$

それぞれに A が掛けられると，すなわち，B quadratum がそれ［A］で割られるときに，第 3［の比例する大きさ］が生じる。

それゆえ，A は［いま］説明された 3 つの比例［する大きさ］に共通する乗数であり，さらに共通の乗数によって比は変わらないから，比例［する大きさ］に A が掛けられた積もまた比例［する大きさ］であろう。しかし，積は A quadratum，B in A，B quadratum である。それゆえ，我々は，提示された 2 つの平方の間に比例中項を示した。

命題 IV

提示された 2 つの立方の間に，2 つの連続している比例中項を示すこと。

2 つの立方［，すなわち］A cubus，B cubus が提示されるとしよう。それらの間に 2 つの連続している比例中項を示さなければならない。しかし，確かに，A を最初［の比例する大きさ］，B を第 2［の比例する大きさ］とすると，命題 2 から，連続して比例［する大きさ］が無限に示される。ここでは，第 4［の比例する大きさ］を含む無限の体系としよう。それゆえ，4 つの連続して比例する［大きさの］系列は

$$\text{最初は } A\text{，第 2 は } B\text{，第 3 は } \frac{B \text{ quadr.}}{A}\text{，第 4 は } \frac{B \text{ cubus}}{A \text{ quadr.}}$$

である。

それぞれに A quadratus が掛けられると，すなわち，B cubus がそれで割られるときに，第 4［の比例する大きさ］が生じる。それゆえ，A quadratus は［いま］説明された 4 つの連続して比例［する大きさ］の共通の乗数であり，さらに共通の乗数によって比は変わらないから，連続して比例［する大きさ］によってつくられる積もまた比例［する大きさ］であろう。しかし，積は A cubus，A quadratum in B，A in B quadratum，B cubus である。それゆえ，我々は，提示された 2 つの立方の間に，2 つの連続している比例中項を示した。これから導かれることから，一般に［次のことがいえる。］

帰結

もし 2 つの辺が同じ階級のベキへと高められ，さらに第 2 の辺に第 1［の辺］のベキの 1 つ下の階級 (gradus parodicum elatiorem primi) が掛けられ，次いで第 2 の辺の平方に第 1［の辺］のベキのその下の階級 (gradus succedentem elatiorem primi) が掛けられ，この順序で続くならば，第 1［の辺］のベキおよび第 2［の辺のベキ］の間に連続して比例［する大きさ］がつくられるであろう。なぜならば，これは命題 2 から明らかだからである。それゆえ，これはより一般的に示すこともできる。

2 つの，同程度に高い，どのようなベキの間にもベキへと至る階級 (gradus parodici ad potestatem) と同じだけ多くの連続している比例中項を示すこと。

命題 IV は, A^3, A^2B, AB^2, B^3 が連続比をなす, すなわち $A^3 : A^2B = A^2B : AB^2 = AB^2 : B^3$ である，ということである。
帰結は，A^n，$A^{n-1}B$，$A^{n-2}B^2$，$\cdots\cdots$，AB^{n-1}，B^n が連続比をなす，ということである。

命題 V

提示された 2 つの辺の間に、連続して比例している［大きさ］をいくつでも示すこと。

2 つの辺を A, B としよう。それらの間に連続して比例している［大きさ］をいくつでも示さなければならない。4 つ［の大きさ］を示すようにしよう。それゆえ，ベキは，ここで要求されている連続している比例中項と同じ数の，すなわち 4 つの，階級によってその辺へと導かれるから，第 5［の大きさ］は自分自身のためにその位置を要求する必要がある。しかし，第 5 の階級には平方の立方が存在している。そして，［それゆえ,］A および B は平方の立方のベキまで高められ，A の平方の立方および B の平方の立方の間に 4 つの連続している比例中項がつくられる。それらの系列はこのようである。

1　A の平方の立方
2　A の平方の平方掛ける B
3　A の立方掛ける B の平方
4　A の平方掛ける B の立方
5　A 掛ける B の平方の平方
6　B の平方の立方

しかし，それらは比例するベキであるから，その根もまた比例する。それゆえ，［このように］つくられた 6 つの比例［する大きさ］のそれぞれは平方の立方の辺［5 乗根］がとられ，それゆえ，ここで表されているような 6 つの辺，すなわち，

1　A
2　A の平方の平方掛ける B の 5 乗根 (latus qc. A quadrat.quadrati in B)
3　A の立方掛ける B の平方の 5 乗根
4　A の平方掛ける B の立方の 5 乗根
5　A 掛ける B の平方の平方の 5 乗根
6　B

もまた連続して比例するであろう。

ゆえに，A および B の間に，要求されただけ多くの連続している比例中項が示された。

命題 VI

2 つの大きさの和 (adgregato) にそれらの差を加えること。

$A+B$ に $A-B$ が加えられるとすると，和は A bis［$2A$］である。このことから，

16 **定理**

2 つの大きさの和 (adgregatum) にそれらの差が加えられると，［結果は］より大きい大きさの 2 倍に等しい。

命題 VII

2 つの大きさの和からそれらの差を取り去ること。

$A+B$ から $A-B$ が取り去られるとすると，残りは B bis［$2B$］である。このことから，

定理

2 つの大きさの和からそれらの差が引き去られると，［結果は］より小さい［大きさ］の 2 倍に等しい。

命題 VIII

同じ大きさが不等な減数 (decrementum) によって減少させられるとき，一方を他方から取り去ること。

$A-B$ から $A-E$ が取り去られるとすると，残りは $E-B$ であろう。しかし，これは縮約 (contractio)［差］の後ろに書かれたもの［減数］の差である。このことから，

定理

もし［同じ］大きさが不等な減数によって減らされるならば，それらの縮約の差は減少させたもの［減数］の差と同じである。

命題 IX

同じ大きさが不等な増加 (crementum) によって引き延ばされるとき，一方を他方から取り去ること。

$A+G$ から $A+B$ が取り去られるとすると，残りは $G-B$ であろう。このことから，

定理

もし同じ大きさが不等な増加によって増やされるならば，それらの延長［和］の差は引き延ばしたもの［加数］の差と同じである。

命題 X

同じ大きさが不等な増加および減数によって引き延ばされそして減少させられるとき，一方を他方から取り去ること。

$A+G$ から $A-B$ が取り去られるとすると，残りは $G+B$ であろう。このことから，

定理

もし同じ大きさが不等な増加および減数によって引き延ばされそして減少させられるならば，それらの延長と縮約の差は引き延ばしたものと減少させたものの和に等しい。

命題 XI

2 項根 (binomia radix)［根の 2 項式］から純粋なベキをつくること。

2 項根を $A+B$ としよう。これから純粋なベキをつくらなければならない。最初につくられるであろうものは平方である。それゆえ，もし辺が互いに掛けられるならば平方になるから，$A+B$ に $A+B$ が掛けられ，つくられたそれぞれの平面がまとめられると，それは

$$A \text{ quadratum} + A \text{ in } B \text{ bis} + B \text{ quadrato}$$
$$[A^2+2AB+B^2]$$

であろう。それゆえ，これは $A+B$ の平方に等しくなるであろう。

2 番目につくられるものは立方である。それゆえ，もし辺にその平方が掛けられるならば立方になるから，$A+B$ にいま説明された $A+B$ からの平方が掛けられ，つくられたそれぞれの立体が 17
まとめられると，それは

$$A \text{ cubus} + A \text{ quadrato in } B \text{ ter} + A \text{ in } B \text{ quadratum ter} + B \text{ cubo}$$
$$[A^3+3A^2B+3AB^2+B^3]$$

であろう。それゆえ，これは $A+B$ による立方に等しくなるであろう。

3 番目につくられるものは平方の平方である。もし辺にその立方が掛けられるならば平方の平方

になるから，$A+B$ にいま説明された $A+B$ による立方が掛けられ，つくられたそれぞれの平面的平面がまとめられると，それは

$$
\begin{aligned}
&A \text{ quadrato-quadratum} + A \text{ cubo in } B \text{ quater}\\
&\quad + A \text{ quadr. in } B \text{ quadratum sexies} + A \text{ in } B \text{ cubum quater}\\
&\quad + B \text{ quadrato-quadrato}\\
&\quad [A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4]
\end{aligned}
$$

であろう。それゆえ，これは $A+B$ による平方の平方に等しくなるであろう。

4 番目につくられるものは平方の立方である。もし辺にその平方の平方が掛けられるならば平方に立方になるから，$A+B$ にいま説明された $A+B$ による平方の平方が掛けられ，つくられた平面的立体がまとめられると，それは

$$
\begin{aligned}
&A \text{ quadrato-cubus} + A \text{ quadrato quadrato in } B\ 5\\
&\quad + A \text{ cubo in } B \text{ quadratum } 10 + A \text{ quadrato in } B \text{ cubum } 10\\
&\quad + A \text{ in } B \text{ quadrato quadratum } 5 + B \text{ quadrato-cubo}\\
&\quad [A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5]
\end{aligned}
$$

であろう。確かに，これは $A+B$ による平方の立方に等しくなるであろう。

5 番目につくられるものは立方の立方である。もし辺にその平方の立方が掛けられるならば立方の立方になるから，$A+B$ にいま説明された $A+B$ による平方の立方が掛けられ，つくられたそれぞれの立体的立体がまとめられると，それは

$$
\begin{aligned}
&A \text{ cubo-cubus} + A \text{ quadrato-cubo in } B\ 6\\
&\quad + A \text{ quadrato-quadrato in } B \text{ quadratum } 15 + A \text{ cubo in } B \text{ cubum } 20\\
&\quad + A \text{ quadrato in } B \text{ quadrato-quadratum } 15 + A \text{ in } B \text{ quadrato-cubum } 6\\
&\quad + B \text{ cubo cubo}\\
&\quad [A^6 + 6A^5B + 15A^4B^2 + 20A^3B^3 + 15A^2B^4 + 6AB^5 + B^6]
\end{aligned}
$$

であろう。それゆえ，これは $A+B$ による立方の立方に等しくなるであろう。

より高いどのような大きさのベキの形成についても異なることはない。それゆえ，それら［の例］から，［記号］計算全体において有効であり，しかも探究法において役に立つ定理は単一の (uniformis) 方法によって導かれ，理解される［ことが分かる］。

定理

平方の生成

もし 2 つの辺があったとするならば，第 1 の辺の平方，足す第 1 の辺の 2 倍に第 2［の辺］が掛けられた平面，足す第 2 の辺の平方は，それらの辺の和 (adgregati) の平方に等しい。

一方の辺を A，他方を B としよう。私は，$A+B$ の $A+B$ による乗法の操作により，A quadratum $+ A$ in B bis $+ B$ quadrato は $A+B$ quadrato に等しい，という。

定理

立方の生成

もし 2 つの辺があったとするならば，第 1 の辺の立方，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の 3 倍が掛けられた立体，足す第 1 の辺に第 2 の辺の平方の 3 倍が掛けられた立体，足す第 2 の辺の立方は，それらの辺の和の立方に等しい。

一方の辺を A，他方を B としよう。私は，A quadrati $+ A$ in B $2 + B$ quadrato の $A+B$ に

よる乗法の操作により，A cubum $+$ A quadrato in B ter $+$ A in B quadratum ter $+$ B cubo は $A+B$ cubo に等しい，という。

定理 18

平方の平方の生成

もし 2 つの辺があったとするならば，第 1 の辺の平方の平方，足す第 1 の辺の立方に第 2 の辺の 4 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の平方の 6 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺に第 2 の辺の立方の 4 倍が掛けられたもの，足す第 2 の辺の平方の平方は，それらの辺の和の平方の平方に等しい。

一方の辺を A, 他方を B としよう。私は, A cubi$+A$ quadrato in B 3$+A$ in B quadratum 3$+$ B cubo の $A+B$ による乗法の操作により，A quad.-quadratum $+$ A cubo in B quater $+$ A quadrato in B quadratum sexies $+$ A in B cubum quater $+$ B quad.quadrato は $A+B$ quad.-quadrato に等しい，という。

定理

平方の立方の生成

もし 2 つの辺があったとするならば，第 1 の辺の平方の立方，足す第 1 の辺の平方の平方に第 2 の辺の 5 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の立方に第 2 の辺の平方の 10 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の立方の 10 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺に第 2 の辺の平方の平方の 5 倍が掛けられたもの，足す第 2 の辺の平方の立方は，それらの辺の和の平方の立方に等しい。

一方の辺を A，他方を B としよう。私は，A quadrato-quadrati $+$ A cubo in B 4 $+$ A quad. in B quadratum 6 $+$ A in B cubum quater $+$ B quadrato-quadrato の $A+B$ による乗法の操作により，A quadrato-cubum $+$ A quad.quadrato B 5 $+$ A cubo in B quadratum 10 $+$ A quadrato in B cubum 10 $+$ A in B quad-quadratum 5 $+$ B quadrato-cubo は $A+B$ quadrato cubo に等しい，という。

定理

立方の立方の生成

もし 2 つの辺があったとするならば，第 1 の辺の立方の立方，足す第 1 の辺の平方の立方に第 2 の辺の 6 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方の平方に第 2 の辺の平方の 15 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の立方に第 2 の辺の立方の 20 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の平方の平方の 15 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺に第 2 の辺の平方の立方の 6 倍が掛けられたもの，足す第 2 の辺の立方の立方は，それらの辺の和の立方の立方に等しい。

一方の辺を A，他方を B としよう。私は，A quadrato-cubi $+$ A quad-quadrato B 5 $+$ A cubo in B quadratum 10 $+$ A quadrato in B cubum 10 $+$ A in B quad-quadratum 5 $+$ B quadrato-cubo の $A+B$ による乗法の操作により，A cubo-cubum $+$ A quadrato-cubo in B 6 $+$ A quad-quadrato in B quadratum 15 $+$ A cubo in B cubum 20 $+$ A quadrato in B quadrato-quadratum 15 $+$ A in B quadrato-cubum 6 $+$ B cubo-cubo は $A+B$ cubo-cubo に等しい，という。

しかし，［辺の］和ではなく，辺の差についてベキをつくることが好ましく思われたとき，［その

ベキを］構成するそれぞれの同次のものは全く同じであるが，立方，平方の立方およびそれ以降の1 つおき［のベキ］におけるように，それぞれの同次のものが偶数個である［偶数個の項からなる］ときには，より大きい辺のベキから始めると仮定されたなら，1 つおきに加えられ (affirmo) そして減じられる (nego) であろう。一方，その他の［ベキの］ときには，あるいはより大きい辺のベキからか，あるいはより小さい［辺の］ベキからか，［いずれから］始めると考えても操作は同じことになるから，全く重要なことではない。

帰結

［それぞれ］1 度しかも規則正しくとられた 2 項根からつくられたベキを構成するそれぞれの同次のものは，第 4 の命題の一般的な帰結によれば，連続して比例する［大きさ］である。

それゆえ，2 つの辺 A および B からつくられた 3 つの平面は比例［する大きさ］

A quadratum

A in B

B quadratum

である。そして確かにまた，4 つの立体は

A cubus

A quadratum in B

A in B quadratum

B cubus

である。同様に間違いなく，5 つの平面的平面は

A quadrato-quadratum

A cubus in B

A quadratum in B quadratum

A in B cubum

B quadrato-quadratum

19 である。そして，6 つの平面的立体は比例［する大きさ］

A quadrato-cubus

A quadrato-quadratum in B

A cubus in B quadratum

A quadratum in B cubum

A in B quadrato-quadratum

B quadrato-cubum

である。そして，最後に，7 つの立体的立体は連続して比例する［大きさ］

A cubo-cubus

A quadrato-cubus in B

A quadrato-quadratum in B quadratum

A cubus in B cubum

A quadratum in B quadrato-quadratum

A in B quadrato-cubum

B cubo-cubus

である。そして，このように続く。

命題 XII

辺の和の平方に同じものの差の平方を加えること。

一方の辺を A，他方を B としよう。$A+B$ の平方に $A=B$ の平方が加えられなければならない。しかし，確かに，$A+B$ からつくられた平方は A quadrato + A in B bis + B quadrato からなる。さらに，$A=B$ からつくられた平方は A quadrato − A in B bis + B quadrato からなる。それゆえ，それらの加法が行われると，和は A quadratum bis + B quadrato bis［$2A^2+2B^2$］であろう。それゆえ，求めていたものがつくられた。これから

> ここに現れる記号 = は，大きい方から小さい方を引くという減法を表すもので，今日の ∼ に相当する。「解析法序説」(*In Artem Analyticen Isagoge*) 第 4 章規則 II 参照。

定理

辺の和の平方足すそれらの差の平方は，それらの［辺の］平方の和の 2 倍に等しい。

命題 XIII

2 つの辺の和の平方から同じものの差の平方を取り去ること。

一方の辺を A，他方を B としよう。$A+B$ の平方から $A=B$ の平方が取り去られなければならない。$A+B$ の平方によって表されたものからなるそれぞれの平面から $A=B$ の平方からなるそれぞれの平面が取り去られると，差は B in A quater［$4AB$］であろう。これから

定理

2 つの辺の和の平方引く同じものの差の平方は，それらの辺によ［ってつくられ］る平面の 4 倍に等しい。

帰結

2 つの辺によ［ってつくられ］る平面はそれらの辺の和の半分の平方により小さい。なぜならば，定理により，整理された方程式の両方の辺が 4 分の 1 倍されればよいからである。辺の和の半分の平方はそれらの辺によ［ってつくられ］る平面より，それらの差の半分の平方だけ，より大きいであろうし，そうでなければ，辺は異なっているのではなく等しいであろう。［ここで］観察されたことは注意する価値があった。

> 「定理」は $(A+B)^2-(A-B)^2=4AB$ ということだから，この両辺を 4 で割れば
> $$\left(\frac{A+B}{2}\right)^2-\left(\frac{A-B}{2}\right)^2=AB$$
> となる。従って，$A=B$ でなければ，$\left(\dfrac{A+B}{2}\right)^2$ は AB より大きいことになる，というのである。

命題 XIV

2 つの辺の差に同じものの和を掛けること。

より大きい辺を A，より小さい［辺］を B としよう。$A-B$ に $A+B$ が掛けられ，それぞれの平面がまとめられると，それは A quadratum − B quadrato［A^2-B^2］であろう。これから

定理

2 つの辺の差に同じものの和が掛けられてつくられるものは［それらの辺の］平方の差に等しい。

20 **帰結**

平方の差は，もし辺の差で割られるならば辺の和が生じるであろう。そして逆に，平方の差は，もし辺の和で割られるならば辺の差が生じるであろう。［なぜならば,］除法は，結合によって乗法がもたらす操作の，分解による逆算 (restitutio) だからである。

命題 XV

2 つの辺の和の立方に同じものの差の立方を加えること。

一方の辺を A，他方を B としよう。$A+B$ の立方に $A = B$ の立方が加えられなければならない。しかし，確かに，$A+B$ からつくられた立方は A cubo + A quadrati in B ter + A in B quadratum ter + B cubo からなる。そして，$A = B$ から［つくられた］立方は A cubo − A quadrato in B ter + A in B quadratum ter − B cubo からなる。それゆえ，それらの加法が行われると，和は A cubus bis + A in B quadratum sexies［$2A^3+6AB^2$］である。これから［次のように］規定される。

定理

2 つの辺の和の立方足す同じものの差の立方は，より大きい辺の立方の 2 倍足すより大きい辺により小さい辺の平方が掛けられ［てつくられ］る立体の 6 倍に等しい。

命題 XVI

2 つの辺の和の立方から同じものの差の立方を取り去ること。

一方の辺を A，他方を B としよう。$A+B$ の立方から $A = B$ の立方が取り去られなければならない。$A+B$ の立方からつくられるであろうものからなるそれぞれの立体から $A = B$ の立方［からつくられるもの］からなるそれぞれの立体が取り去られると，A quadratum in B sexies + B cubo bis［$6A^2B+2B^3$］が生じるであろう。これから

定理

2 つの辺の和の立方引く同じものの差の立方は，より小さい辺により大きい辺の平方が掛けられ［てつくられ］る立体の 6 倍足すより小さい辺の立方の 2 倍に等しい。

命題 XVII

2 つの辺の差に，それらの辺そのものの和の平方の［うち］1 度だけとられたものからなる，3 つのそれぞれの平面［の和］を掛けること。

より大きい辺を A，より小さい［辺］を B としよう。$A-B$ に A quadratum + A in B + B quadrato が掛けられなければならない。個々の乗法を行い，それぞれの立体がまとめられると，それは A cubus − B cubo［A^3-B^3］であろう。これから

定理

2 つの辺の差に，それらの辺そのものの和の平方の［うち］1 度だけとられたものからなる，3 つのそれぞれの平面［の和］を掛けてつくるものは，それらの立方の差に等しい。

帰結

立方の差は，もし辺の差で割られるならば，それらの辺の和の平方の［うち］1 度だけとられた

ものからなる，3 つのそれぞれの平面［の和］が生じるであろう。そして，逆に，

立方の差は，もし辺の和の平方の［うち］1 度だけとられたものからなる，3 つのそれぞれの平面［の和］で割られるならば，それらの辺の差が生じるであろう。

命題 XVIII

2 つの辺の和に，それらの辺そのものの差の平方の［うち］1 度だけとられたものからなる，3 つのそれぞれの平面［の全体］を掛けること。

一方の辺を A，他方を B としよう。$A+B$ に A quadratum $-$ B in $A+B$ quadrato が掛け 21
られなければならない。個々の乗法を行い，それぞれの立体がまとめられると，それは A cubus $+$ B cubo［A^3+B^3］であろう。それゆえ

定理

2 つの辺の和に，それらの辺そのものの差の平方の［うち］1 度だけとられたものからなる，3 つのそれぞれの平面［の全体］を掛けてつくるものは，それらの立方の和に等しい。

帰結

立方の和は，もし辺の和で割られるならば，［それらの辺］そのものの差の平方の［うち］1 度だけとられたものからなる，3 つのそれぞれの平面［の全体］が生じるであろう。そして，逆に［，立方の和は，もし辺の差の平方のうち 1 度だけとられたものからなる，3 つのそれぞれの平面の全体で割られるならば，それらの辺の和が生じるであろう］。

命題 XIX

2 つの辺の差に，それらの辺そのものの和の立方の［うち］1 度だけとられたものからなる，4 つのそれぞれの立体［の和］を掛けること。

より大きい辺を A，より小さい［辺］を B としよう。$A-B$ に A cubum $+$ A quadrato in B $+$ A in B quadratum $+$ B cubo が掛けられなければならない。個々の乗法を行い，それぞれの平面的平面がまとめられると，それは A quadrato-quadratum $-$ B quadrato-quadrato［A^4-B^4］であろう。

定理

2 つの辺の差に，それらの辺そのものの和の立方の［うち］1 度だけとられたものからなる，4 つのそれぞれの立体［の和］を掛けてつくるものは，それらの平方の平方の差に等しい。

帰結

2 つの平方の平方の差は，もし辺の差で割られるならば，それらの辺の和の立方の［うち］1 度だけとられたものからなる，4 つのそれぞれの立体［の和］が生じるであろう。そして，逆に［，2 つの平方の平方の差は，もし辺の和の立方のうち 1 度だけとられたものからなる，4 つのそれぞれの立体の和で割られるならば，それらの辺の差が生じるであろう］。

命題 XX

2 つの辺の和に，それらの辺そのものの差の立方の［うち］1 度だけとられたものからなる，4 つのそれぞれの立体［の全体］を掛けること。

$A+B$ に A cubum $-$ A quadrato in B $+$ A in B quadratum $-$ B cubo が掛けられなければならない。個々の乗法を行い，それぞれの平面的平面がまとめられると，それは A quadrato-quadratum

$-$ B quadrato-quadrato［$A^4 - B^4$］であろう。

定理

2 つの辺の和に，それらの辺そのものの差の立方の［うち］1 度だけとられたものからなる，4 つのそれぞれの立体［の全体］を掛けてつくるものは，それらの平方の平方の差に等しい。

帰結

平方の平方の差は，もし辺の和で割られるならば，それらの辺の差の立方の［うち］1 度だけとられたものからなる，4 つのそれぞれの立体［の全体］が生じるであろう。［そして，逆に，平方の平方の差は，もし辺の差の立方のうち 1 度だけとられたものからなる，4 つのそれぞれの立体の全体で割られるならば，それらの辺の和が生じるであろう。］

別の帰結

辺の差が［辺の］和に対するように，それらの辺そのものの差の立方の［うち］1 度だけとられたものからなる，4 つのそれぞれの立体［の和］が，同じ辺の和の立方の［うち］また 1 度だけとられたものからなる，4 つのそれぞれの立体［の和］に対するであろう。

命題 XXI

2 つの辺の差に，それらの辺そのものの和の平方の平方の［うち］1 度だけとられたものからなる，5 つのそれぞれの平面的平面［の和］を掛けること。

より大きい辺を A，より小さい［辺］を B としよう。$A - B$ に A quadrato-quadratum $+$ A cubo in B $+$ A quadrato in B quadratum $+$ A in B cubum $+$ B quadrato-quadrato が掛け
22 られなければならない。個々の乗法を行い，それぞれの平面的立体がまとめられると，それは A quadrato-cubus $-$ B quadrato-cubo［$A^5 - B^5$］であろう。これから

定理

2 つの辺の差に，それらの辺そのものの和の平方の平方の［うち］1 度だけとられたものからなる，5 つのそれぞれの平面的平面［の和］を掛けてつくるものは，それらの平方の立方の差に等しい。

帰結

平方の立方の差は，もし辺の差で割られるならば，それらの辺そのものの和の平方の平方の［うち］1 度だけとられたものからなる，5 つのそれぞれの平面的平面［の和］が生じるであろう。そして，逆に［，平方の立方の差は，もし辺の和の平方の平方のうち 1 度だけとられたものからなる，5 つのそれぞれの平面的平面の和で割られるならば，それらの辺の差が生じるであろう］。

命題 XXII

2 つの辺の和に，それら［の辺］そのものの差の平方の平方の［うち］1 度だけとられたものからなる，5 つのそれぞれの平面的平面［の全体］を掛けること。

一方の辺を A，他方を B としよう。$A + B$ に A quadrato-quadratum $-$ A cubo in B $+$ A quadrato in B quadratum $-$ A in B cubum $+$ B quadrato-quadrato が掛けられなければならない。個々の乗法を行い，それぞれの平面的立体がまとめられると，それは A quadrato-cubus $+$ B quadrato-cubus［$A^5 + B^5$］であろう。これから

定理

2 つの辺の和に，それらの辺そのものの差の平方の平方の［うち］1 度だけとられたものからなる，5 つのそれぞれの平面的平面［の全体］を掛けてつくるものは，それらの平方の立方の和に等しい。

帰結

平方の立方の和は，もし辺の和で割られるならば，それら［の辺］そのものの差の平方の平方の［うち］1 度だけとられたものからなる，5 つのそれぞれの平面的平面［の全体］が生じるであろう。そして，逆に［，平方の立方の和は，もし辺の差の平方の平方のうち 1 度だけとられたものからなる，5 つのそれぞれの平面的平面の全体で割られるならば，それらの辺の和が生じるであろう］。

命題 XXIII

2 つの辺の差に，それら［の辺］そのものの和の平方の立方の［うち］1 度だけとられたものからなる，6 つのそれぞれの平面的立体［の和］を掛けること。

より大きい辺を A，より小さい［辺］を B としよう。$A - B$ に，A quadrato-cubum + A quadrato-quadrato in B + A cubo in B quadratum + A quadrato in B cubum + A in B quadrato-quadratum + B quadrato-cubo が掛けられなければならない。個々の乗法を行い，それぞれの立体的立体がまとめられると，それは A cubo-cubus − B cubo-cubo［$A^6 - B^6$］であろう。これから

定理

2 つの辺の差に，それらの辺そのものの和の平方の立方の［うち］1 度だけとられたものからなる，6 つのそれぞれの平面的立体［の和］を掛けてつくるものは，それらの立方の立方の差に等しい。

帰結

立方の立方の差は，もし辺の差で割られるならば，それら［の辺］そのものの和の平方の立方の［うち］1 度だけとられたものからなる，6 つのそれぞれの平面的立体［の和］が生じるであろう。［そして，逆に，立方の立方の差は，もし辺の和の平方の立方のうち 1 度だけとられたものからなる，6 つのそれぞれの平面的立体の和で割られるならば，それらの辺の差が生じるであろう。］

命題 XXIV

2 つの辺の和に，それら［の辺］そのものの差の平方の立方の［うち］1 度だけとられたものからなる，6 つのそれぞれの平面的立体［の全体］を掛けること。

一方の辺を A，他方を B としよう。$A + B$ に，A quadrato-cubum − A quadrato-quadrato in B + A cubo in B quadratum − A quadrato in B cubum + A in B quadrato-quadratum − B quadrato-cubo が掛けられなければならない。個々の乗法を行い，それぞれの立体的立体がまとめられると，それは A cubo-cubus − B cubo-cubo［$A^6 - B^6$］であろう。これから

定理 23

2 つの辺の和に，それらの辺そのものの差の平方の立方の［うち］1 度だけとられたものからなる，6 つのそれぞれの平面的立体［の全体］を掛けてつくるものは，それらの立方の立方の差に等しい。

帰結

立方の立方の差は，もし辺の和で割られるならば，それらの辺そのものの差の平方の立方の［うち］1 度だけとられたものからなる，6 つのそれぞれの平面的立体［の全体］が生じるであろう。［そして，逆に，立方の立方の差は，辺の差の平方の立方のうち 1 度だけとられたものからなる，6 つのそれぞれの平面的立体の全体で割られるならば，それらの辺の和が生じるであろう。］

別の帰結

辺の差が［辺の］和に対するように，それらの辺そのものの差の平方の立方の［うち］1 度だけとられたものからなる，6 つの平面的立体［の全体］が，それらの辺そのものの和の平方の立方の［うち］1 度だけとられたものからなる，6 つのそれぞれの平面的立体［の和］に対するであろう。

命題 6 から命題 24 までには，「乗法公式」を中心として式の扱いが述べられている。ヴィエートの記法は今日のものとさほど変わらないものであるが，あえて書き換えてみると ⋯⋯

命題 6　$(a+b)+(a-b)=2a$

命題 7　$(a+b)-(a-b)=2b$

命題 8　$(a-b)-(a-e)=e-b$

命題 9　$(a+g)-(a+b)=g-b$

命題 10　$(a+g)-(a-b)=g+b$

命題 11　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$

命題 12　$(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$

命題 13　$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$

命題 14　$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

命題 15　$(a+b)^3+(a-b)^3=2a^2+6ab^2$

命題 16　$(a+b)^3-(a-b)^3=6a^2b+2b^3$

命題 17　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

命題 18　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

命題 19　$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)=a^4-b^4$

命題 20　$(a+b)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)=a^4-b^4$

命題 20 の別の帰結　$(a-b):(a+b)=(a^3-a^2b+ab^2-b^3):(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$

命題 21　$(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)=a^5-b^5$

命題 22　$(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)=a^5+b^5$

命題 23　$(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)=a^6-b^6$

命題 24　$(a+b)(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)=a^6-b^6$

命題 24 の別の帰結　$(a-b):(a+b)$

$$=(a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5)$$
$$:(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)$$

前述の諸命題から［次の］一般的な定理が導かれる。

定理 I

2 つの辺の差に，それらの辺そのものの和のベキの［うち］1 度だけとられたものからなる，それぞれの同次のもの［の和］を掛けてつくるものは，1 つだけ上の階級の (gradus proxime superioris)

ベキの差に等しい。このことから

帰結

ベキの差は，もし辺の差で割られるならば，それらの辺そのものの和の，1 つだけ下の階級の (gradus proxime inferioris) ベキの［うち］1 度だけとられたものからなる，それぞれの同次のもの［の和］が生じるであろう。そして，逆に，

ベキの差は，もしそれらの辺そのものの和の，1 つだけ下の階級のベキの［うち］1 度だけとられたものからなる，それぞれの同次のもの［の和］で割られるならば，辺の差が生じるであろう。

定理 II

2 つの辺の和に，それらの辺そのものの差のベキの［うち］1 度だけとられたものからなる，それぞれの同次のもの［の全体］を掛けてつくるものは，1 つだけ上の順位の (ordinis proxime superioris) ベキの和あるいは差に等しい。確かに，もしそれぞれの同次のものが奇数個であったならば，和であり，一方，もしそれぞれの同次のものが偶数個であったならば，差である。このことから

帰結

ベキの和あるいは差は，もし辺の和で割られるならば，それらの辺そのものの差の，1 つだけ下の順位の (ordinis proxime inferioris) ベキの［うち］1 度だけとられたものからなる，それぞれの同次のもの［の全体］が生じるであろう。

別の**帰結**

もし，辺の和あるいは差のベキからなる，それぞれの同次のものが偶数個であったならば，辺の差が辺の和に対するように，それらの辺そのものの差のベキの［うち］1 度だけとられたものからなる，それぞれの同次のもの［の全体］が，それらの辺そのものの和のベキの［うち］1 度だけとられたものからなる，それぞれの同次のもの［の和］に対するであろう。

> 「一般の n」という表現はまだ使われていないが，ここでの 2 つの定理は明らかに「一般」のものである。
> 定理 I は
> $$(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})=a^n-b^n$$
> であり，定理 II は
> $$\begin{aligned}&(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots+(-1)^{n-2}ab^{n-2}+(-1)^{n-1}b^{n-1})\\&\qquad=\begin{cases}a^n+b^n & (n\text{ が奇数})\\ a^n-b^n & (n\text{ が偶数})\end{cases}\end{aligned}$$
> である。
> これらから，n が偶数のときには，
> $$\begin{aligned}&(a-b):(a+b)\\&\qquad=(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots+(-1)^{n-2}ab^{n-2}+(-1)^{n-1}b^{n-1})\\&\qquad\qquad:(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})\end{aligned}$$
> が導かれる。

作用されたベキの生成

および，最初に，加法的［な作用による場合］

命題 XXV

辺に対する補足的な (sublaterali coëfficiente) 長さによって適切に結び付けられた，辺によ［ってつくられ］る平面の加法によって作用された平方をつくること。

2 項根を $A+B$ とし，辺に対する補足的な長さを D としよう。D および $A+B$ によ［ってつく
24 られ］る平面の加法によって作用された，$A+B$ による平方をつくらなければならない。$A+B$ に $A+B+D$ が掛けられ，つくられたそれぞれの平面がまとめられると，それは A quadratum + A in B bis + B quadrato + D in A + D in B であろう。それゆえ，それは，$A+B$ に長さ D が掛けられた平面の加法によって作用された，$A+B$ による平方に等しくされるであろう。さらに，これから［次のように］規定される。

定理

辺によって加法的に作用された平方の生成

もし 2 つの辺，さらには辺に対する補足的な長さがあったとするならば，第 1 の辺の平方，足す第 1 の辺に第 2 の辺の 2 倍が掛けられた平面，足す第 2 の辺の平方，足す第 1 の辺に補足的な長さが掛けられた平面，足す第 2 の辺に同じ補足的な長さが掛けられた平面は，その補足的な長さおよびそれらの辺の和によ［ってつくられ］る平面の加法によって作用された，それらの辺の和の平方に等しい。

一方の辺を A，他方を B，辺に対する補足的な長さを D としよう。私は，$A+B$ の $A+B+D$ による乗法の操作により，A quadratum + A in B bis + B quadrato + D in A + D in B は $A+B$ quadrato + D in $A+B$ に等しい，という。

別の定理

もし同じ 2 項根から，1 つは純粋な，もう 1 つは根および結び付けられた補足的な長さによって［つくられて］加法的に作用された，2 つの平方がつくられるならば，純粋な結合に作用された結合が加えられた，それぞれの平面は，

第 1 の辺に補足的な長さを掛けてつくられる平面

第 2 の辺に同じ補足的な長さを掛けてつくられる平面

である。［このことは］両方の仮定の比較から［分かる］。

ここでの主張は

$$(a+b)^2 + d(a+b) = (a+b)(a+b+d) = a^2 + 2ab + b^2 + da + db$$

ということであるが，左辺の $(a+b)^2 + d(a+b)$ において，d が辺に対する補足的な長さである。「補足的な (coëfficiente)」としたのは，d のことを辺 $(a+b)$ とともに平面 $d(a+b)$ をつくるための「補完的な」ものと解したためである。
また，ここでいう「作用」とは，$(a+b)^2 + d(a+b)$ における，$(a+b)^2$ と $d(a+b)$ の加法のことである。

命題 XXVI

2 項根から，辺に対する補足的な平面によって適切に結び付けられた，辺によ［ってつくられ］る立体の加法によって作用された立方をつくること。

2 項根を $A+B$，辺に対する補足的な平面を D としよう。平面 D および $A+B$ そのものによ［ってつくられ］る立体の加法によって作用された，$A+B$ による立方がつくられなければなら

ない。$A+B$ による平方がつくられ，それに平面 D が加えられたものに $A+B$ が掛けられ，つくられたそれぞれの立体がまとめられると，それは A cubus $+$ A quadrato in B ter $+$ A in B quadratum ter $+$ B cubo $+$ D plani in A $+$ D plano in B であろう。それゆえ，それは，$A+B$ および平面 D によ［ってつくられ］る立体の加法によって作用された，$A+B$ による立方に等しくされるであろう。これから［次のように］規定される。

定理

もし 2 つの辺，さらには辺に対する補足的な平面があったとするならば，第 1 の辺の立方，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の 3 倍が掛けられた立体，足す第 1 の辺に第 2 の辺の平方の 3 倍が掛けられた立体，足す第 2 の辺の立方，足す第 1 の辺に補足的な平面が掛けられた立体，足す第 2 の辺に同じ補足的な平面が掛けられた立体は，その補足的な平面およびそれらの辺の和によ［ってつくられ］る立体の加法によって作用された，それらの辺の和に立方に等しい。

> $(a+b)^3+d(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+da+db$ ということであるが，同次元の法則により，補足的な d は「平面」(2 次元) であるとみなされる。

命題 XXVII

2 項根から，平方に対する補足的な (subquadratica coëfficiente) 長さによって適切に結び付けられた，平方によ［ってつくられ］る立体の加法によって作用された立方をつくること。

2 項根を $A+B$，平方に対する補足的な長さを D としよう。D および $A+B$ による平方によ［ってつくられ］る立体の加法によって作用された，$A+B$ による立方がつくられなければならない。$A+B$ による平方がつくられ，それに $A+B+D$ が掛けられ，つくられたそれぞれの立体がまとめられると，それは A cubus $+$ A quadrato in B ter $+$ A in B quadratum ter $+$ B cubo $+$ A quadrato in D $+$ A in B bis in D $+$ B quadrato in D であろう。それゆえ，それは，$A+B$ の平方および長さ D によ［ってつくられ］る立体の加法のよって作用された，$A+B$ による立方に等しいであろう。これから［次のように］言い表される。

定理 25

平方によって加法的に作用された立方の生成

もし 2 つの辺，そしてさらに平方に対する補足的な長さがあったとするならば，第 1 の辺の立方，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の 3 倍が掛けられた立体，足す第 1 の辺に第 2 の辺の平方の 3 倍が掛けられた立体，足す第 2 の辺の立方，足す第 1 の辺の平方に補足的な長さが掛けられた立体，足すそれらの辺による平面の 2 倍に補足的な長さが掛けられた立体，足す第 2 の辺の平方に補足的な長さが掛けられた立体は，その補足的な長さおよびそれらの辺の和の平方によ［ってつくられ］る立体の加法によって作用された，それらの辺の和の立方に等しい。

一方の辺を A，他方を B，平方に対する補足的な長さを D としよう。私は，A quadrati $+$ A in B 2 $+$ B quadrato の $A+B+D$ による乗法の操作により，A cubum $+$ A quadrato in B 3 $+$ A in B quadratum 3 $+$ B cubo $+$ A quadrato in D $+$ A in B in D 2 $+$ B quadrato in D は $A+B$ cubo $+$ D in $A+B$ quadratum に等しい，という。

別の**定理**

もし同じ 2 項根から，1 つは純粋な，もう 1 つはその根そのものの平方および結び付けられた補

足的な長さによって作用された，2 つの立方がつくられるならば，純粋な結合に作用された結合が加えられた，それぞれの立体は

第 1 の辺の平方に補足的な長さが掛けられた立体

第 2 の辺に，第 1 の辺に補足的な長さが掛けられてつくられる平面の 2 倍が掛けられた立体

第 2 の辺の平方に補足的な長さが掛けられた立体

である。[このことは] 両方の仮定の比較から [分かる]。

命題 XXVIII

2 項根から，辺に対する補足的な立体によって適切に結び付けられた，辺によ [ってつくられ] る平面的平面の加法によって作用された平方の平方をつくること。

2 項根を $A+B$，辺に対する補足的な立体を D としよう。$A+B$ および立体 D そのものによ [ってつくられ] る平面的平面の加法によって作用された，$A+B$ による平方の平方がつくられなければならない。$A+B$ による立方がつくられ，それに立体 D が加えられたものに $A+B$ が掛けられ，つくられたそれぞれの平面的平面がまとめられると，それは A quadrato-quadratum + A cubo in B 4 + A quadrato in B quadratum 6 + A in B cubum 4 + B quadrato-quadrato + A in D solidum + B in D solidum であろう。それゆえ，それは，$A+B$ および立体 D そのものによ [ってつくられ] る平面的平面の加法によって作用された，$A+B$ による平方の平方に等しくされるであろう。これから

定理

辺によって加法的に作用された平方の平方の生成

もし 2 つの辺，そしてさらに補足的な立体があったとするならば，第 1 の辺の平方の平方，足す第 1 の辺の立方に第 2 の辺の 4 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の平方の 6 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺に第 2 の辺の立方の 6 倍が掛けられたもの，足す第 2 の辺の平方の平方，足す第 1 の辺に補足的な立体が掛けられたもの，足す第 2 の辺に補足的な立体が掛けられたものは，前述の和および補足的な立体によ [ってつくられ] る平面的平面の加法によって作用された，辺の和の平方の平方に等しい。

一方の辺を A，他方を B，辺に対する補足的な立体を D としよう。私は，A cubi + A quadrato in B 3 + A in B quadratum 3 + B cubo + 立体 D の $A+B$ による乗法の操作により，A quadrato-quadratum + A cubo in B 4 + A quadrato in B quadratum 6 + A in B cubum 4 + B quadrato-quadrato + A in D solidum + B in D solidum は $A+B$ quadrato-quadrato + D solido in $A+B$ に等しい，という。

26 命題 XXIX

2 項根から，立方に対する補足的な (subcubico coëfficiente) 長さによって適切に結び付けられた，立方によ [ってつくられ] る平面的平面の加法によって作用された平方の平方をつくること。

2 項根を $A+B$，補足的な長さを D としよう。$A+B$ in D から立方によ [ってつくられ] る平面的平面の加法によって作用された，$A+B$ による平方の平方がつくられなければならない。$A+B$ による立方がつくられ，それに $A+B+D$ が掛けられ，つくられたそれぞれの平面的平面がまとめられると，それは A quadrato-quadratum + A cubo in B 4 + A quadrato in B quadratum

6 + A in B cubum 4 + B quadrato-quadrato + A cubo in D + A quadrato in B ter in D + A in B quadratum ter in D + B cubo in D であろう。それゆえ，それは，$A+B$ の立方および長さ D そのものによ［ってつくられ］る平面的平面の加法によって作用された，$A+B$ による平方の平方に等しいであろう。これから

定理

立方によって加法的に作用された平方の平方の生成

もし 2 つの辺，および補足的な長さがあったとするならば，第 1 の辺の平方の平方，足す第 1 の辺の立方に第 2 の辺の 4 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の 6 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺に第 2 の辺の立方の 4 倍が掛けられたもの，足す第 2 の辺の平方の平方，足す第 1 の辺の立方に補足的な長さが掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方および第 2 の辺の 3 倍に補足的な長さが掛けられた立体，足す第 1 の辺および第 2 の辺の平方の 3 倍に補足的な長さが掛けられた立体，足す第 2 の辺の立方に補足的な長さが掛けられたものは，前述の和および補足的な長さによ［ってつくられ］る平面的平面の加法によって作用された，辺の和の平方に平方に等しい。

一方の辺を A，他方を B，補足的な長さを D としよう。私は，A cubi + A quadrato in B 3 + A in B quadratum 3 + B cubo の $A+B+D$ による乗法の操作により，A quadrato-quadratum + A cubo in B 4 + A quadrato in B quadratum 6 + A in B cubum 4 + B quadrato-quadrato + A cubo in D + A quadrato in B in D 3 + A in B quadratum in D 3 + B cubo in D は $A+B$ quadrato-quadrato + D in $A+B$ cubum に等しい，という。

別の**定理**

もし同じ 2 項根から，1 つは純粋な，もう 1 つは辺そのものの立方および結び付けられた補足的な長さによ［ってつくられ］る平面的平面の加法によって作用された，2 つの平方の平方がつくられるならば，純粋な結合に作用された結合が加えられた，それぞれの平面的平面は

第 1 の辺の立方に補足的な長さが掛けられた平面的平面

第 1 の辺の平方に，第 2 の辺に補足的な長さが掛けられてつくられる平面の 3 倍が掛けられた平面的平面

第 1 の辺に，第 2 の辺の平方に補足的な長さが掛けられてつくられる立体の 3 倍が掛けられた平面的平面

第 2 の辺の立方に補足的な長さが掛けられた平面的平面

である。［このことは］両方の仮定の比較から［分かる］。

純粋な	作用された
A quadrato-quadratum	A quadrato-quadratum
A cubus in B 4	A cubus B 4
A quadratum in B quadratum 6	A quadratum in B quadratum 6
A in B cubum 4	A in B cubum 4
B quadrato-quadratum	B quadrato-quadratum
	I. A cubus in D
	II. A quadratum in B in D
	III. A in B quadratum in D
	IV. B cubus in D

A cubi + A quadrato in B 3，A in B quadratum 3，plus B cubo の $A+B+D$ による乗法 27

の操作による。

命題 XXX

2 項根から，辺に対する補足的な立体および平方に対する補足的な平面によって適切に結び付けられた，1 つは辺による，もう 1 つは平方による 2 つの平面的平面の加法によって作用された平方の平方をつくること。

2 項根を $A+B$，辺に対する補足的な立体を D，平方に対する補足的な平面を G としよう。1 つは $A+B$ および立体 D による，もう 1 つは $A+B$ quadrato および平面 G による平面的平面の加法によって作用された，$A+B$ による平方の平方がつくられなければならない。$A+B$ による平方がつくられ，それに平面 G が加えられたものに $A+B$ が掛けられ，［そのように］つくられた立体に立体 D が加えられたものに $A+B$ が掛けられて，つくられたそれぞれの平面的平面がまとめられると，それは確かに A quadrato-quadratum + A cubo in B 4 + A quadrato in B quadratum 6 + A in B cubum 4 + B quadrato-quadrato + A quadrato in G planum + A in B bis in G planum + B quadrato in G planum + A in D solidum + B in D solidum であろう。それゆえ，この平面的平面は，$A+B$ quadrato および平面 G による平面的平面，および $A+B$ および立体 D による平面的平面の加法によって作用された，$A+B$ による平方の平方に等しいであろう。これから

定理

もし 2 つの辺，さらに 1 つは平方に対する平面である，もう 1 つは辺に対する立体である，2 つの補足的なものがあったとするならば，第 1 の辺の平方の平方，足す第 1 の辺の立方に第 2 の辺の 4 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の平方の 6 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺に第 2 の辺の立方の 4 倍が掛けられたもの，足す第 2 の辺の平方の平方，足す第 1 の辺の平方に補足的な平面が掛けられたもの，足すそれらの辺による平面の 2 倍に補足的な平面が掛けられたもの，足す第 2 の辺の平方に補足的な平面が掛けられたもの，足す第 1 の辺に補足的な立体が掛けられたもの，足す第 2 の辺に補足的な立体が掛けられたものは，1 つはそれらの辺の和平方および補足的な平面による，もう 1 つはそれらの辺の和および補足的な立体による，2 つの平面的平面の加法によって作用された，それらの辺の和の平方の平方に等しい。

ここでの主張は

$$\begin{aligned}(a+b)^4+d(a+b)+g(a+b)^2 &= \left[\left\{(a+b)^2+g\right\}(a+b)+d\right](a+b)\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4+a^2g+2abg+b^2g+ad+bd\end{aligned}$$

ということ。

命題 XXXI

2 項根から，辺に対する補足的な平面的平面によって適切に結び付けられた，辺によ［ってつくられ］る平面的立体に加法によって作用された平方の立方をつくること。

2 項根を $A+B$，辺に対する補足的な平面的平面を D としよう。$A+B$ および平面的平面 D によ［ってつくられ］る平面的立体の加法によって作用された，$A+B$ による平方の立方がつくられなければならない。$A+B$ による平方の平方がつくられ，それに平面的平面 D が加えられたものに $A+B$ が掛けられ，つくられたそれぞれの平面的立体がまとめられると，それは A quadrato-cubus + A quadrato-quadrato in B 5 + A cubo in B quadratum 10 + A quadrato

in B cubum 10 + A in B quadrato-quadratum 5 + B quadrato-cubo + A in D plano-planum + B in D plano-planum であろう。それゆえ，それは，$A+B$ および平面的平面 D によ［ってつくられ］る平面的立体の加法によって作用された，$A+B$ による平方の立方と等しくされるであろう。これから［次のように］言い表される。

定理

もし 2 つの辺，さらに辺に対する補足的な平面的平面があったとするならば，第 1 の辺の平方の立方，足す第 1 の辺の平方の平方に第 2 の辺の 5 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の立方に第 2 の辺の平方の 10 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の立方の 10 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺に第 2 の辺の平方の平方の 5 倍が掛けられたもの，足す第 2 の辺の平方の立方，足す第 1 の辺に補足的な平面的平面が掛けられたもの，足す第 2 の辺に補足的な平面的平面が掛けられたものは，補足的な平面的平面およびそれらの辺の和によ［ってつくられ］る平面的立体の加法によって作用された，それらの辺の和の平方の立方に等しい。 28

命題 XXXII

2 項根から，立方に対する補足的な平面によって適切に結び付けられた，立方によ［ってつくられ］る平面的立体の加法によって作用された平方の立方をつくること。

2 項根を $A+B$，立方に対する補足的な平面を D としよう。$A+B$ の立方および平面 D によ［ってつくられ］る平面的立体の加法によって作用された，$A+B$ による平方の立方がつくられなければならない。$A+B$ による平方がとられ，それに平面 D が加えられたものに $A+B$ に立方が掛けられ，つくられたそれぞれの平面的立体がまとめられると，それは A quadrato-cubus + A quadraro-quadrato in B 5 + A cubo in B quadratum 10 + A quadrato in B cubum 10 + A in B quadrato-quadratum 5 + B quadrato-cubo + A cubo in D planum + A quadrato in B ter in D planum + A in B quadratum ter in D planum + B cubo in D planum であろう。これから［次のように］規定される。

定理

もし 2 つの辺，および補足的な平面があったとするならば，第 1 の辺の平方の立方，足す第 1 の辺の平方の平方に第 2 の辺の 5 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の立方に第 2 の辺の平方の 10 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の立方の 10 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺に第 2 の辺の平方の平方の 5 倍が掛けられたもの，足す第 2 の辺の平方の立方，足す第 1 の辺に立方に補足的な平面が掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方および補足的な平面が掛けられた第 2 の辺の 3 倍による立体，足す第 1 の辺および補足的な平面が掛けられた第 2 の辺の平方の 3 倍による立体，足す第 2 の辺の立方に補足的な平面が掛けられた立体は，補足的な平面およびそれらの辺の和の立方によ［ってつくられ］る平面的立体の加法によって作用された，それらの辺の和の平方の立方に等しい。

ここでの主張は

$$\begin{aligned}(a+b)^5+d(a+b)^3 &= \left\{(a+b)^2+d\right\}(a+b)^3 \\ &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5+a^3d+2a^2bd+3ab^2d+b^3d\end{aligned}$$

ということ。

命題 XXXIII

2 項根から，辺に対する補足的な平面的立体によって適切に結び付けられた，辺によ［ってつくられ］る立体的立体の加法によって作用された立方の立方をつくること。

2 項根を $A+B$，辺に対する補足的な平面的立体を D としよう。平面的立体 D が掛けられた $A+B$ による立体的立体の加法によって作用された，$A+B$ による立方の立方がつくられなければならない。$A+B$ の平方の立方がつくられ，平面的立体 D が増やされたそれに $A+B$ が掛けられ，つくられたそれぞれの立体的立体がまとめられると，それは A cubo-cubus + A quadrato-cubo in B 6 + A quadrato-quadrati in B quadratum 15 + A cubo in B cubum 20 + A quadrato in B quadrato-quadratum 15 + A in B quadrato-cubum 6 + B cubo-cubo + A in D plano-solidum + B in D plano-solidum であろう。それゆえ，それは，$A+B$ の立方の立方足す平面的立体 D が掛けられた $A+B$ による立体的立体に等しくされるであろう。これから

定理

もし 2 つの辺，と同時に辺に対する補足的な平面的立体があったとするならば，第 1 の辺の立方の立方，足す第 1 の辺の平方の立方に第 2 の辺の 6 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方の平方に第 2 の辺の平方の 15 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の立方に第 2 の辺の立方の 20 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の平方の平方の 15 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺に第 2 の辺の平方の立方の 6 倍が掛けられたもの，足す第 2 の辺の立方の立方，足す第 2 の辺に補足的な平面的立体が掛けられたもの，足す第 2 の辺に補足的な平面的立体が掛けられたものは，補足的な平面的立体およびそれらの辺の和によ［ってつくられ］る立体的立体の加法によって作用された，それらの辺の和の立方の立方に等しい。

29

作用されたベキの生成

減法的［な作用による場合］

命題 XXXIV

2 項根から，辺に対する補足的な長さによって適切に結び付けられた，辺によ［ってつくられ］る平面の減法 (multa) によって作用された平方をつくること。

2 項根を $A+B$，辺に対する補足的な長さを D としよう。$A+B$ および長さ D によ［ってつくられ］る平面の減法によって作用された，$A+B$ による平方がつくられなければならない。$A+B$ に $A+B-D$ が掛けられると，つくられた平面は A quadratum + A in B bis + B quadrato − A in D − B in D であろう。それゆえ，それは，$A+B$ に長さ D が掛けられた平面の減法によって作用された，$A+B$ による平方に等しくされるであろう。これから

定理

もし 2 つの辺，それと同時に辺に対する補足的な長さがあったとするならば，第 1 の辺の平方，足す第 1 の辺に第 2 の辺の 2 倍が掛けられた平面，足す第 2 の辺の平方，引く第 1 の辺に補足的な長さが掛けられた平面，引く第 2 の辺に補足的な長さが掛けられた平面は，それらの辺の和およびその補足的な長さによ［ってつくられ］る平面の減法によって作用された，それらの辺の和の平方に等しい。

命題 XXXV

2 項根から，辺に対する補足的な平面によって適切に結び付けられた，辺によ［ってつくられ］

る立体の減法によって作用された立方をつくること。

2 項根を $A+B$，辺に対する補足的な平面を D としよう。$A+B$ および平面 D によ［ってつくられ］る立体の減法によって作用された，$A+B$ による立方がつくられなければならない。$A+B$ による平方がつくられ，それから平面 D が引かれたもの (multatum) に $A+B$ が掛けられ，つくられたそれぞれの立体がまとめられると，それは A cubus $+$ A quadrato in B ter $+$ A in B quadratum ter $+$ B cubo $-$ A in D planum $-$ B in D planum であろうし，［これは］$A+B$ に平面 D が掛けられた立体の減法によって作用された，$A+B$ による立方に等しくされるであろう。これから

定理

もし 2 つの辺，さらに辺に対する補足的な平面があったとするならば，第 1 の辺の立方，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の 3 倍が掛けられた立体，足す第 1 の辺に第 2 の辺の平方の 3 倍が掛けられた立体，足す第 2 の辺の立方，引く第 1 の辺に補足的な平面が掛けられた立体，引く第 2 の辺に補足的な平面が掛けられた立体は，補足的な平面およびそれらの辺の和によ［ってつくられ］る立体の減法によって作用された，それらの辺の和の立方に等しい。

命題 XXXVI

2 項根から，平方に対する補足的な長さによって適切に結び付けられた，平方によ［ってつくられ］る立体の減法によって作用された立方をつくること。

2 項根を $A+B$，平方に対する補足的な長さを D としよう。$A+B$ の平方および長さ D によ［ってつくられ］る立体の減法によって作用された，$A+B$ による立方がつくられなければならない。$A+B$ による平方がつくられ，それに $A+B-D$ が掛けられ，つくられたそれぞれの立体がまとめられると，それは A cubus $+$ A quadrato in B ter $+$ A in B quadratum ter $+$ B cubo $-$ A quadrato in D $-$ A in B bis in D $-$ B quadrato in D であろう。それゆえ，それは，$A+B$ の平方に長さ D が掛けられた立体の減法によって作用された，$A+B$ による立方に等しいであろう。これから

定理

もし 2 つの辺，さらに平方に対する補足的な長さがあったとするならば，第 1 の辺の立方，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の 3 倍が掛けられた立体，足す第 1 の辺に第 2 の辺の平方の 3 倍が掛
けられた立体，足す第 2 の辺の立方，引く第 1 の辺の平方に補足的な長さが掛けられた立体，引く 30
それらの辺からつくられる平面の 2 倍に補足的な長さが掛けられた立体，引く第 2 の辺の平方に補足的な長さが掛けられた立体は，補足的な長さおよびそれらの辺の和の平方によ［ってつくられ］る立体の減法によって作用された，それらの辺の和の立方に等しい。

作用されたベキの生成

減法的［な作用］および加法的［な作用］が混じっている［場合］

命題 XXXVII

2 項根から，辺に対する補足的な立体および立方に対する補足的な長さによって適切に結び付けられた，一方では辺によ［ってつくられ］る平面的平面の加法によって，［そして］他方では立方によ［ってつくられ］る平面的平面の減法によって作用された平方の平方をつくること。

2 項根を $A+B$，辺に対する補足的な立体を D，立方に対する補足的な長さを G としよう。一方

では $A+B$ に立体 D が掛けられた平面的平面の加法によって，［そして］一方では $A+B$ の立方に長さ G が掛けられた平面的平面の減法によって作用された，$A+B$ による平方の平方がつくられなければならない。$A+B$ による平方に $A+B-G$ が掛けられ，つくられた立体に立体 D が加えられたものに $A+B$ が掛けられて，つくられたそれぞれの平面的平面がまとめられると，それは A quadrato-quadratum $+$ A cubo in B 4 $+$ A quadrato in B quadratum 6 $+$ A in B cubum 4 $+$ B quadrato-quadrato $-$ A cubo in G $-$ A quadrato in B ter in G $-$ A in B quadratim ter in G $-$ B cubo in G $+$ A in D solidum $+$ B in D solidum であろう。これから

定理

もし 2 つの辺，さらに立方に対する補足的な長さ，しかも辺に対する補足的な立方もまたあったとするならば，第 1 の辺の平方の平方，足す第 1 の辺の立方に第 2 の辺の 4 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の平方の 6 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺に第 2 の辺の立方の 4 倍が掛けられたもの，足す第 2 の辺の平方の平方，引く第 1 の辺の立方に補足的な長さが掛けられたもの，引く第 1 の辺の平方および第 2 の辺の 3 倍による立方に補足的な長さが掛けられたもの，引く第 1 の辺および第 2 の辺の平方の 3 倍による立体に補足的な長さが掛けられたもの，引く第 2 の辺の立方に補足的な長さが掛けられたもの，足す第 1 の辺に補足的な立体が掛けられたもの，足す第 2 の辺に補足的な立体が掛けられたものは，一方ではそれらの辺の和および補足的な長さによる平面的平面の減法によって，［そして］一方では同じ和および補足的な立体による平面的平面の加法によって作用された，それらの辺の和の平方の平方に等しい。

ここでの主張は

$$\begin{aligned}(a+b)^4-g(a+b)^3+d(a+b)&=\left\{(a+b)^2(a+b-g)+d\right\}(a+b)\\&=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4-ga^3-3ga^2b-3gab^2-gb^3+da+db\end{aligned}$$

ということ。

命題 XXXVIII

2 項根から，辺に対する補足的な立体および立方に対する補足的な長さによって適切に結び付けられた，一方では辺によ［ってつくられ］る平面的平面の減法によって，［そして］一方では立方によ［ってつくられ］る平面的平面の加法によって作用された平方の平方をつくること。

2 項根を $A+B$，辺に対する補足的な立体を D，立方に対する補足的な長さを G としよう。$A+B$ および立体 D による平面的平面の減法によって，さらに $A+B$ の立方および長さ G による平面的平面の加法によって作用された，$A+B$ による平方の平方がつくられなければならない。$A+B$ による平方に $A+B+G$ が掛けられ，つくられた立体から立体 D が引かれたものに $A+B$ が掛けられると，生じた平面的平面は A quadrato-quadratum $+$ A cubo in B 4 $+$ A quadrato in B quadratum 6 $+$ A in B cubum 4 $+$ B quadrato-quadrato $+$ A cubo in G $+$ A quadrato in B ter in G $+$ A in B quadratum in G 3 $+$ B cubo in G $-$ A in D solidum $-$ B in D solidum
31 であろう。それゆえ，それは，$A+B$ の立方および長さ G による平面的平面の加法によって，そして根 $A+B$ および立体 D そのものによる平面的平面の減法によって作用された，$A+B$ による平方の平方に等しくされるであろう。これから［次のように］言い表される。

定理

もし 2 つの辺，さらに立方に対する補足的な長さ，しかもまた辺に対する補足的な立方もあった

とするならば，第 1 の辺の平方の平方，足す第 1 の辺の立方に第 2 の辺の 4 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の平方の 6 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺に第 2 の辺の立方の 4 倍が掛けられたもの，足す第 2 の辺の平方の平方，足す第 1 の辺の立方に補足的な長さが掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方および第 2 の辺の 3 倍による立方に補足的な長さが掛けられた立体，足す第 1 の辺および第 2 の辺の平方の 3 倍による立体に補足的な長さが掛けられた立体，足す第 2 の辺の立方に補足的な長さが掛けられたもの，引く第 1 の辺に補足的な立体が掛けられたもの，引く第 2 の辺に補足的な立体が掛けられたものは，一方ではそれらの辺の和および補足的な長さによる平面的平面の加法によって，［そして］一方ではそれらの辺の和そのものおよび補足的な立体による平面的平面の減法によって作用された，それらの辺の和の平方の平方に等しい。

命題 XXXIX

2 項根から，辺に対する補足的な平面的平面および立方に対する補足的な平面によって適切に結び付けられた，辺によ［ってつくられ］る平面的立体の加法によって，さらに立方によ［ってつくられ］る平面的立体の減法によって作用された平方の立方をつくること。

2 項根を $A+B$，辺に対する補足的な平面的平面を D，立方に対する補足的な平面を G としよう。根 $A+B$ および平面的平面 D による平面的立体の加法によって，そして $A+B$ の立方および平面 G による平面的立体の減法によって作用された，$A+B$ による平方の立方が表されなければならない。$A+B$ による平方がつくられ，それから平面 G が引かれたものに $A+B$ による同じ平方が掛けられ，生じた平面的平面に平面的平面 D が増やされたものに $A+B$ が掛けられると，これらの平面的立体 A quadrato-cubus $+$ A quadrato-quadrato in B 5 $+$ A cubo in B quadratum 10 $+$ A quadrato in B cubum 10 $+$ A in B quadrato-quadratum 5 $+$ B quadrato-cubo $-$ A cubo in G planum $-$ A quadrato in B ter in G planum $-$ A in B quadratum ter in G planum $-$ B cubo in G planum $+$ A in D plano-planum $+$ B in D plano-planum が生じるであろう。これから

定理

もし 2 つの辺，さらに立方に対する補足的な平面，しかも辺に対する補足的な平面的平面もまたあったとするならば，第 1 の辺の平方の立方，足す第 1 の辺の平方の平方に第 2 の辺の 5 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の立方に第 2 の辺の平方の 10 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方に第 2 の辺の立方の 10 倍が掛けられたもの，足す第 1 の辺に第 2 の辺の平方の平方の 5 倍が掛けられたもの，足す第 2 の辺の平方の立方，引く第 1 の辺の立方に補足的な平面が掛けられたもの，引く第 1 の辺の平方および第 2 の辺の 3 倍による立体に補足的な平面が掛けられたもの，引く第 1 の辺および第 2 の辺の平方の 3 倍による立体に補足的な平面が掛けられたもの，引く第 2 の辺の立方に補足的な平面が掛けられたもの，足す第 1 の辺に補足的な平面的平面が掛けられたもの，足す第 2 の辺に補足的な平面的平面が掛けられたものは，一方ではそれらの辺の和の立方および補足的な平面による平面的立体の減法によって［そして］一方ではそれらの辺の和および補足的な平面的平面による平面的立体の加法によって作用された，それらの辺の和の平方の立方に等しい。

ここでの主張は

$$\begin{aligned}(a+b)^5+d(a+b)-g(a+b)^3&=\left[\left\{(a+b)^2-g\right\}(a+b)^2+d\right](a+b)\\&=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5-ga^3-3ga^2b-3gab^2-gb^3+da+db\end{aligned}$$

ということ。

引き裂かれたベキの生成

命題 XL

2 項根から，辺に対する補足的な長さによって適切に結び付けられた，平方の減法によって作用された，辺によ［ってつくられ］る平面をつくること。

32 2 項根を $A+B$，辺に対する補足的な長さを D としよう。$A+B$ の平方の減法によって作用された，$A+B$ および長さ D による平面がつくられなければならない。$D-A-B$ に $A+B$ が掛けられると，それぞれの平面 A in D + B in D − A quadrato − A in B in 2 − B quadrato が生じるであろう。さらに，これから［次のように］規定される。

定理

もし 2 つの辺，しかもまた辺に対する補足的な長さもあったとするならば，第 1 の辺に補足的な長さが掛けられた平面，足す第 2 の辺に補足的な長さが掛けられた平面，引く第 1 の辺の平方，引くそれらの辺による平面の 2 倍，引く第 2 の辺の平方は，それらの辺の和による平方の減法によって作用された，それらの辺の和およびその補足的な長さによる平面に等しい。

ここでの主張は

$$d(a+b)-(a+b)^2=(d-a-b)(a+b)=da+db-a^2-2ab-b^2$$

ということであり，命題 XXXIV (48 ページ) における減法「$(a+b)^2-d(a+b)$」と逆の減法である。

「解析法序説」では，命題 XXXIV におけるような，純粋なベキから取り去る減法を「順的」と，逆にこの命題 XL におけるような，純粋なベキを取り去る減法を「逆的」と呼んでいる。項目名における「引き裂かれた」というのは「逆的」ということ。

命題 XLI

2 項根から，辺に対する補足的な平面によって適切に結び付けられた，立方の減法によって作用された，辺によ［ってつくられ］る立体をつくること。

2 項根を $A+B$，辺に対する補足的な平面を D としよう。$A+B$ による立方の減法によって作用された，$A+B$ および平面 D による立体がつくられなければならない。$A+B$ に平面 D が掛けられ，$A+B$ の立方が引かれると，立体 A in D planum + B in D planum − A cubo − A quadrato in B 3 − A in B quadratum 3 − B cubo が生じるであろう。これから［次のように］言い表される。

定理

もし 2 つの辺，それと同時に辺に対する補足的な平面もまたあったとするならば，第 1 の辺および補足的な平面による立体，足す第 2 の辺および補足的な平面による立体，引く第 1 の辺の立方，引く第 1 の辺の平方に第 2 の辺の 3 倍が掛けられた立体，引く第 1 の辺に第 2 の辺の平方の 3 倍が掛けられた立体，引く第 2 の辺の立方は，それらの辺の和による立方の減法によって作用された，それらの辺の和および辺に対する補足的な平面による立体に等しい。

命題 XLII

2 項根から，平方に対する補足的な長さによって適切に結び付けられた，立方の減法によって作

用された，平方によ［ってつくられ］る立体をつくること。

2 項根を $A+B$，平方に対する補足的な長さを D としよう。$A+B$ による立方の減法によって作用された，$A+B$ の平方および長さ D による立体がつくられなければならない。$A+B$ の平方に $D-A-B$ が掛けられると，立体 A quadratum in $D+A$ in B bis in $D+B$ quadrato in D $-$ A cubo $-$ A quadrato in B 3 $-$ A in B quadratum 3 $-$ B cubo が生じるであろう。これから［次のように］述べられる。

定理

もし 2 つの辺，および平方に対する補足的な長さがあったとするならば，第 1 の辺の平方に補足的な長さが掛けられた立体，足すそれらの辺による平面の 2 倍に補足的な長さが掛けられた立体，足す第 2 の辺の平方に補足的な長さが掛けられた立体，引く第 1 の辺の立方，引く第 1 の辺の平方に第 2 の辺の 3 倍が掛けられた立体，引く第 1 の辺に第 2 の辺の平方の 3 倍が掛けられた立体，引く第 2 の辺の立方は，それらの辺の和による立方の減法によって作用された，それらの辺の和の平方および補足的な長さによる立体に等しい。

命題 XLIII

2 項根から，辺に対する補足的な立体によって適切に結び付けられた，平方の平方の減法によって作用された，辺によ［ってつくられ］る平面的平面をつくること。

2 項根を $A+B$，辺に対する補足的な立体を D としよう。$A+B$ による平方の平方の減法によって作用された，立体 D に $A+B$ が掛けられた平面的平面がつくられなければならない。$A+B$ の立方が立体 D そのものから取り去られ，それに $A+B$ が掛けられると，平面的平面 A in D 33
sokidum $+$ B in D solidum $-$ A quadrato-quadrato $-$ A cubo in B 4 $-$ A quadrato in B quadratum 6 $-$ A in B cubum 4 $-$ B quadrato-quadrato が生じるであろう。そして，これから［次のように］規定される。

定理

もし 2 つの辺，さらに補足的な立体があったとするならば，第 1 の辺に補足的な立体が掛けられたもの，足す第 2 の辺に同じ立体が掛けられたもの，引く第 1 の辺の平方の平方，引く第 1 の辺の立方に第 2 の辺の 4 倍が掛けられたもの，引く第 1 の辺の平方に第 2 の辺の平方の 6 倍が掛けられたもの，引く第 1 の辺に第 2 の辺の立方の 4 倍が掛けられたもの，引く第 2 の辺の平方の平方は，それらの辺の和の平方の平方の減法によって作用された，それらの辺の和に補足的な立体が掛けられた平面的平面に等しい。

命題 XLIV

2 項根から，立方に対する補足的な長さによって適切に結び付けられた，平方の平方の減法によって作用された，立方によ［ってつくられ］る平面的平面をつくること。

2 項根を $A+B$，立方に対する補足的な長さを D としよう。$A+B$ による平方の平方の減法によって作用された，$A+B$ の立方および D そのものによる平面的平面がつくられなければならない。$A+B$ の立方に $D-A-B$ が掛けられると，それぞれの平面的平面 A cubus in $D+A$ quadrato in B ter in $D+A$ in B quadratum ter in $D+B$ cubo in $D-A$ quadrato-quadrato $-$ A cubo in B 4 $-$ A quadrato in B quadratum 6 $-$ A in B cubum 4 $-$ B quadrato-quadrato が生じるであろう。それゆえ，これから［次のように］規定されるであろう。

定理

もし 2 つの辺，さらに補足的な長さがあったとするならば，第 1 の辺の立方に補足的な長さが掛けられたもの，足す第 1 の辺の平方および第 2 の辺の 3 倍による立体に同じ長さが掛けられたもの，足す第 1 の辺および第 2 の辺の平方の 3 倍による立体に同じ長さが掛けられたもの，足す第 2 の辺の立方に同じ長さが掛けられたもの，引く第 1 の辺の平方の平方，引く第 1 の辺の立方に第 2 の辺の 4 倍が掛けられたもの，引く第 1 の辺の平方に第 2 の辺の平方の 6 倍が掛けられたもの，引く第 1 の辺に第 2 の辺の立方の 4 倍が掛けられたもの，引く第 2 の辺の平方の平方は，それらの辺の和による平方の平方の減法によって作用された，補足的な長さおよびそれらの辺の和による平面的平面に等しい。

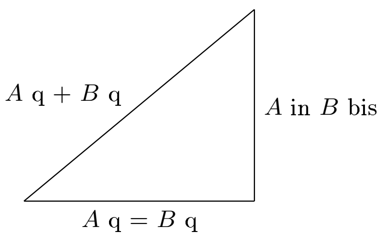
> この場所に，ボーグランによる (『解析術』p.66)，次のような注釈がある。
> 「さらに，私は，作用されたベキの生成または結合についてのこのそれぞれの定理は，ベキの数に関する解法のために最も洗練された操作によって解かれるように，同じベキの分解についてのそれぞれの問題に適合するということに気づかされるよう切望する。確かに，このことは書き留めておく必要がある。」
>
> なお，ボーグラン (Jean Beaugrand : 1584?-1640) はフランスの数学者・天文学者。ヴィエートの下で数学を学んでいたらしい。デカルト (René Descartes : 1596–1650)，フェルマ (Pierre de Fermat : 1601–1665)，メルセンヌ (Marin Mersenne : 1588–1648) らと交友があった。*Geostatique* (1636 年) という著作を残している。

三角形の生成

命題 XLV

2 つの根から直角三角形をつくること。

2 つの根 A，B があるとしよう。それらから直角三角形をつくらなければならない。そして，確かに，ピュタゴラス (Πυϑαγόρας (Pythagoras) : 前 572?–前 497?) が示したことによれば，直角に対する辺 (latus subtendentis angulum rectum) の平方は直角をはさむ辺 (latus circa rectum) の平方［の和］に等しい。さらに，［直角を］はさむ辺は特に斜辺と，一方，直角をはさむ辺は垂線および底線といわれるのが常である。それゆえ，それによってそれらのものを短縮すると，提出された 2 つの根から，そのうちの 1 つの平方が残りの 2 つ［の平方の和］に等しい，3 つの平方がつくられるであろうし，最大の辺は斜辺であり，一方，残りの辺が垂線および底線であると見なされる。しかし，前に既に規定されたように，2 つの辺の和の平方は同じ辺の差の平方および同じ辺による長方形の 4 倍［の和］に等しい。それゆえ，提示された根 A, B に対して，第 3 の比例［する大きさ］$\dfrac{B\text{ quadratum}}{A}$ が加えられるとしよう。そして，外項の和によってつくられたもの，［すなわち］斜辺，は $A + \dfrac{B\text{ quadrato}}{A}$ である。同じものの差，［すなわち］底線，は確かに $A = \dfrac{B\text{ quad.}}{A}$ である。垂線は B 2 であろうし，明らかに，その平方は外項による長方形［の 4 倍］に等しい。



割られた辺が同じ種類に戻されるように，すべて［の辺］に A を掛けると，斜辺は A quadratum + B quadrato，垂線は A in B 2，底線は A quadrat = B quadrato であろう。

34 これから，2 つの辺から直角三角形がつくられる。確かに，斜辺は［2 つの辺の］平方の和に，底

線は同じものの差に，垂線は［2 つの辺からつくられる］長方形に対応して (similis) いる。

同様に，3 つの比例［する大きさ］から直角三角形がつくられる。確かに，斜辺は外項の和に，底線は同じものの差に，垂線は中項の積に対応している。

帰結

直角三角形の垂線は底線と斜辺の和および同じものの差の間の比例中項である。

2 つの辺 A，B について，［$A : B = B : \dfrac{B^2}{A}$ に基づいて,］$X = A$，$Y = \dfrac{B^2}{A}$ とすると，命題 XIII の定理により $(X+Y)^2 = (X-Y)^2 + 4XY$ であるから,

$$\left(A + \frac{B^2}{A}\right)^2 = \left(A \sim \frac{B^2}{A}\right)^2 + 4A\,\frac{B^2}{A}$$

となる。

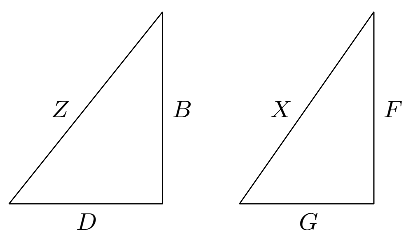
それゆえ，$4A\,\dfrac{B^2}{A} = 4B^2 = (2B)^2$ であるからピュタゴラスの定理により，$A + \dfrac{B^2}{A}$ を斜辺，$A \sim \dfrac{B^2}{A}$，$2B$ を底線，垂線とする直角三角形ができる，という訳である。

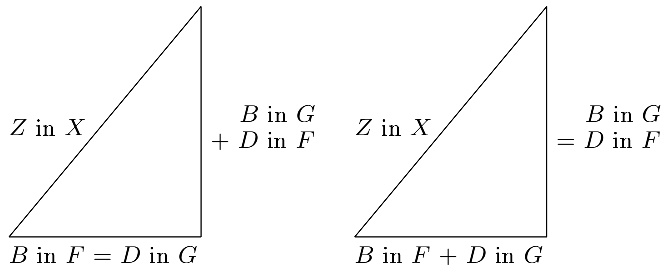
命題 XLVI

2 つの直角三角形から第 3 の直角三角形をつくること。

［次に示すような］2 つの直角三角形があるとしよう。すなわち,

第 3 の［直角三角形の］斜辺が第 1 の［直角三角形の］斜辺に第 2 の［直角三角形の］斜辺を掛けたもの，すなわち Z in X，に対応するようにしたい。それゆえ，底線および垂線に対応する平面［の和］は平方の積 Z quadratum in X quadratum，すなわち，詳しくいうと，B quadrato + D quadrato in G quadratum + F quadrato［$(B^2 + D^2)(G^2 + F^2)$］であろう。この積は 4 つの平面的平面，すなわち，B quadrato in G quadratum + D quadrato in F quadratum および B quadrato in F quadratum + D quadrato in G quadratum からなる。はじめの 2 つには B，D，F，G によって連続的につくられる平面的平面の 2 倍が加えられ，後の 2 つからは取り去られる。あるいは，逆に，はじめの 2 つからは取り去られ，後の 2 つには加えられる。［このとき，そのように］つくられた平面的平面は Z quadr. in X quadratum による平面的平面に等しくされているから，その積から失われた，あるいは［その積に］付け加わったものは何もない。さらに，B，D，F，G による連続的な積がその平面的平面に，共通に，2 度結び付けられたあるいは 2 度取り去られた平面的平面は平面を根にもつ。それら［の根］は





第 1 の場合は，はじめが B in G + D in F で，もう 1 つは B in F = D in G であり，一方，第 2 の場合は，はじめが B in G = D in F で，もう 1 つは B in F + D in G である。いずれの場合も，はじめが垂線で，もう 1 つが底線である。

それゆえ，いずれかの方法によって，2 つの直角三角形から第 3 の直角三角形がつくられた。確かに，第 3 の［直角三角形の］斜辺は第 1 および第 2 の［直角三角形の］斜辺による積に対応し，垂線は第 1 の［直角三角形の］底線と第 2 の［直角三角形の］垂線の積および，反対に，第 2 の［直角三角形の］底線と第 1 の［直角三角形の］垂線の積の和に，底線は第 1 および第 2 の［直角三角形の］底線の積と同じものの垂線の積との間の差に対応する。

あるいは，垂線は一方の底線および他方の垂線相互の積の差に，一方，底線は底線同士の積と垂線同士の積の和に対応する。

さらに，異なる 2 つの直角三角形から，はじめに説明された方法によって導かれた直角三角形は合成的 (synaeresis) 三角形と，第 2 の［方法による］ものは分解的 (diaeresis) 三角形といわれる。これから

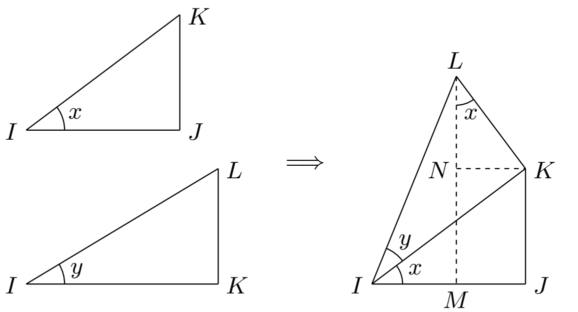
35

定理

もし 2 つの直角三角形があったとするならば，それらの斜辺によ［ってつくられ］る平面の平方は，それらの底線と垂線が相互に掛けられた積の和の平方，足すそれらの底線によ［ってつくられ］る積およびそれらの垂線によ［ってつくられ］る積の間の差の平方に等しい。あるいはまた，それらの底線と垂線相互の積の差の平方，足すそれらの底線によ［ってつくられ］る積およびそれらの垂線によ［ってつくられ］る積の和の平方に等しい。

$$
\begin{aligned}
(ZX)^2 = Z^2X^2 = (B^2+D^2)(G^2+F^2) &= B^2G^2 + D^2F^2 + B^2F^2 + D^2G^2 \\
&= B^2G^2 + D^2F^2 + 2BDFG + B^2F^2 + D^2G^2 - 2BDFG \\
&= (BG+DF)^2 + (BF \sim DG)^2 \\
[&= B^2G^2 + D^2F^2 - 2BDFG + B^2F^2 + D^2G^2 + 2BDFG \\
&= (BG \sim DF)^2 + (BF+DG)^2]
\end{aligned}
$$

となることから，直角三角形がつくられるということである。



木村 俊一はこの命題を三角関数の加法定理のヴィエート流の表現であると解釈し，「ヴィエトは研究の要所要所で加法定理を有効に利用するのである」と言っている (［11］pp.81–83)。

頂角が y の直角三角形 IKL の斜辺 IL が 1，頂角が x の直角三角形 IJK の斜辺 IK が $\cos y$ となるように調整しておき，左の図のように貼り合わせる。$\triangle IKL$ において，$LK = \sin y$，$IK = \cos y$ であり，$\triangle IJK$ において，$JK = \cos y \sin x$，$IJ = \cos y \cos x$ である。

さて，$\angle KLN = x$ となるから，$KN = \sin y \sin x$，$LN = \sin y \cos x$ となる。従って，$\triangle IML$ において，

$$
\begin{cases}
\sin(x+y) = LM = JK + LN = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\cos(x+y) = IM = IJ - JM = \cos x \cos y - \sin x \sin y
\end{cases}
$$

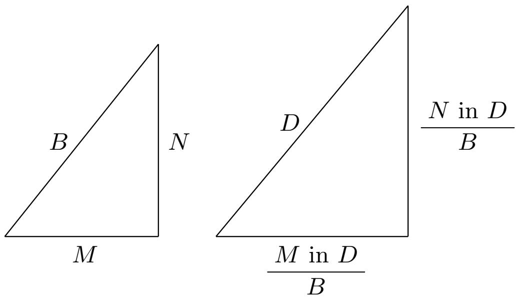
が成り立つというのである。

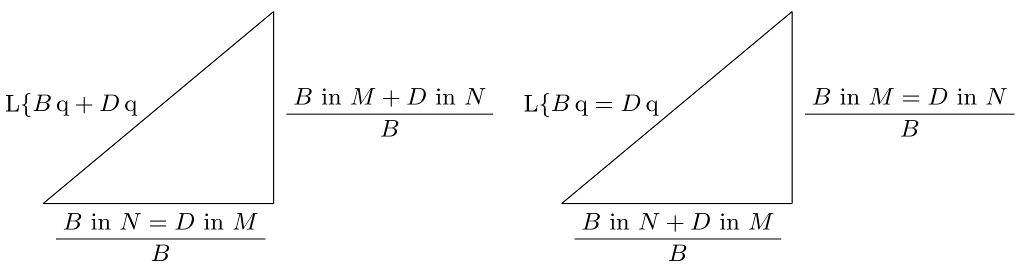
命題 XLVII

2 つの相似な直角三角形から，第 3 の［直角三角形の］斜辺の平方が第 1 の［直角三角形の］斜

辺および第2の［直角三角形の］斜辺の平方［の和］に等しいような，第3の直角三角形をつくること。

2つの相似な直角三角形があるとしよう。第1のものは，その斜辺が B，垂線が N，底線が M で，もう1つのものは，その斜辺が D であり，従って垂線は $\dfrac{N \text{ in } D}{B}$，底線は $\dfrac{M \text{ in } D}{B}$ である，としよう。それら2つから，その斜辺の平方が B quadrato + D quadrato に等しいような，第3の直角三角形が導かれなければならない。それゆえ，斜辺の平方は B quadrato + D quadrato からなるから，これは導かれるであろう三角形の底線の平方が加えられた垂線の平方であろう。そして，もし B quadratum + D quadrato に M quadr. + N quadrato が掛けられ，B quadratum で割られるならば，M quadratum + N quadrato は斜辺 B の平方に等しいから，導かれた［三角形の］斜辺の平方に付け加えるあるいは［それから］失うものは何もない。それゆえ，乗法を行って，積を4つの平面的平面，すなわち B quadrato in M quadratum + D quadrato in N quadratum および B quadrato in N quadratum + D quadrato in M quadratum に一致するようにしたい。はじめのものに，B，D，M，N によって連続的につくられる平面的平面が2度加えられ，そして後のものから2度取り去られ，あるいは逆に，はじめのものから2度取り去られ，後のものに2度加えられる。つくられた平面的平面は B quadrato + D quadrato in B quadratum ［$(B^2+D^2)B^2$］による平面的平面と等しいから，積に付け加えるものあるいは［積から］失うものは何もない。さらに，B，D，M，N によって連続的につくられる平面的平面がその平面的平面に，共通に，2度結び付けられたあるいは取り去られた平面的平面は平面を根にもつ。それら［の根］は





第1の場合は，はじめが B in M + D in N で，もう1つは B in N = D in M であり，一方，第2の場合は，はじめが B in M = D in N で，もう1つは B in N + D in M である。それゆえ，共通に B による除法を行うと，いずれの場合も，第1のものが垂線に，第2のものが底線に対応することになる。

定理

もし2つの相似な直角三角形があったとするならば，それらの［直角三角形の］斜辺の平方の和は，第1の［直角三角形の］底線および第2の［直角三角形の］垂線の和の平方，足す第1の垂線 36
および第2の底線の差の平方に等しい，あるいはまた，第1の垂線および第2の底線の和の平方，足す第1の底線および第2の垂線の差の平方に等しい。

第 1 の直角三角形の斜辺が B，垂線が N，底線が M で，それと相似な第 2 の直角三角形の斜辺が D ならば，第 2 の垂線は $\dfrac{ND}{B}$，底線は $\dfrac{MD}{B}$ となる。これらのことから，$B^2 = N^2 + M^2$，$B^2D^2 = N^2D^2 + M^2D^2$ となる。
さて，

$$\begin{aligned}
(\text{第 3 の斜辺})^2 = B^2 + D^2 &= \frac{(B^2+D^2)(N^2+M^2)}{B^2} \\
&= \frac{B^2M^2 + D^2N^2 + B^2N^2 + D^2M^2}{B^2} \\
&= \frac{B^2M^2 + D^2N^2 + 2BDMN + B^2N^2 + D^2M^2 - 2BDMN}{B^2} \quad \cdots (*) \\
&= \frac{(BM+DN)^2 + (BN \sim DM)^2}{B^2} \\
&= \left(\frac{BM+DN}{B}\right)^2 + \left(\frac{BN \sim DM}{B}\right)^2
\end{aligned}$$

となるから，斜辺が $\sqrt{B^2+D^2}$，垂線が $\dfrac{BM+DN}{B} = M + \dfrac{DN}{B}$，底線が $\dfrac{BN \sim DM}{B} = N \sim \dfrac{DM}{B}$ である直角三角形がつくられることになる。
$(*)$ を $\dfrac{B^2M^2 + D^2N^2 - 2BDMN + B^2N^2 + D^2M^2 + 2BDMN}{B^2}$ とすれば，もう 1 つの直角三角形ができることになる。このとき，添付された図では斜辺が $\sqrt{B^2 \sim D^2}$ であるかのようになっているが，それでは命題に指定された直角三角形にはならない？
ところで，

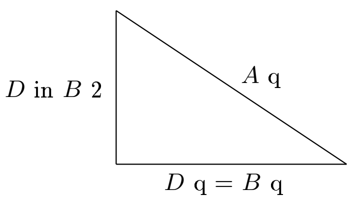
$$\begin{aligned}
B^2M^2 + D^2N^2 + B^2N^2 + D^2M^2 &= B^2(M^2+N^2) + D^2(M^2+N^2) \\
&= B^2B^2 + D^2B^2 = (B^2+D^2)B^2
\end{aligned}$$

である。

命題 XLVIII

等しくかつ等角である 2 つの直角三角形から，第 3 の直角三角形をつくること。

2 倍の角の三角形



それらの共通の辺が斜辺は A，垂線は B，底線は D である，2 つの直角三角形があるとしよう。それら 2 つ［の直角三角形］から，第 3 の直角三角形がつくられなければならない。命題 XLVI の第 1 の場合で示したように，導出を行おう。すなわち，分解的な仕方ではなく，合成的な仕方で導くことができる。［このとき，］斜辺には A quadrato が，底線には D quadrato $=$ B quadrato が，垂線には B in D 2 が対応することになる。そして，固有の位置におかれるであろうという理由で，その第 3［の直角三角形］は 2 倍の角の (anguli dupli) 三角形といわれ，対照のために，第 1 のあるいは第 2 の［直角三角形］は単一の角の (anguli simpli) 三角形といわれる。

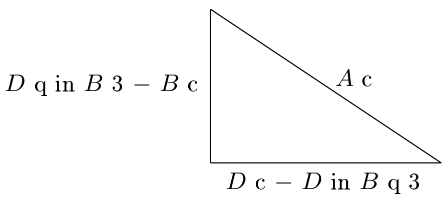
これは 2 倍角の定理というべきものであるが，「固有の位置におかれるであろうという理由で」について，おそらくはボーグランによるものと思われる (『解析術』p.72)，次のような注釈がついている。
「理由とは，2 つの［直角］三角形から合成的な仕方によってつくられた［第 3 の］直角三角形の鋭角は同時にそれらの［直角］三角形の鋭角の和に等しくされるということであり，アンダーソンは角の切断［について］の第 2 の定理において，この逆の定理を証明した。さらに，垂線が対するこの角は鋭角といわれるものと理解されるであろう。」
なお，アンダーソン (Alexander Anderson : 1582?–1620?) はスコットランドの数学者で，若い

頃大陸へ出て，パリで数学を教えていたらしい。1612 年から 1619 年にかけて，幾何や代数に関する論文を出版あるいは編集しており，6 冊の四つ折り本が残されている。また，ヴィエートの手稿を改訂・編集した。言及されている定理は *Ad Angularum Sectionem Analytica Theoremata F. Vieta primum excogitata* $\cdots$ (1615 年) 中にあるのか。

命題 XLIX

単一の角の三角形および 2 倍の角の三角形から，［第 3 の］直角三角形をつくること。そして，その第 3 の［直角三角形］は 3 倍の角の (anguli tripli) 三角形といわれる。

3 倍の角の三角形



2 つの直角三角形があるとし，1 つは単一の角［の三角形］で，その斜辺は A，垂線は B，底線は D であり，もう 1 つは 2 倍の角［の三角形］で，従って，その斜辺には A quadrato，底線には D quadrato $=$ B quadrato，垂線には D in B による平面の 2 倍が対応するとしよう。それら 2 つの直角三角形から，第 3 の直角三角形がつくられなければならない。命題 XLVI の第 1 の場合で示したように，導出を行おう。すなわち，分解的な仕方ではなく，合成的な仕方でつくることができる。［このとき，］斜辺は A cubus，底線は D cubus $-$ D in B quadratum 3，垂線は D quad. in B 3 $-$ B cubo となる。

本文中にあるように，第 1 の直角三角形の斜辺は A，垂線は B，底線は D であるから，命題 XLVIII により，第 2 の直角三角形の斜辺は A^2，垂線は $2BD$，底線は $D^2 \sim B^2$ である。
いま，$D \geqq B$ とすると，第 2 の底線は $D^2 - B^2$ となる。そして，このときは，求める第 3 の直角三角形について，斜辺は $A \times A^2 = A^3$，垂線は $B \times (D^2 - B^2) + D \times 2BD = 3BD^2 - B^3$，底線は $B \times 2BD \sim D \times (D^2 - B^2)$ となる。
この底線については，3 倍角が鋭角になるためには $\sqrt{3}B < D$ でなければならないから，$2B^2D \sim D(D^2 - B^2) = 3B^2D \sim D^3 = D(3B^2 \sim D^2) = D(D^2 - 3B^2) = D^3 - 3B^2D$ となる。

単一の角の三角形は斜辺 A，垂線 B，底線 D で，3 倍の角の三角形は斜辺 A^3，垂線 $3BD^2 - B^3$，底線 $D^3 - 3B^2D$ であるから，$\sin\theta = \dfrac{B}{A}$，$\cos\theta = \dfrac{D}{A}$ より，

$$\begin{aligned}
\sin 3\theta &= \frac{3BD^2 - B^3}{A^3} = 3\,\frac{B}{A}\left(\frac{D}{A}\right)^2 - \left(\frac{B}{A}\right)^3 = 3\sin\theta\,(\cos\theta)^2 - (\sin\theta)^3 \\
&= 3\sin\theta\left(1 - \sin^2\theta\right) - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \\
\cos 3\theta &= \frac{D^3 - 3B^2D}{A^3} = \left(\frac{D}{A}\right)^3 - 3\left(\frac{B}{A}\right)^2\frac{D}{A} = (\cos\theta)^3 - 3\,(\sin\theta)^2\cos\theta \\
&= \cos^3\theta - 3\left(1 - \cos^2\theta\right)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta
\end{aligned}$$

がいえる。
すなわち，この命題は 3 倍角の公式を述べたものと解される。

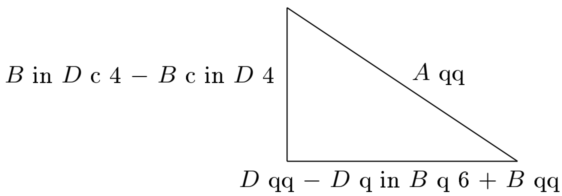
命題 L

単一の角の三角形および 3 倍の角の三角形から，第 3 の直角三角形をつくること。そして，その［直角三角形］は 4 倍の角の (anguli quadrupli) 三角形といわれる。

2 つの直角三角形があるとし，1 つは単一の角［の三角形］で，その斜辺は A，垂線は B，底線は D であり，もう 1 つは 3 倍の角［の三角形］で，従って，その斜辺には A cubo，底線には D c $-$

D in B q 3，垂線には D q in B 3 − B c が対応するとしよう。それらから第 3 の直角三角形がつくられなければならない。命題 XLVI の第 1 の場合で示したように，導出を行おう。［すると，］斜辺には A qq が，底線には D qq − D q in B q 6 + B qq が，垂線には B in D c 4 − B c in D 4 が対応することになる。

4 倍の角の三角形

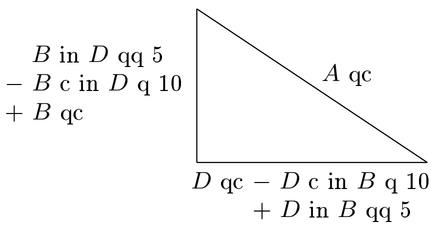


37 **命題 LI**

単一の角の三角形および 4 倍の角の三角形から，合成的な仕方で，第 3 の直角三角形をつくること。そして，それは 5 倍の角の (anguli quintupli) 三角形といわれる。

2 つの直角三角形があるとし，1 つは単一の角［の三角形］で，その斜辺は A，底線は D，垂線は B であり，もう 1 つは 4 倍の角［の三角形］で，従って，その斜辺には A quadrato-quadrato，などが対応するとしよう。それら 2 つから，合成的な仕方によって，第 3［の直角三角形］がつくられなければならない。命題 XLVI の第 1 の場合で示したように，導出を行おう。［すると，］斜辺には A qc が，底線には D qc − D c in B q 10 + D in B qq 5 が，垂線には D qq in B 5 − D q in B c 10 + B qc が対応することになる。

5 倍の角の三角形



これらのことから証明されること

直角三角形の導出における一般的な論理的帰結

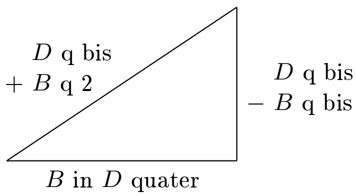
もし 2 項根からベキがつくられて，つくられたそれぞれの同次のものが引き続く 2 つの部分に区分され，いずれの場合でも，はじめ［の部分］は加えられたもの，その後ろ［の部分］は取り去られたもので，それらのはじめの部分が何らかの直角三角形の底線に，もう一方が垂線に対応するならば，斜辺はそのベキそのものに対応するであろう。さらに，その三角形において，その底線がつくられた根のうちの 1 つに，一方，垂線が他方に，対応するあるいは等しいとき，垂線が対する角によって，名前を選ぶであろう。もちろん，同じ根から導かれた三角形は，ベキの順位がどのようなものであれ，ベキの状態に従って，角の同じ倍数から適切に名づけられるであろう。すなわち，ベキが平方のとき 2 倍と，立方のとき 3 倍と，平方の平方のとき 4 倍と，平方の立方のとき 5 倍と［名づけられ］，そして，そのように無限に進む。

命題 LII

2 つの根の和および同じものの差から，直角三角形をつくること。

2 つの根を B，D としよう。一方の名前として，$B + D$，そして他方の名前として，$B = D$ から，直角三角形がつくられなければならない。それゆえ，既に説明された方法［命題 45］により，斜辺は $B + D$ による平方 + $B = D$ による平方 —— これら 2 つの平方［の和］は B q 2 + D q 2 とできる —— が対応するであろうし，底線は $B + D$ による平方 − $B - D$ による平方に，すなわち B in D 4 に対応するであろう。最後に，垂線は $B + D$ in $B - D$ 2，すなわち B q 2 − D q 2,

によるものに対応するであろう。



この操作は，もしそれらの根そのものから直角を形成する辺が交換されることによってつくられたとしても，同じになる。

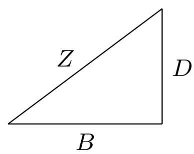
帰結 38

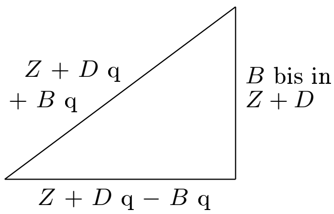
もし，1 つは 2 つの根から，もう 1 つは同じものの和および差から，2 つの直角三角形つくられるならば，それらは相似になるが，直角をはさむ辺は逆になっている。

命題 LIII

与えられた直角三角形の底線，および同じ［直角三角形の］斜辺および垂線からつくられた［和］から，直角三角形をつくること。

その斜辺が Z，底線が B，垂線が D である直角三角形があるとしよう。B および $Z+D$ から直角三角形がつくられなければならない。それゆえ，いつもの方法［命題 45］により，斜辺は B の平方 $+ Z+D$ による平方の和 に，底線は同じものの平方の差に対応することになる。垂線は B in $Z+D$ による平面の 2 倍であり，この操作を十分に観察することによって，その三角形がはじめ［の三角形］に相似であることが見出される。





さらに，このことを次のように証明しよう。共通［の数］を掛けても比は変わらないから，Z 2 + D 2 がとられて，［それが］B にも D にも掛けられると，B が D に対するように B in Z 2 + B in D 2 が D in Z 2 + D q 2 に対するであろう。しかし，D q は Z q $-$ B q に等しい。それゆえ，もし 4 番目の比例する大きさ［比例の第 4 項］から D q が 1 度取り去られ，Z q $-$ B q が代入されるならば，B が D に対するように B in Z 2 + B in D 2 が Z q + D in Z 2 + D q $-$ B q にも対するであろう。しかし，3 番目の比例［比例の第 3 項］は積 B 2 in $Z+D$ そのものから生じた大きさである。同様に，Z q + D in Z 2 + D q は $Z+D$ による平方である。それゆえ，B が D に対するように B bis in $Z+D$ が $Z+D$ quadratum $-$ B q に対するであろう。

$(2Z+2D)BD=(2Z+2D)BD$ より，

$$
\begin{aligned}
B:D &= 2(Z+D)B : 2(Z+D)D = 2B(Z+D):(2ZD+2D^2)\\
&= 2B(Z+D):(2ZD+D^2+Z^2-B^2) = 2B(Z+D):\left\{(Z+D)^2-B^2\right\}
\end{aligned}
$$

ということ。

それゆえ，これらの三角形は直角をはさむ比例する辺をもつから，等角であろう。これが証明されるべきことであった。

それゆえ，第 1 の［直角三角形の］垂線は第 2 の［直角］三角形の底線に対して，第 1 の［直角三角形の］底線が第 2 の［直角三角形の］垂線に対するのと同じ比をもつ。

帰結 I

もし与えられた直角三角形の底線，および［その直角三角形の］斜辺および垂線からつくられた［和］から，第 2 の直角三角形がつくられるならば，第 2 のものは辺を逆にしても第 1 のものと相似である。

帰結 II

直角三角形において，斜辺および垂線からつくられた［和］が底線に対するように，それによって［直角］三角形がつくられる根の和が同じものの差に対する。［このことは］前述の命題の帰結とあわせて，［上の］第 1 の帰結との比較から［分かる］。

この帰結は次のように証明できる。再び，根 A および B から直角三角形がつくられた，命題 45 の図を取り上げよう。それゆえ，共通［な数］が掛けられても比は変わらないから，$A+B$ にも $A=B$ にも $A+B$ が掛けられると，A q $+$ B q $+$ A in B 2 は A q $=$ B q に対して，$A+B$ が $A=B$ に対するであろう。しかし，A q $+$ B q は $A+B$ からつくられた三角形の斜辺である。同様に，A in B 2 は同じ三角形の垂線であり，A q $=$ B q は底線である。

それゆえ，斜辺および垂線からつくられた［和］が底線に対するように，根の和が同じものの差に対する。これが証明されるべきことであった。

帰結 III

直角三角形において，斜辺および垂線からつくられた［和］が底線によって小さくされたものが，同じつくられた［和］に底線が加えられたものに対するように，より小さい根がより大きい［根］に対する。［このことは］前述の比例 (analogia) の分解および合成によって［分かる］。

確かに，前述の帰結の比例の分解によって，斜辺および垂線からつくられた［和］が底線によって小さくされたものが底線に対するように，仮定されたより小さい根の 2 倍がそれらの根の差に対する。

39 そして，同じ比例の合成によって，斜辺および垂線からつくられた［和］および底線［の和］が底線に対するように，仮定されたより大きい根の 2 倍がそれらの根の差に対する。

そして，この比例が逆にされると，底線が斜辺および垂線からつくられた［和］および底線［の和］に対するように，根の差がより大きい根の 2 倍に対する。

それゆえ，斜辺および垂線からつくられた［和］が底線によって小さくされたものが斜辺および垂線からつくられた［和］に底線が加えられたものに対するように，より小さい根がより大きい［根］に対する。これは第 3 の帰結そのものであり，たとえ前述の帰結の助けなしに簡単に証明できるとしても，そのラコーニア風に (Laconice) 述べられた証明は 1 つの例であった。

> ラコーニア (Λακωνία：Laconia，古代ギリシア語ではラコーニケー (Λακωνικη：Lacōnikē)) はギリシア南部・ペロポネソス半島南東部の地域にあった，スパルタを首都とする王国で，現在はギリシア共和国ラコニア県。また，スパルタ (Σπάρτα：Sparta) は古代における正式名をラケダイモーン (Λακεδαίμων：Lakedaimōn) といい，兵士の厳格な規律と訓練で有名である。現在のラコニア県の首都スパルティ (Σπάρτη：Sparti)。
>
> ここでの「ラコーニア風に」とは「簡潔に」ということか。

帰結 IV

直角三角形において，斜辺および垂線からつくられた［和］が底線によって小さくされたものが

同じつくられた［和］に底線が加えられたものに対するように，底線と斜辺の差が垂線に対する。

確かに，底線と斜辺の差は垂線に対して，より小さい根がより大きい［根］に対する［比を］もつ。なぜならば，2 つの根を B および D —— 前者がより小さく，後者がより大きい —— と仮定すると，斜辺は B quadrato $+$ D quadrato に，底線は D quadrato $-$ B quadrato に対応するから，それらの差は B quadratum bis となり，確かに垂線は B in D bis に対応し，両方の平面が B bis で割られると，それらの差が垂線に対するように，B が D に対するであろう，からである。

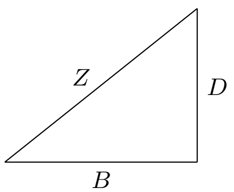
命題 LIV

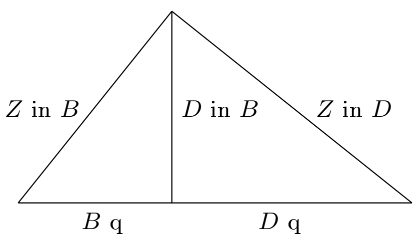
［1 つの］直角三角形から，それらの結合によって，当然，それらの斜辺が互いにその足であり，さらに，それらの底線の和がその底線になり，その頂角が直角になる，等しい高さの三角形がつくられるような，等しい高さの 2 つの直角三角形をつくること。

この命題だけでなく，次［の命題］においても，文法的な規則における繰り返した過失を消し去るために，頂角が直角になるであろう (habebit angulum verticis rectum) という代わりに，この言葉「頂角が直角であろう (erit angulum verticis rectum)」が選ばれた。

その斜辺が Z，底線が B，垂線が D である直角三角形が提示されるとしよう。指定されたものがつくられなければならない。

一方の根としての $Z+D$ および他方の根としての B から，もう 1 つの直角三角形がつくられなければならない。その斜辺は Z そのものに，底線は D そのものに，垂線は B そのものに対応する。第 2 の三角形に相似につくられるもう 1 つ［の直角三角形］は同じ垂線 D をもち，B が D に対するように D が底線に対するとすると，それゆえ，それは $\dfrac{D\ \text{quadr.}}{B}$ であろうし，Z が斜辺に対するとすると，それは $\dfrac{Z\ \text{in}\ D}{B}$ であろう。最後に，その［三角形の］辺にも，提示された［三角形の］辺にも B が掛けられる。それゆえ，2 つの直角三角形がある。はじめ［の三角形］はその斜辺が Z in B，底線が B quadratum，垂線が B in D である。もう一方［の三角形］はその斜辺が Z in D，底線が D quadratum，垂線が再び B in D である。それら 2 つの直角三角形を 1 つに合わせると，すなわち，斜辺がもう 1 つの三角形の足になり，真っ直ぐにおかれた底線の和がその底線になるとすると，それゆえ，その高さは同じままであり，［それは］底線の切片の間の比例［中項］である。なぜならば，B in D は B quadratum および D quadratum の間の比例［中項］だからである。さらに，平面の図において，辺の相似性は，幾何学が教えるように，角の同等性を証明し，それゆえ，第 1 の三角形において垂線に対する角は第 2 の三角形において底線に対する角と等しい。それゆえ，結合の結果，斜辺に対してつくられた角は直角である。



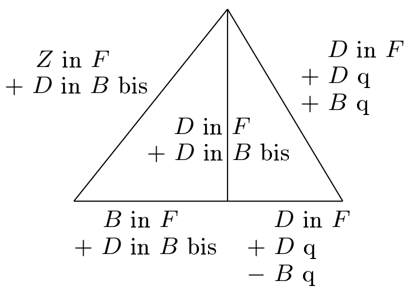


命題 LV

［1 つの］直角三角形から，それらの結合によって，当然，それらの斜辺が互いにその足であり，さらに，それらの底線の和がその底線になり，その頂角が鋭角になる，等しい高さの三角形がつくられるような，等しい高さの 2 つの直角三角形をつくること。

その斜辺が Z，底線が B，垂線が D である直角三角形が提示されるとしよう。指定されたもの 40

がつくられなければならない。F が Z そのものより小さいと仮定され，一方の根としての $F+D$ および他方の根としての B から，もう 1 つの直角三角形がつくられなければならない。その斜辺は $F+D$ による平方 $+$ B quadrato に，底線は $F+D$ による平方 $-$ B quadrato に，垂線は $F+D$ in B bis に対応することになる。第 2 の三角形の相似につくられるもう 1 つ［の三角形］は垂線 D をもち，$F+D$ in B bis が $F+D$ による平方 $-$ B quadrato に対するように，D が底線に対するとすると，それゆえ，それは $\dfrac{D \text{ in } F+D \text{ quadr.} - B \text{ quadr.}}{F+D \text{ in } B \text{ bis}}$ であろう。そして，$F+D$ in B bis が $F+D$ による平方 $+$ B quadrato に対するように，D が斜辺に対するとすると，それゆえ，それは $\dfrac{D \text{ in } F+D \text{ quadr.} + B \text{ quadr.}}{F+D \text{ in } B \text{ bis}}$ であろう。最後に，その［三角形の］辺にも与えられた直角三角形の辺にも $F+D$ in B 2 が掛けられる。それゆえ，2 つの直角三角形がある。はじめ［の三角形］はその斜辺が Z in F+D in B 2 に，底線が B in $F+D$ in B 2 に，垂線が D in $F+D$ in B 2 に対応する。もう一方［の三角形］は斜辺が D in $F+D$ quadrato $+$ B quadrato に，底線が D in $F+D$ q $-$ B quadrato に対応し，垂線は上のはじめの三角形におけるものと同じである。



それゆえ，それら 2 つの直角三角形を 1 つに結合すると，当然，斜辺がもう 1 つの三角形の足になり，真っ直ぐにおかれた底線の和がその底線になる。それゆえ，高さは同じままである。さらに，はじめ［の三角形］の底線が高さに対するように，高さが第 2［の三角形］の底線より大きいものに対する。なぜならば。

B in $F+D$ in B 2 が D in $F+D$ in B 2 に対するように，D in $F+D$ in B 2 が D cubum 2 $+$ D quadrato in F 2 に対する。しかし，第 2［の三角形］の底線は D in $F+D$ quadrato $-$ B quadrato に対応し，これは F quadratum in D $+$ D quadrato in F 2 $+$ D cubo $-$ B quadrato in D である。両方から F in D quadratum 2 を引き，B quadratum in D を加える。最後に，残りの立体を D で割る。［すると，］一方には D quadratum $+$ Z quadrato が残り，他方には D quadratum $+$ F quadrato が残る。しかし，仮定により，F quadratum は Z quadrato より小さい。それゆえ，高さは第 1［の三角形］の底線および第 2［の三角形］の底線より大きいものの間の比例［中項］である。それゆえ，第 2［の三角形］の底線に対する角は第 1［の三角形］の垂線に対する角より小さい。それゆえ，斜辺からつくられる角あるいは足は鋭角である。それゆえ，［与えられた］直角三角形から，等しい高さの 2 つの直角三角形がつくられ，それらが結合されて等しい高さの三角形がつくられると，当然，それらの斜辺は互いにその足であり，さらに，それら底線の和はその底線になり，その頂角は鋭角になる。さらに，F が，$F+D$ の平方が B の平方より大きいと仮定されると，第 2［の三角形］の底線の構成について，B の平方を $F+D$ による平方から取り去ることができる。

「B in $F+D$ in B 2 が D in $F+D$ in B 2 に対するように，D in $F+D$ in B 2 が D cubum 2 $+$ D quadrato in F 2 に対する」ことについて，おそらくはボーグランによるものと思われる(『解析術』p.80)，注釈がついている。それは次のような内容である。

$B(F+D) : D(F+D) = B(F+D) : D(F+D)$ は「昼の光よりも明白」であるから，第 1 項および第 2 項に $2B$ を，第 3 項および第 4 項に $2D$ を掛けると，

$$\begin{aligned} B(F+D)\cdot 2B : D(F+D)\cdot 2B &= B(F+D)\cdot 2D : D(F+D)\cdot 2D \\ &= D(F+D)\cdot 2B : (2D^3+2D^2F) \end{aligned}$$

となる。

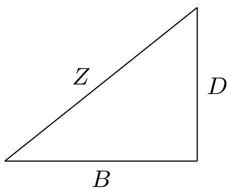
そこで，この $(2D^3+2D^2F)$ および第 2 の直角三角形の底線 $D\left\{(F+D)^2-B^2\right\}$ の「両方から」$2D^2F$ を引いて B^2D を加えれば,

$$(2D^3+2D^2F)-2D^2F+B^2D=2D^3+B^2D=D(D^2+D^2+B^2)=D(D^2+Z^2)$$
$$D\left\{(F+D)^2-B^2\right\}-2D^2F+B^2D=D^3+DF^2=D(D^2+F^2)$$

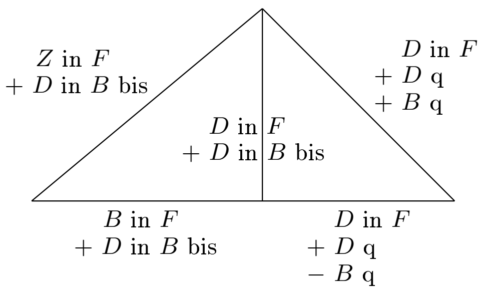
となり，$F<Z$ であるから，$(2D^3+2D^2F)>D\left\{(F+D)^2-B^2\right\}$ となるという訳。

命題 LVI

［1 つの］直角三角形から，それらの結合によって，当然，それらの斜辺が互いにその足であり，さらに，それらの底線の和がその底線になり，その頂角が鈍角になる，等しい高さの三角形がつくられるような，等しい高さの 2 つの直角三角形をつくること。



その斜辺が Z，底線が B，垂線が D である直角三角形が提示されるとしよう。指定されたものがつくられなければならない。F が Z そのものより大きいと仮定され，一方の根としての $F+D$ および他方の根としての B から，もう 1 つの直角三角形がつくられなければならない。それゆえ，斜辺は $F+D$ quadrato $+$ B quadrato に，一方，底線は $F+D$ quadrato $-$ B quadrato に，垂線は $F+D$ in B 2 に対応することになる。第 2 の直角三角形に相似にもう 1 つの［直角三角形］がつくられると，その垂線は D になり，$F+D$ in B 2 が $F+D$ quadr. $-$ B quadrato に対するように，D が底線に対するようになるであろうし，それゆえ，それは $\dfrac{D \text{ in } F+D \text{ quadr.} - B \text{ quadr.}}{F+D \text{ in } B\ 2}$ であろう。そして，$F+D$ in B 2 が $F+D$ による平方 $+$ B quadrato に対するように，D が斜辺に対し，それゆえ，それは $\dfrac{D \text{ in } F+D \text{ quadr.} + B \text{ quadr.}}{F+D \text{ in } B\ 2}$ であろう。最後に，その［三角形の］辺にも与えられた直角三角形の辺にも $F+D$ in B 2 が掛けられる。それゆえ，2 つの直角三角形がある。はじめ［の三角形］はその斜辺が Z in $F+D$ in B 2 に，底線が B in $F+D$ in B 2 に，垂線が D in $F+D$ in B 2 に対応する。他方［の三角形］はその斜辺が D in $F+D$ quadrato $+$ B quadrato に，底線が D in $F+D$ quadrato $-$ B quadrato に対応し，垂線は上のはじめの直角三角形におけるものと同じである。 41



それゆえ，それら 2 つの直角三角形を 1 つに結合すると，当然，それらの斜辺がもう 1 つの三角形の足になり，さらに，真っ直ぐにおかれた底線の和がその底線になる。それゆえ，高さは同じままである。さらに，はじめ［の三角形］の底線が高さに対するように，高さが第 2［の三角形］の底線より小さいものに対する。なぜならば。

B in $F+D$ in B 2 が D in $F+D$ in B 2 に対するように，同じ大きさが D cubum 2 $+$ D quadrato in F 2 に対する。しかし，第 2［の三角形］の底線は D in $F+D$ quadratum $-$ B quadrato に対応し，これは F quadratum in D $+$ D cubo $+$ D quadrato in F 2 $-$ B quadrato in D である。両方から F in D quadratum 2 が引かれ，B quadratum in D が加える。最後に，残りの立体を D で割る。［すると,］一方には D quadratum + Z quadrato が残り，他方には D quadratum + F quadrato が残る。しかし，仮定により，F は Z より大きい。それゆえ，高さは第 1［の三角形］の底線および第 2［の三角形］の底線より小さいものの間の比例［中項］である。それゆえ，第 2［の三角形］の底線に対する角は第 1［の三角形］の垂線に対する角より大きい。それゆえ，斜辺あるいは足からつくられる角は鈍角である。これが，なされるべきことであった。

探究法 5 巻

『全集』pp.42–81

原題は *Zeteticorum Libri Quinque*。
出版されたのは 1591 年あるいは 1593 年。
探究法に基づいた，各種の問題の解法が述べられている。代数解析の実際を示した，問題集という趣きであり，ディオファントスの『算術』を強く意識したものになっている。

第 1 巻 42

探究 I

2 つの辺の差および同じものの和が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

2 つの辺の与えられた差を B，そしてそのうえ，同じものの与えられた和を D としよう。それらの辺を見出さなければならない。

小さい方の辺を A とすると，それゆえ，大きい方は $A + B$ であろう。それゆえ，辺の和は $A\ 2 + B$ であろう。しかし，与えられた同じものは D である。それゆえ，$A\ 2 + B$ は D に等しい。そして，対照 (antitheton)［移項］によって，$A\ 2$ は $D - B$ に等しくされ，すべてを $\dfrac{1}{2}$ 倍すると，A は $D\ \dfrac{1}{2} - B\ \dfrac{1}{2}$ に等しくされる。

あるいは，大きい方を E とする。それゆえ，小さい方は $E - B$ であろう。それゆえ，辺の和は $E\ 2 - B$ であろう。しかし，与えられた同じものは D である。それゆえ，$E\ 2 - B$ は D に等しくされ，対照［移項］によって $E\ 2$ は $D + B$ に等しくされて，すべてを $\dfrac{1}{2}$ 倍すると，E は $D\ \dfrac{1}{2} + B\ \dfrac{1}{2}$ に等しくされる。

それゆえ，2 つの辺の差および同じものの和が与えられたとき，それらの辺が見出される。確かに，

辺の和の半分引く差の半分は小さい方の辺に等しく，足す同じものは大きい［辺に等しい］。

このことは探究法が証明することである。

B を 40，D を 100 とすると，A は 30，E は 70 になる。

この問題は，ディオファントス (Διόφαντος (Diophantos)：250 頃活躍) の『算術』(*Arithmetica*) にある問題 (第 1 巻問題 1) のヴィエート流の解法である。

その問題はヒース (Sir Thomas L. Heath：1861–1940) によれば，次のようなものである (［3］p.131)。

「与えられた数を与えられた差をもつ 2 つの数に分けること。

　与えられた数を 100，与えられた差を 40 とする。小さい方の数 x が要求される。それゆえ，$2x + 40 = 100$。［よって，］$x = 30$。要求された数は 70，30 である。」

探究 II

2 つの辺の差および同じものの比が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

2 つの辺の与えられた差を B，そのうえ，小さい方の辺が大きい方［の辺］に対する比が，R が S に対するように与えられたとしよう。それらの辺を見出さなければならない。

小さい方の辺を A とすると，それゆえ，大きい方の辺は $A + B$ であろう。それゆえ，A が $A + B$

に対するように，R が S に対する。それゆえ，比例が分解されると，S in A は R in $A + R$ in B に等しくされるであろう。そして，移項によって反対の作用の記号に従うと，S in $A - R$ in A は R in B に等しくされ，すべてが $S - R$ で割られることによって，$\dfrac{R \text{ in } B}{S - R}$ は A に等しくされ，それゆえ，$S - R$ が R に対するように，B が A に対する。

あるいは，大きい方の辺を E とすると，それゆえ，$-$［小さい方］の辺は $E - B$ であろう。それゆえ，E が $E - B$ に対するように，S が R に対する。それゆえ，比例が分解されると，R in E は S in $E - S$ in B に等しくされるであろう。そして，移項によって組み合わせると，S in $E - R$ in E は S in B に等しくされるであろう。それゆえ，$S - R$ が S に対するように，B が E に対する。

それゆえ，2 つの辺の差および同じものの比が与えられたとき，それらの辺が見出される。確かに，

2 つの辺の比例の差 (differentia similium) が大きい方あるいは小さい方の辺の比例に対するように，実際の (verorum) 辺の差が大きい方あるいは小さい方の実際の辺に対する。

B を 12，R を 2，S を 3 とすると，A は 24，E は 36 になる。

『算術』第 1 巻問題 4 (［3］p.132)。
「与えられた比をもち，その差もまた与えられている 2 つの数を見出すこと。
与えられた比を 5 : 1，与えられた差を 20 とする。数は $5x$，x である。それゆえ，$4x = 20$ であり，$x = 5$ で，2 つの数は 25，5 である。」

43 **探究 III**

［2 つの］辺の和および同じものの比が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

2 つの辺の和を G，そして小さい方が大きい方に対する比を R が S に対する［比］としよう。それらの辺を見出さなければならない。

小さい方の辺を A とすると，それゆえ，大きい方の辺は $G - A$ であろう。それゆえ，A が $G - A$ に対するように，R が S に対する。それゆえ，比例が分解されると，S in A は R in $G - R$ in A に等しくされるであろう。そして，技法に従って移項が行われると，S in $A + R$ in A は R in G に等しくされるであろう。それゆえ，$S + R$ が R に対するように，G が A に対する。

あるいは，大きい方の辺を E とすると，それゆえ，小さい方の辺は $G - E$ であろう。それゆえ，E が $G - E$ に対するように，S が R に対する。それゆえ，比例を分解すると，R in E は S in G $- S$ in E に等しくされる。そして，技法に従って移項が行われると，S in $E + R$ in E は S in G に等しくされるであろう。それゆえ，$S + R$ が S に対するように，G が E に対する。

それゆえ，2 つの辺の和および同じものの比が与えられたとき，それらの辺が与えられる。そして，確かに，

2 つの辺の比例の和が大きい方あるいは小さい方の辺の比例に対するように，実際の辺の差が大きい方あるいは小さい方の実際の辺に対する。

G を 60，R を 2，S を 3 とすると，A は 24，E は 36 であろう。

『算術』第 1 巻問題 2 (［3］p.131)。
「与えられた数を与えられた比をもつ 2 つの数に分けること。
与えられた数を 60，与えられた比を 3 : 1 とする。2 つの数は x，$3x$ である。それゆえ，$x = 15$

で，2 つの数は 45，15 である。」

探究 IV

正しいもの (justus) に対して不足している 2 つの辺が，不足しているもの (defectus) の比とともに，与えられたとき，その正しい辺を見出すこと。

正しいものに対して不足している 2 つの辺，第 1 は B，第 2 は D，が与えられ，そのうえ，第 1 の［辺に対して］不足しているものが第 2 の［辺に対して］不足しているものに対する比が R が S に対するように与えられるとしよう。正しい辺を見出さなければならない。

第 1 の［辺に対して］不足しているものを A とすると，それゆえ，正しい辺は $A+B$ であろう。さらに，R が S に対するように，A が $\dfrac{S \text{ in } A}{R}$ に対するから，それゆえ，$\dfrac{S \text{ in } A}{R}$ は第 2 の［辺に対して］不足しているものであろう。それゆえ，$D+\dfrac{S \text{ in } A}{R}$ もまた正しい辺であろうし，それゆえ，$D+\dfrac{S \text{ in } A}{R}$ は $B+A$ に等しくされるであろう。

すべてに R を掛けると，$D \text{ in } R + S \text{ in } A$ は $B \text{ in } R + A \text{ in } R$ に等しくされるであろう。

そして，この方程式が整理されると，$D \text{ in } R = B \text{ in } R$ が $R \text{ in } A = S \text{ in } A$ に等しくされるであろう。

それゆえ，$R=S$ が R に対するように，$D=B$ が A に対するであろう。

あるいは，第 2 の［辺に対して］不足しているものを E とすると，それゆえ，正しい辺は $D+E$ であろう。さらに，S が R に対するように，E が $\dfrac{R \text{ in } E}{S}$ に対するから，それゆえ，$\dfrac{R \text{ in } E}{S}$ は第 1 の［辺に対して］不足しているものであろう。それゆえ，$B+\dfrac{R \text{ in } E}{S}$ もまた正しい辺であろうし，それゆえ，それは $D+E$ に等しくされるであろう。すべてに S を掛ける。

それゆえ，$B \text{ in } S + R \text{ in } E$ は $D \text{ in } S + S \text{ in } E$ に等しくされるであろう。

そして，この方程式が整理されると，$D \text{ in } S = B \text{ in } S$ が $R \text{ in } E = S \text{ in } E$ に等しくされるであろう。

それゆえ，$R=S$ が S に対するように，$D=B$ が E に対するであろう。

それゆえ，正しいものに対して不足している 2 つの辺が，不足しているものの比とともに与えられたとき，正しい辺が見出される。確かに，

不足しているものの比例の差が第 1 のあるいは第 2 の［辺に対して］不足しているものの比例に対するように，不足ている実際の辺の (不足しているものの) 差が第 1 のあるいは第 2 の［辺に対して］実際に不足しているものに対する。不足しているものが不足している辺と一緒に元に戻される［加えられる］と，正しい辺になる。

B を 76，D を 4，R を 1，S を 4 とすると，A は 24，E は 96 になる。［それゆえ，正しい辺は $A+B=D+E=100$ である。］

他の方法

正しいものに対して不足している 2 つの辺が，不足しているものの比とともに，与えられたとき，その正しい辺を見出すこと。

再び，正しいものに対して不足している 2 つの辺，第 1 は B，第 2 は D，が与えられ，そのうえ，第 1 の［辺に対して］不足しているものが第 2 の［辺に対して］不足しているものに対する比が R が S に対するように与えられるとしよう。正しい辺を見出さなければならない。

それ［求めるもの］を A とすると，それゆえ，$A-B$ は第 1 の［辺に対して］不足しているものであり，$A-D$ は第 2 の［辺に対して］不足しているものであろう。それゆえ，$A-B$ が $A-D$ に対するように，R が S に対する。それゆえ，比例が分解されると，R in A $-$ R in D は S in A
44 $-$ S in B に等しくされるであろう。そして，技法に従って移項が行われると，S in A $=$ R in A が S in B $=$ R in D に等しくされるであろう。それゆえ，$\dfrac{S \text{ in } B = R \text{ in } D}{S = R}$ が A に等しくされるであろう。

それゆえ，正しいものに対して不足している 2 つの辺が，不足しているものの比とともに与えられたとき，正しい辺が見出される。確かに，

第 1 の辺に対して不足しているものおよび第 2 の［辺に対して］不足しているものの比例による長方形［積］と第 2 の辺に対して不足しているものおよび第 1 の［辺に対して］不足しているものの比例による長方形との間の差が不足しているものの比例の差によって割られるとき，求められている正しい辺が生じるであろう。

B を 76，D を 4，R を 1，S を 4 とすると，A は 100 になる。

> 『算術』第 1 巻問題 7 (［3］p.133)。
> 「同じ (求められる) 数から 2 つの与えられた数を，残りが互いに与えられた比をもつように，引くこと。
> 　与えられた数を 100，20，与えられた比を 3 : 1 とする。求められる数を x とする。それゆえ，$x-20=3(x-100)$ であり，［よって，］$x=140$ である。」

探究 V

正しいものに対して超えている 2 つの辺が，超えているものの比とともに，与えられたとき，その正しい辺を見出すこと。

正しいものに対して超えている 2 つの辺，第 1 は B，第 2 は D，が与えられ，そのうえ，第 1 の［辺に対して］超えているものが第 2 の［辺に対して］超えているものに対する比が R が S に対するように与えられるとしよう。正しい辺を見出さなければならない。

第 1 の［辺に対して］超えているものを A とすると，それゆえ，$B-A$ は正しい辺であろう。さらに，R が S に対するように，A が $\dfrac{S \text{ in } A}{R}$ に対するから，それゆえ，$\dfrac{S \text{ in } A}{R}$ は第 2 の［辺に対して］超えているものであろう。それゆえ，$D-\dfrac{S \text{ in } A}{R}$ もまた正しい辺であろうし，それゆえ，それは $B-A$ に等しくされるであろう。すべてに R を掛けると，D in R $-$ S in A は B in R $-$ R in A に等しくされるであろう。そして，この方程式が整理されると，D in R $=$ B in R が S in A $=$ R in A に等しくされるであろう。

それゆえ，$S=R$ が R に対するように，$D=B$ が A に対するであろう。

あるいは，第 2 の［辺に対して］超えているものを E とすると，それゆえ，$D-E$ は正しい辺であろう。さらに，S が R に対するように，E が $\dfrac{R \text{ in } E}{S}$ に対するから，それゆえ，$\dfrac{R \text{ in } E}{S}$ は第 1 の［辺に対して］超えているものであろう。それゆえ，$B-\dfrac{R \text{ in } E}{S}$ もまた正しい辺であろうし，それゆえ，それは $D-E$ に等しくされるであろう。すべてに S を掛けると，B in S $-$ R in E は D in S $-$ S in E に等しくされるであろう。そして，この方程式が整理されると，D in S $=$ B in S が S in E $=$ R in E に等しくされるであろう。

それゆえ，$S=R$ が S に対するように，$D=B$ が E に対するであろう。

それゆえ，正しいものに対して超えている 2 つの辺が，超えているものの比とともに，与えられたとき，正しい辺が見出される。確かに，

超えているものの比例の差が第 1 のあるいは第 2 の辺に対して超えているものの比例に対するように，超えている実際の［辺の］(超えているものの) 差が第 1 のあるいは第 2 の［辺に対して］実際に超えているものに対する。超えているものが超えている辺から取り去られると，正しい辺になる。

B を 60，D を 40，S を 3，R を 1 とすると，A は 40，E は 120 になる。

> ここに挙げてある例は誤り。
> $B=60$，$D=40$，$S=3$，$R=1$ のとき，「正しい辺」を x とすると，$(60-x):(40-x)=3:1$ であるから，$x=30$ となり，$A=B-x=30$，$E=D-x=10$ である。

他の方法

正しいものに対して超えている 2 つの辺が，超えているものの比とともに，与えられたとき，その正しい辺を見出すこと。

再び，正しいものに対して超えている 2 つの辺，第 1 は B，第 2 は D，が与えられ，そのうえ，第 1 の［辺に対して］超えているものが第 2 の［辺に対して］超えているものに対する比が R が S に対するように与えられるとしよう。正しい辺を見出さなければならない。

それ［求めるもの］を A とすると，それゆえ，$B-A$ は第 1 の［辺に対して］超えているものであり，$D-A$ は第 2 の［辺に対して］超えているものであろう，それゆえ，$B-A$ が $D-A$ に対するように，R が S に対する。この比例が分解されると，$R \text{ in } D - R \text{ in } A$ は $S \text{ in } B - S \text{ in } A$ に等しくされるであろう。そして，技法に従って移項が行われると，$S \text{ in } A = R \text{ in } A$ が $S \text{ in } B = R \text{ in } D$ に等しくされるであろう。それゆえ，$\dfrac{S \text{ in } B = R \text{ in } D}{S = R}$ が A に等しくされるであろう。

それゆえ，正しいものに対して超えている 2 つの辺が，超えているものの比とともに，与えられたとき，正しい辺が見出される。確かに，

第 1 の辺に対して超えているものおよび第 2 の［辺に対して］超えているものの比例による長方形［積］と第 2 の辺に対して超えているものおよび第 1 の［辺に対して］超えているものの比例による長方形との間の差が超えているものの比例の差によって割られるとき，正しい辺が生じるであろう。

B を 60，D を 140，S を 3，R を 1 とすると，A は 20 になる。

> 『算術』第 1 巻問題 9 (［3］p.133)。
> 「2 つの与えられた数から，残りが互いに与えられた比をもつように，同じ (求められる) 数を引くこと。
> 　必要条件。与えられた比は与えられた数の大きい方が小さい方に対する比より大きくなければならない。
> 　与えられた数を 20，100，与えられた比を 6 : 1 とする。求められる数を x とする。それゆえ，$120-6x=100-x$ であり，［よって，］$x=4$ である。」

探究 VI 45

1 つは正しいものに対して不足している，もう 1 つは正しいものを超えている，2 つの辺が，不足しているものが超えているものに対する比とともに，与えられたとき，その正しい辺を見出すこと。

2 つの辺，1 つは正しいものに対して不足している B，もう 1 つは［正しいものを］超えている D，が与えられ，そのうえ，不足しているものが超えているものに対する比が R が S に対するように与えられるとしよう。正しい辺を見出さなければならない。

不足しているものを A とすると，それゆえ，正しい辺は $B+A$ であろう。さらに，R が S に対するように，A が $\dfrac{S \text{ in } A}{R}$ に対するから，それゆえ，$\dfrac{S \text{ in } A}{R}$ は超えているものであろう。それゆえ，$D-\dfrac{S \text{ in } A}{R}$ もまた正しい辺であり，それゆえ，それは $B+A$ に等しくされる。すべてに R を掛けると，$D \text{ in } R - S \text{ in } A$ は $B \text{ in } R + R \text{ in } A$ に等しくされるであろう。そして，この方程式が整理されると，$R \text{ in } A + S \text{ in } A$ が $D \text{ in } R - B \text{ in } R$ に等しくされるであろう。

それゆえ，$S+R$ が R に対するように，$D-B$ が A に対するであろう。

あるいは，超えているものを E とすると，それゆえ，$D-E$ は正しい辺であろう。さらに，S が R に対するように，E が $\dfrac{R \text{ in } E}{S}$ に対するから，それゆえ，$\dfrac{R \text{ in } E}{S}$ は不足しているものであろう。それゆえ，$B+\dfrac{R \text{ in } E}{S}$ もまた正しい辺であり，それゆえ，それは $D-E$ に等しくされる。すべてに S を掛けると，$B \text{ in } S + R \text{ in } E$ は $D \text{ in } S - S \text{ in } E$ に等しくされるであろう。そして，この方程式が整理されると，$R \text{ in } E + S \text{ in } E$ が $D \text{ in } S - B \text{ in } S$ に等しくされるであろう。

それゆえ，$S+R$ が S に対するように，$D-B$ が E に対するであろう。

それゆえ，1 つは正しいものに対して不足している，もう 1 つは正しいものを超えている，2 つの辺が，不足しているものが超えているものに対する比とともに，与えられたとき，正しい辺が見出される。確かに，

不足しているものの比例および超えているものの比例の和が不足しているあるいは超えているものの比例に対するように，不足しているおよび超えている実際の［辺の］(実際に不足しているものおよび超えているものの和である) 差が実際に不足しているものあるいは超えているものに対する。それゆえ，不足しているものが不足している辺に戻される［加えられる］と，あるいは超えているものが超えている辺から取り去られると，正しい辺になる。

B を 60，D を 180，R を 1，S を 5 とすると，A は 20，E は 100 になる。

他の方法

1 つは正しいものに対して不足している，もう 1 つは正しいものを超えている，2 つの辺が，不足しているものが超えているものに対する比とともに，与えられたとき，その正しい辺を見出すこと。

再び，2 つの辺，1 つは正しいものに対して不足している B，もう 1 つは正しいものを超えている D，が与えられ，そのうえ，不足しているものが超えているものに対する比が R が S に対するように与えられるとしよう。正しい辺を見出さなければならない。

それ［求めるもの］を A とすると，それゆえ，$A-B$ は不足しているものであり，$D-A$ は超えているものであろう。それゆえ，$A-B$ が $D-A$ に対するように，R が S に対する。この比例が分解されると，$R \text{ in } D - R \text{ in } A$ は $S \text{ in } A - S \text{ in } B$ に等しくされる。そして，技法に従って移項が行われると，$S \text{ in } A + R \text{ in } A$ が $R \text{ in } D + S \text{ in } B$ に等しくされる。それゆえ，$\dfrac{R \text{ in } D + S \text{ in } B}{S+R}$ が A に等しくされる。

それゆえ，1 つは正しいものに対して不足している，もう 1 つは正しいものに対して超えている，2 つの辺が，不足しているものが超えているものに対する比とともに，与えられたとき，正しい辺が見出される。確かに，

不足しているものの比例に超えている辺が掛けられた積および超えているものの比例に不足している辺が掛けられた積の和が超えているものの比例および不足しているもの［の比例］の和で割られると，正しい辺が生じるであろう。

B を 60，D を 180，R を 1，S を 5 とすると，A は 80 になる。

> ここに挙げられている例は，
> 不足を a，超過を e とすると，$(1+5):1=(180-60):a$，$(1+5):5=(180-60):e$ ということ。
> 「他の方法」では，求める数を x とすると，$(x-60):(180-x)=1:5$ ということ。

探究 VII

与えられた辺を，一方のあらかじめ定められた切片の部分 (uncia) に他方のあらかじめ定められた［切片の］部分が加えられると，指示された和に等しくなるように，［2 つに］分けること。

B を，全体すなわち第 1 の切片そのものに対して D が B に対する比を持っている，第 1 の切片の部分が，全体すなわち［第 2 の］切片そのものに対して F が B に対する比を持っている，第 2 の切片の部分に付け加えられると H になるように，2 つの切片に分けられるであろう与えられた辺としよう。第 1 の切片に関して H になるために与えられるであろう部分を A とすると，それゆえ，第 2［の切片］に関して与えられるであろう部分は $H-A$ であろう。そして，D が B に対するように，A が $\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ に対するから，それゆえ，$\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ は第 1 の切片全体であろう。そして，F が B に対するように，$H-A$ が $\dfrac{B \text{ in } H = B \text{ in } A}{F}$ に対するから，それゆえ，$\dfrac{B \text{ in } H = B \text{ in } A}{F}$ は第 2 の切片全体であろう。それら 2 つの切片［の和］は分けられるであろう辺全体に等しい。それゆえ，$\dfrac{B \text{ in } A}{D} + \dfrac{B \text{ in } H - B \text{ in } A}{F}$ は B に等しくされるであろう。この方程式が整理される 46
と，すなわち，すべてに $D \text{ in } F$ が掛けられ，B によって割られ，そして適当な移項が適用されると，もしも D が F より大きい部分ならば，$\dfrac{H \text{ in } D - F \text{ in } D}{D-F}$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，$D-F$ が $H-F$ に対するように，D が A に対する。

あるいは，第 2 の切片に関して H になるために与えられるであろう部分を E とすると，それゆえ，第 1［の切片］に関して与えられるであろう部分は $H-E$ であろう。そして，F が B に対するように，E が $\dfrac{B \text{ in } E}{F}$ に対するから，それゆえ，$\dfrac{B \text{ in } E}{F}$ は第 1 の切片全体であろう。そして，D が B に対するように，$H-E$ が $\dfrac{B \text{ in } H - B \text{ in } E}{D}$ に対するから，それゆえ，$\dfrac{B \text{ in } H - B \text{ in } E}{D}$ は第 1 の切片全体であろう。それら 2 つの切片［の和］は分けられるであろう辺全体に等しい。

ゆえに，$\dfrac{B \text{ in } E}{F} + \dfrac{B \text{ in } H - B \text{ in } E}{D}$ は B に等しくされるであろう。

この方程式が整理されると，すなわち，すべてに $F \text{ in } D$ が掛けられ，B によって割られ，そして適当な移項が適用されると，この場合，D が F より大きい部分であると考えられると，$\dfrac{D \text{ in } F - H \text{ in } F}{D-F}$ は E に等しくされるであろう。それゆえ，$D-F$ が $D-H$ に対するように，F が E に対する。

さらに，前もって定められた切片の部分が与えられたとき，全体あるいは切片そのものが与えられるであろう。確かに，$\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ は第 1 の切片であり，$\dfrac{B \text{ in } E}{F}$ は第 2［の切片］であろう。

それゆえ，与えられた辺が，一方のあらかじめ定められた切片の部分が他方のあらかじめ定められた［切片の］部分と一緒になって，指示された和に等しくなるように，［2 つに］分けられる。確

かに，

与えられた辺が，全体が切片に関して与えられるであろう部分の比例に対するように，分けられると，

第 1 の切片に関して与えられるであろう部分の比例 (もしもその第 1［の切片］が与える部分が第 2［の切片が与える部分］より大きいのならば) 引く第 2［の切片］に関して与えられるであろう部分の比例が，指示された負担部分 (praestatio)［与えられるであろう部分］の和引く第 2 の切片に関して与えられるであろう部分の比例に対するように，第 1［の切片］に関して与えられるであろう部分の比例が第 1［の切片］に関して与えられるであろう実際の部分に対する。

あるいは，

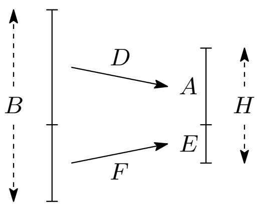
第 1 の切片に関して与えられるであろう部分の比例引く第 2［の切片］に関して与えられるであろう部分の比例が，第 1 の切片に関して与えられるであろう部分の比例引く指示された負担部分の和に対するように，第 2［の切片］に関して与えられるであろう部分の比例が第 2［の切片］に関して与えられるであろう実際の部分に対する。

B を 60，D を 20，F を 12，(A および E から合成された) H を 14 とすると，A は 5，E は 9 になる。

さらに，負担部分の同じ和 H は，D および F —— もちろん，前者よりは小さく，後者よりは大きい —— の中間にあるように，指示されなければならないことは明らかである。

あたかも，この 14 は 20 より小さく，12 より大きい，ように。

与えられた数 B を 2 つの数に分け，分けられたそれぞれの数を与えられた比率 (一方は D，他方は F) で小さくしたときに，それらの小さくなった数 (一方が A，他方が E) の和が与えられた数 H に等しくなるようにしたい，という問題である。



第 1 の部分 (A) : 第 1 の切片 $= D : B$
第 2 の部分 (E) : 第 2 の切片 $= F : B$
$\downarrow$
第 1 の部分 (A) + 第 2 の部分 $(E) = H$

A : 第 1 の切片 $= D : B = A : \dfrac{BA}{D}$ であるから, 第 1 の切片 $= \dfrac{BA}{D}$ であり, $(H-A)$: 第 2 の切片 $= F : B = (H-A) : \dfrac{B(H-A)}{F}$ であるから，第 2 の切片 $= \dfrac{B(H-A)}{F}$ である。

よって，$\dfrac{BA}{D} + \dfrac{B(H-A)}{F} = B$ となり，これを整理すれば，$(D-F) : (H-F) = D : A$ が得られる。
同様に，$(D-F) : (D-H) = F : E$ が得られる。
これらから解を求めようというのがヴィエートの結論である。

ヴィエートの例では, $(20-12) : (14-12) = 20 : A$ より, $A = 5$ であり, $(20-12) : (20-14) = 12 : E$ より，$E = 9$ である。

『算術』では第 1 巻問題 5 が該当する (［3］p.132)。
「与えられた数を，それぞれの数の与えられた分数 (同じでなくてもよい) が，一緒に加えられるときに，与えられた数を作り出すような，2 つの数に分けること。

必要条件。第 2 の与えられた数は，与えられた分数がそれぞれ第 1 の与えられた数に掛けられるときに生じる［2 つの］数の間にあるようなものでなければならない。

第 1 の与えられた数を 100，与えられた分数を $\frac{1}{3}$ および $\frac{1}{5}$，分数の与えられた和を 30 とする。

第 2 の部分は $5x$ である。それゆえ，第 1 の部分 $= 3(30-x)$ である。それゆえ，$90+2x = 100$ で，$x = 5$ である。［よって,］求める部分は 75，25 である。」

探究 VIII

与えられた辺を，第 1 の切片のあらかじめ定められた部分が第 2 の切片のあらかじめ定められた部分から取り去られると，指示された差に等しくなるように，［2 つに］分けること。

B を，全体すなわち［第 1 の］切片そのものに対して D が B に対する比を持っている，第 1 の切片の部分が，全体すなわち第 2 の切片そのものに対して F が B に対する比を持っている，第 2 の切片の部分から取り去られると H になるように，2 つの切片に分けられるであろう与えられた辺としよう。確かに，超過分［差］が提示されるのであるから，もし第 1 の切片に関する部分が［第 2 の切片に関する部分より］，もし［それが］より小さい［ものであるとされる］ときと比べて，より大きいものであると要求されるならば，別の分割が起こるであろう。それにもかかわらず，両方の場合で操作は同じになる。それゆえ，D を F よりも大きいあるいは小さい部分としよう。そして，第 1 の切片に関して与えられるであろう部分を A とすると，それゆえ，第 2［の切片］に関して要求されるであろう部分は $A-H$ であろう。そして，D が B に対するように，A が $\frac{B \text{ in } A}{D}$ に対するから，$\frac{B \text{ in } A}{D}$ は第 1 の切片であろう。同様に，F が B に対するように，$A-H$ が $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } H}{F}$ に対することになるから，$\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } H}{F}$ は第 2［の切片］であろう。それら 2 つの切片［の和］は分けられるであろう辺全体に等しい。

ゆえに，$\frac{B \text{ in } A}{D} + \frac{B \text{ in } A - B \text{ in } H}{F}$ は B に等しくされるであろう。この方程式が整理されると，$\frac{D \text{ in } F + D \text{ in } H}{D+F}$ が A に等しくされるであろう。

それゆえ，$D+F$ が $F+H$ に対するように，D が A に対する。

さらに，第 2［の切片］に関して与えられるであろう部分は $A-H$ になるから，それゆえ，$\frac{D \text{ in } F + D \text{ in } H}{D+F}$ から H が取り去られるであろうから，これが残されるであろう。それゆえ，それを E としよう。ゆえに，$\frac{D \text{ in } F - H \text{ in } F}{D+F}$ は E に等しくされるであろう。

それゆえ，$D+F$ が $D-H$ に対するように，F が E に対する。 47

さらに，前もって定められた切片の部分が与えられたとき，全体あるいは切片そのものが与えられるであろう。確かに，$\frac{B \text{ in } A}{D}$ は第 1 の切片であり，$\frac{B \text{ in } E}{F}$ は第 2［の切片］であろう。

それゆえ，与えられた辺が，第 1 の切片のあらかじめ定められた部分が第 2 の［切片の］あらかじめ定められた部分から取り去られると，指示された差に等しくなるように，［2 つに］分けられる。確かに，

与えられた辺が，全体が切片に関して与えられるであろう部分の比例に対するように，分けられると，

第 2［の切片に関するものと］ともに，第 1 の切片に関して与えられるであろう部分の比例［の和］が，指示された負担部分［与えられるであろう部分］の差［H］足す第 2［の切片］に関して与えられるであろう部分の比例に対するように，第 1［の切片］に関して与えられるであろう部分の比例が第 1［の切片］に関して与えられるであろう実際の部分に対する。

あるいは，

第 2［の切片に関するものと］ともに，第 1 の切片に関して与えられるであろう部分の比例［の和］が，第 1［の切片］に関して与えられるであろう部分の比例引く指示された負担部分の差に対するように，第 2［の切片］に関して与えられるであろう部分の比例が第 2［の切片］に関して与えられるであろう実際の部分に対する。

B を 84，D を 28，F を 21，H を 7 とすると，A は 16，E は 9 になる。

さらに，負担部分の差 H は第 1 の切片に関して与えられるであろう部分 D より小さく，［そして,］超過分が提示されるのであるから，それ［第 1 の切片に関して与えられるであろう部分］は第 2 の切片に関して与えられるであろう［部分］より大きいかあるいは小さいかのいずれかであるように，指示されなければならないことは明らかである。

後者の場合において，7 は 28 より小さい，ように。

「探究」の文言では，第 1 の部分 (A) : 第 1 の切片 $= D : B$，第 2 の部分 (E) : 第 2 の切片 $= F : B$ としたとき，第 2 の部分 (E) − 第 1 の部分 $(A) = H$ となるように，辺 B を 2 分せよ，という問題である。
このとき，差 H が提示されていることから $A \neq E$ でなければならない，すなわち，$A > E$ あるいは $A < E$ でなければならないことが注意されている。が，「両方の場合で操作は同じになる」から，本文中では $A - E = H$ としている。
ただし，値の条件としては，「$A > E$ あるいは $A < E$」よりも「$D > H$ および $F > H$」の方が重要である。後者は最後に注意されている。
$A - E = H$ の場合は，$(D + F) : (F + H) = D : A$，$(D + F) : (D - H) = F : E$ とすればよい，というのがヴィエートの解である。
指示通りに $E - A = H$ とするなら，$(D+F) : (F-H) = D : A$，$(D+F) : (D+H) = F : E$ となる。

$B = 84$，$D = 28$，$F = 21$，$H = 7$ ならば，$(28 + 21) : (21 + 7) = 28 : A$ より，$A = 16$ であり，$(28 + 21) : (28 - 7) = 21 : E$ より，$E = 9$ である。このとき，第 1 の切片は 48，第 2 の切片は 36 である。
$E - A = H$ とした場合は，$(28+21) : (21-7) = 28 : A$ より，$A = 8$ で，$(28+21) : (28+7) = 21 : E$ より，$E = 15$ であり，第 1 の切片は 24，第 2 の切片は 60 である。

『算術』第 1 巻問題 6 (［3］p.132)。
「与えられた数を，第 1［の数］の与えられた分数が第 2［の数］の与えられた分数を，与えられた数だけ，超えるように，2 つの数に分けること。
　必要条件。第 2 の与えられた数は，第 1 の数の分数が第 2［の数］の分数を超えるようにとられたときに生じるものより小さくなければならない。
　与えられた数を 100，与えられた分数をそれぞれ $\frac{1}{4}$ および $\frac{1}{6}$，与えられた超過分を 20 とする。
　第 2 の部分は $6x$ である。それゆえ，第 1 の部分は $4(x+20)$ である。よって，$10x + 80 = 100$ で，$x = 2$ である。［よって，求める］部分は 88，12 である。」

探究 IX

それらの差が指示されたものであり，さらに，他方の［辺の］あらかじめ定められた部分に加えられた，一方の辺のあらかじめ定められた部分が指示された和に等しくなるような，2 つの辺を見出すこと。

B を，全体すなわち第 1 の辺そのものに対して D が B に対する比を持っている，第 1［の辺］

の部分が，全体すなわち第 2 の辺そのものに対して F が B に対する比を持っている，より小さい部分に加えられると H になるような，2 つの辺の与えられた差としよう。それら 2 つの辺を見出さなければならない。

第 1 の辺はより大きいかあるいはより小さいかのいずれかであるとみなされる。第 1 の場合として，より大きいとみなされるとし，それゆえ，第 1 の辺，すなわちより大きい［辺］，が与える部分を A としよう。それゆえ，第 2 の辺，すなわちより小さい［辺］，が与える部分は $H - A$ であろう。そして，D が B に対するように，A が $\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ に対するから，$\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ はより大きい辺であろう。そして，F が B に対するように，$H - A$ が $\dfrac{B \text{ in } H - B \text{ in } A}{F}$ に対するから，$\dfrac{B \text{ in } H - B \text{ in } A}{F}$ はより小さい辺であろう。それゆえ，$\dfrac{B \text{ in } A}{D} - \dfrac{B \text{ in } H - B \text{ in } A}{F}$ は B に等しくされるであろう。そして，この方程式が整理されると，$\dfrac{D \text{ in } F + D \text{ in } H}{F + D}$ が A に等しくされるであろう。

それゆえ，$F + D$ が $F + H$ に対するように，D が A に対する。

さらに，第 2［の切片］に関して与えられるであろう部分は $H - A$ になるから，それゆえ，H から $\dfrac{D \text{ in } F + H \text{ in } D}{F + D}$ が取り去られるであろうから，これが残されるであろう。

それゆえ，それを E としよう。それゆえ，$\dfrac{H \text{ in } F - D \text{ in } F}{F + D}$ は E に等しくされるであろう。

それゆえ，$F + D$ が $H - D$ に対するように，F が E に対する。

第 2 の場合として，第 1 の切片がより小さいとみなされるとしよう。それゆえ，第 2 の切片はより大きいであろう。それゆえ，第 2［の辺］に関して与えられるであろう部分を，再び，E としよう。それゆえ，第 1［の辺］，すなわちより小さい［辺］，が与える部分は $H - E$ であろう。そして，F が B に対するように，E が $\dfrac{B \text{ in } E}{F}$ に対するから，$\dfrac{B \text{ in } E}{F}$ は第 2 の，すなわちより大きい，辺であろう。同様に，D が B に対するように，$H - E$ が $\dfrac{B \text{ in } H - B \text{ in } E}{D}$ に対するから，$\dfrac{B \text{ in } H - B \text{ in } E}{D}$ は第 1 の，すなわちより小さい，辺であろう。それゆえ，$\dfrac{B \text{ in } E}{F} - \dfrac{B \text{ in } H - B \text{ in } E}{D}$ は B に等しくされるであろうし，この方程式が整理されると，$\dfrac{F \text{ in } H + F \text{ in } D}{D + F}$ が E に等しくされるであろう。

それゆえ，$D + F$ が $H + D$ に対するように，F が E に対する。

さらに，第 1［の切片］に関して与えられるであろう部分は $H - E$ になるから，それゆえ，H から $\dfrac{F \text{ in } H + F \text{ in } D}{D + F}$ が取り去られるであろうから，これが残されるであろう。

それゆえ，それを A としよう。ゆえに，$\dfrac{H \text{ in } D - F \text{ in } D}{F + D}$ は A に等しくされるであろう。

それゆえ，$F + D$ が $H - F$ に対するように，D が A に対する。

さらに，辺の部分が与えられると，全体あるいは辺そのものが与えられる。確かに，$\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ は 48
第 1 の辺であり，$\dfrac{B \text{ in } E}{F}$ は第 2 の辺であろう。

ゆえに，それらの差が指示されたものであり，さらに，他方［の辺］のあらかじめ定められた部分に加えられた，一方の辺のあらかじめ定められた部分が指示された和に等しくなるような，2 つの辺が見出される。確かに，

辺が，求められるものの差に関して，全体が辺に対して与えられるであろう比例にある部分に対

するように，分けられると，

より小さい辺とともに，より大きい辺に関して与えられるであろう部分の比例［の和］が，指示された与えられるであろう和足すより小さい辺［に関して与えられるであろう］部分の比例に対するように，より大きい［辺に関して与えられるであろう］部分の比例がより大きい辺に関して与えられるであろう実際の部分に対する。

あるいは，

より小さい辺とともに，より大きい辺に関して与えられるであろう部分の比例［の和］が，指示された与えられるであろう和引くより大きい辺［に関して与えられるであろう］部分の比例に対するように，より小さい［辺に関して与えられるであろう］部分の比例がより小さい辺に関して与えられるであろう実際の部分に対する。

B を 84，D を 28，F を 21，H を 98 とすると，A は 68，E は 30 になる。

さらに，与えられるであろう和は，より大きい切片に関して与えられるであろう部分の比例 D より大きいように，指示されなければならないことは明らかである。

98 は 28 より大きい，ように。

$$\begin{cases} \text{第 1 の部分}\,(A) : \text{第 1 の辺} = D : B \\ \text{第 2 の部分}\,(E) : \text{第 2 の辺} = F : B \\ \text{第 1 の辺} \sim \text{第 2 の辺} = B \\ \text{第 1 の部分}\,(A) + \text{第 2 の部分}\,(E) = H \end{cases} \quad \text{となるような 2 つの辺を見出せ，という問題。}$$

第 1 の場合［第 1 の辺 $>$ 第 2 の辺］のヴィエートの解は，$(F+D):(F+H)=D:A$，$(F+D):(H-D)=F:E$ である。

$B=84$，$D=28$，$F=21$，$H=98$ ならば，$(21+28):(21+98)=28:A$ より，$A=68$ であり，$(21+28):(98-28)=21:E$ より，$E=30$ である。

このとき，第 1 の辺 $=\dfrac{BA}{D}=\dfrac{84\times 68}{28}=204$，第 2 の辺 $=\dfrac{BE}{F}=\dfrac{84\times 30}{21}=120$ であり，$B=$ 第 1 の辺 $-$ 第 2 の辺 $=204-120=84$ となっている。

第 2 の場合［第 1 の辺 $<$ 第 2 の辺］の解は，$(D+F):(H+D)=F:E$，$(F+D):(H-F)=D:A$。

この場合は, $(28+21):(98+28)=21:E$ より, $E=54$ で, $(21+28):(98-21)=28:A$ より, $A=44$ であり，第 1 の辺 $=\dfrac{BA}{D}=\dfrac{84\times 44}{28}=132$，第 2 の辺 $=\dfrac{BE}{F}=\dfrac{84\times 54}{21}=216$ である。

Witmer は $B=38$ とする (『解析術』p.98) が，理由は不明。これだと，

第 1 の場合は, 第 1 の辺 $=\dfrac{BA}{D}=\dfrac{38\times 68}{28}=\dfrac{646}{7}$, 第 2 の辺 $=\dfrac{BE}{F}=\dfrac{38\times 30}{21}=\dfrac{380}{7}$ となる。

第 2 の場合は, 第 1 の辺 $=\dfrac{BA}{D}=\dfrac{38\times 44}{28}=\dfrac{418}{7}$, 第 2 の辺 $=\dfrac{BE}{F}=\dfrac{38\times 54}{21}=\dfrac{684}{7}$ となる。

確かに，$B=$ 第 1 の辺 $\sim$ 第 2 の辺 $=38$ ではあるが，辺やその和は整数値の方がよいような気がする。

探究 X

それらの差が指示されたものであり，さらに，第 2［の辺］のあらかじめ定められた部分から取り去られた，第 1［の辺］のあらかじめ定められた部分がそれらの与えられたものの間の差に等しくなるような，2 つの辺を見出すこと。

B を，全体すなわち第 1 の辺そのものに対して D が B に対する比を持っている，第 1［の辺］の部分が，全体すなわち第 2 の辺そのものに対して F が B に対する比を持っている，第 2［の辺］の部分から取り去られると H になるような，2 つの辺の与えられた差としよう。それら 2 つの辺を見出さなければならない。

第 1 の辺は，2 つのうち，より大きいかあるいはより小さいかであるとみなされる。さらに，そのことから，［第 1 の辺に関して与えられるであろう］部分は第 2［の辺］に関して［与えられるであろう部分］より大きいかあるいは小さいかのいずれかであるとみなされ，たいていは，［いずれの場合でも］操作は同じである。

それゆえ，D を第 1［の辺］に関して与えられるであろうより大きいあるいはより小さい部分［の比例］としよう。しかし，第 1 の場合として，罰を甘受する［負数になる］，第 1 の辺に関して与えられるであろう部分を 2 つのうちのより大きいものとしよう。そして，その与えられるであろう部分を A としよう。それゆえ，第 1［の辺に関して与えられるであろう部分］は超過分をもつことになると同時に，それら負担部分の差は H であるから，第 2［の辺］に関して与えられるであろう部分は $A-H$ であろう。そして，第 1 の辺は $\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ であり，第 2 の辺は $\dfrac{B \text{ in } A - B \text{ in } H}{F}$ であろう。それゆえ，$\dfrac{B \text{ in } A}{D} - \dfrac{B \text{ in } A - B \text{ in } H}{F}$ は B に等しくされるであろう。この方程式が整理されると，もしも F が D より大きい部分［の比例］であれば，$\dfrac{F \text{ in } D - H \text{ in } D}{F-D}$ が A に等しくされるであろう。それゆえ，$F-D$ が $F-H$ に対するように，D が A に対する。

さらに，第 2［の辺］に関して与えられるであろう部分は $A-H$ であるから，それゆえ，$\dfrac{F \text{ in } D - H \text{ in } D}{F-D}$ から H が取り去られるとき，［これが］残されるであろう。それゆえ，それを E としよう。ゆえに，$\dfrac{F \text{ in } D - F \text{ in } H}{F-D}$ は E に等しくされるであろう。それゆえ，$F-D$ が $D-H$ に対するように，F が E に対する。

もし，逆に，D が F より大きい部分［の比例］であるならば，$D-F$ が $H-F$ に対するように，D が A に対するであろうし，$D-F$ が $H-D$ に対するように，F が E に対するであろう。

第 2 の場合として，第 1 の辺が 2 つのうちのより小さいものとし，与えられるであろう部分を，再び，A としよう。それゆえ，第 2 の，それゆえより大きい，［辺］に関して与えられるであろう部分は $A-H$ であろう。そして，第 1 の辺は $\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ で，第 2［の辺］は $\dfrac{B \text{ in } A - B \text{ in } H}{F}$ であろう。それゆえ，$\dfrac{B \text{ in } A - B \text{ in } H}{F} - \dfrac{B \text{ in } A}{D}$ は B に等しくされるであろう。この方程式が整理されると，$\dfrac{F \text{ in } D + H \text{ in } D}{D-F}$ が A に等しくされるであろう。それゆえ，$D-F$ が $F+H$ に対するように，D が A に対する。

さらに，第 2 の，それゆえより大きい，［辺］に関して与えられるであろう部分は $A-H$ であるから，それゆえ，$\dfrac{F \text{ in } D + H \text{ in } D}{D-F}$ から H が取り去られるとき，［これが］残されるであろう。それゆえ，それを E としよう。ゆえに，$\dfrac{D \text{ in } F + H \text{ in } F}{D-F}$ は E に等しくされるであろう。それゆえ，$D-F$ が $D+H$ に対するように，F が E に対する。

しかし，この第 2 の場合において，操作の流れは，第 1［の辺］からつくられるであろう部分の 49
方が第 2［の辺からつくられるであろう部分］より大きいことを示している。

さらに，求められていた辺の部分が与えられると，辺そのものの全体が与えられる。確かに，$\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ は第 1 の辺であり，$\dfrac{B \text{ in } E}{F}$ は第 2 の辺であろう。

ゆえに，それらの差が指示されたものであり，さらに，第 2［の辺］のあらかじめ定められた部分から取り去られた，第 1［の辺］のあらかじめ定められた部分がそれらの与えられたものの間の差に等しいような，2 つの辺が見出される。確かに，

辺が求められるものの差に関して，全体が辺に関して与えられるであろう部分の比に，分けられると，もしも第 1［の辺］が 2 つの辺のうちの大きいものであり，それからつくられる部分がより大きいものであれば，

第 1［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例引く第 2［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例が，指示された与えられるであろう差引く第 2［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例に対するように，第 1［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例が同じ第 1［の辺］に関して与えられるであろう実際の部分に対する。

あるいは，

第 1［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例引く第 2［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例が，指示された与えられるであろう差引く第 1［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例に対するように，第 2［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例が第 2［の辺］に関して与えられるであろう実際の部分に対する。

ところがもし，そのより大きい第 1［の辺］からつくられるものがより小さい第 2 の［辺からつくられる］ものより小さければ，同じ比例を負の積によって逆にするのが有効である。

しかし，あらかじめ定められたその部分が罰を甘受する，その第 1 の辺が求められていたものより小さく，より大きい部分がつねにそれからつくられるとき，

第 1［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例引く第 2［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例が，第 2［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例足す指示された与えられるであろう差に対するように，第 1［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例が同じ第 1［の辺］に関して与えられるであろう実際の部分に対する。

あるいは，

第 1［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例引く第 2［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例が，第 1［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例足す指示された与えられるであろう差に対するように，第 2［の辺］に関して与えられるであろう部分の比例が第 2［の辺］に関して与えられるであろう実際の部分に対する。

要するに，3 つの場合がある。

第 1 は，第 1 の辺，あるいは罰を甘受するその部分，が 2 つのうちでより大きく，より大きい部分がそれからつくられるとき。

第 2 は，同じ辺はより大きいままで，より小さい部分がそれからつくられるとき。

第 3 は，その第 1 の辺が 2 つのうちでより小さく，より大きい部分が［それから］つくられるとき。確かに，より小さい［部分はそれから］つくることはできない。

第 1 の場合は，H は，第 1 の切片の部分の比例より大きく，その結果，第 2 の切片の部分の比例 F よりもまた大きく，なるように指示されなければならない。

第 2 の場合は，それは D あるいは F より小さくなければならない。

第 3 の場合は，H は D あるいは F より小さいかあるいは大きくなければならない。それゆえ，この第 3 の場合は第 1 のとき，あるいは第 2 のときのいずれかに一致させることができる。

I

2 つの辺の差 B を 12，D を 4，F を 3，A が E を超える差 H を 9 としよう。［なぜなら，］H は D あるいは F のいずれかより大きいのであるから。

$\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ はより大きい辺あるいはより小さい［辺］とみなされる。

1　もし大きいのであれば，A は 24，E は 15 になる。 50

そして，第 1 の，より大きい，辺 $\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ は 72 であり，第 2 の，より小さい，辺 $\dfrac{B \text{ in } E}{F}$ は 60 である。そして，それらの差は指示された B である。

2　しかし，もし $\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ がより小さい辺とみなされるならば，A は 48，E は 39 になる。そして，$\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ は 144，$\dfrac{B \text{ in } E}{F}$ は 156 である。そして，それらの差は指示された B である。

II

1　再び，2 つの辺の差 B を 48，D を 16，F を 12，A が E を超える差 H を 10 としよう。

H は D あるいは F のいずれかより小さく，しかし，D は F より大きいから，$\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ は必然的により小さい辺で，$\dfrac{B \text{ in } E}{F}$ はより大きい辺である。そして，A は 88，E は 78 になる。そして，$\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ は 264，$\dfrac{B \text{ in } E}{F}$ は 312 になる。そして，それらの差は指示された B である。

2　あるいは，D を 12，F を 16，B の 48 はそのまま，H を 10 とすると，必然的に $\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ はより大きい辺である。そして，A は 18，E は 8 になる。そして，$\dfrac{B \text{ in } A}{D}$ は 72 で，$\dfrac{B \text{ in } E}{F}$ は 24 である。そして，それらの差は指示された B である。

$$\begin{cases} \text{第 1 の部分}\,(A) : \text{第 1 の辺} = D : B \\ \text{第 2 の部分}\,(E) : \text{第 2 の辺} = F : B \\ \text{第 1 の辺} \sim \text{第 2 の辺} = B \\ \text{第 1 の部分}\,(A) \sim \text{第 2 の部分}\,(E) = H \end{cases} \quad \text{となるような 2 つの辺を見出せ，という問題。}$$

ヴィエートは場合分けをして調べている。すなわち，

(1) 第 1 の辺 $>$ 第 2 の辺 のとき，

(a) $D < F$ のとき，$(F-D) : (F-H) = D : A$，$(F-D) : (D-H) = F : E$。

(b) $D > F$ のとき，$(D-F) : (H-F) = D : A$，$(D-F) : (H-D) = F : E$。

(2) 第 1 の辺 $<$ 第 2 の辺 のとき，

(a) $D < F$ のとき，$\dfrac{BA - BH}{F} - \dfrac{BA}{D} = B$ より $DA - FA = FD + HD$ であるから，この場合はあり得ない。

(b) $D > F$ のとき，$(D-F) : (F+H) = D : A$，$(D-F) : (D+H) = F : E$。

$B = 12$，$D = 4$，$F = 3$，$H = 9$ とすると，

(1) (b) では，$\begin{cases} (4-3) : (9-3) = 4 : A & \longrightarrow & A = 24 \\ (4-3) : (9-4) = 3 : E & \longrightarrow & E = 15 \end{cases}$

(2) (b) では，$\begin{cases} (4-3) : (3+9) = 4 : A & \longrightarrow & A = 48 \\ (4-3) : (4+9) = 3 : E & \longrightarrow & E = 39 \end{cases}$

$B = 48$，$D = 16$，$F = 12$，$H = 10$ とすると，

(2) (b) が該当し，$\begin{cases} (16-12) : (12+10) = 16 : A & \longrightarrow & A = 88 \\ (16-12) : (16+10) = 12 : E & \longrightarrow & E = 78 \end{cases}$

$B = 48$，$D = 12$，$F = 16$，$H = 10$ とすると，

(1) (a) が該当し，$\begin{cases} (16-12) : (16-10) = 12 : A & \longrightarrow & A = 18 \\ (16-12) : (12-10) = 16 : E & \longrightarrow & E = 8 \end{cases}$

それぞれの例における第 1 の辺 $\dfrac{BA}{D}$，第 2 の辺 $\dfrac{BE}{F}$ は本文中にあるとおり。

第 2 巻

探究 I

辺による長方形［積］およびそれらの辺の比が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

簡単に述べられた複数の表現は 2 つの数［の場合］に含まれる。それゆえ，B を，2 つの辺による長方形である，与えられた平面とし，より大きい［辺］がより小さい［辺］に対して S が R に対する比であることもまた与えられるとしよう。それらの辺を見出さなければならない。

より大きい辺を A としよう。それゆえ，S が R に対するように，A が $\dfrac{R \text{ in } A}{S}$ に対するから，それゆえ，$\dfrac{R \text{ in } A}{S}$ はより小さい辺であろう。それゆえ，それらの辺からつくられる平面は $\dfrac{R \text{ in } A \text{ quadr.}}{S}$ であろうし，それゆえ，それは与えられた平面 B に等しい。すべてに S が掛けられると，ゆえに，R in A quadr. は S in B planum に等しくされる。それゆえ，その方程式から比例に戻されると，R が S に対するように，B planum が A quadratum に対する。

あるいは，より小さい辺を E としよう。それゆえ，R が S に対するように，E が $\dfrac{S \text{ in } E}{R}$ に対するから，それゆえ，$\dfrac{S \text{ in } E}{R}$ はより大きい辺であろう。それゆえ，それらの辺による長方形は $\dfrac{S \text{ in } E \text{ quadr.}}{R}$ であろうし，従って，それは平面 B に等しい。すべてに R が掛けられると，ゆえに，S in E quadr. は R in B planum に等しくされる。それゆえ，この方程式から比例に戻されると，S が R に対するように，B planum が E quadratum に対する。

それゆえ，辺からつくられる平面が，それらの辺の比とともに，与えられると，それらの辺が見出される。

確かに，

第 1 の辺の比例が，より大きいあるいはより小さい第 2 の辺の比例に対するように，それらの辺による長方形が，より大きいあるいはより小さい第 2 の辺の平方に対する。

平面 B を 20，R を 1，S を 5，A を $1N$［x］とすると，$1Q$［x^2］は 100 に等しくされる。あるいは，E を $1N$ とすると，$1Q$ は 4 に等しくされる。

ヴィエートの結論は，$R : S = B : A^2 = E^2 : B$ となる，ということであるから，$B = 20$，$R = 1$，$S = 5$ ならば，$A^2 = 100$ より，$A = 10$ で，$E^2 = 4$ より，$E = 2$ となる。

ここで，ヴィエートは，$1N$，$1Q$ という表現を用いている。これらはそれぞれ未知数および未知数の 2 乗と解される。N は numerus，Q は quadratus であろう。なお，未知数の 3 乗 $1C$ は第 2 巻の「探究 XIV」に現れる。

探究 II

辺による長方形［積］および［それらの辺の］平方の和が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

確かに，

［それらの辺の］平方の和が加えられた，それらの辺による平面の 2 倍はそれらの辺の和の平方

に等しくされる。しかし，［辺の平方の和から］取り去られたもの［辺による平面の 2 倍］は［それらの辺の］差の平方［に等しくされる］。

［これらのことは］平方の生成［の仕方］から明らかである。さらに，2 つの辺の差およびそれらの和が与えられると，それらの辺が与えられる。

平方の和が 104 になるような，それらの辺による長方形を 20 としよう。それらの辺の和を $1N$ とすると，$1Q$ は 144 に等しくされる。あるいは，［それらの辺の］差を $1N$ とすると，$1Q$ は 64 に等しくされる。

探究 III 51

辺による長方形およびそれらの辺の差が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

確かに，それらの辺による長方形の 4 倍が加えられた，それらの辺の差の平方はそれはそれらの辺の和の平方に等しくされる。

なぜならば，それらの辺の和の平方引く［それら辺の］差の平方はそれらの辺による長方形の 4 倍に等しいことは既に整えられているからである。その結果，確かに，なされるべき操作は対照［移項］だけである。さらに，2 つの辺の差およびそれらの和が与えられると，それらの辺が与えられる。

その差が 8 である 2 つの辺による長方形を 20 としよう。それらの辺の和を $1N$ とすると，$1Q$ は 144 に等しくされる。

以下においても，非常によく使われる関係式は

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab, \qquad \begin{cases} (a+b)+(a-b)=2a \\ (a+b)-(a-b)=2b \end{cases}$$

である。第 1 式により，和や差および「長方形」から差あるいは和が求められ，第 2 の関係式により，和および差から辺が求められるという仕掛けである。

『算術』第 1 巻問題 30 (［3］p.141)。

「それらの差および積が与えられた数であるような 2 つの数を見出すこと。

必要条件。積の 4 倍と差の平方は平方を与えなければならない。しかし，これもまた式の性質である (ἔστι δὲ καὶ τοῦτο πλασματικόν)。

与えられた差を 4，与えられた積を 96 とする。$2x$ を求められる数の和とする。それゆえ，数は $x+2$，$x-2$ であり，従って，$x^2-4=96$ であり，$x=10$ である。［よって,］求められる数は 12，8 である。」

探究 IV

辺による長方形およびそれらの辺の和が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

確かに，それらの辺の和の平方引くそれらの辺による長方形の 4 倍は，それらの辺の差の平方に等しくされる。

そのため，再び，［このことは］最後に思い出された規則から対照［移項］によって述べることが許されている。

その和が 12 であるような 2 つの辺による長方形を 20 としよう。それらの辺の差を $1N$ とすると，$1Q$ は 64 に等しくされる。

『算術』第 1 巻問題 27 (［3］p.140)。

「それらの和および積が与えられた数であるような 2 つの数を見出すこと。

必要条件。和の半分の平方は平方数の分だけ積を超えていなければならない。しかし，これは式の性質である。

与えられた和を 20，与えられた積を 96 とする。$2x$ を求められる数の差とする。それゆえ，数は $10+x$，$10-x$ である。従って，$100-x^2=96$ である。それゆえ，$x=2$ であり，求められる数は 12，8 である。」

探究 V

辺の差および［それらの辺の］平方の和が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

確かに，［それらの辺の］平方の和の 2 倍引く［それらの］辺の差の平方はそれらの辺の和の平方に等しくされる。

なぜならば，いま，規則は辺の和の平方足す［辺の］差の平方が平方の和の 2 倍に等しいということであり，確かに，なされるべき操作は対照［移項］だけだからである。

辺の差を 8，平方の和を 104 としよう。辺の和を $1N$ とすると，$1Q$ は 144 に等しくされる。

探究 VI

辺の和および［それらの辺の］平方の和が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

確かに，［それらの辺の］平方の和の 2 倍引く［それらの］辺の和の平方はそれらの辺の差の平方に等しくされる。

そのため，再び，［このことは］最後に思い出された規則から対照［移項］によって述べることが許されている。

辺の和を 12，平方［の和］を 104 としよう。辺の差を $1N$ とすると，$1Q$ は 64 に等しくされる。

『算術』第 1 巻問題 28 (［3］pp.140–141)。

「それらの和およびそれらの平方の和が与えられた数であるような 2 つの数を見出すこと。

必要条件。それらの平方の和の 2 倍はそれらの和の平方より平方の分だけ超えていなければならない。しかし，これもまた式の性質である。

与えられた和を 20，与えられた平方の和を 208 とする。［それらの］差を $2x$ とする。それゆえ，数は $10+x$，$10-x$ である。従って，$200+2x^2=208$ であり，$x=2$ である。［よって,］求められる数は 12，8 である。」

探究 VII

辺の差および［それらの辺の］平方の差が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

確かに，［それらの辺の］平方の差が［それらの］辺の差によって割られるとき，それらの辺の和が生じるであろう。

なぜならば，いま，規則は辺の差は，辺の和が掛けられるとき，平方の差がつくられるということであり，そして，除法は乗法がもたらす操作の回復［逆算］だからである。

辺の差を 8，平方［の差］を 96 としよう。辺の和は 12 になる。それゆえ，より大きい辺は 10 で，より小さい［辺］は 2 である。

52 探究 VIII

辺の和および［それらの辺の］平方の差が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

［それらの辺の］平方の差がそれらの辺の和で割られるとき，それらの辺の差が生じるであろう。

［このことは］前述の注意により明らかである。

辺の和を 12，平方の差を 96 としよう。辺の差は 8 になり，それゆえ，より大きい辺は 10 で，より小さい［辺］は 2 である。

> 『算術』第 1 巻問題 29 (［3］pp.141)。
> 「それらの和およびそれらの平方の差が与えられた数であるような 2 つの数を見出すこと。
> 　与えられた和を 20，与えられた平方の差を 80 とする。［それらの］差を $2x$ とする。それゆえ，数は $10+x$，$10-x$ である。従って，$(10+x)^2-(10-x)^2=80$，あるいは $40x=80$ であり，$x=2$ である。［よって,］求められる数は 12，8 である。」

探究 IX

辺による長方形［積］および［それらの辺の］平方の差が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

与えられた B planum を辺による長方形としよう。また，与えられた D planum を［それらの辺の］平方の差としよう。それらの辺を見出さなければならない。［それらの辺の］平方の和を A planum とすると，それゆえ，それらの辺の和の平方は A planum + B plano 2 であろう。一方，［それらの辺の平方の］差は A planum − B plano 2 であろう。さらに，［それらの辺の］差が掛けられたそれらの辺の和は［それらの辺の］平方の差となる。それゆえ，［それらの辺の］差の平方が掛けられたそれらの辺の和の平方はそれ自身が掛けられた［それらの辺の］平方の差となるであろう。それゆえ，A plani-planum − B plano-plano 4 は D plano-plano に等しくされるであろう。そして，この方程式が整理されると，A plano-planum は D plano-plano + B plano-plano 4 に等しくされるであろう。さらに，［それらの辺の］平方の和およびそれらの差，あるいはそれらの辺による長方形が与えられると，それらの辺が与えられる。

それゆえ，辺による長方形および［それらの辺の］平方の差が与えられると，それらの辺が見出される。確かに，

長方形の 2 倍の平方が加えられた，平方の差は平方の和の平方に等しい。

［積である］B planum を 20，［平方の差である］D planum を 96 としよう。［平方の和である］A planum を $1N$ とすると，$1Q$ は 10816 に等しくされる。

探究 X

辺による長方形［積］からだけでなく，それぞれの辺の平方からもなる平面が与えられ，そして，それらの辺［のうち］の 1 つが与えられたとき，残りの辺を見出すこと。

与えられた B planum は辺による長方形およびそれぞれの辺の平方からなるとし，さらに，与えられた D をそれらの辺のうちの 1 つとしよう。残りの辺を見出さなければならない。

与えられた辺の半分が加えられた，求められる辺を A とすると，それゆえ，求められる正当な辺は $A-D\,\dfrac{1}{2}$ であろう。そして，その平方は A quadratum − D in A + D quadrato $\dfrac{1}{4}$ である。確かに，与えられた［辺の］平方は D quadratum であり，辺による長方形が加えられた 2 つの平方は，提示されたことに従って，B plano に等しくされる。しかし，辺による長方形は D in A − D quadrato $\dfrac{1}{2}$ である。それゆえ，A quadratum + D quadrato $\dfrac{3}{4}$ は B plano に等しくされ，そして，この方程式が整理されると，A quadratum が B plano − D quadrato $\dfrac{3}{4}$ に等しくされるであろう。

それゆえ，辺による長方形からだけでなく，それぞれの辺の平方からもなる平面が与えられ，そ

して，それらの辺［のうち］の 1 つも与えられたとき，残りの辺が見出される。確かに，

与えられた辺の平方の 4 分の 3 が取り去られた，辺による長方形およびそれぞれの辺の平方からなる平面は，求める辺および与えられた［辺の］半分によってつくられる辺の平方に等しい。

B planum を 124，D を 2，A を $1N$ とすると，$1Q$ は 121 に等しくされる。それゆえ，$\sqrt{121}-1$ は求められている辺である。あるいは，B planum を 124，D を 10，A を $1N$ とすると，$1Q$ は 49 に等しくされる。それゆえ，$\sqrt{49}-5$ は求められている辺である。

> $DX+D^2+X^2=B$ および D が与えられたときに，X を求めよ，という問題である。ヴィエートは次のように解いた。すなわち，
> $A=X+\dfrac{1}{2}D$ とおくと，$X=A-\dfrac{1}{2}D$ であり，これから，$DX=AD-\dfrac{1}{2}D^2$，$X^2=A^2-AD+\dfrac{1}{4}D^2$ であるから，
> $$B=\left(AD-\frac{1}{2}D^2\right)+D^2+\left(A^2-AD+\frac{1}{4}D^2\right)=A^2+\frac{3}{4}D^2$$
> $$\longrightarrow \quad A^2=B-\frac{3}{4}D^2$$
> となり，A^2 すなわち A が得られる。これから，X が求められる。
>
> なお，ここに現れる $\sqrt{}$ は根号記号であるが，根号記号が初めて印刷本に現れたのはルドルフ (Christoph Rudolff : 1500 頃) が著した，コス式代数 (主として中世後期・ルネサンス期に行われたアラビア式算法) の代表的著作の 1 つである，『代数』(*Coss*，1525 年) だということである (［13］p.121)。

探究 XI

辺による長方形［積］からだけでなく，それぞれの辺の平方からもなる平面が与えられ，そして，それらの辺の和も与えられたとき，それらの辺を識別すること。

53 与えられた B planum は辺による長方形およびそれぞれの辺の平方からなるとし，さらに，与えられた G をそれらの辺の和としよう。それらの辺を識別しなければならない。

辺による長方形を A planum とすると，それゆえ，それらの辺の和の平方はそれぞれの辺の平方足す長方形の 2 倍に等しくされるから，結果として，G quadratum は B plano $+$ A plano に等しくされるであろう。そして，この方程式が整理されると，G quadratum $-$ B plano が A plano に等しくされるであろう。

それゆえ，辺の和および辺による長方形が与えられたとき，それらの辺が見出される。

それゆえ，辺による長方形からだけでなく，それぞれの辺の平方からもなる平面が与えられ，そして，そのうえ，それらの辺の和が与えられたとき，それらの辺が識別される。確かに，

［辺の］和の平方からそれらの［提示された］平面からつくられたものが取り去られると，辺による長方形が残される。

B planum を 124，G を 12 とすると，A planum は 20 になる。それゆえ，辺の差の平方は 64 であろうし，それゆえ，より大きい辺の 2 倍は $12+\sqrt{64}$ になる。そして，より小さい辺の 2 倍は $12-\sqrt{64}$ である。

> $B=CD+C^2+D^2$，$G=C+D$ が与えられたときに，C，D を求めよ，という問題。
> $A=CD$ とすると，$A=G^2-B$，$G^2-4A=(C\sim D)^2$ となるから，$C\sim D=\pm\sqrt{G^2-4A}$ および $G=C+D$ から C，D が求められる。

なお，ここで使われている関係式 $\left(ab+a^2+b^2\right)+ab=(a+b)^2$ は以下でも用いられる。

探究 XII

辺による長方形［積］からだけでなく，それぞれの辺の平方からもなる平面が与えられ，そして，それらによる長方形も与えられたとき，それらの辺を識別すること。

確かに，

長方形が加えられた，そのつくられた平面は辺の和の平方に等しくされるであろう。

［これは］上の探究において見出され，整理されたことによる。

辺による長方形およびそれぞれの辺の平方からなる平面を 124 とし，さらに，［それらの辺による］長方形そのものを 20 としよう。辺の和を $1N$ とすると，$1Q$ は 144 に等しくされ，これから 20 の 4 倍が取り去られると，差の平方 64 が残されるであろう。それゆえ，$\sqrt{}144+\sqrt{}64$ はより大きい辺の 2 倍，$\sqrt{}144-\sqrt{}64$ はより小さい辺の 2 倍になる。

探究 XIII

［それらの辺の］平方の和および同じものの差が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

与えられた平方の和を D planum とし，同じものの差を B planum としよう。それらの辺が見出されなければならない。

それゆえ，より大きい［辺の］平方の 2 倍は D planum + B plano であろう。［これは］辺に関して既に整えられた教え［第 1 巻探究 1］による。さらに，［平方の］2 倍が与えられたとき，単一［の平方］が与えられるし，平方が与えられたとき，平方の辺［辺そのもの］が与えられる。

確かに，辺について認められることは，どのようなものであれ別の単純な大きさについて適用することができるから，新しい操作が整えられることはなく，ほとんど例証することがなかった。

D planum を 104，B planum を 96 としよう。より大きい辺を $1N$ とすると，$1Q$ は 100 に等しくされる。より小さい辺を $1N$ とすると，$1Q$ は 4 に等しくされる。

探究 XIV

［それらの辺の］立方の差および同じものの和が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

与えられた立方の差を B solidum とし，同じものの和 D solidum も与えられるとしよう。それらの辺を見出さなければならない。

それゆえ，より大きい辺の立方の 2 倍は D solidum + B solido であろう。［そして,］より小さい辺の立方の 2 倍は D solidum − B solido［であろう］。［これらは］辺に関して既に整えられた教えに従い，そして，どのようなものであれ一般の大きさについて適用されるときに，平方に関して，再び，例証することを気づかせた。さらに，［立方の］2 倍が与えられたとき単一［の立方］が与えられるし，立方が与えられたとき根［辺］が与えられる。そのため，この探究は名前ほどの価値はほとんどない。

B solidum を 316，D solidum を 370 としよう。より大きい辺を $1N$ とすると，$1C$［x^3］は 343 に等しくさせる。より小さい辺を $1N$ とすると，$1C$ は 27 に等しくさせる。

探究 XV

［それらの辺の］立方の差および辺による長方形が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

確かに，立方の差の平方足す辺による長方形の立方の 4 倍は立方の和の平方に等しくされる。 54

なぜならば，立方の和の平方引く［立方の］差の平方が長方形の立方の 4 倍に等しいことは既に整えられているからである。そのため，なされるべき操作は対照［移項］だけである。

立方の差を 316，辺による長方形を 21 としよう。立方の和を $1N$ とすると，$1Q$ は 136900 に等しくされる。

それゆえ，より大きい［辺の］立方の 2 倍は $\sqrt{}136900 + 316$ である。

より小さい［辺の立方の］2 倍は $\sqrt{}136900 - 316$ である。

探究 XVI

［それらの辺の］立方の和および辺による長方形が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。確かに，

立方の和の平方引く辺による長方形の立方の 4 倍は立方の差の平方に等しくされる。

そのため，再び，［このことは］最後に思い出された規則から対照［移項］によって述べることが許されている。

立方の和を 370，辺による長方形を 21 としよう。立方の差を $1N$ とすると，$1Q$ は 99256 に等しくされる。

探究 XVII

辺の差および［それらの辺の］立方の差が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

B を与えられた辺の差，さらに，D solidum を立方の差としよう。それらの辺を見出さなければならない。

辺の和を E とすると，ゆえに，$E + B$ はより大きい辺の 2 倍であり，$E - B$ はより小さい辺の 2 倍であろう。さらに，それらの立方の差は B in E quadratum 6 + B cubo 2 であり，その結果として，それは D solido 8 に等しい。それゆえ，$\dfrac{D \text{ sol. } 4 - B \text{ cubo}}{B\ 3}$ は E quadrato に等しくされる。

さらに，平方が与えられたとき辺が与えられ，辺の差および同じものの和が与えられたとき［それらの］辺が与えられる。

それゆえ，辺の差および［それらの辺の］立方の差が与えられたとき，それらの辺の和が見出される。確かに，

立方の差の 4 倍引く辺の差の立方は，もし辺の差の 3 倍で割られるならば，それらの辺の和の平方が生じる。

B を 6，D solidum を 504 とし，辺の和を $1N$ とすると，$1Q$ は 100 に等しくされる。

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \frac{4(a^3-b^3)-(a-b)^3}{3(a-b)} \quad \text{［}\longleftarrow\ \text{これはなかなか見かけない変形］} \\ &= \frac{4\times 504 - 6^3}{3\times 6} = 100\end{aligned}$$

であるから，$a + b = 10$ となり，$B = a - b = 6$ と合わせて，$a = 8$，$b = 2$ が求められるという寸法。

探究 XVIII

辺の和および［それらの辺の］立方の和が与えられたとき，それらの辺を識別すること。

B を与えられた辺の和，さらに，D solidum を立方の和としよう。それらの辺を識別しなければ

ならない。辺の差を E とすると，ゆえに，$B+E$ はより大きい辺の 2 倍であり，$B-E$ はより小さい辺の 2 倍である。それゆえ，立方の和は B cubus 2 + B in E quadratum 6 であり，その結果として，それは D solido 8 に等しい。それゆえ，$\dfrac{D \text{ sol. } 4 - B \text{ cubo}}{B\ 3}$ は E quadrato に等しくされる。

さらに，平方が与えられたとき辺が与えられ，辺の和および同じものの差が与えられたとき［それらの］辺が与えられる。

それゆえ，辺の和および［それらの辺の］立方の和が与えられたとき，それらの辺が与えられる。確かに，

立方の和の 4 倍引く辺の和の立方は，もし辺の和の 3 倍で割られるならば，辺の差の平方が生じる。

B を 10，D solidum を 370 とし，E を $1N$ とすると，$1Q$ は 16 に等しくされる。

探究 XIX

辺の差および［それらの辺の］立方の差が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

B を与えられた辺の差とし，そのうえ，D solidum を与えられた立方の差としよう。それらの辺を見出さなければならない。それらの辺による長方形を A planum とする。そして確かに，
立方のつくり方から，もし立方の差から辺の差の立方が取り去られるならば，残りは，辺の差 55
に辺による長方形を掛けてつくられる，立体の 3 倍であることは明らかである。それゆえ，D solidum $-$ B cubo は A plano 3 in B に等しくされるであろうし，すべてが［B］3 で割られると，$\dfrac{D \text{ solidum} - B \text{ cubo}}{B\ 3}$ は A plano に等しくされる。

さらに，辺による長方形および辺の差が与えられたとき，［それらの］辺が与えられる。

それゆえ，辺の差および［それらの辺の］立方の差が与えられたとき，それらの辺が見出される。確かに，

辺の差の立方が取り去られた，辺に関する立方の差は，もし辺の差の 3 倍で割られるならば，そこから，辺による長方形である平面が生じる。

B を 4，D solidum を 316 としよう。A planum は，辺 7 および 3 による長方形である，21 になる。

$$ab = \frac{(a^3-b^3)-(a-b)^3}{3(a-b)} = \frac{316-4^3}{3\times 4} = 21$$

ところが，もし立方の差および長方形から，辺の差が探し求められたのであれば，あたかも A planum は F planum であり，それに対して，［問題は］B についての探求であったと知られるようになったかのように，それを A としよう。それゆえ，A cubus + F plano 3 in A が D solido に等しくされるという，方程式が現れる。すなわち，

辺の差の立方足す辺による長方形に辺の差を掛けた立体の 3 倍は，立方の差に等しくされる。

これは注目する価値がある。

> 前段における A を F とし，B を A と書くと，$A^3+3FA=D$，すなわち $(a-b)^3+3ab(a-b)=a^3-b^3$，という方程式が得られるというもの。

探究 XX

再び，辺の和および［それらの辺の］立方の和が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

G を与えられた辺の和とし，そのうえ，D solidum を与えられた立方の和としよう。それらの辺を見出さなければならない。それらの辺による長方形を A planum とする。そして確かに，立方のつくり方から，もし辺の和の立方から立方の和が取り去られるならば，残りは，辺の和に辺による長方形を掛けてつくられる，立体の 3 倍であるであることは明らかである。それゆえ，$\dfrac{G \text{ cubus} - D \text{ solido}}{G\ 3}$ は A plano に等しくされるであろう。さらに，辺による長方形および辺の和が与えられたとき，それらの辺が与えられる。

それゆえ，辺の和および［それらの辺の］立方の和が与えられたとき，それらの辺が見出される。確かに，

立方の和が取り去られた，辺の和の立方は，もし辺の和の 3 倍で割られるならば，そこから，辺による長方形である平面が生じる。

G を 10，D solidum を 370 としよう。A planum は，辺 7 および 3 による長方形である，21 になる。

ところが，もし立方の和および長方形から，辺の和が探し求められたのであれば，あたかも A planum は B planum であり，それに対して，［問題は］G についての探求であったと知られるようになったかのように，それを A としよう。それゆえ，A cubus $-$ B plano 3 in A が D solido に等しくされるという，方程式が現れる。すなわち，

辺の和の立方引く辺による長方形に辺の和を掛けた立体の 3 倍は，立方の和に等しい。

これは注目する価値がある。

前段は，$ab = \dfrac{(a+b)^3 - (a^3+b^3)}{3(a+b)} = \dfrac{10^3 - 370}{3 \times 10} = 21$。
後段は，A を B と，G を A と書くと，$A^3 - 3BA = D$，すなわち $(a+b)^3 - 3ab(a+b) = a^3 + b^3$ となるということ。

探究 XXI

1 つは辺の差から［それらの辺の］平方の差を掛けてつくられる，もう 1 つは辺の和から［それらの辺の］平方の和を掛けてつくられる，2 つの立体が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

説明された第 1 の立体 B solidum，［および］第 2［の立体］D solidum が与えられるとしよう。さらに，辺の和を A とすると，それゆえ，$\dfrac{B \text{ solidum}}{A}$ は辺の差の平方であろうし，$\dfrac{D \text{ solidum}}{A}$ は平方の和であろう。さらに，平方の和の 2 倍引く辺の差の平方は辺の和の平方をつくる。それゆえ，$\dfrac{D \text{ solidum } 2 - B \text{ solido}}{A}$ は A quadrato に等しくされるであろう。すべてに A が掛けられると，それゆえ，D solidum $-$ B solido が A cubo に等しくされるであろう。

56 それゆえ，説明された 2 つの立体が与えられたとき，それらの辺が見出される。確かに，

辺の差から平方の差を掛け［てつくられ］る立体が取り去られた，辺の和から平方の和を掛け［てつくられ］る立体の 2 倍は辺の和の立方に等しくされる。

B solidum を 32，D solidum を 272 とすると，A の立方は 512 になり，それゆえ辺の和は 8，差の平方は $\dfrac{32}{8}$ すなわち 4 になる。そのうえ，差そのものは $\sqrt{4}$ になり，それゆえ，より小さい辺は 4 引く辺［の差］$\sqrt{4}$ の半分であり，より大きい辺は 4 足す同じ半分である。

B solidum を 10，D solidum を 20 とすると，A の立方は 30 になり，それゆえ辺の和は $\sqrt{}$C.30 [$\sqrt[3]{30}$]，差の平方は $\dfrac{10}{\sqrt{}\text{C}.30}$，あるいは $\sqrt{}\text{C}.\dfrac{100}{3}$，になる。そのうえ，差そのものは $\sqrt{}\text{QC}.\dfrac{100}{3}$ [$\sqrt[6]{\dfrac{100}{3}}$] になり，それゆえ，より小さい辺は $\sqrt{}\text{C}.\dfrac{30}{8} - \sqrt{}\text{QC}.\dfrac{100}{192}$ であり，より大きい辺は $\sqrt{}\text{C}.\dfrac{30}{8} + \sqrt{}\text{QC}.\dfrac{100}{192}$ である。

しかし，カルダノ (Girolamo Cardano : 1501–1576) は，『算術』(*Practica Arithmeticae* : 1539 年) の第 66 章の問題 93 において，この仮説において，辺の比例は，確かに，より小さい［辺］がより大きい［辺］に対するように，$2-\sqrt{3}$ が 1 に対する，あるいは 1 が $2+\sqrt{3}$ に対することを正しく注意したが，不幸にも辺そのものは書きつけなかった。

$B=(a-b)(a^2-b^2)$，$D=(a+b)(a^2+b^2)$，$A=a+b$ とすると，$\dfrac{B}{A}=(a-b)^2$，$\dfrac{D}{A}=a^2+b^2$ であるから，$A^2=2\times\dfrac{D}{A}-\dfrac{B}{A}$ となり，それゆえ，$A^3=2D-B$ となる。

従って，A^3 から $a+b$ を，$\dfrac{B}{A}$ から $a-b$ を求めれば，a および b が得られるというのである。

いま，$B=10$，$D=20$ とすると，$A^3=2\times 20-10=30$ であるから，$A=a+b=\sqrt[3]{30}$。また，$\dfrac{B}{A}=\dfrac{10}{\sqrt[3]{30}}=\sqrt[3]{\dfrac{100}{3}}$ であるから，$a-b=\sqrt[6]{\dfrac{100}{3}}$。

$$
\begin{aligned}
\text{よって，小さい辺} &= \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{30}-\sqrt[6]{\frac{100}{3}}\right)=\sqrt[3]{\frac{30}{8}}-\sqrt[6]{\frac{100}{192}}\\
&=\sqrt[3]{\frac{30}{8}}\left(1-\sqrt[6]{\frac{100}{192}}\div\sqrt[6]{\frac{30^2}{8^2}}\right)=\sqrt[3]{\frac{30}{8}}\left(1-\sqrt[6]{\frac{1}{27}}\right)\\
&=\sqrt[3]{\frac{30}{8}}\left(1-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)=\sqrt[3]{\frac{30}{8}}\times\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

同様に，大きい辺 $=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{30}+\sqrt[6]{\dfrac{100}{3}}\right)=\sqrt[3]{\dfrac{30}{8}}\times\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$ となる。

従って，小さい辺 : 大きい辺 $=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}:\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}=(2-\sqrt{3}):1=1:(2+\sqrt{3})$ である。

探究 XXII

平方の和および辺による長方形が辺の差の平方に対する比が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。

B planum を与えられた平方の和としよう。さらに, 辺による長方形が辺の差の平方に対するように, R が S に対する［比を］持つものとしよう。それらの辺を見出さなければならない。辺による長方形を A planum とすると, それゆえ, 辺の差の平方は $\dfrac{S \text{ in } A \text{ planum}}{R}$ であろうし, これに長方形の 2 倍が加えられると，平方の和となるであろう。ゆえに，$\dfrac{S \text{ in } A \text{ planum} + R \text{ in } A \text{ planum } 2}{R}$ は B plano に等しくされるであろう。この方程式が比例に戻されると，$S+R$ 2 が R に対するように，B planum が A planum に対するであろう。

それゆえ，説明されたものが与えられたとき，それらの辺が与えられる。確かに，

辺の差の平方足す辺による長方形の比例の 2 倍が辺による長方形の比例に対するように，実際の平方の和が実際の長方形に対する。

平方の和を 20 としよう。さらに，辺による長方形が同じものの差に平方に対して，2 が 1 に対する［比を］持つとすると，$S+R$ 2 は R に対して 20 が 8 に対するであろう。それゆえ，8 は求められている長方形である。それゆえ，$20-16$ すなわち 4 は，辺の差の平方であり，$20+16$ は［辺の］和の平方である。それゆえ，［辺の］差は $\sqrt{}4$，［辺の］和は $\sqrt{}36$ であり，より小さい辺は $\sqrt{}9-\sqrt{}1$ あるいは 2，一方，より大きい［辺］は $\sqrt{}9+\sqrt{}1$ あるいは 4 である。

しかし，平方の和 20 はそのままであるとする。辺による長方形が辺の差の平方に対して 1 が 1 に対する比をもつと，明らかにそれらは等しくなる。［このとき，］3［$S+2R$］が 1［R］に対するように，20 が $\dfrac{20}{3}$ に対するであろう。それゆえ，$\dfrac{20}{3}$ は辺による長方形である。それゆえ，$20-\dfrac{40}{3}$ すなわち $\dfrac{20}{3}$ は辺の差の平方であろうし，$20+\dfrac{40}{3}$ すなわち $\dfrac{100}{3}$ は［辺の］和の平方であろう。それゆえ，$\sqrt{}\dfrac{20}{3}$ は［辺の］差であり，$\sqrt{}\dfrac{100}{3}$ は［辺の］和である。そしてそれゆえ，より小さい辺は $\sqrt{}\dfrac{25}{3}-\sqrt{}\dfrac{5}{3}$ であり，より大きい辺は $\sqrt{}\dfrac{25}{3}+\sqrt{}\dfrac{5}{3}$ である。そして，カルダノは『算術』第 66 章問題 94 において怠惰な夢想家である［誤っている］。

> $B=a^2+b^2$ および $ab:(a-b)^2=R:S$ から，a，b を求める問題。
> $A=ab$ とすると，与比例式より $(a-b)^2=\dfrac{SA}{R}$ となるが，$B=a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=\dfrac{SA}{R}+2A=\dfrac{(S+2R)A}{R}$ であるから，$(S+2R):R=B:A$ がいえる。
> さて，$(a-b)^2=(a^2+b^2)-2ab=B-2A$，$(a+b)^2=(a^2+b^2)+2ab=B+2A$ によって，$a-b$，$a+b$ が求められるから，これらから a，b が得られる。
> ヴィエートは，上の例で $R:S=2:1$ とし，下の例では $R:S=1:1$ としている。

第 3 巻

探究 I

比例する 3 つの直線の中項および外項の差が与えられたとき，それらの外項を見出すこと。

しかし，確かに，外項の比例は辺のようなものである。確かに，中項の平方は辺による長方形そのものである。さらに，［このようにみれば，それは］既に述べられている。［すなわち，第 2 巻探究 III で，］辺による長方形および辺の差が与えられたとき，それらの辺を見出すこと［，として］。それゆえ，外項の差の半分の平方に中項の平方が加えられると，外項の和の半分の平方に等しくされる。

外項の差を 10，中項を 12 とすると，より小さい外項は 8，より大きい［外項］は 18 である。

57

探究 II

比例する 3 つ［の直線］の中項および外項の和が与えられたとき，それらの外項を見出すこと。

この問題も同様に，明らかに，前に既に述べられている。［すなわち，第 2 巻探究 IV で，］辺による長方形および辺の和が与えられたとき，それらの辺を見出すこと［，として］。

中項を 12，外項の和を 26 とすると，より小さい外項は 8，より大きい［外項］は 18 である。

探究 III

直角三角形の垂線および底線と斜辺の差が与えられたとき，底線および斜辺を見出すこと。

そして，この問題も同様に，既に述べられている。すなわち，まさに，［第 2 巻探究 VII で，］平

方の差および辺の差が与えられたとき，それらの辺を見出すこと［，として］。なぜならば，垂線の平方は斜辺の平方の底線の平方に関する差だからである。確かに，直角三角形の与えられた垂線を D とし，一方，底線と斜辺の差を B としよう。底線および斜辺を見出さなければならない。底線と斜辺の和を A とすると，それゆえ，B in A は D quadrato に等しくされるであろうし，そしてそれゆえ，$\dfrac{D \text{ quadratum}}{B}$ が A に等しくされるであろう。さらに，辺の差および同じものの和が与えられたとき，それらの辺が見出される。

それゆえ，直角三角形の垂線よび底線と斜辺の差が与えられたとき，底線および斜辺が与えられる。確かに，

直角三角形の垂線は底線と斜辺の差および同じものの和の間の比例である。

D を 5，B を 1 としよう。比例は 1，5，25 である。それゆえ，［直角］三角形の斜辺は 13，底線は 12 であり，垂線は 5 のままである。さらに，この理由によって，それ［次のこと］がいえるであろう。

探究 IV

直角三角形の垂線および底線と斜辺の和が与えられたとき，底線および斜辺を識別すること。

垂線を 5，底線と斜辺の和を 25 としよう。比例は 25，5，1 である。それゆえ，底線と斜辺の差は 1 である。確かに，底線そのものは 12，斜辺は 13 である。

> 直角三角形の底線を a，斜辺を b とすると，$B = b - a$，$A = b + a$ ということであるから，$BA = b^2 - a^2 = D^2$［三平方の定理］となる。
> それゆえ，$B : D = D : A$，すなわち (底線と斜辺の差) : 垂線 = 垂線 : (底線と斜辺の和)，がいえるというのである。
> 探究 III の場合，$B = 1$，$D = 5$ から，$A = 25$ となり，
> 探究 IV の場合は，$D = 5$，$A = 25$ から，$B = 1$ となる。

探究 V

直角三角形の斜辺および直角のまわりの辺の差が与えられたとき，直角のまわりの辺を見出すこと。

しかし，それは，［第 2 巻探究 V の，］辺の差および平方の和が与えられたとき，それらの辺を見出すこと，である。そのため，この問題も同様に，既に述べられている。

すなわち，D を直角三角形の与えられた斜辺，B を直角のまわりの辺の差としよう。直角のまわりの辺を見出さなければならない。直角のまわりの辺の和を A とすると，ゆえに，$A + B$ は直角のまわりの，より大きい辺の 2 倍，$A - B$ は［直角のまわりの，］より小さい辺の 2 倍であろう。それぞれのものからつくられ，そして加えられた平方は A q. $2 + B$ q. 2 をつくり，それゆえ，それは D q. 4 に等しくされる。それゆえ，D q. $2 - B$ q は A quadrato に等しくされるであろう。

それゆえ，直角三角形の斜辺および直角のまわりの辺の差が与えられたとき，直角のまわりの辺が見出される。確かに，

斜辺の平方の 2 倍引く直角のまわりの辺の差の平方は，同じものの和の平方に等しくされる。

D を 13．B を 7，A を $1N$ とすると，$1Q$ は 289 に等しくされる。そして，$1N$ は $\sqrt{289}$ になる。それゆえ，直角のまわりの辺は，$\sqrt{72\,\frac{1}{4}} + 3\,\frac{1}{2}$ および $\sqrt{72\,\frac{1}{4}} - 3\,\frac{1}{2}$，あるいは 12 および 5 である。

探究 VI

直角三角形の斜辺および直角のまわりの辺の和が与えられたとき，直角のまわりの辺を見出すこと。

58 確かに，

斜辺の平方の 2 倍引く直角のまわりの辺の和の平方は，直角のまわりの辺の差の平方に等しい。

そのため，［このことは］最後に思い出された規則から対照［移項］によって述べることが許されている。

再び，斜辺を 12 としよう。さらに，直角のまわりの辺の和を 17，同じものの差を $1N$ とすると，$1Q$ は 49 に等しくされるであろう。そして，$1N$ は $\sqrt{49}$ になる。それゆえ，直角のまわりの辺は $8\,\dfrac{1}{2}+\sqrt{12\,\dfrac{1}{4}}$ および $8\,\dfrac{1}{2}-\sqrt{12\,\dfrac{1}{4}}$，あるいは 12 および 5 である。

> 直角をはさむ 2 辺を a，b $(a \geqq b)$ とすると，$A=a+b$，$B=a-b$ ということだから，$2A^2+2B^2=(A+B)^2+(A-B)^2=4a^2+4b^2=4D^2$ となり，$2D^2=A^2+B^2$ となる。これを $2D^2-B^2=A^2$ としたのが探究 V で，$2D^2-A^2=B^2$ としたのが探究 VI である。

探究 VII

比例する 3 つの直線が数的に見出される。

確かに，

2 つの辺が互いに数が数に対する比をもつと仮定されると，より大きい外項はより大きいと仮定された辺の平方に，中項は辺による長方形に，より小さい外項はより小さいと仮定された辺の平方に比例するであろう。

比例する辺を B および D としよう。B が第 1 の比例で，D が第 2［の比例］であると定められるとき，第 3［の比例］は $\dfrac{D \text{ quadratum}}{B}$ であろう。すべてに B が掛けられると，比例の系列は

I	II	III
B quadratum	B in D	D quadratum

となるであろう。

B を 2，D を 3 とすると，比例は 4，6，9 となる。

探究 VIII

直角三角形が数的に見出される。

確かに，

3 つの比例する数が定められたなら，［直角三角形の］斜辺は外項の和に，底線は［外項の］差に，垂線は中項の 2 倍に比例するであろう。

なぜならば，［直角］三角形の垂線は底線と斜辺の差および同じものの和の間の比例である，ことが既に［第 3 巻探究 III，および「記号計算についての前の注釈」命題 XLV の系で，］整えられているからである。

比例が数的に 4，6，9 と表されるとしよう。これらから，直角三角形の斜辺が 13，底線が 5，垂線が 12 に［比例するように］つくられるであろう。

あるいは，

探究 IX

直角三角形が数的に見出される。

確かに，

2つの比例する辺が仮定されたなら，斜辺は［それらの］平方の和に，底線は同じものののの差に，垂線は辺による長方形の2倍に比例するであろう。

2つの辺を B および D としよう。それゆえ，比例する3つの辺は B，D，$\dfrac{D \text{ quadratum}}{B}$ である。すべてに B を掛けると，比例する3つの平面 B q，B in D，D q である。これらの比例から，前に述べられたこと［「記号計算についての前の注釈」命題 XLV］によって，［直角］三角形の斜辺は B q $+$ D q に，底線は B q $=$ D q に，垂線は B in D 2 に比例する。そして，さらに，平方の和による平方は，辺による長方形の2倍の平方が加えられた，平方の差による平方に等しい，ことが既に整えられている［第2巻探究 IX］。

B を2，D を3とすると，斜辺は13に，底線は5に，垂線は12に比例する。

> 2つの量 B，D について，B^2，BD，D^2 は比例する，すなわち $B^2 : BD = BD : D^2$ が成り立つ。
> 一方で，$\left(B^2 + D^2\right)^2 = \left(B^2 \sim D^2\right)^2 + (2BD)^2$ であるから，$B^2 + D^2$ は直角三角形の斜辺，$B^2 \sim D^2$ は底線，$2BD$ は垂線と考えることができる。
> $B = 2$，$D = 3$ ならば，$B^2 = 4$，$BD = 6$，$D^2 = 9$ だから，比例は $4 : 6 : 9$ ということになる。そして，斜辺は $B^2 + D^2 = 4 + 9 = 13$，底線は $B^2 \sim D^2 = 4 \sim 9 = 5$，垂線は $2BD = 2 \times 2 \times 3 = 12$ に比例するということになる。

探究 X

3つの比例［する量］のそれぞれの平方の和，さらに，その［比例の］系列の1つの外項が与えられたとき，もう1つの外項が見出される。

確かに，

与えられた外項の平方の4分の3が引き去られた，それらの平方の和は与えられた外項の半分および求められているもう1つの［外項］全体からつくられた平方に等しい。

さらに，明らかに，それは既に見出され，証明されている［第2巻探究 X］から，それを進めるのに新しいことは必要ない。 59

3つの比例［する量］の平方の和を21とし，さらに，それらのうちのより大きい外項を4としよう。それゆえ，$21 - 12$ すなわち9は，2および求められたより小さい［外項］からつくられた平方である。しかし，平方9の根は $\sqrt{9}$ であり，それゆえ，求められたより小さい［外項］は $\sqrt{9} - 2$ すなわち1である。

しかし，平方の和は同じ21のままで，より小さい外項を1としよう。それゆえ，$20\dfrac{1}{4}$ あるいは $\dfrac{81}{4}$ は，$\dfrac{1}{2}$ および求められたより大きい［外項］からつくられた平方である。しかし，平方 $\dfrac{81}{4}$ の根は $\sqrt{\dfrac{81}{4}}$ であり，それゆえ，求めるより小さい［外項］は $\sqrt{\dfrac{81}{4}} - \dfrac{1}{2}$ すなわち4である。

> 3つの量 a，b，c に対して，$b^2 = ac$ —— すなわち，a，c が外項で，b が内項 —— の下で，$a^2 + b^2 + c^2$ および a が与えられたときに c を求めようという問題。

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)-\frac{3}{4}\,a^2=\frac{1}{4}\,a^2+ac+c^2=\left(\frac{1}{2}\,a+c\right)^2$$ を基にすれば，c が求められる。

探究 XI

3 つの比例［する量］のそれぞれの平方の和，そして，その外項の和が与えられたとき，それらの外項が識別される。

確かに，

3 つの［それぞれの量の］平方の和が引き去られた，外項の和の平方は中項の平方に等しくされる。

さらに，外項の和および中項が与えられたとき，それらの外項が与えられる。それうえ，明らかに，同様のことは既に見出され，証明されている［第 3 巻探究 II］から，それを進めるのに新しいことは必要ない。

3 つの［それぞれの量の］平方の和を 21 としよう。外項の和を 5 とすると，$25-21$ すなわち 4 は中項の平方である。それゆえ，中項は $\sqrt{4}$ であり，外項は 1 および 4 である。

仮定 $b^2=ac$ により，$(a+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)=2ac-b^2=2b^2-b^2=b^2$ となる。

探究 XII

3 つの比例［する量］のそれぞれの平方の和，そして，中項そのものが与えられたとき，それらの外項が識別される。

確かに，

3 つの［それぞれの量の］平方の和足す中項の平方は，外項の和の平方に等しくされる。

［これは］前に整えられたことから，転位［移項］の技法が用いられれば［示される］。さらに，外項の和および中項が与えられたとき，外項が与えられる。

3 つの［それぞれの量の］平方の和を 21，中項を 2 としよう。$21+4$ すなわち 25 は外項の和の平方になる。それゆえ，外項は 1 および 4 である。

探究 XIII

4 つの連続的に比例する系列において，外項の差および中項の差が与えられたとき，それらの連続的な比例を見出すこと。

そのうえ，同様の問題は，2 つの探求において，既に説明されている。それは，確かに，辺の差および［辺の］立方の差が与えられたとき，それらの辺を見出すこと［第 2 巻探究 XVII］である。［そのことは，解法の］進行において明らかになるであろう。

それゆえ，4 つの連続的に比例する系列において，与えられた外項の差を D とし，与えられた中項の差を B としよう。それらの連続的な比例を見出さなければならない。

外項の和を A とすると，それゆえ，$A+D$ はより大きい外項の 2 倍であり，$A-D$ はより小さい外項の 2 倍であろう。それゆえ，$A+D$ に $A-D$ が掛けられるとき，中項あるいは外項による長方形の 4 倍になるであろう。それゆえ，$\dfrac{A \text{ quadratum} - D \text{ quadrato}}{4}$ はその長方形であり，より大きい外項が掛けられるとき，より大きい中項の立方となるであろうし，［また,］より小さい［外項が掛けられる］とき，より小さい中項の立方になるであろうし，最後に，外項の差［が掛けら

れる］とき，中項の立方の差になるであろう。それゆえ，$\dfrac{D \text{ in } A \text{ quadrat.} - D \text{ cubo}}{4}$ は中項による立方の差に等しくされる。さらに，もし立方の差から辺の差の立方が取り去られると，残されるであろうものは，2 つの辺の差の立方のつくり方から明らかなように，辺の差に辺による長方形を掛けた立体の 3 倍に等しい。

それゆえ，$\dfrac{D \text{ in } A \text{ q} - D \text{ cubo} - B \text{ cubo } 4}{4}$ は中項の差の 3 倍に中項による長方形を掛けた立体，すなわち $\dfrac{B \text{ in } A \text{ q } 3 - B \text{ in } D \text{ q } 3}{4}$，に等しくされる。この方程式が整理されると，$\dfrac{D \text{ cubus} + B \text{ cubo } 4 - B \text{ in } D \text{ q } 3}{D - B\ 3}$ が A quadrato に等しくされるであろう。

それゆえ，4 つの連続的に比例する系列において，外項の差および中項の差が与えられたとき，それらの連続的な比例が見出される。

確かに， 60

外項の差の立方足す中項の差の立方の 4 倍引く中項の差および外項の差の平方による立体の 3 倍が，外項の差引く中項の差の 3 倍で割られるとき，外項の和の平方に等しい平面が生じる。

D を 7，B を 2 としよう。A を $1N$ とすると，$1Q$ は 81 に等しくされ，$1N$ は $\sqrt{81}$ になり，明らかに，外項は 1 および 8 で，中項は 2 および 4 であり，連続的に比例する系列は $\begin{array}{cccc} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{array}$ である。

> 4 つの連続的に比例する量を a，b，c，d $(a > b > c > d)$ とすると，まず，$b^2 = ac$，$c^2 = bd$，$bc = ad$ である。
> $D = a - d$，$B = b - c$，$A = a + d$ とすると，$(A + D)(A - D) = 4ad = 4bc$ であるから，$ad = bc = \dfrac{A^2 - D^2}{4}$ となる。
> さて，$\dfrac{A^2 - D^2}{4} \times D = ad(a - d) = a^2d - ad^2 = abc - bcd = b^3 - c^3$ となるから，
> $$\frac{A^2D - D^3}{4} - B^3 = \left(b^3 - c^3\right) - (b - c)^3 = 3bc(b - c) = 3 \cdot \frac{A^2 - D^2}{4} \cdot B$$
> が成り立ち，これから $A^2D - D^3 - 4B^3 = 3BA^2 - 3BD^2$ が得られる。
> これを変形すれば，$A^2 = \dfrac{D^3 + 4B^3 - 3BD^2}{D - 3B}$ になるという次第。
> 具体例では，$D = 7$，$B = 2$ だから，$(a + d)^2 = A^2 = \dfrac{7^3 + 4 \times 2^3 - 3 \times 2 \times 7^2}{7 - 3 \times 2} = 81$ で，これを基に 4 つの比例項を得ている。

探究 XIV

4 つの連続的に比例する系列において，外項の和および中項の和が与えられたとき，それらの連続的な比例を見出すこと。

そのうえ，同様の問題は，2 つの探求において，既に説明されている。それは，確かに，辺の和および［辺の］立方の和が与えられたとき，それらの辺を見出すこと［第 2 巻探究 XVIII］である。［そのことは，解法の］進行において明らかになるであろう。

それゆえ，4 つの連続的に比例する系列において，与えられた外項の和を D とし，［与えられた］中項の和を B としよう。それらの連続的な比例を見出さなければならない。

外項の差を A とすると，ゆえに，$D + A$ はより大きい外項の 2 倍であり，$D - A$ はより小さい外項の 2 倍であろう。それゆえ，$D + A$ に $D - A$ が掛けられるとき，中項あるいは外項による長

方形の 4 倍になる。それゆえ，$\dfrac{D\ \mathrm{q} - A\ \mathrm{q}}{4}$ はその長方形であり，より大きい外項が掛けられるとき，より大きい中項の立方になるであろうし，［また,］より小さい［外項が掛けられる］とき，より小さい中項の立方になるであろうし，最後に，外項の和［が掛けられる］とき，中項による立方の和になるであろう。

それゆえ，$\dfrac{D\ \mathrm{cubus} - D\ \mathrm{in}\ A\ \mathrm{q}}{4}$ は中項による立方の和に等しくされる。さらに，もし 2 つの辺の和の立方から立方の和が取り去られると，2 つの辺［の和］の立方のつくり方から明らかなように，残りは辺の和に辺による長方形を掛けた立体の 3 倍に等しい。

それゆえ，$\dfrac{B\ \mathrm{cubus}\ 4 - D\ \mathrm{cubo} + D\ \mathrm{in}\ A\ \mathrm{q}}{4}$ は中項の和に中項による長方形を掛けた立体の 3 倍，すなわち $\dfrac{B\ \mathrm{in}\ D\ \mathrm{q}\ 3 - B\ \mathrm{in}\ A\ \mathrm{q}\ 3}{4}$，に等しくされる。この方程式が整理されると，$\dfrac{B\ \mathrm{in}\ D\ \mathrm{q}\ 3 + D\ \mathrm{cubo} - B\ \mathrm{cubo}\ 4}{D + B\ 3}$ が A quadrato に等しくされるであろう。

それゆえ，4 つの連続的に比例する系列において，外項の和および中項の和が与えられたとき，それらの連続的な比例が与えられる。

確かに，

中項の和および外項の和の平方による立体の 3 倍足す外項の和の立方引く中項の和の立方の 4 倍は，もし外項の和足す中項の和の 3 倍で割られるならば，外項の差の平方に等しい平面が生じる。

D を 9，B を 6 としよう。A を $1N$ とすると，$1Q$ は 49 に等しくされる。そして，$1N$ は $\sqrt{49}$ になり，明らかに，外項は 1 および 8，中項は 2 および 4 であり，連続的に比例する系列は $\begin{array}{cccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{array}$ である。

$$\begin{aligned} \frac{4B^3 - D^3 + DA^2}{4} &= B^3 - \frac{D^2 - A^2}{4} \times D \\ &= (b+c)^3 - ad(a+d) = (b+c)^3 - \left(b^3 + c^3\right) = 3bc(b+c) \\ &= 3 \cdot \frac{D^2 - A^2}{4} \cdot B = \frac{3BD^2 - 3BA^2}{4} \end{aligned}$$

このことから，$A^2 = \dfrac{3BD^2 + D^3 - 4B^3}{D + 3B}$ となる。

探究 XV

再び，4 つの連続的に比例する系列において，外項の差および中項の差が与えられたとき，それらの連続的な比例を見出すこと。

そして，これは，辺の差および［辺の］立方の差が与えられたとき，それらの辺を見出すこと［第 2 巻探究 XVII］である。［そのことは解法の］進行によって明らかになるであろう。

それゆえ，4 つの連続的に比例する系列において，与えられた外項の差を D とし，［与えられた］中項の差を B としよう。4 つの連続的な比例を見出さなければならない。

中項あるいは外項による長方形を A planum とする。すると，確かに，より大きい中項の立方はより大きい外項に外項による長方形を掛けた立体に，そして，より小さい中項の立方はより小さい外項に外項による長方形を掛けた立体に等しくされる。それゆえ，D in A planum は中項の立方の差に等しくされるであろう。さらに，もし立方の差から辺の差の立方が取り去られるならば，辺の
61 差の立方のつくり方から明らかなように，残ったものは辺の差に辺による長方形を掛けた立体の

3 倍に等しい。それゆえ，D in A planum $-$ B cubo は B in A planum 3 に等しくされるであろう。この方程式が整理されると，$\dfrac{B \text{ cubus}}{D - B\ 3}$ が A plano に等しくされるであろう。さらに，辺による長方形および同じものの差が与えられると，それらの辺が与えられる。

それゆえ，4 つの連続的に比例する系列において，外項の差および中項の差が与えられたとき，それらの連続的な比例が与えられる。

確かに，

外項の差引く中項の差の 3 倍が中項の差に対するように，中項の差の平方が中項あるいは外項による長方形に対する。

D を 7，B を 2 としよう。A planum は，連続的に比例する系列 $\begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{matrix}$ から，外項 1 および 8 あるいは中項 2 および 4 による長方形である 8 になる。

ところが，もし外項の差および長方形から，中項の差が探し求められたのであれば，あたかも A planum は F planum であり，それに対して，［問題は］B についての探求であったと知られるようになったかのように，それを A としよう。それゆえ，$\dfrac{A \text{ cubus}}{D - A\ 3}$ が F plano に等しくされるであろうという，方程式が現れるべきであった。この方程式が整理されると，A cubus $+$ F plano ter in A が F plano in D に等しくされる。

すなわち，

中項の差の立方足す辺による長方形に中項の差を掛けた立体の 3 倍は，辺による長方形に外項の差を掛けた立体に等しくされる。

これは注意を払う価値がある。

探究 XIII の別解。
$D = a - d$，$B = b - c$，$A = bc = ad$ とすると，

$$DA - B^3 = (a-d)ad - (b-c)^3 = \left(b^3 - c^3\right) - (b+c)^3 = 3bc(b-c) = 3AB$$

となるから，$A = \dfrac{B^3}{D - 3B}$ である。
これは，$A(D - 3B) = B \cdot B^2$ と変形できるから，$(D - 3B) : B = B^2 : A$ となる。
$A = bc$ と $B = b - c$ とから b，c を見出すのは，第 2 巻探究 III。

探究 XVI

再びまた，4 つの連続的に比例する系列において，外項の和および中項の和が与えられたとき，それらの連続的な比例を見出すこと。

そして，これは，辺の和および［辺の］立方の和が与えられたとき，それらの辺を見出すこと［第 2 巻探究 XVIII］である。［そのことは解法の］進行によって明らかになるであろう。

それゆえ，4 つの連続的に比例する系列において，与えられた外項の和を Z とし，［与えられた］中項の和を G としよう。それらの連続的な比例を見出さなければならない。中項あるいは外項による長方形を A planum とする。すると，確かに，より大きい中項の立方はより大きい外項に外項による長方形を掛けた立体に，そして，より小さい中項の立方はより小さい外項に外項による長方形を掛けた立体に等しくされる。それゆえ，Z in A planum は中項の立方の和に等しくされるであろう。さらに，もし辺の和の立方から立方の和が取り去られるならば，2 つの辺［の和］による立方のつくり方から明らかなように，残ったものは辺の和に辺による長方形を掛けた立体の 3 倍に等

しい。

それゆえ，G cubus $-$ Z in A planum は G in A planum 3 に等しくされるであろう。この方程式が整理されると，$\dfrac{G \text{ cubus}}{Z+G\ 3}$ が A plano に等しくされるであろう。

さらに，辺による長方形および辺の和が与えられたとき，それらの辺は与えられる。

それゆえ，4 つの連続的に比例する系列において，外項の和および中項の和が与えられたとき，それらの［連続的な］比例が見出される。

確かに，

外項の和足す中項の和の 3 倍が中項の和に対するように，中項の和の平方が中項あるいは外項による長方形に対する。

Z を 9，G を 6 としよう。A planum を $1N$ とすると，［A planum は］外項 1 および 8 あるいは中項 2 および 4 による長方形になる。

ところが，もし外項の和および長方形から，中項の和が探し求められたのであれば，あたかも A planum は B planum であり，それに対して，［問題は］G についての探求であったと知られるようになったかのように，それを A としよう。それゆえ，A cubus $-$ B plano ter in A が B plano in Z に等しいという，方程式が現れるべきであった。

すなわち，

62 中項の和の立方引く同じ和に外項あるいは中項による長方形を掛けた立体の 3 倍は，外項の和および中項あるいは外項による長方形からつくられた立体に等しくされる。

これは注目する価値がある。

> 探究 XIV の別解。
> $Z=a+d$，$G=b+c$，$A=bc=ad$ とすると，$G^3-AZ=3AG$ より，$A=\dfrac{G^3}{Z+3G}$ になり，$(Z+3G):G=G^2:A$ である，ということ。

第 4 巻

探究 I

［その和が］与えられた平方に等しい，2 つの平方を数的に見出すこと。

F quadratum が数的に与えられたとしよう。［その和が］与えられた F quadrato に等しい，2 つの平方を見出さなければならない。

どのようなものであれ直角三角形が数的に提示されるとし，斜辺を Z，底線を B，垂線を D としよう。そして，斜辺 F をもつそれと相似な三角形，すなわち，Z が F に対するように B が他方の底線に対する［三角形］，をつくると，それゆえ，それは $\dfrac{B \text{ in } F}{Z}$ であろう。そして，さらに，Z が F に対するように D が［他方の］垂線に対する［三角形をつくる］と，それゆえ，それは $\dfrac{D \text{ in } F}{Z}$ であろう。ゆえに，$\dfrac{B \text{ in } F}{Z}$ および $\dfrac{D \text{ in } F}{Z}$ による平方［の和］は与えられた F quadrato に等しくされるであろう。これがなされるべきことであった。

これはディオファントスの解析に帰されるものと同じであり，それに従って，B quadratum を 2 つの平方に分離しなければならない。第 1 の平方の辺を A とすると，第 2［の平方の辺］は $B-\dfrac{S \text{ in } A}{R}$ である。［そして，］第 1 の辺の平方は A quadratum，第 2［の辺の平方］は B quad.

$-\dfrac{S \text{ in } A \text{ in } B\ 2}{R}+\dfrac{S \text{ quad. in } A \text{ quadr.}}{R \text{ quad.}}$ である。それゆえ，この 2 つの平方［の和］は B quadrato に等しい。

それゆえ，この方程式が整理されると，$\dfrac{S \text{ in } R \text{ in } B\ 2}{S \text{ quad.} + R \text{ quadr.}}$ は，第 1 の単独の平方の辺，A に等しくされるであろう。そして，第 2 の辺は $\dfrac{R \text{ quad. in } B - S \text{ quad. in } B}{S \text{ quad.} + R \text{ quad.}}$ になる。確かに，直角三角形は 2 つの辺 S および R によって数的につくられ，斜辺は S quad. + R quad. に比例し，底線は S quadrato − R quadrato に比例し，垂線は S in R 2 に比例する。それゆえ，B quadrati の分離に関して，S quadr. + R quadr. が相似な［直角］三角形の斜辺 B に対するように，R quadr. − S quadr. が底線，［すなわち］一方の単独の平方の辺，に対し，そして，S in R 2 が垂線，［すなわち］もう一方の辺，に対するようにする。

B を 100 とし，この平方が 2 つの平方［の和］に等しくなることが見出されるとしよう。直角三角形が，R が 4，S が 3 によって，数的につくられると，つくられた三角形の斜辺は 25，底線は 7，垂線は 24 になる。それゆえ，25 が 7 に対するように，100 が 28 に対する。そして，25 が 24 に対するように，100 が 96 に対する。それゆえ，100 の平方は 28 の平方足す 96 の平方に等しくされるであろう。

> 前段では，斜辺 Z，底線 B，垂線 D である直角三角形に対して，斜辺が与えられた［平方数の平方根である］数 F になるように相似な直角三角形をつくれば，三平方の定理から，$\left(\dfrac{BF}{Z}\right)^2+\left(\dfrac{DF}{Z}\right)^2=F^2$ になる，という。
> 一方，後段では，R および S を元にしたピタゴラス数 $(R^2+S^2,\ 2RS,\ R^2-S^2)$ に基づいて，与えられた平方数 B^2 を平方数の和に分解しようというもの。
> 一方の数を A として，$A:X=R:S$ とすれば，$X=\dfrac{SA}{R}$ となる。
> そこで，$A^2+\left(B-\dfrac{SA}{R}\right)^2=B^2$ とすると，$A=\dfrac{2SRB}{S^2+R^2}$，他方 $=\dfrac{R^2B-S^2B}{S^2+R^2}$ が導かれる。すなわち，ピタゴラス数 $\left(B,\ \dfrac{2SRB}{S^2+R^2},\ \dfrac{R^2B-S^2B}{S^2+R^2}\right)$ が得られる。
> $B=100$，$R=4$，$S=3$ なら，$A=\dfrac{2\times3\times4\times100}{3^2+4^2}=96$，他方 $=\dfrac{4^2\times100-3^2\times100}{3^2+4^2}=28$ であり，$100^2=96^2+28^2$ である。
> 『算術』第 2 巻問題 8 (［3］pp.144–145)。
> 「与えられた平方数を 2 つの平方数に分けること。
> 　与えられた平方数を 16 とする。x^2 を求める平方数の 1 つとする。それゆえ，$16-x^2$ は平方数でなければならない。m を任意の整数，4 を 16 の平方根である数として，$(mx-4)^2$ の形の平方数をとる。例えば，$(2x-4)^2$ をとり，これを $16-x^2$ に等しいとする。それゆえ，$4x^2-16x+16=16-x^2$，あるいは $5x^2=16x$ であり，$x=\dfrac{16}{5}$ である。それゆえ，求める平方数は $\dfrac{256}{25}$，$\dfrac{144}{25}$ である。」

探究 II

与えられた別の 2 つの平方［の和］に等しい，2 つの平方を数的に見出すこと。

B quadratum および D quadratum が数的に与えられたとしよう。これに等しい，別の 2 つの平方を見出さなければならない。

B が直角三角形の底線，D が垂線とみなされると，しかもそのうえ，斜辺の平方は B quadr. +

D quadr. に等しいから，有理数あるいは無理数の辺である，Z をその［直角三角形の］斜辺としよう。そして，どのようなものであれ，その斜辺が X，底線が F，垂線が G である，別の直角三角形が提示されるとしよう。そして，それら 2 つから，「注釈」において述べられたこと［「記号計算についての前の注釈」命題 XLVI］によって，合成的なあるいは分解的な仕方で第 3 の直角三角形がつくられる。第 1 の方法によると，斜辺は Z in X に比例し，垂線は B in $G + D$ in F に比例し，底線は B in $F = D$ in G に比例するであろう。第 2［の方法］によると，斜辺は Z in X に，垂線は B in $G = D$ in F に，底線は B in $F + D$ in G に比例するであろう。そして，つくられた三角形の辺に比例する，それらすべての平面が X で割られるとすると，それゆえ，第 1 の方法では，斜辺は Z のままで，底線は $\dfrac{B \text{ in } F = D \text{ in } G}{X}$，垂線は $\dfrac{B \text{ in } G + D \text{ in } F}{X}$ になる。あるいは，第 2［の方法］では，底線は $\dfrac{B \text{ in } F + D \text{ in } G}{X}$，垂線は $\dfrac{B \text{ in } G = D \text{ in } F}{X}$ になる。それゆえ，直角を囲む辺によるこれら 2 つの平方［の和］は斜辺 Z の平方に等しくされるであろうし，さらに，そのつくり方から，これは B quad. $+$ D quad. に等しい。これがなされるべきことであった。

これはディオファントスの解析に帰されるものと同じであり，それに従って，既に 2 つの平方，
63 すなわち B quadratum および D quadratum，［の和］として考えられる平面 Z quadratum を，再び別の 2 つの平方に分離しなければならない。

つくられた［直角三角形の］第 1 の平方の辺を $A + B$，第 2［の平方の辺］を $\dfrac{S \text{ in } A}{R} - D$ とする。そして，これらから平方がつくられ，与えられた 2 つの平方と比較される。

ゆえに, A quadr. $+$ B in A 2 $+$ B quadr. $+$ $\dfrac{S \text{ quadrato in } A \text{ quadratum}}{R \text{ quadrato}} - \dfrac{S \text{ in } D \text{ in } A \text{ } 2}{R}$ $+$ D quadr. は B quadr. $+$ D quadrato に等しくされるであろう。

この方程式が整理されると，$\dfrac{S \text{ in } R \text{ in } D \text{ } 2 - R \text{ quad. in } B \text{ } 2}{S \text{ quad.} + R \text{ quad.}}$ が A に等しくされるであろう。それゆえ，$A + B$ であった，つくられた第 1 の平方の辺は $\dfrac{S \text{ in } R \text{ in } D \text{ } 2 + S \text{ quad. in } B - R \text{ quad. in } B}{S \text{ quad.} + R \text{ quad.}}$ になる。$\dfrac{S \text{ in } A}{R} - D$ であった，つくられた第 2 の平方の辺は $\dfrac{S \text{ quad. in } D - S \text{ in } R \text{ in } B \text{ } 2 - R \text{ quad. in } D}{S \text{ quad.} + R \text{ quad.}}$ になる。これらをうまく解きほぐすことによって，2 つの［直角］三角形がつくられた。第 1［の直角三角形］は，その斜辺が，有理数であれ無理数であれ，Z であり，底線が B，垂線が D である。2 つの辺 S および R からつくられた第 2［の直角三角形］は，それゆえ，その斜辺が S quad. $+$ R quad. に比例し，底線は S quad. $-$ R quad. に，垂線は S in R 2 に比例し，これらから分解的な仕方で説明された第 3［の直角三角形］がつくられる。そして，辺に比例する，つくられた立体が S quad. $+$ R quad. で割られる。それゆえ，Z は第 1 あるいは第 3［の直角三角形］の共通の斜辺であり，しかもそのうえ，前者の第 1［の直角三角形］の直角のまわりの辺による平方［の和］は後者の第 3［の直角三角形］の直角のまわりの辺による平方［の和］に等しい。

ところが，もし［つくられた直角三角形の］第 1 の平方の辺が $A - B$，第 2［の平方の辺］が $\dfrac{S \text{ in } A}{R} - D$ とおかれると，$\dfrac{S \text{ in } R \text{ in } D \text{ } 2 + R \text{ quad. in } B \text{ } 2}{S \text{ quad.} + R \text{ quad.}}$ は A に等しくされる。そして，つくられた第 1 の平方の辺は $\dfrac{S \text{ in } R \text{ in } D \text{ } 2 - S \text{ quad. in } B + R \text{ quad. in } B}{S \text{ quad.} + R \text{ quad.}}$ に，第 2［の平方の辺］は $\dfrac{S \text{ in } R \text{ in } B \text{ } 2 + S \text{ quad. in } D - R \text{ quad. in } D}{S \text{ quad.} + R \text{ quad.}}$ になる。これが合成的な仕方によってつくられた第 3 の［直角］三角形である。

B を 15，D を 10 とすると，それゆえ，Z は $\sqrt{325}$ になる。［別の］直角三角形が数的に 5，3，4 と提示されると，求める 1 つの［平方の］辺は 18，もう 1 つは 1 になる。あるいは，1 つは 6，もう 1 つは 17［になる］。

与えられた数 B，D をそれぞれ底線，垂線とする第 1 の直角三角形に対して，第 2 の直角三角形の斜辺を X，底線を F，垂線を G とすると，「記号計算についての前の注釈」命題 XLVI により，斜辺が ZX，底線が $BF \sim DG$ あるいは $BF + DG$，垂線が $BG + DF$ あるいは $BG \sim DF$ である第 3 の直角三角形をつくることができる。

従って，$B^2 + D^2 = \left(\dfrac{BF \sim DG}{X}\right)^2 + \left(\dfrac{BG + DF}{X}\right)^2$　［合成的］

$$= \left(\frac{BF + DG}{X}\right)^2 + \left(\frac{BG \sim DF}{X}\right)^2 \quad \text{［分解的］}$$

がいえる，という訳である。これが前段。

後段では，前段と同じ第 1 の直角三角形に対して，第 2 の直角三角形は，「記号計算についての前の注釈」命題 XLV により，2 つの値 R，S からつくられたものとする。すなわち，斜辺は $R^2 + S^2$，底線は $S^2 \sim R^2$，垂線は $2RS$ である直角三角形を考える。

このとき，つくるべき第 3 の直角三角形の底線を $A+B$，垂線を $\dfrac{SA}{R} - D$ とすると，$(A+B)^2 + \left(\dfrac{SA}{R} - D\right)^2 = B^2 + D^2$ とすべきことから，$A = \dfrac{2RSD - 2R^2B}{S^2 + R^2}$ となる。これから，一方の辺 $= A+B = \dfrac{2RSD + S^2B \sim R^2B}{S^2 + R^2}$，他方の辺 $= \dfrac{SA}{R} - D = \dfrac{S^2D \sim (2RSB + R^2D)}{S^2 + R^2}$ が得られる。

最後に，第 3 の直角三角形をその 2 辺が $A - B$，$\dfrac{SA}{R} - D$ であるものとすると，もう 1 組の解が得られることが述べられる。

$B = 15$，$D = 10$ とし，第 2 の直角三角形をその辺が 5，3，4 であるものとする。

前段の仕方では，$15^2 + 10^2 = \left(\dfrac{15 \times 3 \sim 10 \times 4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{15 \times 4 + 10 \times 3}{5}\right)^2$

$$= \left(\frac{15 \times 3 + 10 \times 4}{5}\right)^2 + \left(\frac{15 \times 4 \sim 10 \times 3}{5}\right)^2$$

$$= 1^2 + 18^2 = 17^2 + 6^2$$

となる。

一方，後段の方法では，まず，$2RS = 4$，$R^2 + S^2 = 5$ から，$R = 1$，$S = 2$［$R : S = 1 : 2$］となる。

そして，一方の辺 $= \dfrac{2 \times 1 \times 2 \times 10 + 2^2 \times 15 \sim 1^2 \times 15}{2^2 + 1^2}$，

他方の辺 $= \dfrac{2^2 \times 10 \sim (2 \times 1 \times 2 \times 15 + 1^2 \times 10)}{2^2 + 1^2}$

であることから，17 および 6 が得られる。

または，一方の辺 $= A - B = \dfrac{2RSD \sim S^2B + R^2B}{S^2 + R^2}$

$$= \frac{2 \times 1 \times 2 \times 10 \sim 2^2 \times 15 + 1^2 \times 15}{2^2 + 1^2} = 1,$$

他方の辺 $= \dfrac{SA}{R} - D = \dfrac{2RSB + S^2D \sim R^2D}{S^2 + R^2}$

$$= \frac{2 \times 1 \times 2 \times 15 + 2^2 \times 10 \sim 1^2 \times 10}{2^2 + 1^2} = 18$$

となる。

ところで，後段の式の導出にあたっては，

$$
R,\ S \xrightarrow{\text{XLV}} \left\{\begin{array}{l}\text{斜辺} = \sqrt{Z} \\ \text{底線} = B \\ \text{垂線} = D \\ \text{斜辺} = R^2 + S^2 \\ \text{底線} = R^2 \sim S^2 \\ \text{垂線} = 2RS\end{array}\right. \xrightarrow{\text{XLVI}} \left\{\begin{array}{l}\text{斜辺} = \sqrt{Z}(R^2 + S^2) \\ \text{底線} = 2RSD \sim B(R^2 \sim S^2) \\ \text{垂線} = D(R^2 \sim S^2) + 2RSB\end{array}\right.
$$

とすることもできる。

『算術』第 2 巻問題 9 (［3］pp.145–146)。

「2 つの平方数の和である与えられた数を 2 つの別の平方数に分けること。

与えられた数を $13 = 2^2 + 3^2$ とする。これらの平方数の根は 2，3 であるから，第 1 の平方数として $(x+2)^2$，第 2［の平方数］として $(mx-3)^2$ (m は整数)，例えば $(2x-3)^2$ とする。それゆえ，$(x^2+4x+4)+(4x^2+9-12x)=13$，あるいは $5x^2+13-8x=13$ である。それゆえ，$x = \dfrac{8}{5}$ で，求める平方数は $\dfrac{324}{25}$，$\dfrac{1}{25}$ である。」

探究 III

再び，与えられた 2 つの平方［の和］に等しい，2 つの平方を数的に見出すこと。

与えられた 2 つの平方を B quadratum，D quadratim としよう。これ［らの和］に等しい別の 2 つの平方を見出さなければならない。B がその斜辺になる，直角三角形が数的につくられるとしよう。さらに，D がその斜辺になる，それと相似な別の［直角三角形］がつくられて，それら相似な 2 つ［の直角三角形］から，「注釈」の中で示された方法［「記号計算についての前の注釈」命題 XLVII］によって，その斜辺の平方が第 1［の直角三角形］の斜辺および第 2［の直角三角形］の斜辺の平方［の和］に等しい，第 3 の［直角］三角形がつくられるとしよう。ゆえに，このつくられた第 3［の直角三角形］の斜辺の平方は B quad. + D quad. に等しくされるであろう。さらに，この平方は直角のまわりの辺の平方［の和］に等しくされる。そして，そのうえ，この方法はディオファントスの解析として既に伝えられたものから導き出される。

B を 10，D を 15 としよう。第 1 の［直角］三角形が直角のまわりの辺 8 および 6 からつくられ，第 1［の直角三角形］に相似な第 2［の直角三角形］は 12 および 9［からつくられる］とする。第 3［の直角三角形］の直角のまわりの辺は 18 および 1，あるいは 6 および 17 であり，それら 2 つの平方［の和］は 10 および 15 の平方［の和］に等しくされるであろう。

上と同じ問題を，今度は「記号計算についての前の注釈」命題 XLVII を基に解こうというもの。与えられた 2 数 B，D に対して，それらを斜辺とする相似な直角三角形をつくり，B を斜辺とする直角三角形の底線を M，垂線を N とする。このとき，斜辺の平方が $B^2 + D^2$ となるような第 3 の直角三角形をつくるのであるが，

1 つは，底線が $\dfrac{BN \sim DM}{B}$ で，垂線が $\dfrac{BM + DN}{B}$

もう 1 つは，底線が $\dfrac{BN + DM}{B}$ で，垂線が $\dfrac{BM \sim DN}{B}$

という 2 通りのものができるという。

$B = 10$，$D = 15$ のときは，$M = 8$，$N = 6$ とできるから，

$$
\left\{\begin{array}{l}\text{底線} = \dfrac{10 \times 6 \sim 15 \times 8}{10} = 6 \\ \text{垂線} = \dfrac{10 \times 8 + 15 \times 6}{10} = 17\end{array}\right.
$$

$$\begin{cases} 底線 = \dfrac{10 \times 6 + 15 \times 8}{10} = 18 \\ 垂線 = \dfrac{10 \times 8 \sim 15 \times 6}{10} = 1 \end{cases}$$

ということになる。

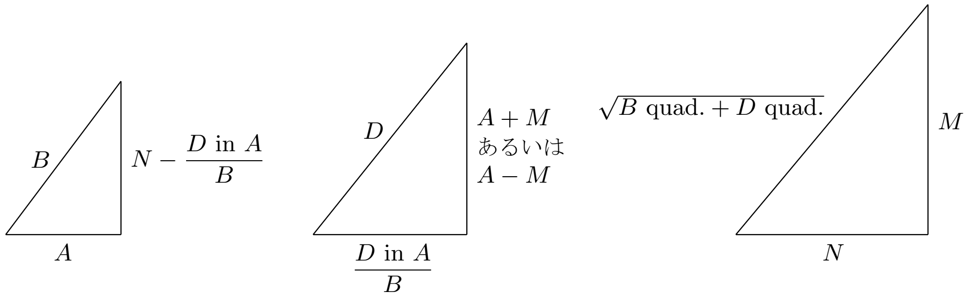
探究 IV

与えられた斜辺をもち，それらからつくられた第 3 の［直角］三角形の底線 —— 第 1［の直角三角形］の垂線および第 2［の直角三角形］の底線から［それらの和として］つくられた —— があらかじめ定められたものになるであろう，2 つの相似な直角三角形を見出すこと。

さらに，そのあらかじめ定められた底線は第 1［の直角三角形］の斜辺を超えなければならない。

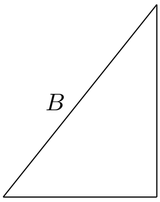
B を第 1 の三角形の与えられた斜辺，D を第 1［の三角形］に相似な第 2［の三角形の斜辺］としよう。それらから，第 1 の垂線および第 2 の底線から［それらの和として］つくられた，その底線が N に等しくされる，第 3 の三角形をつくらなければならない。B quad. $+$ D quad. $-$ N quad. は M quad. に等しくされる。ゆえに，つくられた［第 3 の直角］三角形の垂線は M であろう。さらに，A を第 1［の直角三角形］の底線としよう。それゆえ，それと相似な第 2［の直角三角形］の底線は $\dfrac{D \text{ in } A}{B}$ であろう。それゆえ，第 1［の直角三角形］の垂線は $N - \dfrac{D \text{ in } A}{B}$ である。さらに，第 2［の直角三角形］の垂線は $A + M$ あるいは $A - M$ であろうし，その結果として，M は第 1［の直角三角形］の底線および第 2［の直角三角形］の垂線の間の差になる。確かに，第 1 の場合として，［第 2 の直角三角形の垂線を］$A + M$ とすると，それゆえ，B が D に対するように，$N - \dfrac{D \text{ in } A}{B}$ が $A + M$ に対するであろう。この比例が分解されて，すべてが適切に整理されると，$\dfrac{D \text{ in } N \text{ in } B - B \text{ in } M \text{ in } B}{B \text{ quad.} + D \text{ quad.}}$ は A に等しい。あるいは，方程式が比例に戻される 64
と，B q. $+$ D q. が D in N $-$ B in M に対するように，B が A に対する。

一方，第 2 の場合として，第 2［の直角三角形］の垂線を $A - M$ としよう。それゆえ，B が D に対するように，$N - \dfrac{D \text{ in } A}{B}$ が $A - M$ に対するであろう。この比例が分解されて，すべてが適切にやり遂げられると，$\dfrac{D \text{ in } N \text{ in } B + B \text{ in } M \text{ in } B}{B \text{ quad.} + D \text{ quad.}}$ は A に等しくなる。あるいは，方程式が比例に戻されると，B q. $+$ D q. が D in N $+$ B in M に対するように，B が A に対する。



それゆえ，求められている 2 つの三角形はそれぞれ次のようである。

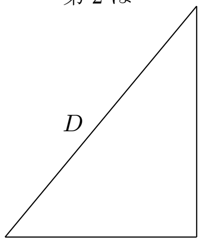
第 1 の場合，第 1 は



$$\frac{\left.\begin{array}{r}B \text{ in } N\\ +D \text{ in } M\end{array}\right\} \text{in } B}{\begin{array}{l}B \text{ quadratum}\\ +D \text{ quadrato}\end{array}}$$

$$\frac{\left.\begin{array}{r}D \text{ in } N\\ -B \text{ in } M\end{array}\right\} \text{in } B}{\begin{array}{l}B \text{ quadratum}\\ +D \text{ quadrato}\end{array}}$$

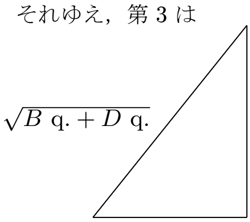
第 2 は



$$\frac{\left.\begin{array}{r}B \text{ in } N\\ +D \text{ in } M\end{array}\right\} \text{in } D}{\begin{array}{l}B \text{ quadratum}\\ +D \text{ quadrato}\end{array}}$$

$$\frac{\left.\begin{array}{r}D \text{ in } N\\ -B \text{ in } M\end{array}\right\} \text{in } D}{\begin{array}{l}B \text{ quadratum}\\ +D \text{ quadrato}\end{array}}$$

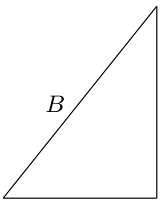
それゆえ，第 3 は



M　第 1 の底線を超える第 2 の垂線の超過分

N　第 1 の垂線および第 2 の底線からつくられたもの

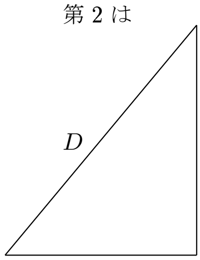
第 2 の場合，第 1 は



$$\frac{\left.\begin{array}{r}B \text{ in } N\\ -D \text{ in } M\end{array}\right\} \text{in } B}{\begin{array}{l}B \text{ quadratum}\\ +D \text{ quadrato}\end{array}}$$

$$\frac{\left.\begin{array}{r}D \text{ in } N\\ +B \text{ in } M\end{array}\right\} \text{in } B}{\begin{array}{l}B \text{ quadratum}\\ +D \text{ quadrato}\end{array}}$$

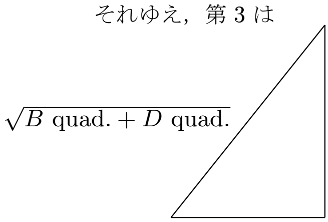
第 2 は



$$\frac{\left.\begin{array}{r}B \text{ in } N\\ -D \text{ in } M\end{array}\right\} \text{in } D}{\begin{array}{l}B \text{ quadratum}\\ +D \text{ quadrato}\end{array}}$$

$$\frac{\left.\begin{array}{r}D \text{ in } N\\ +B \text{ in } M\end{array}\right\} \text{in } D}{\begin{array}{l}B \text{ quadratum}\\ +D \text{ quadrato}\end{array}}$$

それゆえ，第 3 は



M　第 2 の垂線を超える第 1 の底線の超過分

N　第 1 の垂線および第 2 の底線からつくられたもの

さらに，D in N が B in M を超えるときに限り，第 1 の場合がその位置を占め，一方，B in N が D in M を超えるとき［に限り］，第 2［の場合が起こる］ことは明らかである。

探究 V

［その和が］与えられた 2 つの平方［の和］に等しく，求められているものの一方があらかじめ定められた限界の範囲内にあるような，2 つの平方を数的に見出すこと。

B quadratum，［および］D q. が与えられたとしよう。［その和が］それら［の和］に等しく，それらのうちの一方が F plano を超え，しかもそのうえ G plano に劣るような，別の 2 つの平方を

つくらなければならない。

Z q が B q. + D q. に等しい何らかの平面とみなされると，ゆえに，Z は，有理数であるにしろ無理数であるにしろ，［何らかの］直角三角形の斜辺であり，直角のまわりのその辺は B および D である。さらに，その斜辺もまた Z になり，直角のまわりの辺の 1 つ (例えば，底線) は N より大きく，しかもそのうえ S より小さいような，別の直角三角形が要求される。それゆえ，これは次のことに還元される。すなわち，

与えられた B および D を斜辺にもち，それらからつくられた第 3 の［直角］三角形の，第 1 の垂線および第 2 の底線から［それらの和として］つくられた，底線があらかじめ定められた限界の範囲内にあるような，相似な 2 つの直角三角形を数的に見出すこと。

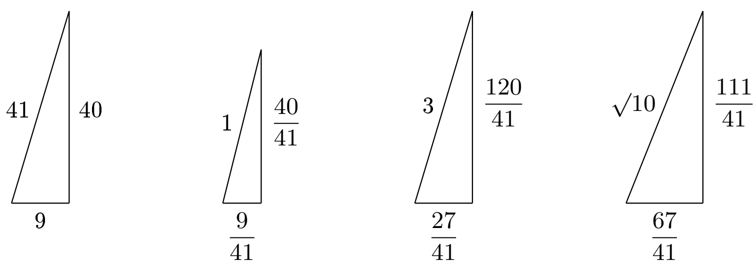
それゆえ，Z q. − N q. は M q. に等しくされ，そして，Z q. − S q. が R q. に等しくされる。

それゆえ，もし N が，与えられた斜辺をもつ 2 つの相似な三角形に分けられるであろう，第 3 の［直角］三角形の底線と考えられるならば，前述の探究の第 1 の場合によって，［第 1 の直角三角形の］底線および斜辺の差が垂線に対する比は，Z q. = D in N + B in M が B in N + D in M に対する比であるか，あるいは X が $\dfrac{X \text{ in } B \text{ in } N + X \text{ in } D \text{ in } M}{Z \text{ quad.} = D \text{ in } N + B \text{ in } M}$ に対する比であろうし，それは第 1 の限界である。

そして，もし S がその第 3 の［直角］三角形の底線と考えられるならば，説明された同じ場合のために，［第 2 の直角三角形の］底線および斜辺の差が垂線に対する比は，Z q. = D in S + B in R が B in S + D in R に対する，あるいは X が $\dfrac{X \text{ in } B \text{ in } S + X \text{ in } D \text{ in } R}{Z \text{ quad.} = D \text{ in } S + B \text{ in } R}$ に対する比であろうし，それは第 2 の限界である。

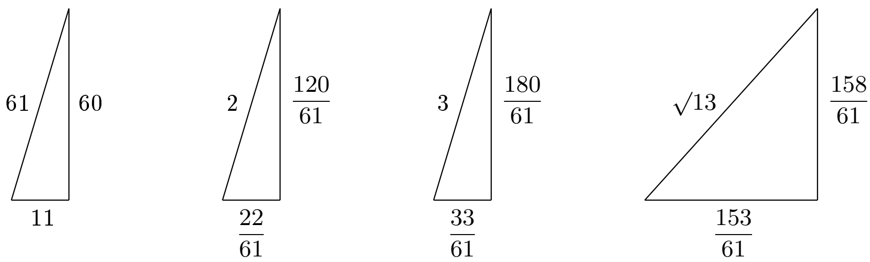
それゆえ，X が，つくられなければならない 2 つの相似な［直角］三角形における底線および斜 66
辺の差とおかれ，別の有理数が任意に仮定されるとしよう。そして，［それを］T とし，［それは］$\dfrac{X \text{ in } B \text{ in } N + X \text{ in } D \text{ in } M}{Z \text{ quad.} = D \text{ in } N + B \text{ in } M}$ および $\dfrac{X \text{ in } B \text{ in } S + X \text{ in } D \text{ in } R}{Z \text{ quad.} = D \text{ in } S + B \text{ in } R}$ の間にあるものとしよう。そして，それら 2 つの根 X および T から，直角三角形が数的につくられるであろうし，つくられるであろう 2 つの相似な三角形は，斜辺として一方は B を，他方は D をもち，それら 2 つ［の三角形］から，問題の条件に従って，その第 3［の直角三角形］の底線が第 1 の垂線および第 2 の底線から［それらの和として］つくられ，それ自身は N および S の間にあるような，第 3［の直角三角形］がつくられるであろう。

B を 1，D を 3，N を $\sqrt{2}$，S を $\sqrt{3}$ とすると，Z は $\sqrt{10}$，M は $\sqrt{8}$，R は $\sqrt{7}$ になる。そして，X が 1 とおかれると，T は $\dfrac{\sqrt{98}}{10-\sqrt{2}}$ ［≒ 1.153］および $\dfrac{\sqrt{63}+\sqrt{3}}{10-\sqrt{27}+\sqrt{7}}$ ［≒ 1.298］の間にあるものとして選ばれる。



それを $\dfrac{5}{4}$ としよう。ゆえに，1 および $\dfrac{5}{4}$ から，あるいは 4 および 5 から，［直角］三角形がつくられる。そして，それと相似な，与えられた斜辺 1 および 3 をもつ，2 つの［直角］三角形がつ

くられる。そして，それらからつくられた第 3［の直角三角形］の底線 —— 相似な第 1［の直角三角形］の垂線および相似な第 2［の直角三角形］の底線からつくられた —— は $\dfrac{67}{41}$ になり，その平方は $\dfrac{4489}{1681}$［$\fallingdotseq 2.67$］であり，それは 2 より大きく，しかもそのうえ 3 より小さい。一方，垂線は $\dfrac{111}{41}$ になるであろうし，その平方は $\dfrac{12321}{1681}$［$\fallingdotseq 7.33$］である。これら 2 つの平方［の和］は，1 および 3 による平方［の和］のように，10 の価値がある［10 に等しい］。



別の例。

B を 2，D を 3，N を $\sqrt{6}$，S を $\sqrt{7}$ とすると，Z は $\sqrt{13}$，M は $\sqrt{7}$，R は $\sqrt{6}$ になる。そいて，X が 1 とおかれると，T は $\dfrac{\sqrt{24}+\sqrt{63}}{13+\sqrt{28}-\sqrt{54}}$［$\fallingdotseq 1.17$］および $\dfrac{\sqrt{28}+\sqrt{54}}{13+\sqrt{24}-\sqrt{63}}$［$\fallingdotseq 1.27$］の間にあるものとして選ばれる。それを $\dfrac{6}{5}$ とすると，ゆえに，1 および $\dfrac{6}{5}$ から，あるいは 5 および 6 から，［直角］三角形がつくられる。そして，それと相似な，与えられた斜辺 2 および 3 をもつ，2 つの［直角］三角形がつくられる。

そして，それらからつくられた第 3［の直角三角形］の底線 —— 第 1［の直角三角形］の垂線および第 2［の直角三角形］の底線から［それらの和として］つくられる —— は $\dfrac{153}{61}$ になる。この平方は $\dfrac{23409}{3721}$［$\fallingdotseq 6.29$］であり，これは 6 あるいは $\dfrac{22326}{3721}$ より大きく，しかもそのうえ 7 あ
67 るいは $\dfrac{26047}{3721}$ より小さい。垂線は $\dfrac{158}{61}$ であり，その平方は $\dfrac{24964}{3721}$ である。これら 2 つの平方［の和］は，2 および 3 による平方［の和］のように，$\dfrac{48373}{3721}$ あるいは 13 の価値がある。

B，D が与えられたとき，$B^2+D^2=U^2+V^2$，$F<U<G$ となる U，V を求めたい，のであるが，$Z^2=B^2+D^2$ とすると，Z，B，D は Z を斜辺とする直角三角形になるから，同じく Z を斜辺，U，V を直角をはさむ 2 辺とし，$N<U<S$ となる，別の直角三角形をつくればよいことになる。

そこで，探究 IV を利用して求めるために，B および D を斜辺とする相似な 2 つの直角三角形をつくり，それらからつくられる第 3 の直角三角形の底線が第 1 の垂線と第 2 の底線の和であり，さらに，その底線が与えられた範囲内にあるようにする。

第 1 の直角三角形の斜辺を B，底線を N，垂線を M とし，第 2 の直角三角形の斜辺を D，底線を S，垂線を R としよう。これらからつくられる第 3 の直角三角形は，斜辺が $\sqrt{B^2+D^2}$ で，底線が $M+S$ である。

(1) N が第 3 の直角三角形の底線であるとき

探究 IV の第 1 の場合の第 1 の直角三角形において，

$$\begin{aligned}
(\text{斜辺}-\text{底線}):\text{垂線} &= \left(B-\frac{(DN-BM)B}{B^2+D^2}\right):\frac{(BN+DM)B}{B^2+D^2}\\
&=\left\{\left(B^2+D^2\right)-(DN-BM)\right\}:(BN+DM)\\
&=\left(Z^2\sim DN+BM\right):(BN+DM)
\end{aligned}$$

$$= X : \frac{(BN+DM)X}{Z^2 \sim DN+BM} \qquad [下の限界]$$

(2) S が第 3 の直角三角形の底線であるとき

第 1 の場合の第 2 の直角三角形において,

$$(斜辺 - 底線) : 垂線 = \left(D - \frac{(DS-BR)D}{B^2+D^2}\right) : \frac{(BS+DR)D}{B^2+D^2}$$

$$= \left(Z^2 \sim DS+BR\right) : (BS+DR)$$

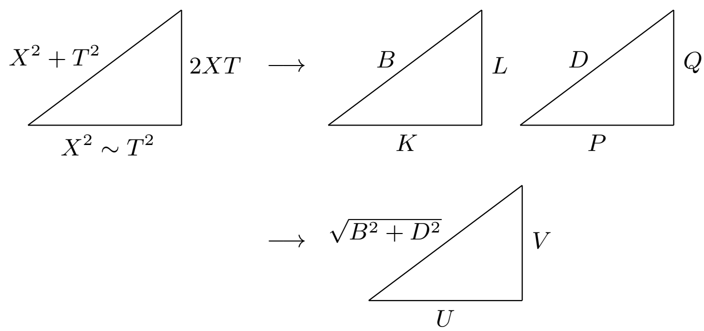
$$= X : \frac{(BS+DR)X}{Z^2 \sim DS+BR} \qquad [上の限界]$$

このように下限,上限を確認した後で,任意の X,および

$$\frac{(BN+DM)X}{Z^2 \sim DN+BM} < T < \frac{(BS+DR)X}{Z^2 \sim DS+BR}$$

なる任意の T によって,「記号計算についての前の注釈」命題 XLV に基づいて,直角三角形をつくる。

それを基に,斜辺がそれぞれ B,D となるような相似な 2 つの直角三角形をつくる。そして,その 2 つの直角三角形から,探究 IV によって,目標の直角三角形をつくれば,その直角三角形の底線および垂線が求める 2 数である,というのがヴィエートの解である。



第 2 の例では,$B=2$,$D=3$,$N=\sqrt{6}$,$S=\sqrt{7}$ であるから,$Z=\sqrt{B^2+D^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ であり,さらに,$Z^2=N^2+M^2=S^2+R^2$ であることから,$M=\sqrt{7}$,$R=\sqrt{6}$ となる。ここで,$X=1$ とすると,

$$下限 = \frac{BN+DM}{Z^2 \sim DN+BM} = \frac{2\times\sqrt{6}+3\times\sqrt{7}}{13 \sim 3\times\sqrt{6}+2\times\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{24}+\sqrt{63}}{13-\sqrt{54}+\sqrt{28}} \fallingdotseq 1.17$$

$$上限 = \frac{BS+DR}{Z^2 \sim DS+BR} = \frac{2\times\sqrt{7}+3\times\sqrt{6}}{13 \sim 3\times\sqrt{7}+2\times\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{28}+\sqrt{54}}{13-\sqrt{63}+\sqrt{24}} \fallingdotseq 1.27$$

であるから,$T=\dfrac{6}{5}=1.2$ とする。

このとき,$X=5$,$T=6$ から,斜辺 $= X^2+T^2 = 61$,底線 $= X^2 \sim T^2 = 11$,垂線 $= 2XT = 60$ である直角三角形が導かれる。この直角三角形を,斜辺がそれぞれ $B=2$,$D=3$ になるような 2 つの相似な直角三角形に縮小する。[結果は本文中の図参照。]

最後に,この 2 つの直角三角形から,

$$底線 = U = \frac{120}{61}+\frac{33}{61}=\frac{153}{61}, \qquad 垂線 = V = \frac{180}{61}-\frac{22}{61}=\frac{158}{61}$$

である直角三角形が得られ,$\left(\dfrac{153}{61}\right)^2+\left(\dfrac{158}{61}\right)^2=13=2^2+3^2$ となる。そして,$N=\sqrt{6}\fallingdotseq 2.45$,$U=\dfrac{153}{61}\fallingdotseq 2.51$,$S=\sqrt{7}\fallingdotseq 2.65$ である。

以上により,$N<U<S$ という条件下で,$B^2+D^2=U^2+V^2$ となる U,V が求められたことになる。

探究 VI

与えられた間隔［差］だけ離れている，2 つの平方を数的に見出すこと。

与えられた間隔を B planum としよう。B planum だけ離れている，2 つの平方を数的に見出さなければならない。

それゆえ，B planum は直角三角形の底線の平方であり，与えられた底線の平方だけ離されるであろう，斜辺および垂線の有理数の平方が探し求められる。

しかし，確かに，底線は垂線および斜辺の差および同じ辺の和の間の比例［中項］である。

それゆえ，どのようなものであれ有理数の長さが仮定されるとき，それによって B planum が割られると，有理数の幅も現れるであろう。

それゆえ，除法によってつくられた長さは，もし，例えば，幅より小さければ，垂線および斜辺の差で，しかし，幅そのものは［それらの］和であろうし，そして，逆も［そうである]。それゆえ，確かに，垂線および斜辺が数的に得られるであろう。

別の［方法]。A quadratum を求められているものの 1 つの平方，例えば垂線の平方，としよう。ゆえに，A quad. $+$ B plano は，明らかに，斜辺の平方に等しくされるであろう。それを $A+D$ による［平方］としよう。それゆえ，D は垂線および斜辺の間の差になり，A quad. $+$ D in A 2 $+$ D quad. は A quad. $+$ B plano に等しくされるであろう。この方程式が整理されると，$\dfrac{B\text{ plan.} - D\text{ quad.}}{D\ 2}$ が A に等しくされるであろう。

それゆえ，

定理

直角三角形において，もし直角のまわりの第 1 の辺の平方から第 2 の辺および斜辺の間の差の平方が取り去られ，その差の 2 倍で割られるならば，現れるであろう幅は，直角のまわりの第 2 の辺そのものに等しいであろう。

別の［方法]。E quadratum を求められているものの 1 つの平方，例えば斜辺の平方，としよう。

ゆえに，E quad. $-$ B plano はもう 1 つの平方，明らかに垂線の平方，に等しくされるであろう。

それを $E-D$ による［平方］とすると，それゆえ，D は垂線および斜辺の間の差になる。

ゆえに，E quad. $-$ D in E 2 $+$ D quad. は E quad. $-$ B plano に等しくされるであろう。

68 そして，すべてが適切に整理されると，$\dfrac{B\text{ plan.} + D\text{ quad.}}{D\ 2}$ が E に等しくされるであろう。

それゆえ，

定理

直角三角形において，もし直角のまわりの辺の 1 つの平方に直角のまわりの残りの辺および斜辺の間の差の平方が加えられ，その差の 2 倍で割られるならば，現れるであろう幅は，斜辺そのものに等しいであろう。

同様に，

もし直角のまわりの辺の 1 つの平方に直角のまわりの残りおよび斜辺の和の平方が加えられ，その和の 2 倍で割られるならば，現れるであろう幅は，斜辺そのものに等しいであろう。

それゆえ，

斜辺および直角のまわりの一方の辺の和が同じものの差に対するように，［その］和の平方に直

角のまわりの残りの辺の平方を加えたものあるいは取り去ったものが残りの辺の平方に差の平方を加えたものあるいは取り去ったものに対する。

B planum を 240，D を 6 としよう。［すると,］A は $\dfrac{240-36}{12}$ あるいは 17，E は $\dfrac{240+36}{12}$ あるいは 23 になる。それゆえ，辺 23 の平方は辺 17 の平方に対して 240 だけ離れている。なぜなら，前者は 529 で，後者は 289 だからである。

三角形を 5，4，3 とすると，9 が 1 に対するように，90 が 10 に対し，72 が 8 に対する。次のように［言うことが］許されている。

与えられた平面に［小さい］平方 (quadratulum) を加えよ，そして平方をつくれ。

なぜならば，与えられた平面は直角のまわりのいずれかの辺の平方とみなされ，さらに，直角のまわりの残りの辺の斜辺との差，あるいはそれらの和，の平方は与えられた平面に十分に近いと仮定されるであろうからである。

与えられた平面を 17 とし，差を 4 と仮定しよう。ゆえに，$17-16$ が 8 で割られると，垂線 $\dfrac{1}{8}$ が生じるであろう。それゆえ，斜辺の平方は $17\dfrac{1}{64}$ であり，その辺［根］は $\dfrac{33}{8}$ あるいは $4\dfrac{1}{8}$ であり，平方 17 の辺［根］に十分に近い。

与えられた平面を 15 とし，和を 4 と仮定しよう。ゆえに，$15-16$ が 8 で割られると，垂線 $-\dfrac{1}{8}$ が生じるであろう。それゆえ，斜辺の平方は $15\dfrac{1}{64}$ であり，その辺［根］は $\dfrac{31}{8}$ あるいは $3\dfrac{7}{8}$ である。

与えられた差 B^2 をもつ 2 つの平方数 X^2，Y^2 を見出すことが求められているが，ヴィエートはこれら 3 数 B，X，Y を，B を底線とする，直角三角形の 3 辺とみなす。
そして，斜辺と垂線の差，すなわち求める 2 平方数の平方根の差，を D とするとき，求める 2 平方数の平方根は $\dfrac{B^2-D^2}{2D}$，$\dfrac{B^2+D^2}{2D}$ であるという。
また，直角三角形の斜辺を a，底線を b，垂線を c とするとき，

$$\frac{b^2+(a-c)^2}{2(a-c)}=a=\frac{b^2+(a+c)^2}{2(a+c)},\qquad \frac{b^2-(a-c)^2}{2(a-c)}=c=\frac{(a+c)^2-b^2}{2(a+c)}$$

であるから，$(a+c):(a-c)=\left\{(a+c)^2\pm b^2\right\}:\left\{b^2\pm(a-c)^2\right\}$ (複号同順) が成り立つ，という。

『算術』第 2 巻問題 10 (［3］p.146)。
「与えられた差をもつ 2 つの平方数を見出すこと。
　与えられた差を 60 とする。一方の数の根を x，他方の数の根を x 足す任意の数，例えば 3，で，その平方が 60 より大きくないものとする。
　それゆえ，$(x+3)^2+x^2=60$ であり，$x=8\dfrac{1}{2}$ であり，そして，求める平方数は $72\dfrac{1}{4}$，$132,\dfrac{1}{4}$ である。」

探究 VII

与えられた 2 つの平面のいずれか 1 つに加えられると平方になる，平面を数的に見出すこと。

与えられた 2 つの平面を B planum，D planum としよう。B plano あるいは D plano のいずれかに加えられると平方になる，別の平面を数的に見出さなければならない。

その加えられるべき平面を A planum としよう。ゆえに，B planum + A plano は平方に等しくされる。そして，再び，D planum + A plano は平方に等しくされる。それゆえ，ディオファント

スの言う，二重方程式 (duplex aequatio) がつくられるであろう。さらに，B planum が D plano より大きいとしよう。それゆえ，つくられるであろうそれらの平方の差は B planum $-$ D plano である。しかし，確かに，2 つの辺の和の平方は同じものの差の平方をそれらの辺による長方形の 4 倍だけ超えている。ゆえに，B planum $-$ D plano は辺による長方形の 4 倍とみなされるであろう。それゆえ，B planum $+$ A plano は辺の和の平方になり，D planum $+$ A plano は差の平方になる。それゆえ，A planum は，辺の和の平方から B plano が取り去られたもの，あるいは辺の差の平方から D plano が取り去られたものである。

それゆえ，こと［問題］は，$\dfrac{B \text{ planum} - D \text{ plano}}{4}$ を，すなわち辺による長方形を，それをつくる 2 つの辺に分解すべきことになる。その 1 つを G とし，そして，それは $\sqrt{B}$ plani および $\sqrt{D}$ plani の差より大きいかあるいはそれらの和より小さいものとしよう。他方は $\dfrac{B \text{ planum} - D \text{ plano}}{G\ 4}$ になる。それゆえ，より大きい辺の平方は $\dfrac{B \text{ planum} - D \text{ plano} + G \text{ quadrato } 4}{G\ 4}$ で，より小さい［辺の平方］は $\dfrac{B \text{ planum} - D \text{ plano} = G \text{ quadrato } 4}{G\ 4}$ であろう。

B planum を 192，D planum を 128 としよう。それらの差は 64 で，それは 2 つの辺による長方形の 4 倍である。それゆえ，単一［の長方形］は 16 であり，それは辺 1 および 16 による積で，それらの和は 17，差は 15 で，そして，その和の平方は 289 であるから，192 が取り去られると，
69 残りは 97 である。ゆえに，$192 + 97$ は辺の和の平方，すなわち 289，になり，$128 + 97$ は差の平方，すなわち 225，になる。それゆえ，問題は満たされる。

さらに，操作は次のようにやり遂げることもできる。B plano あるいは D plano のいずれかが同じ平面に加えられると，平方になるのだから，その平面を A quadratum $-$ B plano としよう。それゆえ，それに B planum が加えられるとき，平方，すなわち A quadratum，になる。それゆえ，D planum $+$ A q. $-$ B plano が平方に等しくされる，ことが残っている。それを $F - A$ による［平方］と考えよう。ゆえに，A q. $+$ F q. $-$ F in A 2 は D plano $+$ A q. $-$ B plano に等しくされるであろう。この方程式が適切に整理されると，$\dfrac{F \text{ q.} + B \text{ plano} - D \text{ plano}}{F\ 2}$ が A に等しくされるであろう。

B planum を 18，D planum を 9，F を 9 とすると，A は 5 になる。追加の［加えられるべき］平面は 7 になり，それが 18 に加えられると 25 になり，9 に加えられると 16 になり，［それらは］5 および 4 の平方である。

『算術』第 2 巻問題 11 (［3］pp.146–147)。

「それらのいずれもが平方数になるように，同じ (求める) 数を与えられた 2 数に加えること。

(1) 与えられた数を 2，3 とし，求める数を x とする。

それゆえ，$x + 2$，$x + 3$ は両方とも平方にならなければならない。これは二重方程式 (διπλοϊσότης) といわれる。

これを解くために，2 つの表現の間の差をとり，それを 2 つの因子に分解する。この場合，［差は 1 あるから,］例えば，4，$\dfrac{1}{4}$ としよう。

それゆえ，

(a) それらの因子の間の差の半分の平方をとり，それをより小さい表現に等しくする，

あるいは，

(b) 和の半分の平方をとり，それをより大きい表現に等しくする。

(a) の場合において，差の半分の平方は $\dfrac{225}{64}$ である。

それゆえ，$x+2=\dfrac{225}{64}$ であり，$x=\dfrac{97}{64}$ であり，平方数は $\dfrac{225}{64}$，$\dfrac{289}{64}$ である。

(b) では，和の半分の平方をとると，$x+3=\dfrac{289}{64}$ となり，これは同じ解を与える。

(2) 二重方程式を避けるために，

はじめに，2 に，あるいは 3 に，加えられたときに平方を与える，数を見出す。

例えば，数 x^2-2 をとると，これは 2 に加えられるとき，平方を与える。

それゆえ，3 に加えられたこの同じ数は平方を与えるから，例えば，$x^2+1=$ 平方 $=(x-4)^2$ となる。

表現における単位の数 (この場合は 4) は，解が $x^2>2$ を与えるように，とられるから，

それゆえ，$x=\dfrac{15}{8}$ であり，求める数は，前のように，$\dfrac{97}{64}$ である。」

ディオファントスの言う二重方程式とは $\begin{cases} mx^2+\alpha x+a=u^2 \\ nx^2+\beta x+b=w^2 \end{cases}$ のタイプのものである（[3] p.73)。また，二重方程式を意味する言葉としては，διπλοϊσότης の他に，διπλῆ ἰσότης，διπλῆ ἴσωσις が使われているらしい。

ヴィエートは，これを次のように解いた。すなわち，求める平面を A とするとき，$B+A=$ 平方，$D+A=$ 平方 となる必要がある。

そこで，第 1 の解法では，

$B>D$ として，$B+A=(a+b)^2$，$D+A=(a-b)^2$ と考えると，$B-D=4ab$ になるから，$B<(a+b)^2$，$D<(a-b)^2$［ヴィエートの条件では，$\sqrt{B}-\sqrt{D}<a<\sqrt{B}+\sqrt{D}$］となるように a，b を定める。

また，第 2 の解法では，

B に加えてできる平方数を A^2 とし，D に加えてできる平方数を $(F-A)^2$ とすると，$D+(A^2-B)=(F-A)^2=F^2-2FA+A^2$ より，$A=\dfrac{F^2+B-D}{2F}$ となる。

例えば，$B=18$，$D=9$ とすると，$B-D=9$ より，$ab=\dfrac{B-D}{4}=\dfrac{9}{4}$ であり，$\sqrt{B}-\sqrt{D}=3\left(\sqrt{2}-1\right)\fallingdotseq 1.24$，$\sqrt{B}+\sqrt{D}=3\left(\sqrt{2}+1\right)\fallingdotseq 7.24$ である。

そこで，$a=\dfrac{9}{2}$，$b=\dfrac{1}{2}$ とすると，$a+b=5$，$a-b=4$ であるから，$18+7=25=5^2$，$9+7=16=4^2$ となる。すなわち，求める平面は 7 である。

なお，$a=\dfrac{9}{4}$，$b=1$ とした場合，$a=3$，$b=\dfrac{3}{4}$ とした場合は，条件 $B<(a+b)^2$ を満たさない。

探究 VIII

与えられた 2 つの平面のいずれか 1 つから取り去られると平方が残る，平面を数的に見出すこと。

数的に与えられた 2 つの平面を B planum，D planum としよう。B plano あるいは D plano のいずれかから取り去られると残りが平方になる，別の平面を数的に見出さなければならない。その取り去られるべき，求める平面を B planum $-$ A q. としよう。それゆえ，B plano から B planum $-$ A q. が取り去られるとき，A q. が残るであろう。同様に，D plano から取り去られるとき，D planum $-$ B plano $+$ A q. が残り，それゆえ，それは平方に等しくされるであろう。それを $A-F$ による［平方］とすると，ゆえに，$\dfrac{F\ \text{q.}+B\ \text{plano}-D\ \text{plano}}{F\ 2}$ は A に等しくされるであろう。

再び，F の選択は，生じた幅の平方 A が B plano あるいは D plano のいずれかから退く［より小さくなる］ように，取り繕われなければならない。それゆえ，よりよい二重方程式がつくられるであろう。確かに，取り去られるべき平面を A planum とすると，ゆえに，B planum $-$ A

plano は平方に等しくされ，そして，D planum $-$ A plano は平方に等しくされる。B planum が D plano より大きいとすると，それらの差は B planum $-$ D plano である。それゆえ，B planum $-$ D plano は辺による長方形の 4 倍とみなされるであろう。［そして,］B planum $-$ A plano はそれらの辺の和の平方であり，D planum $-$ A plano はそれらの辺の差の平方である。確かに，A planum そのものは，B planum が和の平方を，あるいは D planum が差の平方を，超える超過分である。

それゆえ，1 つの辺を G とし，また，それは $\sqrt{B}$ plani および $\sqrt{D}$ plani の差より大きいかあるいは［それらの］和より小さいとしよう。もう 1 つは $\dfrac{B \text{ planum} - D \text{ plano}}{G\ 4}$ であろうし，それらの平方の和が B plano から，あるいは差の平方が D plano から取り去られるとき，残りは A planum であろう。

B planum を 44，D を 36，1 つの辺 G を 1 とすると，もう 1 つの辺は 2 で，辺の和は 3 になる。差は 1 で，［それらの］平方は 9 および 1 である。それゆえ，取り去られるべき平面は 35 であり，44 から取り去られるとき 9 が残り，36 から取り去られるとき 1 が残る。

> 与えられた B，D に対して，$B-A$，$D-A$ がともに平方数となるような，A を見出すこと，が問題である。解法は上の探究と同様。
>
> 『算術』第 2 巻問題 12 (［3］p.147)。
>
> 「それらの残りがともに平方数になるように，同じ (求める) 数を与えられた 2 数から引くこと。
>
> 与えられた数を 9，21 とする。
>
> $9-x^2$ が求める数であると仮定すると，一方の条件は満たし，他方は $12+x^2$ が平方数になることを要求する。
>
> この平方数の辺［根］を x 引く，平方が 12 より大きい，例えば 4，何らかの数と仮定する。
>
> それゆえ，$(x-4)^2 = 12 + x^2$ であり，$x = \dfrac{1}{2}$ である。
>
> それゆえ，求める数は $8\dfrac{3}{4}$ である。」

探究 IX

与えられた 2 つの平面のいずれか 1 つがそれから取り去られるとき平方がつくられる，平面を数的に見出すこと。

数的に与えられた 2 つの平面を B planum, D planum としよう。B planum あるいは D planum のいずれかがそれから取り去られるとき平方が残されるであろう，平面を数的に見出さなければならない。そこから引き算が行われるであろうそのような種類の平面を A planum としよう。それゆえ，A planum $-$ D plano は平方に等しくされる。そして，また，A planum $-$ B plano は平方に等しくされる。そして，再び，この仮定から二重方程式がつくられるであろう。さらに，B planum が D plano より大きいとしよう。ゆえに，より大きい平方 A planum $-$ D plano は 2 つの辺の和の平方とみなされ，一方，より小さい［平方］A planum $-$ B plano は差の平方とみなされ，最後に，間隔 B planum $-$ D plano は辺による長方形の 4 倍とみなされるであろう。それゆえ，その 1 つを G とすると，もう 1 つは $\dfrac{B \text{ planum} - D \text{ plano}}{G\ 4}$ であろうし，これらの和の平方に D plano が，あるいは差の平方に B plano が加えられるとき，和は［ともに］A planum であろう。［そして,］それ［A］から D planum が取り去られるとき和の平方が残されるであろうし，［また,］B planum が［取り去られるとき］差の平方が［残されるであろう］。

B planum を 56，D planum を 48，一方の辺 G を 1 とすると，もう 1 つの辺は 2 になる。それ 70
らの和は 3，差は 1 である。それゆえ，A planum は 57 になり，D plano が取り去られると 9 が残され，B plano［が取り去られると］1 が残される。

与えられた B，D に対して，$A-B$，$A-D$ がともに平方数となるような，A を見出せ，という問題。

『算術』第 2 巻問題 13 (［3］p.148)。
「それらの残りがともに平方数になるように，同じ (求める) 数から与えられた 2 数を引くこと。
与えられた数を 6，7 とする。
(1) x を求める数とする。
それゆえ，$x-6$，$x-7$ はともに平方数である。
その差は 1 で，それは例えば 2 および $\dfrac{1}{2}$ の積であり，二重方程式の解法の規則により，$x-7=\dfrac{9}{16}$ であり，$x=\dfrac{121}{16}$ である。
(2) 二重方程式を避けるために，平方数を 6 だけ超える数，すなわち x^2+6 を求める。
それゆえ，x^2-1 も平方，例えば $=(x-2)^2$ でなければならない。
それゆえ，$x=\dfrac{5}{4}$ であり，求める数は $\dfrac{121}{16}$ である。」

探究 X

それらによる平面に両方の平方が加えられると平方になる，2 つの辺を数的に見出すこと。

一方の辺を B，他方を A としよう。A q. + B in A + B q. を平方に等しくしなければならない。それは $A-D$ による［平方である］と考えられ，方程式が整えられると，$\dfrac{D \text{ quad.} - B \text{ quad.}}{B + D\ 2}$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，第 1 の辺は B q. + B in D 2 に，第 2［の辺］は D q. − B q. に比例する。さらに，それらからつくられるもの［積］に両方の平方が加えられたものは D quadrato-quadrato + B quadrato-quadrato + B quadrato in D quadrato 3 + B cubo in D 2 + B in D cubum 2 に比例する。さらに，［その］根そのものは B quadrato + D quadrato + B in D である。

D を 2，B を 1 としよう。一方の辺は 5 で，他方は 3 であり，さらに，それらのそれぞれの平方およびそれらの辺による平面からつくられた平方の根は 7 であり，すなわち 49 は 25，15，9 からなる。

『算術』第 5 巻問題 7 への補題 1 (［3］p.203)。
「それらの積に両方の平方が加えられたものが平方を与えるような 2 数を見出すこと。
第 1 の数を x，第 2 を任意の数，例えば 1，と仮定する。
それゆえ，$x\times 1+x^2+1^2=x^2+x+1=$ 平方，例えば $=(x-2)^2$ である。
ゆえに，$x=\dfrac{3}{5}$ であり，$\left(\dfrac{3}{5},\ 1\right)$ あるいは (3，5) が解である。」

$AB+A^2+B^2$ が平方になるような 2 数 A，B を求めたいのであるが，いま，この平方が $(A-D)^2$ であると仮定する。
すると，$AB+A^2+B^2=(A-D)^2$ より，$A(B+2D)=D^2-B^2$ となるから，$A(B^2+2BD)=B(D^2-B^2)$ となって，$A:B=(D^2-B^2):(B^2+2BD)$ がいえる。
それゆえ，$A=(D^2-B^2$，$B=(B^2+2BD)k$ とできるから，B，D［，k］が指定されれば，求める 2 数が得られることになる。

次の探求についての補題

等しい 3 つの立体が 2 つの辺からつくられる。

1 つ目は，第 1 の辺に，それらの辺による長方形が加えられた第 2［の辺］の平方を掛けたもの。

2 つ目は，第 2 の辺に，［それらの辺による］長方形が加えられた第 1［の辺］の平方を掛けたもの。

3 つ目は，それらの辺の和に［それらの辺による］長方形そのものを掛けたもの。

2 つの辺を B および D としよう。私は，それらからつくられた［次の］3 つの立体は等しいという。

1 つ目は，B in $\overline{D\ \mathrm{quad.} + B\ \mathrm{in}\ D}$ による［立体］。

2 つ目は，D in $\overline{B\ \mathrm{quad.} + B\ \mathrm{in}\ D}$ による［立体］。

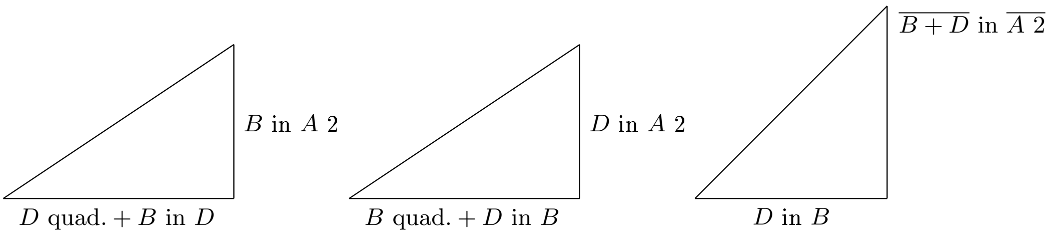
3 つ目は，$\overline{B + D}$ in $\overline{B\ \mathrm{in}\ D}$ による［立体］。

しかし，それら 3 つの立体はそれぞれ B in D q. $+$ D in B q になるから，これは明らかである。

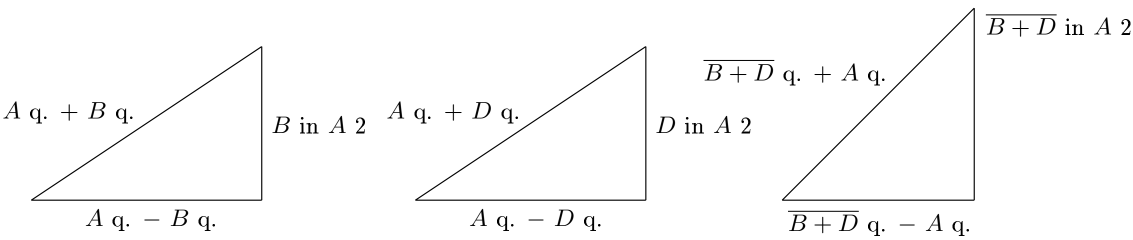
探究 XI

面積が等しい，3 つの直角三角形を数的に見出すこと。

第 1 の［直角］三角形の垂線は B in A 2 に，さらに，底線は D q. $+$ B in D に比例するものとし，第 2［の直角三角形の垂線］は D in A 2 に，底線は B q. $+$ B in D に比例し，第 3［の直角三角形の垂線］は $\overline{B + D}$ in A 2 に，底線は D in B に比例するものとしよう。



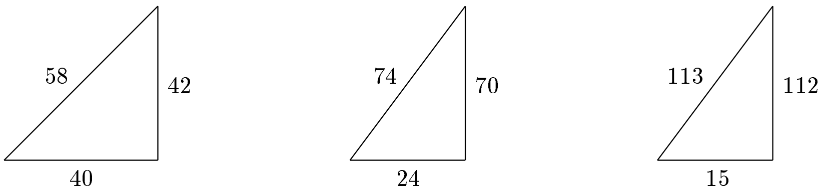
それゆえ，前述の補題により，それらの面積は等しくなるであろうし，確かに，それぞれ［の面積は］B in D q. in A $+$ D in B q. in A であろう。それゆえ，残っているのは斜辺に比例する平面が有理数であるということである。しかし，確かに，そのような辺 B および D を，前述の探求によって，B q. $+$ D q. $+$ B in D が平方に等しくされるように，選ぶことができる。そのような平方を A q. とすると，第 1 の［直角］三角形の底線は，移項 (interpretatio) により，A q. $-$ B q. になり，第 2［の直角三角形の底線］は A q. $-$ D q. で，第 3［の直角三角形の底線］は $\overline{B + D}$ $-$ A quad. になる。



71 さらに，それらのような辺に関して，底線はそれらの平方の差に，垂線はそれらによる長方形の 2 倍に比例する。それゆえ，斜辺は，三角形の標準的な構成法によると，それらの平方の和に一致するであろう。それゆえ，第 1［の直角三角形］の斜辺は A q. $+$ B q. に，第 2［の直角三角形の

斜辺］は A q. ＋ D q. に，第 3［の直角三角形の斜辺］は $\overline{B+D}$ q. ＋ A q. に比例する。それゆえ，問題は満たされる。

B を 3，D を 5 とすると，A は 7 になる。そして，数による三角形は次のようになる。



3 および 7 によって
つくられた第 1 のもの

5 および 7 によって
つくられた第 2 のもの

8 および 7 によって
つくられた第 3 のもの

これら 3 つ［の直角三角形］の共通の面積は 840 である。

2 数 B，D が指定されたとき，補題により，$B\left(D^2+BD\right)=D\left(B^2+BD\right)=BD(B+D)$ であるから，$A^2=B^2+D^2+BD$ となるような A をとると，

$$\begin{cases} \text{底線 } A^2-B^2\,(=D^2+BD),\ \text{垂線 } 2AB,\ \text{斜辺 } A^2+B^2 \\ \text{底線 } A^2-D^2\,(=B^2+BD),\ \text{垂線 } 2AD,\ \text{斜辺 } A^2+D^2 \\ \text{底線 } (B+D)^2-A^2\,(=BD),\ \text{垂線 } 2A(B+D),\ \text{斜辺 } (B+D)^2+A^2 \end{cases}$$

である直角三角形は，すべて面積が等しくなる，というのである。

『算術』第 5 巻問題 7 への補題 2 (［3］pp.203–204)。

「等しい面積をもつ，3 つの直角三角形 (すなわち，有理数の辺をもつ 3 つの直角三角形) を見出すこと。

はじめに，それらの積 + それらの平方の和 = 平方，となるような 2 数，例えば前の問題［補題］におけるように 3，5，を見出さなければならない。

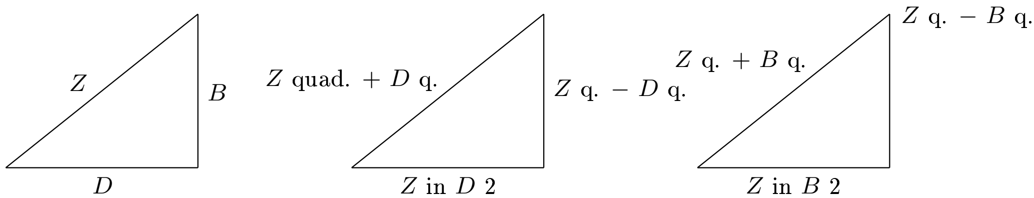
そこで，数の組 (7，3)，(7，5)，(7，3 + 5) から直角三角形をつくる。

［直角］三角形は (40，42，58)，(24，70，74)，(15，112，113) であり，それぞれの面積は 840 になる。」

探究 XII

垂線による立体［垂線同士の積］が底線による立体［底線同士の積］に対して，数の平方が数の平方に対する比をもつような，3 つの直角三角形を数的に見出すこと。

どのようなものであれ直角三角形が数的に示され，その斜辺 Z，底線 D，垂線 B が与えられるとしよう。そして，Z および D，および底線として割り当てられる Z in D 2 から第 2 の［直角］三角形がつくられ，最後に，Z および B，および底線として割り当てられる Z in B 2 から第 3 の［直角］三角形がつくられるとしよう。



垂線による立体が底線による立体に対して，B q. が Z q. 4 に対する比をもつ。 72

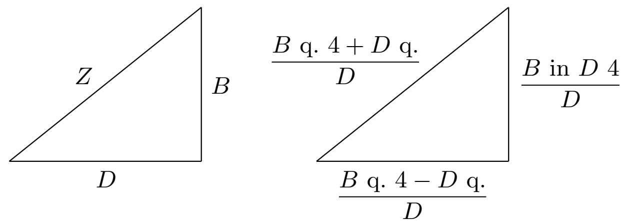
第 1 の［直角］三角形を 5，3，4 とすると，第 2［の直角三角形］は 34，30，16 で，第 3［の直

角三角形］は 41，40，9 であろう。垂線 4，16，9 による立体［576］は底線 3，30，40 による立体［3600］に対して，4 の平方が 10 の平方に対する比をもつ。

探究 XIII

垂線による平面引く底線による平面が平方になるような，2 つの直角三角形を数的に見出すこと。

任意の直角三角形が数的に示され，その斜辺 Z，底線 D，垂線 B が，しかし垂線の 2 倍が底線 D を超えるように，与えられるとしよう。そして，B の 2 倍および D，あるいはそれらに比例する根から，別の［直角］三角形がつくられ，B in D 4 が垂線に割り当てられ，そして，一般に，辺に比例する平面が D で割られるとしよう。垂線による平面から底線による平面が取り去られると，B の 2 倍および D の根の類似性が操作を変えるために，D qu. あるいは D qu. に比例する何らかのものが残される。



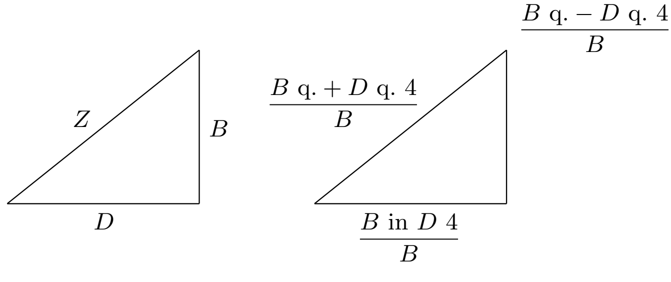
第 1 の直角三角形を 15，9，12 とすると，第 2［の直角三角形］は 73，55，48 であろうし，垂線の積は 576 で，底線の積 495 から，その差の平方 81 だけ離れていて，その根は 9 である。

> 2 数 a，b から，斜辺 a^2+b^2，底線 a^2-b^2，垂線 $2ab$ の直角三角形をつくることができる (「記号計算についての前の注釈」命題 XLV) から，$2B$，D から，斜辺 $(2B)^2+D^2$，底線 $(2B)^2-D^2$，垂線 $(2B)D$ の直角三角形をつくる。
> しかし，このままでは，垂線同士の積から底線同士の積を引いたものが，必ずしも，平方にならないから，すべての辺を D で割ったものを，求める (他方の) 直角三角形とする。

探究 XIV

底線による平面が加えられた，垂線による平面が平方になるような，2 つの直角三角形を数的に見出すこと。

任意の直角三角形が数的に示され，その斜辺 Z，底線 D，垂線 B が —— しかし，垂線 B が底線 D の 2 倍を超えるように —— 与えられるとしよう。そして，B および D の 2 倍から別の［直角］三角形がつくられ，B in D 2 bis が底線に割り当てられ，そして，一般に，辺に比例する平面が B で割られるとしよう。底線による平面が加えられた，垂線による平面は B quadratum になる。



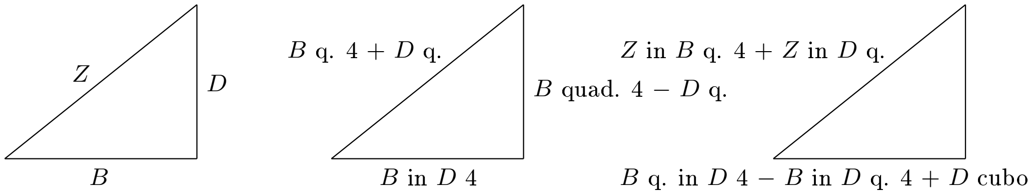
第 1 の直角三角形を 13，12，5 としよう。5 および 6，あるいは比例する 10 および 12，から［直角］三角形をつくると，第 2［の直角三角形］は 61，11，60 であろう。垂線の積は 396 で，底線による［積］は 900 であり，和は平方 1296 であり，その根は 36 である。

73

探究 XV

斜辺による立体が底線による立体に対して，数の平方が数の平方に対する比をもつような，3 つの直角三角形を数的に見出すこと。

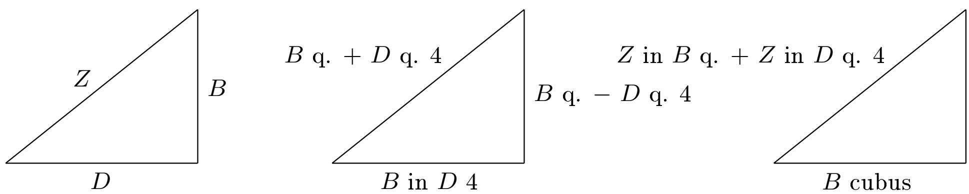
任意の直角三角形が数的に示され，その斜辺 Z，底線 B，垂線 D が —— しかし，底線 B の 2 倍が垂線 D を超えるように —— 与えられるとしよう。そして，B の 2 倍および D から第 2 の［直角］三角形がつくられ，B in D 4 が底線に割り当てられるとしよう。最後に，第 3 の［直角］三角形の斜辺は第 1 および第 2［の直角三角形］の斜辺による積に，［そして,］底線はそれらの底線による積引く垂線による積に比例するとしよう。それゆえ，その結果として，その垂線は相互に底線に垂線を掛けたもの［の和］に等しい。斜辺による立体が底線による立体に対するように，平方が平方に対する。



第 1 の三角形を 5，3，4 とすると，第 2［の三角形］は 13，12，5 で，相 3［の三角形］は 65，16，63 であろう。そして，斜辺による立体は底線による立体に対して，65 の平方が 24 の平方に対する比をもつ。

あるいは，［任意の］直角三角形が数的に示され，その斜辺 Z，底線 D，垂線 B が —— しかし，B が底線 D の 2 倍を超えるように —— 与えられるとし，それを第 1［の直角三角形］としよう。さらに，B および D の 2 倍から第 2［の直角三角形］がつくられ，B in D 4 が底線に割り当てられるとしよう。最後に，第 3［の直角三角形］の斜辺は第 1 および第 2［の直角三角形］の斜辺による積に，底線は底線による積足す垂線による積に比例するとしよう。それゆえ，垂線は相互に底線に垂線を掛けたものの差に等しい。

斜辺による立体が底線による立体に対して，平方が平方に対する。



第 1 の三角形を 13，5，12 とすると，第 2［の三角形］は 61，60，11 で，第 3［の三角形］は 793，432，665 であろう。そして，斜辺による立体は底線による立体に対して，793 の平方が 360 の平方に対する比をもつ。

> 後段については ⋯⋯
> まず，第 1 の直角三角形 Z，D，B に対して，B および $2D$ から第 2 の直角三角形 B^2+4D^2，$4BD$，B^2-4D^2 をつくる。次に，これらの斜辺同士の積を斜辺とし，底線同士の積に垂線同士の積を加えたものを底線とする，第 3 の直角三角形をつくる。
> すると，第 3 の直角三角形の垂線の 2 乗は
> $$\begin{aligned}&\left\{Z\times\left(B^2+4D^2\right)\right\}^2-\left\{D\times 4BD+B\times\left(B^2-4D^2\right)\right\}^2\\&\quad=Z^2\left(B^2+4D^2\right)^2-\left(B^3\right)^2\\&\quad=\left(B^2+D^2\right)\left(B^4+8B^2D^2+16D^4\right)-B^6\\&\quad=9B^4D^2+24B^2D^4+16D^4\\&\quad=\left\{D\left(3B^2+4D^2\right)\right\}^2\end{aligned}$$

となるから，垂線 $= D\left(3B^2+4D^2\right) = B\times 4BD - D\times\left(B^2-4D^2\right)$ ということ［底線と垂線の相互の積の差］になる。

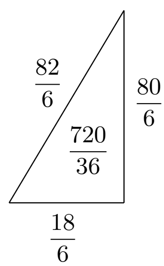
数値例では，$Z=13$，$D=5$，$B=12$ であるから，第 2 の直角三角形の斜辺は $12^2+10^2=244$，底線は $2\times 12\times 10=240$，垂線は $12^2-10^2=44$ となるが，それらをすべて 4 で割って，61，60，11 とする。
すると，第 3 の直角三角形について，斜辺は $13\times 61=793$，底線は $5\times 60+12\times 44=432$ であり，垂線は $12\times 60-5\times 11=665=\sqrt{793^2-432^2}$ となる。
そして，斜辺の積 $=13\times 61\times 793=628849=793^2$，底線の積 $=5\times 60\times 432=129600=360^2$ になる。

74 **探究 XVI**

その面積が，定められた条件によって，与えられた［量］に等しくされる，直角三角形を数的に見出すこと。

例えば，もし面積が $\dfrac{B \text{ qq.} - X \text{ qq.}}{D \text{ quad.}}$ と与えられるならば，B q. および X q. から［直角］三角形がつくられ，辺に比例する平面的平面が X in D in B で割られるであろう。

B を 3，X を 1，D を 2 としよう。それゆえ，2 つの平方の平方は 81 および 1 であり，平方の平方の差は 80 である。面積 $\dfrac{80}{4}$ すなわち 20 が与えられ，9 および 1 から［直角］三角形がつくられると，面積は $\dfrac{720}{36}$［$=20$］になる。



それゆえ，面積が数的に指示されるとき，あるいは，提示された同じものを，あるいは，平方の数が掛けられたものに単位あるいは［何らかの］平方の平方が加えられると平方の平方になる同じものを，検討しなければならない。

例えば，もし 15 が提示されるならば，15 に 1 が加えられると 2 の平方の平方である 16 になるから，三角形は 4 および 1 によるものになる。そして，もし面積が $\dfrac{D \text{ cubus in } X - X \text{ cubo in } D}{X \text{ quad.}}$ と与えられるならば，D および X から［直角］三角形がつくられ，辺に比例する平面が X で割られるであろう。

D を 2，X を 1 としよう。そして，それゆえ，面積 6 が与えられる。2 および 1 から［直角］三角形がつくられ，面積は 6 になるであろう。それゆえ，面積が数的に指示されるとき，あるいは，提示されたものを，あるいは，平方の数が掛けられたものが，辺が取り去られた立方になる同じものを，検討しなければならない。

例えば，もし［面積］60 が提示されるならば，三角形は 4 および 1 によるものになる。

B^2，X^2 から直角三角形をつくると，斜辺 B^4+X^4，底線 $2B^2X^2$，垂線 B^4-X^4 とできる。これら 3 辺をすべて XDB で割ってできる直角三角形の面積は

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{2B^2X^2}{XDB}\times\frac{B^4-X^4}{XDB}=\frac{B^4-X^4}{D^2}$$

と，指示されたものになる，というのである。

探究 XVII

前のものあるいは後のもののいずれかが引き寄せられた［加えられた］，それらの中央のものが平方になる，3 つの比例する平面を数的に見出すこと。

中央の平面を E planum としよう。すると，前［の平面］は B quad. $-$ E plqno と，後［の平面］は G q. $-$ E plano と定められるであろう。それゆえ，前の平面に E planum が加えられるとき，平方，すなわち B quadratum，になる。同様に，後［の平面］に E planum が加えられると，平方，すなわち G quadratum，になる。それゆえ，それらの 3 つの平面は比例のまま残っていて，その結果として，中央［の平面］から互いにつくるもの［中央の平面の平方］は外側［の平面］によってつくるもの［外側の平面同士の積］に等しくされ，技法に従って始められた比較によって，$\dfrac{B\ \text{quad. in}\ G\ \text{quad.}}{B\ \text{quad.} + G\ \text{quad.}}$ が E plano に等しいことが見出される。それゆえ，3 つの比例する平面はこの［次の］ようになる。

$$\begin{array}{ccc} \text{第 } 1 & \text{第 } 2 & \text{第 } 3 \\ \dfrac{B\ \text{quad. quad.}}{B\ \text{q.} + G\ \text{quad.}} & \dfrac{B\ \text{quad. in}\ G\ \text{quad.}}{B\ \text{quad.} + G\ \text{quad.}} & \dfrac{G\ \text{quad. quad.}}{B\ \text{q.} + G\ \text{quad.}} \end{array}$$

B を 1，G を 2 としよう。求める平面は第 1 が $\dfrac{1}{5}$，第 2 が $\dfrac{4}{5}$，第 3 が $\dfrac{16}{5}$ であろう。中央［の平面］が前［の平面］に引き寄せられると 1 になり，後［の平面］に引き寄せられると 4 になる。約束されたものまで高める［与えられた条件を満たす］ために，同じ平面に何らかの平方，例えば 25，が掛けられると，条件に支配された［条件を満たす］平面，5，20，80 になるであろう。

探究 XVIII

与えられた 2 つの立方から，それら［求めるもの］の和が与えられたものの差に等しい，別の 2 つの立方を数的に見出すこと。

与えられた 2 つの立方を B cubus, D cubus とし, 前者がより大きく, 後者がより小さいとしよう。それら［求めるもの］の和が B cubo $-$ D cubo に等しい, 別の 2 つの立方を見出さなければならない。求められている第 1 の立方の辺を $B - A$, 第 2［の立方］の辺を $\dfrac{B\ \text{quad. in}\ A}{D\ \text{quad.}} - D$ とする。そして, 立方がつくられて,［それが］B cubo $-$ D cubo と比較されると, $\dfrac{D\ \text{cubus in}\ B\ 3}{B\ \text{cubo} + D\ \text{cubo}}$ が A に等しいことが見出される。それゆえ，求められた立方の第 1 の辺は $\dfrac{B\ \text{in}\ \overline{B\ \text{cubum} - D\ \text{cubo}\ 2}}{B\ \text{cubo} + D\ \text{cubo}}$ で，第 2 の辺は $\dfrac{D\ \text{in}\ \overline{B\ \text{cubum}\ 2 - D\ \text{cubo}}}{B\ \text{cubo} + D\ \text{cubo}}$ である。そして，それらの立方の和は B cubo $-$ D cubo に等しい。それゆえ, より大きい［最も大きい］ものが残りの 3 つのもの［の和］に等しい, 4 つの立方を見出すことが許される。確かに, 2 つの辺 B および D について, 前者がより大きく, 後者が 75
より小さいと仮定されることによって，つくられた［最大の］立方の辺は B in $\overline{B\ \text{cubum} + D\ \text{cubo}}$ に比例し，［残りの］それぞれの第 1 の立方の辺は D in $\overline{B\ \text{cub.} + D\ \text{cub.}}$ に，第 2［の立方の辺］は B in $\overline{B\ \text{cubum} - D\ \text{cubo}\ 2}$ に，第 3［の立方の辺］は D in $\overline{B\ \text{cubum}\ 2 - D\ \text{cubo}}$ に比例する。さらに，［推論の］進行によって，最も大きいと仮定された辺の立方が最も小さい［辺の］立方の 2 倍を超えるように要求されることは明らかである。

B を 2，D を 1 としよう。根 6 による立方は根 3，4，5 によるそれぞれの立方［の和］に等しいであろう。それゆえ，$6N$［$6x$］および $3N$ による立方が与えられたとき，$4N$ および $5N$ による立方が示され，後者の和と前者の差は等しいであろう。

> B，D ($B > D$) が与えられたとき，$U^3 + V^3 = B^3 - D^3$ となるような U，V を見出すこと，が求められる。
>
> $U = B - A$, $V = \dfrac{AB^2}{D^2} - D$ とおく［かなり巧妙なおき方 !!］と，与条件式から $A = \dfrac{3BD^3}{B^3 + D^3}$

が導かれる。従って，$U=\dfrac{B\left(B^3-2D^3\right)}{B^3+D^3}$，$V=\dfrac{D\left(2B^3-D^3\right)}{B^3+D^3}$ となる。

それゆえ，$B\left(B^3+D^3\right)>D\left(2B^3-D^3\right)>B\left(B^3-2D^3\right)>D\left(B^3+D^3\right)$ という，辺の系列が得られたことになる。ただし，ここで，$B^3-2D^3>0$ となる必要がある。

$B=2$，$D=1$ ならば，$B\left(B^3+D^3\right)=18$，$D\left(2B^3-D^3\right)=15$ $B\left(B^3-2D^3\right)=12$，$D\left(B^3+D^3\right)=9$ となり，$18^3-9^3=5832-729=5103=3375+1728=15^3+12^3$ である。

U，V のままなら，$U=\dfrac{4}{3}$，$V=\dfrac{5}{3}$ となるから，$B=2$，$D=1$ に対して，$2>\dfrac{5}{3}>\dfrac{4}{3}>1$ となる U，V が得られて，$\left(\dfrac{5}{3}\right)^3+\left(\dfrac{4}{3}\right)^3=7=2^3-1^3$ である。

ヴィエートは，これらを，$6N>5N>4N>3N$ としている。

探究 XIX

与えられた 2 つの立方から，それら［求めるもの］の差が与えられたものの和に等しい，別の 2 つの立方を数的に見出すこと。

与えられたそれら 2 つの立方を B cubus，D cubus とし，前者がより大きく，後者がとり小さいとしよう。求められている第 1 の立方の辺を $B+A$，第 2［の立方の辺］を $\dfrac{B \text{ quad. in } A}{D \text{ quad.}}-D$ とする。そして，立方がつくられて，それらの差が B cubo $+$ D cubo と比較されると，$\dfrac{D \text{ cubus in } B\ 3}{B \text{ cubo} - D \text{ cubo}}$ が A に等しいことが見出される。それゆえ，求められているより大きい立方の辺は $\dfrac{B \text{ in } \overline{B \text{ cubum} + D \text{ cubo } 2}}{B \text{ cubo} - D \text{ cubo}}$ で，第 2［の立方の辺］は $\dfrac{D \text{ in } \overline{B \text{ cubum } 2 - D \text{ cubo}}}{B \text{ cubo} - D \text{ cubo}}$ であろう。そして，それらの［立方の］差は B cubo $+$ D cubo に等しい。

それゆえ，より大きい［最も大きい］ものが残りの 3 つのもの［の和］に等しい，4 つの立方を見出すことが許される。

確かに，2 つの辺 B および D について，前者がより大きく，後者がより小さいと仮定されることによって，つくられた［最大の］立方の辺は B in $\overline{B \text{ cubum} + D \text{ cubo } 2}$ に比例し，［残りの］それぞれの第 1 の［立方の］辺は D in $\overline{B \text{ cubum } 2 + D \text{ cubo}}$ に，第 2［の立方の辺］は B in $\overline{B \text{ cubum} - D \text{ cubo}}$ に，第 3［の立方の辺］は D in $\overline{B \text{ cubum} - D \text{ cubo}}$ に比例する。

B を 2，D を 1 としよう。20 による立方は 17，14，7 によるそれぞれの立方［の和］に等しいことが見出される。それゆえ，$14N$ および $7N$ による立方が与えられるとき，$20N$ および $17N$ による立方が示され，後者の差と前者の和は等しいであろう。

探究 XX

与えられた 2 つの立方から，それら［求めるもの］の差が与えられたものの差に等しい，別の 2 つの立方を数的に見出すこと。

与えられた 2 つの立方を B cubus，D cubus とし，前者がより大きく，後者がより小さいとしよう。求められている第 1 の立方の辺を $A-D$，第 2［の立方の辺］を $\dfrac{D \text{ quad. in } A}{B \text{ quad.}}-B$ として，立方をつくり，それらの差が B cubo $-$ D cubo と比較されると，$\dfrac{D \text{ in } B \text{ cubum } 3}{B \text{ cubo} + D \text{ cubo}}$ が A と等しいことが見出される。それゆえ，第 1 の立方の辺は $\dfrac{D \text{ in } \overline{B \text{ cubum } 2 - D \text{ cubo}}}{B \text{ cubo} + D \text{ cubo}}$ に，第 2［の立方の辺］は $\dfrac{B \text{ in } \overline{D \text{ cubum } 2 - B \text{ cubo}}}{B \text{ cubo} + D \text{ cubo}}$ になり，それらの［立方の］差は B cubi および D cubi の差に等しい。もし求められている第 1 の立方の根が $B-A$，第 2［の立方の根］が

$D - \dfrac{B \text{ quad. in } A}{D \text{ quad.}}$ と定められるとしても，操作は同じことになる。

それゆえ，2 つずつ［の差］が［残りの］2 つずつ［の差］に等しい，4 つの立方を見出すことが許される。

確かに，2 つの辺 B および D について，前者がより大きく，後者がより小さいと仮定されることによって，第 1 の立方の辺は D in $\overline{B \text{ cubum } 2 - D \text{ cubo}}$ に，第 2 の［立方の］辺は D in $\overline{B \text{ cubum} + D \text{ cubo}}$ に，第 3 の［立方の］辺は B in $\overline{B \text{ cubum} + D \text{ cubo}}$ に，第 4 の［立方の］辺は B in $\overline{D \text{ cubum } 2 - B \text{ cubo}}$ に比例する。さらに，［推論の］進行から，B cubum は D cubo より大きいけれども，しかし D cubo 2 より小さいと要求されることは明らかである。

B を 5，D を 4 としよう。252 および 248 による立方は 5 および 315 による立方に等しい。それゆえ，$315N$ および $252N$ による立方が与えられるとき，$248N$ および $5N$ による立方が示され，後者の差と前者の差は等しいであろう。

第 5 巻 76

探究 I

［それらの和が］平方をつくり，さらに，結び付けられた［任意の］2 つが平方をつくるであろう，3 つの平面を数的に見出すこと。

3 つの平面の和を $A + B$ による平方，すなわち A quad. $+ B$ in A 2 $+ B$ quadrato とする。さらに，第 1［の平面］が第 2［の平面］と合わせて A quadratum になるとする。それゆえ，第 3 の平面は B in A 2 $+ B$ quad. であろう。第 2［の平面］が第 3［の平面］と合わせて $A - B$ による平方，すなわち A quad. $- B$ in A 2 $+ B$ quad. になるとすると，それゆえ，第 2 の平面として A quad. $- B$ in A 4 が残される。そして，それゆえ，第 1 の平面は B in A 4 であろうし，それに第 3 の平面が加えられたものは B in A 6 $+ B$ quadrato になる。それゆえ，第 1 および第 3［の平面］からつくられた，この最後の平面が平方に等しくされることが残っている。それを D quadratum としよう。ゆえに，$\dfrac{D \text{ quad.} - B \text{ quad.}}{B\ 6}$ が A に等しくされるであろう。

それゆえ，第 1 の平面は D quad. in B quad. 24 $- B$ quad. quad. 24 に比例する。第 2［の平面］は D quad. quad. $+ B$ quad. quad. 25 $- B$ quad. in D quad. 26 に，第 3［の平面］は B quad. in D quad. 12 $+ B$ quad. quad. 24 に比例する。

D を 11，B を 1 としよう。第 1 の平面は 2880，第 2［の平面］は 11520，第 3［の平面］は 1476 になり，これらは問題を満たす。すべてが何らかの平方，例えば 36，によって割られても，また，［問題を］満たす。［このとき，］平面は 80，320，41 となる。

D を 6，B を 1 とすると，第 1 の平面は 840，第 2［の平面］は 385，第 3［の平面］は 456 になる。

任意の B，D に対して，第 1 $= 24B^2D^2 - 24B^4$，第 2 $= D^4 + 25B^4 - 26B^2D^2$，第 3 $= 12B^2D^2 + 24B^4$ とすれば，題意が満たされるという。確かに，

$$\begin{cases} 第1 + 第2 + 第3 = 25B^4 + 10B^2D^2 + D^4 = \left(5B^2 + D^2\right)^2 \\ 第1 + 第2 = B^4 - 2B^2D^2 + D^4 = \left(B^2 - D^2\right)^2 \\ 第2 + 第3 = 49B^4 - 14B^2D^2 + D^4 = \left(7B^2 - D^2\right)^2 \\ 第3 + 第1 = 36B^2D^2 = (6BD)^2 \end{cases}$$

である。ここでのヴィエートの例では，

$$\begin{cases} 2880+11520+1476=15876=126^2 \\ 2880+11520=120^2 \\ 11520+1476=114^2 \\ 1476+2880=66^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 80+320+41=441=21^2 \\ 80+320=20^2 \\ 320+41=19^2 \\ 41+80=11^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 840+385+456=1681=41^2 \\ 840+385=35^2 \\ 385+456=29^2 \\ 456+840=36^2 \end{cases}$$

である。

『算術』第 3 巻問題 6（［3］p.158)。

「それらの和が平方であり，任意の対の和が平方である，3 つの数を見出すこと。

3 つすべての和を x^2+2x+1 とし，第 1 と第 2 の和を x^2 とすると，それゆえ，第 3 は $2x+1$ である。第 2 と第 3 の和を $(x-1)^2$ とする。

それゆえ，第 $1=4x$，第 $2=x^2-4x$ である。

しかし，第 1 と第 3 の和は平方である。

すなわち，$6x+1=$ 平方 $=$ 例えば，121 である。

それゆえ，$x=20$ で，［求める］数は 80，320，41 である。」

探究 II

等しい間隔だけ離れている，3 つの平方を数的に見出すこと。

第 1［の平方］を A quad. とし，第 2［の平方］を A quad. $+$ B in A 2 $+$ B quad. としよう。それゆえ，第 3［の平方］は A quad. $+$ B in A 4 $+$ B quad. 2 であろう。［そして,］この辺がもし $D-A$ と定められるならば，D quad. $-$ A in D 2 $+$ A quad. は A quad. $+$ B in A 4 $+$ B quad. 2 に等しくなる。それゆえ，$\dfrac{D \text{ quad.} - B \text{ quad. } 2}{B\ 4 + D\ 2}$ が A に等しくされるであろう。ゆえに，第 1 の辺は D quad. $-$ B quad. 2 に比例し，第 2 の辺は D quad. $+$ B quad. 2 $+$ B in D 2 に比例し，第 3［の辺］は D quad. $+$ B quad. 2 $+$ B in D 4 に比例する。

D を 8，B を 1 とすると，第 1 の平方の辺は 62，第 2［の辺］は 82，第 3［の辺］は 98 になる。実際に，それらによる平方は 3844，6724，9604 である。そして，すべてが何らかの平方，例えば 4，で割られると，961，1681，2401 であり，それらは互いに等しい間隔，すなわち前者は 2880，後者は 720，にある。

探究 III

結び付けられた［任意の］2 つが平方をつくるであろう，等距離にある 3 つの平面を数的に見出すこと。

前の探求によって等しい間隔だけ離れている 3 つの平方が示され［るから]，そして，第 1 の，しかも最も小さい，［平方］を B quadratum，第 2［の平方］を B quad. $+$ D plano，第 3［の平方］を B quad. $+$ D plano 2 としよう。さらに，求められるであろう等距離にある 3 つの平面の第 1 のものおよび第 2 のもの［の和］が B quad. になり，第 1 のものおよび第 3 のもの［の和］が B quad. $+$ D plano に，最後に，第 2 のものおよび第 3 のもの［の和］が B quad. $+$ D plano 2 になると仮定されるとしよう。一方，3 つのものの和を A planum とする。それゆえ，第 3［の平面］は A planum $-$ B quadrato，第 2［の平面］は A planum $-$ B quadrato $-$ D plano，第 1［の平面］は A planum $-$ B quadrato $-$ D plano 2 であろう。それゆえ，これら 3 つの平面は等距

離であろう。なぜならば，第 1 のものおよび第 2 のものの差は D planum であり，第 2 のものおよび第 3 のもの［の差］も同様だからである。それゆえ，A planum 3 $-$ B quad. 3 $-$ D plano 3 である，これら 3 つの平面の和が A plano に等しくされることが残り，$\dfrac{B \text{ quad. } 3 + D \text{ plano } 3}{2}$ が A plano に等しくなる。

それゆえ，第 1 の平面は $\dfrac{B \text{ quad.} - D \text{ plano}}{2}$ で，第 2［の平面］は $\dfrac{B \text{ quad.} + D \text{ plano}}{2}$ で，第 3［の平面］は $\dfrac{B \text{ quad.} + D \text{ plano } 3}{2}$ であろう。そして，すべてが 4 倍されると，第 1［の平面］は B quad. 2 $-$ D plano 2 に比例し，第 2［の平面］は B quad. 2 $+$ D plano 2 に比例し，第 3［の平面］は B quad. 2 $+$ D plano 6 に比例する。

第 1［の平面］および第 2［の平面］，あるいは第 2［の平面］および第 3［の平面］の間の間隔は
D planum 4 である。第 1［の平面］は第 2［の平面］と合わせて B quad. 4 になる。第 1［の平 77
面］は第 3［の平面］と合わせて，仮定により B quad. $+$ D plano が平方としてつくられるから，平方 B quad. 4 $+$ D plano 4 になる。第 2［の平面］は第 3［の平面］と合わせて，同様に仮定により B quad. $+$ D plano 2 が平方としてつくられるから，平方 B quad. 4 $+$ D plano 8 になる。

B quad. を 961，D planum を 720 としよう。第 1 の平面は 482，第 2［の平面］は 3362，第 3［の平面］は 6242 であろうし，それらの間隔は 2880 である。第 1［の平面］は第 2［の平面］と合わせて辺 62 による平方になり，第 3［の平面］と合わせて辺 82 による［平方となり］，最後に，第 2［の平面］は第 3［の平面］と合わせて辺 98 による平方となる。

$a+b=$ 平方，$b+c=$ 平方，$c+a=$ 平方，$b-a=c-b$ である a，b，c $(a<b<c)$ を求めようというもの。

探究 II により，3 つの等間隔の平方数が得られるから，それらを B^2，B^2+D^2，B^2+2D^2 として，$a+b=B^2$，$b+c=B^2+2D^2$，$c+a=B^2+D^2$ とおく。

そこで，$a+b+c=A^2$ とおくと，$a=A^2-B^2-2D^2$，$b=A^2-B^2-D^2$，$c=A^2-B^2$ となるから，$3A^2-3B^2-3D^2=A^2$ より $A^2=\dfrac{3B^2+3D^2}{2}$ になる。これから，$a=\dfrac{B^2-D^2}{2}$，$b=\dfrac{B^2+D^2}{2}$，$c=\dfrac{B^2+3D^2}{2}$ となる。その後，ヴィエートは，それぞれを 4 倍して，$2B^2-2D^2$，$2B^2+2D^2$，$2B^2+6D^2$ とする。

$B^2=961$，$D^2=720$ ならば，$2B^2-2D^2=482$，$2B^2+2D^2=3362$，$2B^2+6D^2=6242$ である。また，$482+3362=3844=62^2$，$3362+6242=9604=98^2$，$6242+482=6724=82^2$ となる。

『算術』第 3 巻問題 7 (［3］p.158)。

「任意の対が平方を与える，算術数列にある，3 つの数を見出すこと。

はじめに，算術数列にあり，それらの和の半分がそれらのどれよりも大きいような 3 つの平方数を見出す。それらの第 1 および第 2 のものを x^2，$(x+1)^2$ とすると，それゆえ，第 3 のものは，例えば，$x^2+4x+2=(x-8)^2$ である。

それゆえ，$x=\dfrac{62}{20}$ あるいは $\dfrac{31}{10}$ であり，数として 961，1681，2401 をとることができる。

さて，対の和がいま求めた数になるような，3 つの数を見出さなければならない。

3 つの数の和は $\dfrac{5043}{2}=2521\,\dfrac{1}{2}$ であり，3 つの数は $120\,\dfrac{1}{2}$，$840\,\dfrac{1}{2}$，$1560\,\dfrac{1}{2}$ である。」

探究 IV

結び付けられた［任意の］2 つが，そしてさらに 3 つの合計そのものも，与えられた平面が引き寄せられる［加えられる］と平方をつくるであろう，3 つの平面を数的に見出すこと。

Z planum が与えられたとしよう。確かに，求める第 1 および第 2 の平面の和を，Z planum がその和に加えられるとき $A+B$ による平方がつくられるから，A quad. $+$ B in A 2 $+$ B quad. $-$ Z plano としよう。さらに，第 2 および第 3［の平面］の和を，Z planum がそれに加えられるとき $A+D$ による平方がつくられるから，A quad. $+$ D in A 2 $+$ D quad. $-$ Z plano としよう。さらに，3 つ［の平面］の合計を，Z planum がそれに加えられるとき $A+G$ による平方がつくられるから，A quad. $+$ G in A 2 $+$ G quad. $-$ Z plano としよう。それゆえ，その合計から第 1 および第 2［の平面］の和が取り去られるとき，第 3 の平面として G in A 2 $+$ G quad. $-$ B in A 2 $-$ B quad. が残されるであろう。そして，同じ合計から第 2 および第 3［の平面］の和が取り去られるとき，第 1 の平面として G in A 2 $+$ G quad. $-$ D in A 2 $-$ D quadrato が残されるであろう。それゆえ，第 1 および第 3 の平面に Z plano が引き寄せられる［加えられる］と，G in A 4 $+$ G quad. 2 $-$ B in A 2 $-$ B quad. $-$ D in A 2 $-$ D quad. $+$ Z plano であろうし，これは平方に等しくされるであろう。それを F quadratum としよう。ゆえに，$\dfrac{F\text{ quad.}+D\text{ quad.}+B\text{ quad.}-G\text{ quad. }2-Z\text{ plano}}{G\,4-B\,2-D\,2}$ が A に等しくされるであろう。

Z planum を 3，B を 1，D を 2，G を 3，F を 10 とすると，A は 14 になる。第 1 および第 2 の平面の和は 222 であり，明らかに，3 が罰せられた［引かれた］，15 による平方である。第 2 および第 3［の平面］の和は 253 であり，明らかに，3 が罰せられた，16 による平方である。第 1 および第 3［の平面］の和は 97 であり，明らかに，3 が罰せられた，10 による平方である。3 つ［の平面］の合計は 286 であり，明らかに，3 が罰せられた，17 による平方である。それゆえ，求められている第 1 の平面は 33 で，第 2［の平面］は 189 で，第 3［の平面］は 64 であろうし，これらは指示を果たす［条件を満たす］。

『算術』第 3 巻問題 8 (［3］p.158)。
「1 つの数が与えられたとき，それらの任意の対の和に与えられた数が加えられると平方を与え，さらに，［それら］3 つの和に与えられた数が加えられると平方を与える，他の 3 つ［の数］を見出すこと。

与えられた数を 3 とする。

求める第 1 の数足す第 2 の数を x^2+4x+1，第 2 足す第 3 を x^2+6x+6，3 つすべての和を $x^2+8x+13$ と仮定する。

それゆえ，第 3 は $4x+12$，第 2 は x^2+2x-6，第 1 は $2x+7$ である。

また，第 1 足す第 3 足す 3 は平方である，すなわち，$6x+22$ は平方であり，100 と仮定する。

従って，$x=13$ であり，［求める］数は 33，189，64 である。」

探究 V

結び付けられた［任意の］2 つが，そしてさらに 3 つの合計そのものも，与えられた平面が取り去られると平方をつくるであろう，3 つの平面を数的に見出すこと。

Z planum が与えられたとしよう。第 1 および第 2［の平面］の合計を，Z planum が取り去られるとき残りは A による平方になるから，A qaud. $+$ Z plano としよう。第 2 および第 3［の平面］の合計を，同じ理由で，Z planum が取り去られるとき残りは $A+B$ による平方になるから，A quad. $+$ B in A 2 $+$ B quad. $+$ Z plano としよう。最後に，3 つ［の平面］すべての合計を，同じ理由で，Z planum が取り去られるとき残りは $A+D$ による平方になるから，A quad. $+$ D in A 2 $+$ D quad. $+$ Z plano としよう。それゆえ，もし 3 つ［の平面］の合計から第 1 お

よび第 2［の平面］の和が取り去られるならば，第 3［の平面］として D in A 2 + D quadrato が残されるであろう。そして，もし同じ［合計］から第 2 および第 3［の平面］の和が取り去られるならば，第 1［の平面］として D in A 2 + D quad. − B in A 2 − B quad. が残されるであろう。それゆえ，Z planum が取り去られた，第 1 および第 3［の平面］の和は D in A 4 + D quad. 2 − B in A 2 − B quad. − Z plano であろう。それを F quadratum としよう。ゆえに，$\dfrac{F \text{ quad.} + B \text{ quad.} + Z \text{ plano} - D \text{ quad. } 2}{D\ 4 - B\ 2}$ は A に等しくされるであろう。

Z planum を 3，B を 1，D を 2，F を 8 とすると，A は 10 になる。第 1 および第 2 の平面の和は 103 であり，明らかに，付加 3 が作用された，10 による平方である。第 2 および第 3［の平面］の和は 124 であり，明らかに，3 が増やされた，11 による平方である。3 つ［の平面］の合計は 147 であり，明らかに，3 が引き寄せられた，12 による平方である。最後に，第 1 および第 3［の平面］の和は 67 であり，3 が増やされた，8 による平方である。それゆえ，求められている第 1 の平面は 23 で，第 2［の平面］は 80 で，第 3［の平面］は 44 であろうし，これらは指示を果たす。

> 『算術』第 3 巻問題 9 (［3］p.159)。
> 「1 つの数が与えられたとき，それらの任意の対の和から与えられた数が引かれると平方を与え，さらに，［それら］3 つの和から与えられた数が引かれると平方を与える，他の 3 つ［の数］を見出すこと。
> 与えられた数を 3 とする。
> 求める第 1 の数足す第 2 の数を x^2+3，第 2 足す第 3 を x^2+2x+4，3 つの和を x^2+4x+7 と仮定する。
> それゆえ，第 3 は $4x+4$，第 2 は x^2-2x，第 1 は $2x+3$ である。
> 最後に，第 1 足す第 3 引く 3，［すなわち］$6x+4$，は平方であり，例えば 64 と仮定する。
> 従って，$x=10$ であり，(23，80，44) が解である。」

探究 VI

それらのそれぞれに与えられた平面が引き寄せられる［加えられる］と平方をつくる無限個の平方を見出すこと。逆に，［それらのそれぞれから］同じものが取り去られると［平方をつくる］無限個の［平方を見出すこと］。

Z planum が与えられたとし，その 4 分の 1 倍が，例えば B in D，あるいは F in G のように，2 つの辺に分解される，それゆえ，B in D 4，あるいは F in G 4 が Z plano に等しくされるとしよう。ゆえに，$\overline{B-D}$ quad. に，辺による長方形の 4 倍である，Z plano が引き寄せられると平
方，例えば $\overline{B+D}$ quadratum，をつくるであろう。そして，再び，$\overline{F-G}$ quadratum に Z plano 78
が引き寄せられると平方，例えば $\overline{F+G}$ quad.，をつくるであろう。そのうえ，それらの 1 つに Z planum の 4 分の 1 が付け加えられるとき，その結合から別のものがつくられるから，どのような 2 つの辺についても同じ場所が保たれる［同じことが成り立つ］であろう。

Z planum を 96 としよう。この 4 分の 1 である 24 は，1 および 24 による，あるいは 2 および 12 による，あるいは 3 および 8 による，あるいは 4 および 6 による，そして別の無数の［仕方による］分割 (fractis) が起きる。それゆえ，23 による平方に 96 が引き寄せられると 25 による平方になり，そして，10 による平方に 96 が引き寄せられると 14 による平方になり，そして，5 による平方に 96 が引き寄せられると 11 による平方になり，そして，2 による平方に 96 が引き寄せられると 10 による平方になるであろうし，残りについてもそうである。

そして，逆に，$\overline{B+D}$ quadratum から，辺による長方形の 4 倍である，Z plano が取り去られると $\overline{B-D}$ quad. が残り，$\overline{F+G}$ quadratum から Z plano が取り去られると $\overline{F-G}$ quadratum が残るであろう。

$625-96$ は，23 の平方，529 をつくる。そして，$196-96$ は，10 の平方，100 をつくる。

探究 VII

それらの［任意の］2 つ［からつくられた平面］のもとに，与えられた平面が引き寄せられた平面が平方になる，3 つの辺を数的に見出すこと。

Z planum が与えられたとしよう。さらに，引き寄せられた Z plano によって平方になるのだから，第 1 および第 2 の辺による［平面］を B quadratum $-$ Z plano と定めることにし，そして，第 2 の辺そのものを A とする。それゆえ，第 1［の辺］は $\dfrac{B \text{ quad.} - Z \text{ plano}}{A}$ であろう。一方，第 2 および第 3 の辺による［平面］を，同じ理由によって，D quad. $-$ Z plano としよう。それゆえ，第 2 の辺は A のままだから，第 3［の辺］は $\dfrac{D \text{ quad.} - Z \text{ plano}}{A}$ になる。それゆえ，第 1［の辺］と第 3［の辺］の積，すなわち $\dfrac{B \text{ quad.} - Z \text{ plano}}{A}$ in $\dfrac{D \text{ quad.} - Z \text{ plano}}{A}$ が，引き寄せられた Z plano によって平方になることが残っている。しかし，もし B quad. $-$ Z plano が平方，例えば F quadratum，をつくり，D quadratum $-$ Z plano が平方，例えば G quad.，をつくり，方程式が整えられたならば，もし本当にそうならば，この場合は，$\dfrac{F \text{ quad. in } G \text{ quad.} + Z \text{ plano in } A \text{ quad.}}{A \text{ quad.}}$ が平方に等しくされるであろう。このことは，それがあたかも $\dfrac{F \text{ in } G = H \text{ in } A}{A}$ による平方であることが示されるであろうように，わずらわしいことではないであろう。それゆえ，$\dfrac{H \text{ in } F \text{ in } G\ 2}{H \text{ quad.} = Z \text{ plano}}$ が A に等しくされるであろう。そして，前者［の場合］は H quadratum が Z plano そのものを超え［より大きく］，後者［の場合］は劣る［より小さい］。しかし，与えられた平面が取り去られると平方をもたらす，無限個の平方を見出すことができ，逆に，同じものが引き寄せられると［平方をもたらす］，無限個の［平方を見出すことができる］。それゆえ，平方，B quadratum あるいは D quadratum，が自由に仮定されるのではなく，次の条件を満たす［ように選ばれるであろう］。すなわち，辺 F および G は，引き寄せられた Z plano によって，この B quadratum および D quadratum のように，平方をつくる，それぞれの平方から選ばれることは明らかであり，完全に提示された方程式の場所であろう［方程式が成り立つであろう］。

Z planum を 192，F を 8，G を 2 としよう。H が 6 と仮定されると，A は $\dfrac{16}{13}$ になる。第 1 の辺は 52，第 2［の辺］は $\dfrac{16}{13}$，第 3［の辺］は $\dfrac{13}{4}$ であろう。第 1［の辺］に第 2［の辺］を掛けると 64 になる。第 2［の辺］に第 3［の辺］を掛けると 4 になる。第 1［の辺］に第 3［の辺］を掛けると 169 になる。それゆえ，192 が付け加えられた，第 1 および第 2［の辺］による［平面］は，辺 16 の平方，256 になる。192 が付け加えられた，第 2 および第 3［の辺］による［平面］は，辺 14 の平方，196 である。192 が付け加えられた，第 1 および第 3［の辺］による［平面］は，辺 19 の平方，361 である。

> z が与えられたとき，$ab+z=$ 平方，$bc+z=$ 平方，$ca+z=$ 平方 となる 3 数 a，b，c を求めるという問題。

$ab = B^2 - Z = F^2$, $bc = D^2 - Z = G^2$, $b = A$ とおくと，$a = \dfrac{B^2 - Z}{A}$, $c = \dfrac{D^2 - Z}{A}$ であることから，$\dfrac{B^2 - Z}{A} \times \dfrac{D^2 - Z}{A} + Z = \dfrac{F^2}{A} \times \dfrac{G^2}{A} + Z =$ 平方 とならなければならない。この平方を $\left(\dfrac{FG \sim HA}{A}\right)^2$ とすると，$A = \dfrac{2FGH}{H^2 \sim Z}$ が得られる。これを基に，$a = \dfrac{F^2}{A}$, $b = A$, $c = \dfrac{G^2}{A}$ が求められる，とヴィエートはいう。

『算術』第 3 巻問題 10 (［3］pp.159–160)。

「それらの任意の対の積に与えられた数が加えられたものが平方を与えるような，3 つの数を見出すこと。

与えられた数を 12 とする。平方 (例えば 25) をとり，12 を取り去る。第 1 および第 2 の数の積としてその差 (13) をとり，それらの数をそれぞれ $13x$, $\dfrac{1}{x}$ とする。

別の平方，例えば 16，から再び 12 を取り去り，その差 (4) を第 2 および第 3 の数の積とする。

それゆえ，第 3 の数は $4x$ である。

第 3 の条件は $52x^2 + 12 =$ 平方 を与える。いま，$52 = 4 \cdot 13$ で，13 は平方ではない。しかし，もしそれが平方ならば，方程式は簡単に解くことができる。

それゆえ，それらの積が平方で，+12 もまた平方であるような，13 および 4 に代わる 2 数を見出さなければならない。

さて，もし両方が平方ならば，積は平方であるから，+12 が平方であるような，2 つの平方数を見出さなければならない。

これは簡単で，方程式は簡単に解ける，といわれる。

平方 4, $\dfrac{1}{4}$ は条件を満たす。

この段階をさかのぼって調べてみると，数として $4x$, $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{x}{4}$ とおくとき，方程式 $x^2 + 12 =$ 平方 $=$ 例えば $(x+3)^2$ を解かなければならない。

それゆえ，$x = \dfrac{1}{2}$ で，$\left(2,\ 2,\ \dfrac{1}{8}\right)$ が解である。」

探究 VIII

それらの［任意の］2 つ［からつくられた平面］のもとに，与えられた平面が取り去られた平面が平方になる，3 つの辺を数的に見出すこと。

与えられた平面を Z planum としよう。さらに，第 1 および第 2 の辺による［平面］を，Z plano が取り去られると B quad. になるのだから，B quad. $+$ Z plqno と定めることにし，そして，第 2 の辺そのものを A とする。それゆえ。第 1 の辺は $\dfrac{B \text{ quad.} + Z \text{ plano}}{A}$ であろう。一方，第 2 および第 3 の辺による［平面］を，同じ理由によって，D quad. $+$ Z plano としよう。それゆえ，第 2 の辺は A のままだから，第 3［の辺］は $\dfrac{D \text{ quad.} + Z \text{ plano}}{A}$ になる。それゆえ，第 1［の辺］と第 3［の辺］の積，すなわち $\dfrac{B \text{ quad.} + Z \text{ plano}}{A}$ in $\dfrac{D \text{ quad.} + Z \text{ plano}}{A}$ が，取り去られた Z plano によって平方になることが残っている。しかし，もし B quad. $+$ Z plano が平方，例えば F quadratum，をつくり，D quad. $+$ Z plano が平方，例えば G quadratum，をつくり，方程式が整えられたならば，もし本当にそうならば，この場合は，$\dfrac{F \text{ quad. in } G \text{ quad.} - Z \text{ plano in } A \text{ quad.}}{A \text{ quad.}}$ が平方に等しくされるであろう。このことは，それがあたかも $\dfrac{F \text{ in } G - H \text{ in } A}{A}$ による平方であることが示されるであろうように，わずらわしいことではないであろう。それゆえ，$\dfrac{H \text{ in } F \text{ in } G\ 2}{Z \text{ planum} + H \text{ quad.}}$ が A に等しくされるであろう。しかし，与えられた平面が引き寄せられる［加えられる］と平方

をもたらす，無限個の平方を見出すことができ，逆に，同じものが取り去られると［平方をもたらす］，無限個の［平方を見出すことができる］。それゆえ，B quadratum および D quadratum が自由に仮定されるのではなく，次の条件を満たす［ように選ばれるであろう］。［すなわち,］辺 F
79 および G は，Z plano が取り去られると，この B quadratum および D quadratum にように，平方をつくる，それぞれの平方から選ばれることは明らかであり，完全に提示された方程式の場所であろう。

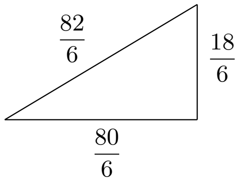
Z planum を 40，F を 7，G を 11 とすると，B は 3，D は 9 になる。H が 24 と仮定されると，A は 6 になる。第 1 の辺は $\dfrac{49}{6}$，第 2［の辺］は 6，第 3［の辺］は $\dfrac{121}{6}$ になる。第 1［の辺］に第 2［の辺］を掛けた積は 49 で，40 が取り去られると，その根が 3 である，平方数 9 が残される。第 2［の辺］に第 3［の辺］を掛けた積は 121 で，40 が取り去られると，その根が 9 である，平方数 81 が残される。第 1［の辺］に第 3［の辺］を掛けた積は $\dfrac{5929}{36}$ で，$\dfrac{1440}{36}$ すなわち 40 が取り去られると，その根が $\dfrac{67}{6}$ である，平方数 $\dfrac{4489}{36}$ が残される。

> 『算術』第 3 巻問題 11 (［3］p.160)。
> 「それらの任意の対の積引く与えられた数が平方を与えるような，3 つの数を見出すこと。
> 与えられた数を 10 とする。
> 第 1 と第 2［の数］の積を平方足す 10，例えば $4+10$，とおき，第 1［の数］を $14x$，第 2［の数］を $\dfrac{1}{x}$ とする。
> 第 2 と第 3 の積を平方足す 10，例えば 19，とすると，それゆえ，第 3 は $19x$ である。
> 第 3 の条件により，$266x^2-10$ 平方でなければならないが，266 は平方ではない。
> それゆえ，前の問題のように，それぞれが平方を 10 だけ超えるような 2 つの平方を見出さなければならない。
> 平方 $30\dfrac{1}{4}$，$12\dfrac{1}{4}$ はこれらの条件を満たす。
> さて,［求める］数を $30\dfrac{1}{4}x$, $\dfrac{1}{x}$, $12\dfrac{1}{4}x$ とおくと, 第 3 の条件により, $370\dfrac{9}{16}x^2-10=$ 平方 でなければならない。
> それゆえ，$5929x^2-160=$ 平方 $=$ 例えば，$(77x-2)^2$ である。
> それゆえ，$x=\dfrac{41}{77}$ であり，［求める］数は $\dfrac{1240\frac{1}{4}}{77}$，$\dfrac{77}{41}$，$\dfrac{502\frac{1}{4}}{77}$ である。」

探究 IX

2 つの平方からつくられた与えられた平面が加えられたその面積が平方をもたらす，直角三角形を数的に見出すこと。

B quadrato および D quadrato からつくられた，与えられた平面を Z planum としよう。辺 B，D の和の平方および同じものの差の平方から直角三角形がつくられると，それゆえ，斜辺は B quad. quad. $2+B$ quad. in D quad. $12+D$ quad. quad. 2 に，底線は B in D in Z planum 8 に，垂線は $\overline{B+D}$ quadrato in $\overline{B-D}$ quadratum 2 に比例するであろう。すべてが $\overline{B+D}$ in $\overline{B-D}$ quad. 2 で割られると，面積は $\dfrac{Z \text{ plano in } B \text{ in } D\ 2}{\overline{B-D}\text{ quad.}}$ に比例するようになるであろう。Z plano を加えよ。$\overline{B-D}$ quad. $+\,B$ in D 2 は B quadrato $+\,D$ quadrato に等しくされる，すなわち Z plano に等しくされるから，和は $\dfrac{Z\text{ plano. planum}}{\overline{B-D}\text{ quad.}}$ であろう。これは根 $\dfrac{Z\text{ plano}}{B-D}$ の平方である。



Z planum を 5，D を 1，B を 2 としよう。直角三角形はこのようなものであろう。［すなわち,］面積は $\dfrac{720}{36}$ すなわち 20 であろう。5［2^2+1^2］を加えよ。［すると,］和は 25 になり，この根は 5 である。

$Z^2 = B^2+D^2$ として，$(B+D)^2$ および $(B-D)^2$ から「記号計算についての前の注釈」命題 XLV に従って，斜辺 $(B+D)^4+(B-D)^4 = 2B^4+12B^2D^2+2D^4$，底線 $(B+D)^4-(B-D)^4 = 8BD(B^2+D^2) = 8BDZ^2$，垂線 $2(B+D)^2(B-D)^2$ の直角三角形をつくる。
そして，それぞれの辺を $2(B+D)(B-D)^2$ で割れば，その直角三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\times\frac{8BDZ^2}{2(B+D)(B-D)^2}\times\frac{2(B+D)^2(B-D)^2}{2(B+D)(B-D)^2} = \frac{2BDZ^2}{(B-D)^2}$$

になり，これに Z^2 を加えると $\left(\dfrac{Z^2}{B-D}\right)^2$ になる，というもの。

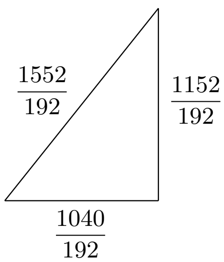
『算術』第 6 巻問題 3 (［3］pp.226–227)。
「その面積が与えられた数に加わると平方をつくる，直角三角形を見出すこと。
5 を与えられた数とし，$(3x,\ 4x,\ 5x)$ を求める三角形とする。
それゆえ，$6x^2+5 =$ 平方 $=$ 例えば，$9x^2$，あるいは $3x^2 = 5$ である。
しかし，3 は 5 に対して平方が平方に対する比をもたなければならない。
それゆえ，数の平方と三角形の面積の差が 5 に対して，平方が平方に対する比，すなわち平方の $= \dfrac{1}{5}$ をもつような，直角三角形および数を見出さなければならない。
$\left(m, \dfrac{1}{m}\right)$ から直角三角形をつくる。
すると，面積は $m^2-\dfrac{1}{m^2}$ である。
数を $m+\dfrac{2\cdot 5}{m}$ とすると，$4\cdot 5+\dfrac{101}{m^2} =$ 平方の $\dfrac{1}{5}$ でなければならない。
それゆえ，$4\cdot 25+\dfrac{505}{m^2} =$ 平方 である。あるいは，$100m^2+505 =$ 平方 $=$ 例えば，$(10m+5)^2$ であり，$m = \dfrac{24}{5}$ である。
それゆえ，補助的な三角形は $\dfrac{24}{5}$，$\dfrac{5}{24}$ からつくられなければならず，求める補助的な数は $\dfrac{413}{60}$ である。
さて，$(h,\ p,\ b)$ を $\dfrac{24}{5}$，$\dfrac{5}{24}$ からつくられた直角三角形として，元の三角形を $(hx,\ px,\ bx)$ とおくと，これは $\dfrac{1}{2}\,pbx^2+5 = \dfrac{170569}{3600}\,x^2$ を与え，解が得られる。
［直角三角形の垂直辺は $\left(\dfrac{24^2}{5^2}-\dfrac{5^2}{24^2}\right)x = \dfrac{331151}{14400}\,x$ および $2x$ で，ここで $\dfrac{331151}{14400}\,x^2 + 5 = \dfrac{170569}{3600}\,x^2$ であり，$x = \dfrac{24}{53}$ であり，三角形は $\left(\dfrac{331151}{31800}, \dfrac{48}{53}, \dfrac{332401}{31800}\right)$ である。］」

探究 X

与えられた平面によって減少させられたその面積が平方をもたらす，直角三角形を数的に見出すこと。

与えられた平面を Z planum，そうでなければ B in D 2，とし，辺 B，D の和の平方および同じものの差の平方から直角三角形がつくられるとしよう。それゆえ，斜辺は B quad. quad. 2 + B quad. in D quad. 12 + D quad. quad. 2 に，底線は B quad. in Z planum 4 + D quad. in Z planum 4 に，垂線は $\overline{B+D}$ quad. in $\overline{B-D}$ quad. 2 に比例するであろう。すべてが $\overline{B+D}$ in

$\overline{B-D}$ quad. 2 で割られると，面積は $\dfrac{B\text{ quad. in }Z\text{ plano}+D\text{ quad. in }Z\text{ plano}}{\overline{B-D}\text{ quad.}}$ に比例するようになるであろう。Z planum を取り去れ。B quad. $+$ D quad. $-$ $\overline{B-D}$ quad. は Z planum に相当するから，$\dfrac{Z\text{ plano planum}}{\overline{B-D}\text{ quad.}}$ が残されるであろうし，これは根 $\dfrac{Z\text{ plani}}{B-D}$ の平方である。



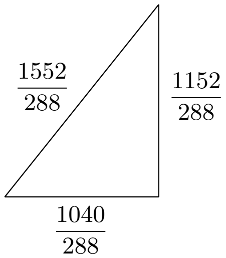
D を 1，B を 5 としよう。それゆえ，Z planum は 10 であり，直角三角形はこのようなものであろう。［すなわち，］面積は $\dfrac{599040}{36864}$ であろう。10 を取り去れ。［すると，］根 $\dfrac{480}{192}$ あるいは $\dfrac{10}{4}$ の平方である，$\dfrac{230400}{36864}$ が残されるであろうし，

『算術』第 6 巻問題 4 (［3］pp.227–228)。
「その面積から与えられた数を引くと平方をつくる，直角三角形を見出すこと。
与えられた数を 6 とし，三角形を，例えば，$(3x,\ 4x,\ 5x)$ とする。
それゆえ，$6x^2-6=$ 平方 $=$ 例えば，$4x^2$ である。
それゆえ，この場合では，(三角形の面積) $-$ (数)^2 $=$ 平方の $\dfrac{1}{6}$ となるような直角三角形および数を見出さなければならない。
m，$\dfrac{1}{m}$ から三角形をつくる。
その面積は $m^2-\dfrac{1}{m^2}$ であり，数を $m-\dfrac{6}{2}\cdot\dfrac{1}{m}$ とする。
それゆえ，$6-\dfrac{10}{m^2}=\dfrac{1}{6}$(平方)，あるいは $36m^2-60=$ 平方 $=$ 例えば，$(6m-2)^2$ である。
それゆえ，$m=\dfrac{8}{3}$ であり，補助的な三角形は $\left(\dfrac{8}{3},\dfrac{3}{8}\right)$ からつくられ，補助的な数は $\dfrac{37}{24}$ である。
再び，最初の仮定における 3，4，5 の代わりにいま見出した補助的な三角形の辺を代入し，$4x^2$ の代わりに $\left(\dfrac{37}{24}\right)^2x^2$ をおくことから始めると，解は明らかである。
［補助的な三角形は $\left(\dfrac{4015}{576},\ 2,\ \dfrac{4177}{576}\right)$ で，ここで $\dfrac{4015}{576}x^2-6=\left(\dfrac{37}{24}\right)^2x^2$ であり，$x=\dfrac{8}{7}$ であり，それゆえ，求める三角形は $\left(\dfrac{4015}{504},\dfrac{16}{7},\dfrac{4177}{504}\right)$ である。］」

探究 XI

与えられた平面が減少させられたその面積が平方をもたらす，直角三角形を数的に見出すこと。

与えられた平面を Z planum，そうでなければ B in D 2，としよう。辺の和 $B+D$ の平方および同じものの差の平方から直角三角形がつくられる。それゆえ，斜辺は B quad. quad. 2 $+$ B quad. in D quad. 12 $+$ D quad. quad. 2 に，底線は B quad. in Z planum 4 $+$ D quad. in Z planum 4 に，垂線は $\overline{B+D}$ quad. in $\overline{B-D}$ quad. 2 に比例するであろう。すべてが $\overline{B-D}$ in $\overline{B+D}$ quad. 2 で割られると，面積は $\dfrac{B\text{ quad. in }Z\text{ planum}+D\text{ quad. in }Z\text{ plan.}}{\overline{B+D}\text{ quad.}}$ に比例するようになるであろう。［これが］Z plano から取り去られると，$\overline{B+D}$ quadratum $-$ B quad. $-$ D quad. は B in D 2 に相当するから，$\dfrac{Z\text{ plano planum}}{\overline{B+D}\text{ quad.}}$ が残されるであろうし，これは根 $\dfrac{Z\text{ plani}}{B+D}$ の平方である。



D を 1，B を 5 としよう。それゆえ，Z planum は 10 であり，直角 80
三角形はこのようなものであろう。［すなわち,］面積 $\dfrac{599400}{82944}$ が 10 から取り去られると，根 $\dfrac{480}{288}$ あるいは $\dfrac{5}{3}$ の平方である，$\dfrac{230400}{82944}$ が残されるであろう。

『算術』第 6 巻問題 5 (［3］p.228)。
「もしその面積が与えられた数から取り去られるならば残りが平方である，直角三角形を見出すこと。

与えられた数を 10 とし，三角形を，例えば，$(3x,\ 4x,\ 5x)$ とする。

それゆえ，$10 - 6x^2 =$ 平方 であり，(三角形の面積) $+$ (数)$^2 =$ 平方の $\dfrac{1}{10}$ となるような直角三角形および数を見出さなければならない。

m，$\dfrac{1}{m}$ から三角形をつくると，その面積は $m^2 - \dfrac{1}{m^2}$ であり，数を $\dfrac{1}{m} + 5m$ とする。

それゆえ，$26m^2 + 10 = \dfrac{1}{10}$(平方)，あるいは $260m^2 + 100 =$ 平方，あるいは，再び，$65m^2 + 25 =$ 平方 $=$ 例えば，$(8m+5)^2$ である。

それゆえ，$m = 80$ である。残りは明らかである。

求める三角形は $\left(\dfrac{40959999}{825600}, \dfrac{2}{129}, \dfrac{40960001}{825600}\right)$ である。」

探究 XII

それらの［任意の］2 つによってつくる平面的平面に，与えられた長さの平方が掛けられた同じ 2 つ［のもの］の和が加えられると平方をもたらす，3 つの平方を数的に見出すこと。

与えられた長さを X としよう。第 1 の平方を A quad. $-$ X in A 2 $+$ X quad. —— この根は $A - X$ である ——，第 2［の平方］を A quad. —— この根は A である ——，第 3［の平方］を A quad. 4 $-$ X in A 4 $+$ X quadrato 4 としよう。それゆえ，X quadratum が掛けられた第 1［の平方］および第 2［の平方］の和が加えられた，第 1［の平方］に第 2［の平方］を掛けたものから根の平面 A quad. $-$ X in A $+$ X quad. による平方がつくられるであろう。一方，X quadratum が掛けられた第 2［の平方］および第 3［の平方］の和が加えられた，第 2［の平方］に第 3［の平方］を掛けたものから根の平面 A quad. 2 $-$ X in A $+$ X quad. 2 による平方がつくられるであろう。最後に，X quadratum が掛けられた第 1［の平方］および第 3［の平方］の和が加えられた，第 1［の平方］に第 3［の平方］を掛けたものから根の平面 A quad. 2 $-$ X in A 3 $+$ X quad. 3 による平方がつくられるであろう。第 3［の平方］の根が $D - A$ 2 に等しくされると，ゆえに，$\dfrac{D \text{ quad.} - X \text{ quad. } 4}{D\ 4 - X\ 4}$ が A に等しくされるであろう。

X を 3，D を 30 とすると，A は 8 になる。それゆえ，求める平方は第 1 が 25，第 2 が 64，第 3 が 196 であり，これらは要求を満たす。なぜならば。第 1 に第 2 を掛けたものに 801 が加えられる［$25 \times 64 + (25 + 64) \times 3^2$］と，49 の平方である 2401 となる。また，さらに，第 2 に第 3 を掛けたものに 2340 が加えられると，122 の平方である 14884 となる。そして，最後に，第 1 に第 3 を掛けたものに 1989 が加えられると，83 の平方である 6889 となる。さらに，同じ 3 つの平方がそれぞれ与えられた長さの平方の 2 倍を引き寄せる［加える］とき，それらの［任意の］2 つによってつくる平面的平面によって，与えられた長さの平方が掛けられた同じ 2 つ［のもの］の和が

取り去られると平方［となる］であろう。その結果，提示された仮定において，長さの平方の 2 倍は 18 であり，これが 3 つのそれぞれの平方に加えられると，3 つの平面 —— 第 1 は 43，第 2 は 82，第 3 は 214 —— となり，これらは要求を満たす。なぜならば，第 1 に第 2 を掛けたものから 1125 が取り去られると 2401 が残り，また，第 2 に第 3 を掛けたものから 2664 が取り去られると 14884 が残り，そして最後に，第 1 に第 3 を掛けたものから 2313 が取り去られると 6889 が残るからである。

> $ab+(a+b)\times x^2=$ 平方，$bc+(b+c)\times x^2=$ 平方，$ca+(c+a)\times x^2=$ 平方 となるような 3 つの平方数 a，b，c を求める問題。
> X，D が与えられたとき，$A=\dfrac{D^2-4X^2}{4D-4X}$ として，$a=(A-X)^2$，$b=A^2$，$c=(D-2A)^2$ とすればよい，という。

探究 XIII

与えられた長さ X を，第 1 の切片に B が加えられ，第 2［の切片］に D が［加えられて］，そのようにつくられるであろう部分が一方が他方に掛けられると平方になるように，分割すること。

第 1 の切片を $A-B$ とする。それゆえ，第 2［の切片］は $X-A+B$ であろう。それゆえ，第 1 の切片に B が加えられるとき，その結果は A になるであろう。一方，第 2 の切片に D が加えられるとき，それは $X-A+B+D$ になるであろう。それゆえ，$\overline{B+D+X}$ in $A-A$ quad. は平方に等しいであろう。その根を $\dfrac{S \text{ in } A}{X}$ とすると，さらに，それから，平方は $\dfrac{S \text{ quad. in } A \text{ quad.}}{X \text{ quad.}}$ になる。ゆえに，$\dfrac{\overline{B+D+X} \text{ in } X \text{ quad.}}{S \text{ quad.}+X \text{ quad.}}$ が A に等しくされるであろう。仮定によれば (ad positiones)，第 1 の切片は $\dfrac{\overline{D+X} \text{ in } X \text{ quad.} - B \text{ in } S \text{ quad.}}{S \text{ quad.}+X \text{ quad.}}$ であろう。［そして，］第 2［の切片］は $\dfrac{\overline{B+X} \text{ in } S \text{ quad.} - D \text{ in } X \text{ quad.}}{S \text{ quad.}+X \text{ quad.}}$［であろう］。それゆえ，除法のために場所をつくるには［第 1 および第 2 の切片が正数になる，すなわち $A-B>0$，$X-A+B>0$ となるためには］，S quadratum は $\dfrac{X \text{ quad. in } \overline{D+X}}{B}$ より小さく，しかし，$\dfrac{X \text{ quad. in } D}{B+X}$ より大きくなければならない。

X を 4，B を 12，D を 20 としよう。S quadratum は 32 より小さく，しかし，20 より大きくなければならない。［それを］25 とすると，第 1 の切片は $\dfrac{84}{41}$ に，第 2［の切片］は $\dfrac{80}{41}$ になり，なお，後者は $\dfrac{900}{41}$ を，前者は $\dfrac{576}{41}$ を生じるであろう。それらによる積は $\dfrac{518400}{1681}$ で，［それは］根 $\dfrac{720}{41}$ の平方である。

X を 3，B を 9，D を 15 としよう。S quadratum は 18 より小さく，しかし，$11\dfrac{1}{4}$ より大きくなければならない。［それを］16 とすると，第 1 の切片は $\dfrac{18}{25}$ に，第 2［の切片］は $\dfrac{57}{25}$ になり，なお，後者は $\dfrac{432}{25}$ を，前者は $\dfrac{243}{25}$ を生じるであろう。それらによる積は $\dfrac{104976}{625}$ で，［それは］根 $\dfrac{324}{25}$ の平方である。

> X，B，D が与えられたとき，$(u+B)(v+D)=$ 平方 となるように X を分割する，すなわち $X=u+v$ とする，ことが求められている。

S を $\dfrac{DX^2}{X+B} < S^2 < \dfrac{X^2(X+D)}{B}$ を満たす任意の数とするとき，

$$u = \frac{X^2(X+D) - BS^2}{S^2 + X^2}, \quad v = \frac{S^2(X+B) - DX^2}{S^2 + X^2}$$

とすればよい，という。

第 2 の例では，$X = 3$，$B = 9$，$D = 15$ であることから，$\dfrac{15 \times 3^2}{3+9} < S^2 < \dfrac{3^2 \times (3+15)}{9}$，すなわち $\dfrac{45}{4} < S^2 < 18$，より，$S^2 = 16$ とおけば，$u = \dfrac{3^2 \times (3+15) - 9 \times 16}{16 + 3^2} = \dfrac{18}{25}$，$v = \dfrac{16 \times (3+9) - 15 \times 3^2}{16 + 3^2} = \dfrac{57}{25}$ となる。

そして，$\left(\dfrac{18}{25} + 9\right)\left(\dfrac{57}{25} + 15\right) = \dfrac{104976}{625} = \left(\dfrac{324}{25}\right)^2$ である。

探究 XIV

A quadratum 引く G plano を，D in A より小さく，しかし B in A より大きくなる，1 つの平方に等しくすること。

［求める］平方が $A - F$ からつくられる，すなわち A quad. $- F$ in A 2 $+ F$ quad. が A quad. $- G$ plano に等しくされるとすると，その結果として $\dfrac{F \text{ quad.} + G \text{ plano}}{F\ 2}$ が A に等しくされる 81
であろう。しかし，A qiad. $- G$ plano は D in A より小さいから，それゆえ，A quadratum は D in $A + G$ plano より小さいであろう。そして，さらに，A quad. $- D$ in A は G plano に劣る。それゆえ，A は $\sqrt{D \text{ quad.} \dfrac{1}{4} + G \text{ plano}} + D\dfrac{1}{2}$ より小さくなるであろう。さらに，S が $\sqrt{D \text{ quad.} \dfrac{1}{4} + G \text{ plano}} + D\dfrac{1}{2}$ に等しいかあるいはそれを超えるものとして提示されると，ゆえに，A は S より小さいであろう。逆に，A quad. $- G$ plano は B in A より大きい。そして，さらに，A quad. $- B$ in A は G plano を超える。それゆえ，A は $\sqrt{B \text{ quad.} \dfrac{1}{4} + G \text{ plano}} + B\dfrac{1}{2}$ より大きくなるであろう。さらに，R が $\sqrt{B \text{ quad.} \dfrac{1}{4} + G \text{ plano}} + B\dfrac{1}{2}$ に等しいかあるいはそれより劣るものとして提示されると，ゆえに，A は R より大きいであろう。それゆえ，F quad. $+ G$ plano は S in F 2 より小さく，しかし，R in F 2 より大きいであろう。それゆえ，F は任意に仮定されることはないが，つくられた限界の外にさまよい出ることはない。探究に従って，それを E としよう。ゆえに，S in E 2 $- E$ quad. は G planum より大きいであろう。それゆえ，F は $S + \sqrt{S \text{ quad.} - G \text{ plano}}$ より小さいと仮定されるであろう。逆に，R in E 2 $- E$ quad. は G planum より小さいであろう。それゆえ，F は $R + \sqrt{R \text{ quad.} - G \text{ plano}}$ より大きいと仮定されるであろう。

G planum を 60，B を 5，D を 8，A を $1N$ としよう。$1N$ は $\sqrt{76} + 4$ より小さく，一方，$\sqrt{\dfrac{265}{4}} + \dfrac{5}{2}$ より大きいであろう。しかし，12 は $\sqrt{76} + 4$ より小さく，また，11 は $\sqrt{\dfrac{265}{4}} + \dfrac{5}{2}$ より大きい。ゆえに，S が 13，R が 10 と仮定されると，F は $13 + \sqrt{109}$ より小さく，しかし，$10 + \sqrt{40}$ より大きく選ばれるであろう。しかし，23 は $13 + \sqrt{109}$ より小さく，そして，17 は $10 + \sqrt{40}$ より大きい。それゆえ，適切に，F は 21 あるいは 19，あるいはその中間の任意の有理数と仮定されるであろう。20 と仮定されると，$1N$ は $11\dfrac{1}{2}$ になる。

そして，ここからはギリシアの風刺詩人によって提示された問題の解法である。

„ Οκταδράχμος □ πενταδράχμος χοέας τὶς ἔμιξε,

„ Τοῖς πρόπολοῖς ποιεῖν χρησὸν ἀπιτετάγμρ □.
„ Καὶ τιμρω ἀπέδωκεν περ πάντων τιτράγωνον,
„ Τὰς ἀπιταχθέισας δεξάμρ □ μονάδας,
„ Καὶ ποιοῦντας πάλιν ἑτερόν σε φάρν τετράγωνον
„ Κτησάμρον πλάρὰν συύθεμα τ̃ χοεῶν.
„ Ὦ σε διάσλον, τὸς ὀκταδράχμος ποίηοον,
„ Καὶ πάλι τὸς ἑτέρος, παῖ, λέγε πενταδράχμος.

σωίθεμα τ̃ χοεῶν	$11\frac{1}{2}$	A
πεντάδραχμοι	$6\frac{7}{12}$	
ὀκταδραχμοι	$4\frac{11}{12}$	
τιμὴ πενταδραχμῶν	$32\frac{11}{12}$	B in A
τιμὴ ὀκταδραχμῶν	$39\frac{1}{3}$	D in A
τιμὴ συμπᾶσα	$72\frac{1}{4}$	τετράγων □ A quad. $-$ Z plano
μονάδες	60	Z planum
πρόθεσις τιμῆς κὶ μοναδῶν	$132\frac{1}{4}$	τετράγων □ κτησάμ □ πλαράν
$11\frac{1}{2}$ A quad.		

ディファントスはこの問題を［彼の『算術』の］第 5 巻の最後に述べた。それゆえ，私たちの「探究法 5 巻」の最後のここにおく。

問題は，G^2，B，D が与えられたときに，$BA < A^2 - G^2 =$ 平方 $< DA$ となるような A を見出すことである。

この平方を $(A-F)^2$ とすると，$A^2 - G^2 = A^2 - 2AF + F^2$ であることから，$A = \dfrac{F^2+G^2}{2F}$ となる。

まず，$A^2 - G^2 < DA$ ［$A^2 - DA - G^2 < 0$］であるから，$A < \dfrac{D+\sqrt{D^2+4G^2}}{2}$ となる。そこで，$S \geqq \dfrac{D+\sqrt{D^2+4G^2}}{2}$ である S をとると，$A < S$ である。

次に，$A^2 - G^2 > BA$ ［$A^2 - BA - G^2 > 0$］であるから，$A > \dfrac{B+\sqrt{B^2+4G^2}}{2}$ となる。そこで，$R \leqq \dfrac{B+\sqrt{B^2+4G^2}}{2}$ である R をとると，$A > R$ である。

従って，$R < A < S$ より，$2RF < 2AF = F^2 + G^2 < 2SF$ となる。そこで，上のように定められた S，R に対して，この式が成り立つような F を指定すればよいことになる。
そのような F を E とすると，$2RE < E^2 + G^2 < 2SE$ であるから，$R + \sqrt{R^2 - G^2} < E = F < S + \sqrt{S^2 - G^2}$ となる。すなわち，F をこの式を満たすように選べば題意が満たされる。

『算術』第 5 巻問題 30（［3］pp.224–225）。
「この問題の言明は風刺詩の形式であり，その意味は次のとおりである。

一人の男がある量のワインを，それぞれいくつかは 8 ドラクマで，いくつかは 5 ドラクマで，買う。彼はそれらに対して平方数のドラクマで支払い，もしこの数に 60 を加えるならば，結果は平方であり，その辺は全体の量の数に等しい［という］。彼はそれぞれの価格でどれだけ買ったかを見出せ。

$x =$ 全体の量の数 とする。それゆえ，$x^2 - 60$ は支払った価格で，それは平方，例えば $(x-m)^2$，である。

いま，5 ドラクマの価格の量の $\frac{1}{5}$ ＋ 8 ドラクマの価格の量の $\frac{1}{8} = x$ とすると，全体の価格 $x^2 - 60$ は 一方の $\frac{1}{5}$ ＋ 他方の $\frac{1}{8} = x$ であるような 2 つの部分に分けられなければならない。

$x > \frac{1}{8}(x^2 - 60)$ かつ $< \frac{1}{5}(x^2 - 60)$ でなければ，このことの実数解は存在しない。それゆえ，$5x < x^2 - 60 < 8x$ である。

(1) $x^2 > 5x + 60$ であるから，$x^2 = 5x + 60$ より大きな数 であり，そのため x は少なくとも 11 である。

(2) $x^2 < 8x + 60$，あるいは $x^2 = 8x + 60$ より小さい数 であるから，x は高々 12 である。

それゆえ，$11 < x < 12$ である。

そこで，(上のことから) $x = \frac{m^2 + 60}{2m}$ とすると，$22m < m^2 + 60 < 24m$ である。

それゆえ，(1) $22m = m^2 + (60$ より小さいある数$)$ であり，それゆえ m は少なくとも 19 である。

(2) $24m = m^2 + (60$ より大きいある数$)$ であり，それゆえ m は 21 より小さい。

従って，$m = 20$ および $x^2 - 60 = (x - 20)^2$ とおくと，$x = 11\frac{1}{2}$，$x^2 = 132\frac{1}{4}$，そして $x^2 - 60 = 72\frac{1}{4}$ である。

それゆえ，$72\frac{1}{4}$ を，一方の部分の $\frac{1}{5}$ 足す他方の $\frac{1}{8}$ が $11\frac{1}{2}$ であるように，2 つの部分に分けなければならない。

第 1 の部分を $5z$ とする。

それゆえ，$\frac{1}{8}$(第 2 の部分) $= 11\frac{1}{2} - z$，あるいは 第 2 の部分 $= 92 - 8z$ である。それゆえ，$5z + 92 - 8z = 72\frac{1}{4}$ であり，$z = \frac{79}{12}$ である。

それゆえ，5 ドラクマの量の数は $\frac{79}{12}$ で，8 ドラクマの量の数は $\frac{59}{12}$ である。」

方程式の再検討および改良についての 2 つの論文

『全集』pp.84–158

原題は *De Æquationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo*。
出版されたのは 1591 年。
ヴィエートが自身の解析法［代数解析］を方程式論に適用したものである。その一環として，3 次方程式の「解の公式」がみられる (第 2 論文第 7 章)。

第 1 論文　方程式の再検討について 84

第 1 章

探究法 (zetesis)，形成法 (plasma) および混成法 (syncrasis) によって識別されるであろう方程式の性質について

方程式の再検討についての［この］論文は，ベキの数による解法についての，一般的なそして一般に与えられた，原理を形成し，そして完成する。なぜならば，方程式は成功裡に解かれる前に，そして，特に，ベキが同次の大きさから拒否される［取り去られる］とき，あるいは拒否された作用が強められた［作用］にまさっているように，同次の大きさが［正負が］入り混じってベキによって拒否されたり強められたりするとき，そして最後に多くの方程式がこわされた数［分数］あるいは均整のとれていない数［無理数］によって示されるときに，しばしば数による準備が必要だからである。

幾何学において，確かに，分数あるいは無理数の出現は，通常は，あたかも負数の欠点がそうではないように，方程式があまり技巧的にではなく (minus ἐυμηχανῶς) 解かれることを妨げるものではない。なぜならば，幾何学者によって遂行されるであろうことの下では，主題はつねに決まっているからである。しかし，多様な作用の受容 (πολυπαθεία) はじゃまになるものであり，ベキおよび作用の程度が高ければ高いほど，分数あるいは無理数 (ἄρρησις ἤ ἀλογία) は問題が解かれるであろうことの中により多く現れる。

しかしながら，いったい解析学者は，石や岩を避けることができるように，提示された方程式によって［解くことを］識別された性質によらずに試みるであろうか？彼は，周知の解析学者のように，そのことが要求されたとき，提示されていたものより他のものによる認められた新しい探究によって，提示されたものに関して与えられた差あるいは比をもつにもかかわらず，安心して置き換えたり，下げたり，上げたり，そして完全に遂行したりするのではないだろうか？

方程式の起源および主要な性質は，［それらが］理解されそして追求されるであろう，それゆえに還元の方法そのものが彼のために開いている，解析学者によって，完全にそして巧妙でなくはなく，知るようになるに値する。

方程式の性質は探究法，形成法および混成法によって最もよく把握される。

ヴィエートは「解析法序説」(*In Artem Analyticen Isagoge*，1591 年) において解析の方法を 3 つに分類している。
第 1 の探究法 (ζητητικός，Zetetice) は，求められているものの大きさと与えられたもののそれとについて，方程式あるいは比例が見出されることである。
2 つ目の確証法 (ποριστικός，Poristice) は，方程式あるいは比例によって，構成された定理の真実性が確かめられることである。

最後の釈義法 (ἐξηγητικός，Exegetice) は，構成された方程式あるいは比例から，求められているものの大きさが提示されることである。
そして，探究法と確証法は古代から知られているが，釈義法は自分が確立したものであるという。

πλάσμα : *anything moulded*, *an image*, *figure*, *anything imitated*, *a counterfeit*, *forgery*, *a formed style*, *affectation*
σύγκρασις : *a mixing together*, *commixture*, *blending*, *tempering*
εὐμήχᾶος : of persons, *skilful in contriving*, *ingenious*, *inventive*,
of things, *skilfully contrived*, *ingenious*
πολυπάθεια : *suffering of many calamities*, *receiving of diverse impressions* or *sensations*
ἀρρησία : *silence*
ἀλογία : *want of respect* or *regard*, *want of reason*, *unreasonable conduct*, *absurdity*

第 2 章
探究について

推論は純粋な［ベキ］から純粋な［根］が，作用された［ベキ］から作用された［根］が生ずるということをたびたび言うのであるから，解析学者は技法の法則も知らずに (ἀτέχνῶς) やみくもに探究に着手することはないであろう。そして，それゆえ，純粋なベキが関係する条件に応じて方程式を把握するために，彼は与えられた 2 つの辺からベキを捜し求めるであろう。

［そして,］単純に作用されたベキの方程式に関して，等しいかあるいは等しくないそれらまたはそれらの階級によってつくられたものが与えられた 1 つのものであるから，与えられた辺の差あるいは和，あるいはそれら自身の階級から 2 つの辺のうちの 1 つを捜し出すであろう。

最後に，さまざまに作用された［ベキの］方程式に関して，ばらばらの辺の等しくされた階級に従って，［ある］作用を［別の］作用に結び付けるであろう。

あるいは，さらに，自分自身を問題のただ 1 つの法則に追い込むことはないであろうが，［すでに］なし遂げられたかあるいは提示されたかいずれであろうと［何らかの］論点に関して，探究によって自分自身を訓練するであろう。

幾何学的な操作に備えるであろう人は，連続的に比例する系列におけるもっとも外側の直線に関して述べられている辺を，さらに，中央のベキの中のいくつかに［関して述べられている］，辺または辺の，等しいあるいは等しくない，階級による積を思い起こすであろう。

そして，固有の機械的な［仕方］によって十分に容易な方程式に出くわすであろうとき，彼は，それがどのような方程式であれ，その構成 (systaticum) および解釈 (exegeticum) のためにそれについての類似の定理をつくるであろう。

我々は，どちらの側もベキが等しいまたは等しく高い［とき］，そして，［ベキが］等しい階級および同じ作用の記号に従って作用されたまたは作用しているとき，規則に従って［ある］方程式を［別の］方程式に似ていると言う。

しかし，もしさらに別のあるものが特別なそして例外的な［扱い］を要求されるならば，類似性は変則的である。

ἀτεχνῶς : (adverb of ἀτεχνής) *simply*, *really*, *absolutely*
ἀτέχνως : (adverb of ἄτεχνος) *without rules of art*, *empirically*
ἄτεχνος : *without art*, *unskilful*, *ignorant of the rules* or *principles of art*, *unskilled*, *unprofessional*, *empirical*, *unsystematic*, *uncreative*

第 3 章

探究法による 2 次方程式の構成

確かに，［互いに］等しくされる，作用された平方の性質は探究法によって適切に識別される。さらに，このような種類の方程式には 3 つの種類がある。［すなわち,］肯定的な (Καταφατικὴ)［もの］，否定的な (Ἀποφατικὴ)［もの］，あいまいな (Ἀμφίβολου)［もの］である。

それゆえ，解析学者はそれらの性質について 3 つの定理を考察することができるであろう。

> καταφατικός : *affirmative*, *emphatic*
> ἀποφατικός : *negative*, *conclusive*
> ἀμφιβολητικός : *ambiguous*
> ἀμφίβολος : *put round*, *encompassing*; *struck* or *attacked on both* or *all sides*, *hitting at both ends*, *double-pointed*; *doubtful*, *ambiguous*; of persons, *in doubt*, *wavering*, *uncertain*

定理 1

肯定的な［方程式］

もし A quad. $+$ B in A が Z quad. に等しくされるならば，それらの中項が Z で，さらに外項の差が B であり，そして A がより小さい外項になる，比例する 3 つの根が存在する。

［このことは,］希望するならば，探究法から［導かれる］。

比例する 3 つの直線の中項および外項の差が与えられたとき，より小さい外項を見出すこと。

なぜならば，直線の中に位置をもつ［直線に関して成り立つ］比較は，何であれ根 —— 単純なもの，平面，または立体，あるいはより高い階級の同次のもの —— に関して適合させることができると，カンパヌス (Giovanni Campano, Campano da Novara, Johannes Campanus : 1220–1296) が比例に関する本の中で言い広めたからである。

それゆえ，Z を 3 つの比例する［直線の］与えられた中項，B をそれらの外項の差とするとき，より小さい外項を見出さなければならない。

それを A とすると，それゆえより大きい［外項］は $A + B$ であろう。より小さい［外項］がより大きい［外項］に掛けられると A quad. $+$ B in A になる。そして，さらに，それらは比例するから，外項によってつくられるものは中項の平方に等しくされる。それゆえ，A quad. $+$ B in A は Z quad. に等しい。そして，これはまさしく［上で］規定されるものである。

$1Q + 10N$ が 144 に等しくされると，$\sqrt{144}$ は 10 だけ離れている外項の間の中項である。そして，$1N$ は比例する 3 つの系列 8，12，18 の中のより小さい外項になる。

> 「探究法 5 巻」(*Zeteticorum Libri Quinque*，1591 年) の第 3 巻探究 I
> 「比例する 3 つの直線の中項および外項の差が与えられたとき，それらの外項を見出すこと。」

定理 2

否定的な［方程式］

もし A quad. $-$ B in A が Z quad. に等しくされるならば，それらの中項が Z で，さらに外項の差が B であり，そして A がより大きい外項になる，比例する 3 つの［根］が存在する。

［このことは］探究法から［導かれる］。 86

比例する 3 つの［直線の］中項および外項の間の差が与えられたとき，より大きい外項を見出す

こと。

それを A とすると，それゆえより小さい［外項］は $A-B$ であろう。より大きい［外項］がより小さい［外項］に掛けられると A quad. $-$ B in A になり，これは Z quad. に等しい。そして，これはまさしく［上で］規定されるものである。

$1Q-10N$ が 144 に等しくされると，$\sqrt{144}$ は 10 だけ離れている外項の間の中項である。そして，$1N$ は比例する 3 つの系列 8，12，18 の中のより大きい外項になる。

定理 3

あいまいな［方程式］

もし B in A $-$ A quad. が Z quad. に等しくされるならば，それらの中項が Z で，外項の和が B であり，そして A がより大きいまたはより小さい外項になる，比例する 3 つの［根］が存在する。

［このことは］探究法から［導かれる］。

比例する 3 つの［直線の］中項および外項の和が与えられたとき，いずれか一方の外項を見出すこと。

なぜならば，Z を与えられた中項，さらに B を［与えられた］外項の和とするとき，より小さい外項を見出さなければならない。それを A とすると，それゆえより大きい［外項］は $B-A$ であろう。それゆえ，B in A $-$ A quad. は Z quadrato に等しくされるであろう。

しかし，A をより大きい外項とすると，より小さい外項は $B-A$ であろう。それゆえ，再び，B in A $-$ A quad. は Z quad. に等しくされるであろう。そのため，A はより小さい外項かあるいはより大きい外項であるといわれることができる。

$26N-1Q$ が 144 に等しくされると，$\sqrt{144}$ はそれらの和が 26 である外項の間の中項である。そして，$1N$ は比例する 3 つの系列 8，12，18 の中のより小さいまたはより大きい外項になる。

「探究法 5 巻」第 3 巻探究 II
「比例する 3 つの中項および外項の和が与えられたとき，それらの外項を見出すこと。」
ここでの定理によれば，肯定的な方程式とは $x^n+ax^m=b$ のような形のもの，否定的な方程式とは $x^n-ax^m=b$ のような形のもの，あいまいな方程式とは $ax^m-x^n=b$ のような形のものを指すようである。

第 4 章
さらに，探究法による 3 次方程式の構成：
特に，辺による作用が現われるそれらの最初［のもの］

同様に，辺による立方の作用によって隠された 3 次方程式の性質は探究法によって確かめる価値がある。次の 3 つの定理がこれに関係する。

定理 1

肯定的な［方程式］

もし A cubus $+$ B quad. in A が B quad, in Z に等しくされるならば，それらの外項の中の，より大きいまたはより小さい，第 1［の項］が B で，さらに第 2［の項］および第 4［の項］の和が Z であり，そして A が第 2［の項］になる，連続的に比例する 4 つ［の項］が存在する。

［このことは］探究法から［導かれる］。

連続的に比例する 4 つの系列において，第 1［の項］，および第 2［の項］および第 4［の項］の

和が与えられたとき，第 2［の項］を見出すこと。

第 2［の項］を A とすると，それゆえ第 4［の項］は $Z-A$ であろう。さらに，第 1［の項］の平方が第 2［の項］の平方に対するように第 2［の項］が第 4［の項］に対するから，第 1［の項］の平方および第 4［の項］による立体は第 2［の項］による立方に等しくされる。それゆえ，A cubus は B quad. in $Z-B$ quad. in A に等しくされるであろう。そして，対照［移項］(antithesis) によって，［上で］整えられたように，A cubus $+$ B quad. in A が B quad. in Z に等しくされるであろう。

もし $1C+64N$ が 2496 に等しくされるならば，外項の中の第 1 のより小さい［項］が $\sqrt{64}$，すなわち 8，で，さらに第 2［の項］および第 4［の項］の和が $\dfrac{2496}{64}$，すなわち 39，であり，そして $1N$ が比例する系列 8，12，18，27 の中の第 2［の項］になる，連続的に比例する 4 つ［の項］が存在する。

そして，もし $1C+729N$ が 18954 に等しくされるならば，外項の中の第 1 のより大きい［項］ 87
が $\sqrt{729}$，すなわち 27，で，第 2［の項］および第 4［の項］の和が $\dfrac{18954}{729}$，すなわち 26，であり，そして $1N$ が同じ系列の中の第 2［の項］になる。

定理 2

否定的な［方程式］

もし A cubus $-$ B quadr. in A が B quad. in D に等しくされるならば，それらの外項の中の第 1 のより小さい［項］が B で，第 2［の項］および第 4［の項］の差が D であり，そして A が第 2［の項］になる，連続的に比例する 4 つ［の項］が存在する。

［このことは］探究法から［導かれる］。

連続的に比例する 4 つの系列において，外項の中の第 1 のより小さい［項］，および第 2［の項］および第 4［の項］の差が与えられたとき，第 2［の項］を見出すこと。

B を外項の中の与えられた第 1 のより小さい［項］，さらに D を第 2［の項］および第 4［の項］の差としよう。連続的に比例する［4 つの項］を見出さなければならない。第 2［の項］を A とすると，それゆえ第 4［の項］は $A+D$ であろう。さらに，第 1［の項］の平方および第 4［の項］による立体は第 2［の項］による立方に等しくされる。それゆえ，A cubus は B quad. in A $+$ B quad. in D に等しくされるであろうし，対照によって，［上で］整えられたように，A cubus $-$ B quad. in A は B quad. in D に等しくされるであろう。

もし $1C-64N$ が 960 に等しくされるならば，それらの第 1［の項］が $\sqrt{64}$，すなわち 8，で，さらに第 2［の項］および第 4［の項］の差が $\dfrac{960}{64}$，すなわち 15，であり，そして $1N$ が［連続的に］比例する系列 8，12，18，27 の中の第 2［の項］になる，連続的に比例する 4 つ［の項］が存在する。

定理 3

あいまいな［方程式］

もし B quad. in A $-$ A cubo が B quad. in D に等しくされるならば，それらの外項の中の第 1 のより大きい［項］が B で，さらに第 2［の項］および第 4［の項］の差が D であり，そして A が第 2［の項］になる，連続的に比例する 4 つ［の項］が存在する。

［このことは］探究法から［導かれる］。

連続的に比例する 4 つの系列において，外項の中の第 1 のより大きい［項］，および第 2［の項］

および第 4［の項］の差が与えられたとき，第 2［の項］を見出すこと。

B を外項の中の第 1 のより大きい［項］，さらに D を第 2［の項］および第 4［の項］の差としよう。第 2［の項］を見出さなければならない。第 2［の項］を A とすると，それゆえ第 4［の項］は $A-D$ であろう。さらに，第 1［の項］の平方および第 4［の項］による立体は第 2［の項］による立方に等しくされる。それゆえ，A cubus は B quad. in $A-B$ quad. in D に等しくされるであろうし，対照［移項］によって，B quad. in $A-A$ cubo は B quad. in D に等しくされるであろう。

もし $729N-1C$ が 7290 に等しくされるならば，それらの第 1［の項］が $\sqrt{}729$ で，さらに第 2［の項］および第 4［の項］の差が $\dfrac{7290}{729}$，すなわち 10，であり，そして $1N$ が［連続的に］比例する系列 27，18，12，8 の中の第 2［の項］になる，連続的に比例する 4 つ［の項］が存在する。

しかしながら，第 2［の項］は，次のような 2 通りの連続的に比例する 4 つの系列のように，2 通りが可能である。

I	II	III	IV
$\sqrt{}59319$	195	$\sqrt{}24375$	125
$\sqrt{}59319$	78	$\sqrt{}624$	8

同時に，外項の中の第 1 のより大きい［項］を $\sqrt{}59319$，第 2［の項］および第 4［の項］の差を 70 のままにしておくことによって，第 2［の項］は後者では 78，前者では 195 になる。それゆえ，同時に，第 1［の項］を 36，第 2［の項］および第 3［の項］の差を 5 のままにしておくことによって，［次のような］2 通りの比例する 3 つの系列が提示される。

36	6	1
36	30	25

第 5 章

平方による作用が存在する 3 次方程式の構成

88 平方による作用によって隠される 3 次方程式は，同様に探究法によって明らかになるように，辺による作用によるものとほとんど同じ項からなる。このことに関係するであろう 3 つの定理が同様に主張されるであろう。

定理 1

否定的な［方程式］

もし A cubus $-$ B in A quad. が B in Z quad. に等しくされるならば，外項の中の第 1 の，より大きいまたはより小さい，［項］が B で，さらに第 2［の項］および第 4［の項］の和が Z であり，A が第 1［の項］および第 3［の項］の和になる，連続的に比例する 4 つ［の項］が存在する。

［このことは］探究法から［導かれる］。

連続的に比例する 4 つの系列において，第 1［の項］，および第 2［の項］および第 4［の項］の和が与えられたとき，第 1［の項］および第 3［の項］の和を見出すこと。

連続的に比例する 4 つの系列において，B を外項の中の与えられた第 1 の，より大きいまたはより小さい，［項］，さらに Z を第 2［の項］および第 4［の項］の和としよう。第 1［の項］および第 3［の項］の和を見出さなければならない。

それを A とすると，それゆえ第 3［の項］は $A-B$ であろう。さらに，A が Z に対するように

B が $\dfrac{B \text{ in } Z}{A}$ に対する。それゆえ，第 1［の項］および第 3［の項］の和が第 2［の項］および第 4［の項］の和に対するように第 1［の項］が第 2［の項］に対するから，$\dfrac{B \text{ in } Z}{A}$ は第 2［の項］であろう。しかし，第 1［の項］および第 3［の項］による長方形は第 2［の項］の平方に等しくされるであろう。それゆえ，B in $A - B$ quad. は $\dfrac{B \text{ quad. in } Z \text{ quad.}}{A \text{ quad.}}$ に等しくされるであろう。すべて［の項］に A quad. が掛けられ，B で割られると，それゆえ A cubus $- B$ in A quad. が B in Z quad. に等しくされるであろう。そして，これは［上で］整えられるものである。

もし $1C - 8Q$ が 12168 に等しくされるならば，外項の中の第 1［の項］が 8 で，第 2［の項］および第 4［の項］の和が $\sqrt{\dfrac{12168}{8}}$，すなわち 39，であり，そして $1N$ の 26 が［連続的に］比例する系列 I　II　III　IV の中の第 1［の項］および第 3［の項］の和になる，連続的に比例する
8　12　18　27
4 つ［の項］が存在する。

定理 2

肯定的な［方程式］

もし A cubus $+ B$ in A quad. が B in D quad. に等しくされるならば，外項の中の第 1 のより小さい［項］が B で，さらに第 2［の項］および第 4［の項］の差が D であり，そして A が第 1［の項］および第 3［の項］の差になる，連続的に比例する 4 つ［の項］が存在する。

［このことは］探究法から［導かれる］。

連続的に比例する 4 つの系列において，外項の中の第 1 のより小さい［項］，および第 2［の項］および第 4［の項］の差が与えられたとき，第 1［の項］および第 3［の項］の差を見出すこと。

B を連続的に比例する 4 つの系列における与えられた第 1 の，そして外項の中のより小さい［項］，さらに D を第 2［の項］および第 4［の項］の差としよう。第 1［の項］および第 3［の項］の差を見出さなければならない。

それを A とすると，それゆえ第 3［の項］は $A + B$ であろう。さらに，A が D に対するように B が $\dfrac{B \text{ in } D}{A}$ に対する。それゆえ，第 1［の項］および第 3［の項］の差が第 2［の項］および第 4［の項］の差に対するように第 1［の項］が第 2［の項］に対するから，$\dfrac{B \text{ in } D}{A}$ は第 2［の項］であろう。しかし，第 1［の項］および第 3［の項］による長方形は第 2［の項］の平方に等しくされる。それゆえ，B in $A + B$ quad. は $\dfrac{B \text{ quad. in } D \text{ quad.}}{A \text{ quad.}}$ に等しくされるであろう。すべて［の項］に A quad. が掛けられ，B で割られると，それゆえ A cubus $+ B$ in A quad. が B in D quad. に等しくされるであろう。そして，これは［上で］整えられるものである。

もし $1C + 8Q$ が 1800 に等しくされるならば，外項の中の第 1［の項］が 8 で，さらに第 2［の項］および第 4［の項］の差が $\sqrt{\dfrac{1800}{8}}$，すなわち 15，であり，そして $1N$ の 10 が［連続的に］比例する系列 I　II　III　IV の中の第 1［の項］および第 3［の項］の差になる，連続的に比
8　12　18　27
例する 4 つ［の項］が存在する。

定理 3 89

あいまいな［方程式］

もし B in A quad. $- A$ cubo が B in D quad. に等しくされるならば，外項の中の第 1 のより大きい［項］が B で，さらに第 2［の項］および第 4［の項］の差が D であり，そして A が第 1

［の項］および第 3［の項］の差になる，連続的に比例する 4 つ［の項］が存在する。

［このことは］探究法から［導かれる]。

連続的に比例する 4 つの系列において，外項の中の第 1 のより大きい［項]，および第 2［の項］および第 4［の項］の差が与えられたとき，第 1［の項］および第 3［の項］の差を見出すこと。

B を連続的に比例する 4 つの系列における与えられた第 1 の，そして外項の中のより大きい［項]，さらに D を第 2［の項］および第 4［の項］の差としよう。第 1［の項］および第 3［の項］の差を見出さなければならない。それを A とすると，それゆえ第 3［の項］は $B-A$ であろう。さらに，A が D に対するように B が $\dfrac{B \text{ in } D}{A}$ に対する。それゆえ，第 1［の項］および第 3［の
項］の差が第 2［の項］および第 4［の項］の差に対するように第 1［の項］が第 2［の項］に対するから，$\dfrac{B \text{ in } D}{A}$ は第 2［の項］であろう。しかし，第 1［の項］および第 3［の項］による長方形は第 2［の項］の平方に等しくされる。それゆえ，B quad. $-$ B in A は $\dfrac{B \text{ quad. in } D \text{ quad.}}{A \text{ quad.}}$ に等しくされるであろう。すべて［の項］に A quadratum が掛けられ，B で割られると，それゆえ B in A quad. $-$ A cubo が B in D quad. に等しくされるであろう。そして，これは［上で］整えられるものである。

もし $27Q-1C$ が 2700 に等しくされるならば，外項の中の第 1 のより大きい［項］が 27 で，さらに第 2［の項］および第 4［の項］の差が $\sqrt{\dfrac{2700}{27}}$，すなわち 10，であり，そして $1N$ が［連続的に］比例する系列 $\begin{matrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} & \text{IV} \\ 27 & 18 & 12 & 8 \end{matrix}$ の中の第 1［の項］および第 3［の項］の差になる，連続的に比例する 4 つ［の項］が存在する。

第 6 章

加えて，探究法による，辺によって作用された 3 次［方程式］の別の構成

しかし，同様に，補足的な (coëfficientis) 平面の 3 分の 1 による立方の 4 倍が与えられた立体の量の平方から退いている［より小さい］(確かに，これは前もって気づかされるであろう) が明らかなとき，探究法によって取り出されるであろう 3 次［方程式］の，辺によって作用される —— 強められた，そしてまた拒否された ——，何らかの特別な性質は無視されるべきではない。その結果，いま，2 つの定理が述べられる。

次の定理 1 は，$A^3+3B^2A=D^3$ ならば，$A=a-b$，$B^2=ab$，$a^3-b^3=D^3$ とできるということ。
この 3 次方程式 $A^3+3B^2A=D^3$ の解は

$$A=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(D^3+\sqrt{D^6+4B^6}\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(D^3-\sqrt{D^6+4B^6}\right)}$$

となる。
また，定理 2 は，$A^3-3B^2A=D^3$ ならば，$A=a+b$，$B^2=ab$，$a^3+b^3=D^3$ とできるということ。
この 3 次方程式 $A^3-3B^2A=D^3$ の解は

$$A=\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(D^3+\sqrt{D^6-4B^6}\right)}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}\left(D^3-\sqrt{D^6-4B^6}\right)}$$

となる。
そして，この定理 2 は $4\left(B^2\right)^3<\left(D^3\right)^2$ の場合。
$4\left(B^2\right)^3>\left(D^3\right)^2$ の場合は定理 3 で，このとき根号の中は負数になる。

定理 1

もし A cubus $+$ B plano ter in A が D solido に等しくされるならば，B planum は，それらからつくられる，D solidum だけ異なっている，立方の辺によってつくられるものであり，そして A は辺の差になる。

［このことは］探究法から［導かれる］。

立方の差および辺による長方形が与えられたとき，辺の差を見出すこと。

もし $1C+6N$ が 7 に等しくされるならば，$\dfrac{6}{3}$，すなわち 2，は，それらからつくられる，7 だけ異なっている，立方の辺による長方形であり，そして $1N$ は，辺 1 および 2 の仮定により，辺の差になる。

「探究法 5 巻」第 2 巻探究 XV
「立方の差および辺による長方形が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。」

定理 2

もし A cubus $-$ B plano ter in A が D solido に等しくされ，さらに D solidi の平方が B plani の立方の 4 倍にまさるならば，B planum は，それらからつくられる，D solidum を構成している，立方の辺による長方形であり，そして A は辺の和になる。

［このことは］探究法から［導かれる］。

辺による長方形および立方の和が与えられたとき，辺を見出すこと。

もし $1C-6N$ が 9 に等しくされるならば，$\dfrac{6}{3}$，すなわち 2，は，それらによる立方の和が 9 に 90
なる，辺による長方形であり，そして $1N$ は，辺 1 および 2 の仮定により，辺の和になる。

「探究法 5 巻」第 2 巻探究 XVI
「立方の和および辺による長方形が与えられたとき，それらの辺を見出すこと。」

さらに，同じ定理は次のように幾何学的に表現されるであろう。

別の方法

第 1 の定理

もし A cubus $+$ B plano ter in A が B plano in D に等しくされるならば，中項あるいは外項による［長方形］が B planum になり，さらに外項の差が D であり，そして A が中項の差になる，連続的に比例する 4 つの直線が存在する。

［このことは］探究法から［導かれる］。

［連続的に］比例する 4 つの系列において，外項の差および中項あるいは外項による長方形が与えられたとき，中項の差を見出すこと。

もし $1C+24N$ が 56 に等しくされるならば，中項あるいは外項による［長方形］が $\dfrac{24}{3}$，すなわち 8，に等しい平面になり，さらに外項の差が $\dfrac{56}{8}$，すなわち 7，であり，そして $1N$ が連続的に比例する系列 1，2，4，8 の中の中項の差になる，連続的に比例する 4 つ［の直線］が存在する。

別の方法

第 2 の定理

もし A cubus $-$ B plano ter in A が B plano in D に等しくされ，さらに D の半分の平方が B

plano より大きければ，中項あるいは外項による［長方形］が B planum になり，さらに外項の和が D であり，そして A が中項の和になる，連続的に比例する 4 つの直線が存在する。

［このことは］探究法から［導かれる］。

連続的に比例する 4 つの系列において，外項の和および中項あるいは外項による長方形が与えられたとき，中項の和を見出すこと。

もし $1C - 24N$ が 72 に等しくされるならば，中項あるいは外項による［長方形］が $\dfrac{24}{3}$，すなわち 8，に等しい平面になり，さらに外項の和が $\dfrac{72}{8}$，すなわち 9，であり，そして $1N$ が連続的に比例する系列 1，2，4，8 の中の中項の和になる，連続的に比例する 4 つ［の直線］が存在する。

しかし，補足的な平面の 3 分の 1 による立方の 4 倍が与えられた立体の量の平方にまさるとき，この状態において，あいまいなまたは逆の向きに拒否されるもののために，方程式は異なった性質を獲得する。次の定理がこれに関係する。

定理 3

もし A cubus $-$ B plano ter in A が D solido に等しくされ，さらに D solidi の平方が B plani の立方の 4 倍から退いているならば，B planum ter in E $-$ E cubo が再び D solido に等しくされるであろうし，そして E は 2 つの辺［のいずれか］で，それらの辺そのものによる長方形が加えられたそれぞれの平方［の和］から［3］B planum がつくられると主張される。

さらに，長方形が加えられた残りの平方が掛けられた 1 つの辺からつくられるもの，または長方形が掛けられた辺の和からつくられる別のものが D solidum である。確かに，A はそれらの辺の和であると主張される。

> $A^3 - 3B^2A = D^3$ のとき，$\left(D^3\right)^2 < 4\left(B^2\right)^3$ ならば，$3B^2 = a^2 + b^2 + ab$，$D^3 = ab(a+b) = a\left(ab + b^2\right) = b\left(a^2 + ab\right)$，$A = a + b$ とできるということ。
> また，E を a あるいは b とするとき，$3B^2E - E^3 = D^3$ になるという。

［このことは］探究法から［導かれる］。

2 つの辺による平方の和およびそれらによる長方形からなる平面，および，加えて，長方形が掛けられた辺の和からつくられる立体が与えられたとき，辺を，あるいは辺の和さえ，見出すこと。

もし $1C - 21N$ が 20 に等しくされるならば，7 による立方の 4 倍は 400［20 の平方］より大き
91 いから，それゆえ $21N - 1C$ は 20 に等しくされるであろうし，辺による長方形が加えられた平方から 21 がつくられ，さらに長方形が掛けられた辺の和が 20 であり，そして $1N$ は，辺 1 および 4 の仮定により，逆の向きに拒否された方程式において，［2 つの］辺の中のいずれか —— より大きいかより小さいか —— になるか，他方，まっすぐに拒否された［方程式］において，それらの辺そのものの和になる，2 つの辺が存在する。

> 3 次方程式 $x^3 - 21x = 20$ に関して，$a^2 + b^2 + ab = 21$，$ab(a+b) = 20$ とすると，$(a,\ b) = (1,\ 4)$，$(1,\ -5)$，$(4,\ 1)$，$(4,\ -5)$，$(-5,\ 1)$，$(-5,\ 4)$ が得られる。
> $a > 0$，$b > 0$ の範囲で考えると，$(a,\ b) = (1,\ 4)$，$(4,\ 1)$ ということになり，
> $21 \times 1 - 1^3 = 20$，$21 \times 4 - 4^3 = 20 \quad \longleftarrow$ 逆の向きに拒否された方程式
> $(1+4)^3 - 21 \times (1+4) = 20 \quad \longleftarrow$ まっすぐに拒否された方程式
> が成り立つ。

そして実際，幾何学的な表現においても大きな違いはないであろう。確かに，幾何学者は言うであろう。[3] B planum は［連続的に］比例する 3 つの直線による平方の和で，さらに D solidum は中項の平方が掛けられた外項の和から，または残りによる平方の［外項の積との］和が掛けられた一方の外項からつくられる立体であり，そして A は外項の和になり，さらに E は第 1 あるいは第 3［の直線］になる，と。

それゆえ，提示された論題において，21 は［連続的に］比例する 3 つ［の直線］による平方の和で，立体である 20 は，［連続的に］比例する系列 1，2，4 の中の，中項の平方が掛けられた外項の和から，または残りによる平方［と外項の積との和］が掛けられた一方の外項から［つくられる立体］である。

しかし，このような種類の方程式の性質は角の切断の解析によってより優雅にそしてより優れた仕方で探し出され，より巧妙にそしてよりよくこの法則に適合する。

別の方法

第 3 の定理

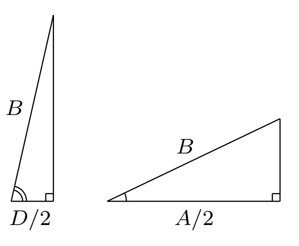
もし A cubus $-$ B quad. 3 in A が B quad. in D に等しくされ，さらに B が D の半分より大きければ，B quad. 3 in E $-$ E cubo が B quad. in D に等しくされるであろう。

そして，斜辺が B に等しい 2 つの直角三角形が存在し，第 1［の三角形］の垂線から下に伸ばされた鋭角は第 2［の三角形］の垂線から下に伸ばされた鋭角の 3 倍で，さらに第 1［の三角形］の底線の 2 倍が D であり，そして A が第 2［の三角形］の底線の 2 倍になる。一方，E は，平方されることによって同じ垂線の 3 倍にできる，長さによって縮められたかまたは延長された，第 2［の三角形］の単純な底線である。

［もし］$1C - 300N$ が 432 に等しくされる，あるいはそのうえ $300N - 1C$ が 432 に等しくされるならば，それらの共通の斜辺が 10 であり，明らかに，第 1［の三角形］の垂線から下に伸ばされた鋭角が第 2［の三角形］の垂線から同様に下に伸ばされた鋭角の 3 倍になり，さらに第 1［の三角形］の底線の 2 倍が $\dfrac{432}{100}$ であり，そして $1N$ は，まっすぐに拒否された方程式においては第 2［の三角形］の底線の 2 倍で，一方，逆の向きに拒否された［方程式］においては第 2［の三角形］の単純な底線，足すまたは引く，平方されることによって第 2［の三角形］の垂線の 3 倍にできる［長さ］である，2 つの直角三角形が存在する。

共通の斜辺が 10，第 2 の三角形の底線が 9 とおかれると，同じ第 2［の三角形］の垂線が $\sqrt{19}$ になる。

さらに，第 1［の三角形］の斜辺が 10 のままでいると，底線は $2\dfrac{16}{100}$ になる。それゆえ，同じ仮定において $1C - 300N$ が 432 に等しいといわれるとき，$1N$ は 18 になり，あるいは $300N - 1C$ が 432 に等しいといわれるとき，$1N$ は $9 + \sqrt{57}$ あるいは $9 - \sqrt{57}$ になる。



3 次方程式 $A^3 - 3B^2A = B^2D$ の解は

$$A = \sqrt[3]{\frac{B^2}{2}\left(D + \sqrt{D^2 - 4B^2}\right)} + \sqrt[3]{\frac{B^2}{2}\left(D - \sqrt{D^2 - 4B^2}\right)}$$

であるが，$B > \dfrac{D}{2}$ のとき，斜辺が B で，底線が $\dfrac{D}{2}$ であ

る第 1 の直角三角形，および斜辺が同じく B で，底線が $\dfrac{A}{2}$ あるいは E である第 2 の直角三角形がつくられるということ。

このとき，第 1 の三角形の底線に隣接する鋭角は第 2 の三角形の底線に隣接する鋭角の 3 倍であり，$E=\dfrac{A}{2}\pm\sqrt{3\left(B^2-\dfrac{A^2}{4}\right)}$ になるという。

$$x^3-3B^2x+B^2D=x^3-3B^2x+A^3-3B^2A=x^3+A^3-3B^2(x+A)$$
$$=(x+A)(x^2-Ax+A^2-3B^2)$$

である［逆の向きに拒否された方程式］ことから，

$$x\,[\,=E]=\frac{1}{2}\left(A\pm\sqrt{A^2-4\left(A^2-3B^2\right)}\right)=\frac{A}{2}\pm\sqrt{3\left(B^2-\frac{A^2}{4}\right)}$$

となる。

いま，$1C-300N=432$ とすると，$B^2=100$，$D=\dfrac{432}{100}$ であり，$A=18$ が得られるから，第 2 の三角形の底線を $\dfrac{A}{2}=9$ とすれば，第 2 の三角形の垂線は $\sqrt{10^2-9^2}=\sqrt{19}$ となる。

そして，$E=9\pm\sqrt{3\times\left(\sqrt{19}\right)^2}=9\pm\sqrt{57}$ となる。

なお，$x^3-300x=432$ の解は $x=18$，$-9\pm\sqrt{57}$ であり，$300x-x^3=432$ の解は $x=9\pm\sqrt{57}$，-18 である。

そのうえ，これらのことは，探究法によって理解されるであろう，作用されたベキをもつ，方程式の性質のために与えられる例である。確かに，単純に作用された［ベキをもつ方程式］についての定理だけが提示されていたけれども，しかし，どのようにしてさまざまに作用された［ベキをもつ方程式］に関して［定理が］適用されるかは，特にそれらの形成法が暴かれるであろうから，ほとんど知られていなくはないであろう。それゆえ，このことについて言われるであろう場所が近づいている。確かに，それによって前にいわれた性質が取り出された，探究法そのものはすでに提示された抜粋の中に十分に現れていたことが明らかであったから，この最後の定理は，角の切断が関係している小さな森に関する特別な探究法に委ねられることに等しいのであるから，除外された。

第 7 章

方程式の変形の一般的な方法について

形成法の規則は一般的に，はじめに提示されそして証明されるであろう，方程式の変形の教義に依存している。

根の置換による変形について

方程式の変形［についての議論］は 2 つの形式［がある］という警告から着手される。すなわち，一方は，はじめに見出されるものについての根を置換することになるもので，他方は，［根を］置換させずにそのままにしておくものである。

しかし，置換がどのような種類のものになろうと，はじめの根および新しい［根］はそれらの間に与えられた差あるいは比をもつから，1 つが知られるようになったときにはもう 1 つが知られないということはありえない。

それゆえ，変形の操作に関して，求められた一方の根は同じく求められるであろう他方［の根］と等しい。そしてさらに，このことの容認によって［方程式は］新しい外観を装い，それによってはじめに定められた方程式は調整され，そして新しい［形に］整えられる。

そして，確かに，多くの方法によって，それについて探し求められる根は巧妙に置換することが

でき，新しい外観によって［方程式を］提供することができる。そして，その新しい外観そのものによってはじめに提示されていた方程式を調整する方法は不変であり，それらのどのような方法によっても［方程式は］単一の形である。

このことを明らかにするために，根 A に関して与えられるであろう何らかの方程式が提示され，そして，Z を残りのものに等しくされるべき大きさとしよう。そして，その提示された方程式を，置換した根についての技法によって，変形しなければならない。

それゆえ，第 1 に，根 A は置換することができ，新しい外観は加法によって表される。このことの容認および立証のために $A+B$ が E であるとするのだから，ゆえに $E-B$ が A であろう。

第 2 に，減法によって。このことの容認および立証のために $A-B$ が E であるとするのだから，ゆえに A は $E+B$ であろう。あるいは，さらに $B-A$ が E であるとするのだから，ゆえに $B-E$ が A であろう。

第 3 に，乗法によって。このことの容認および立証のために B in A が E planum であるとするのだから，ゆえに $\dfrac{E \text{ planum}}{B}$ が A であろう。

第 4 に，除法によって。このことの容認および立証のために $\dfrac{A \text{ planum}}{B}$ が E であるとするのだから，ゆえに B in E が A planum であろう。

第 5 に，単純な比による (rationis explicitae) 比例によって。B が G に対するように A が E に対するものと認められるのだから，次いで比例が解かれ，そして立証されると，ゆえに $\dfrac{B \text{ in } E}{G}$ が A であろう。

第 6 に，もつれた比による (rationis implicitae) 比例によって。A が B に対するように G が E に対するものと認められ，次いで比例が解かれ，そして立証されるのだから，ゆえに $\dfrac{B \text{ in } G}{E}$ が A であろう。

第 7 に，どのような種類の方程式においても実体の比較によって。平方［2 次方程式］に関して E quad. $+$ A in E が D plano に等しい —— これは平方が強められるように作用された方程式である —— と認められ，次いで立証されるのだから，ゆえに $\dfrac{D \text{ plano} - E \text{ quad.}}{E}$ が A であろう。

あるいは，E quad. $-$ E in A が D plano に等しい —— これは平方が拒否されるように作用された方程式である —— と認められ，そして立証されると，ゆえに $\dfrac{E \text{ quad.} - D \text{ plano}}{E}$ が A に等しくされるであろう。

あるいは, 最後に, E in $A-E$ quad. が D plano に等しい —— これは辺による平面が平方によって拒否された方程式である —— と認められ，そして立証されると，ゆえに $\dfrac{E \text{ quad.} + D \text{ plano}}{E}$ が A に等しくされるであろう。

最後に，適切な方法によって，そして，より大きな目標そのものに注意を払うことによってつくられたものが推し量られ，巧妙に工夫され，さらに試みられるであろう方法によって。

しかし，装った文字 A が何であろうと方程式は同様に変形されるであろうし，新しい［方程式］ 93
は E について整えられるであろう。もしそれが提示された方程式において A に関して表現されることならば，同じことは装った文字 A と同様に新しい［文字］に関して表現されるはずである。

すなわち，A が，$A+B$ が E であると表現されることによって，加法によって置換されると，上述のようにそのために $E-B$ は A になり，それゆえ $E-B$ によってもたらされるであろうベキは A によって提示されたものと等しく，そして，同様に，等しくされた階級は，変わることのない

補足的なものからもたらされるものにおいて，同次のものの同じ作用［をもつもの］へとつくられるであろう。要するに，このような種類のつくられたものは提示された同次のものに等しくされるであろう。それゆえ，［元の方程式が］指示された技法に従って清められると，それゆえ最後には，E についての方程式が整えられる。そして，そのうえ，［元の方程式は］E に関する，すなわち増分 B が延長された［付け加えられた］A によって表現されるであろう，新しい方程式に変形されるであろう。これがなされるべきことであった。

A の値がつねに表現される，どのような方法によって置換するにしても，［同じことが］その他［の方法］の中にその位置をもつことは明らかである。

根を置換しない変形について

第 2 の警告に関して，方程式の根を置換しないで変形することは方程式の階級を低下させることあるいは高めることである。

さらに，上昇によるにせよあるいは下降によるにせよ，漸層法 (climax) は規則的なあるいは不規則な［仕方によって］行われる。

上昇による漸層法は，提示された方程式の，熟練した［人の］努力によって整然とあるいは不具合に割り当てられた，両方の部分［辺］が平方，立方，そしてより高い階級に導かれるとき，規則的になる。一方，下降［による漸層法］は，下位の平方，下位の立方，そしてより低い下位の —— 確かに，そこに，与えられたあるいは探し求められるであろう，補足的なものが取り入れられた —— 階級に割り当てられるとき［，規則的になる］。さらに，導かれたあるいは割り当てられた後で，すべて［の項］は適切に整えられる。

さらに，上昇［による漸層法］は，提示された方程式がそれらからなる，すべての単独の同次のものが，純粋であるにせよあるいは与えられた一致している大きさによって作用されたまたは作用されているにせよ，等しくされた同じ階級が掛けられたとき，不規則になる。そして，掛けられたもの［積］は一致している解釈および配置を承認する。

それに対して，下降［による漸層法］は，そのすべての単独の同次のものが，純粋であるかまたは作用しているか作用された与えられた種類の大きさによって，探し求めた根に関してあるいはベキより下位の根の階級に関して結びつけられるとき［，不規則になる］。そして，確かに，その与えられたあるいは探し求められるであろう補足的なものに関して割り当てられ受け入れられたものは一致している解釈および配置を承認する。

確かに，どのようなものであれ巧みな変形の種類に関する証明は，長さにおいて等しいものは類似したベキにおいても同様に等しく，逆もそうであるから，共通の除数あるいは乗数が同等性や比を変えることはないということを直ちに明らかにする。

そのうえ，我々によって一般に提示されたものが特別な規則および例を必要としているような，これらのことは，調査されたであろう巧みな変形の例をつくり出すのに応じて，あちらこちらのよりふさわしい場所に拡張されるであろうということが認められるであろう。

第 8 章

個々の形成法について

形成法は，純粋なものあるいはより小さいものが作用されたものから同等に高い［ベキ］が，あるいはさらに，より低い［ベキ］からより高い［ベキ］が導かれるとき，方程式に内在していると理解される。

それゆえ，形成法は，除法および下降された漸層法を除いて，すべての変形の仕方によって確立することができる。 94

形成法およびその独特な使用法［の研究］の目的は，もしそれによってそのことが大いに望まれているならば，形成法によってそれらから導き出されたより単純なもの［に変形された］と認められた方程式を解くことである。

心象がそのことを把握するであろうとき，それを注意深く書きつけるであろうし，ついにはそれ自身のしるしを技法の長所および明確さの中に見出すであろう。

そして，完全に注目に値する第 1 のことはこれであろう。

もしそれぞれの階級によって作用されたあるいは［それらに］作用するベキがそれに等しくされるならば，加法あるいは減法の方法による形成法が存在する。なぜなら，根は，ベキの状況に従ってより高い階級における補足的なものから選択された，上昇あるいは下降によって作用された［ものである］と理解されるだろうからである。

すなわち，平方において，根は辺における補足的なものの半分によって作用されていた。立方において，［根は］平方における補足的なものの 3 分の 1 によって［作用されていた］。平方の平方において，［根は］立方における補足的なものの 4 分の 1 によって［作用されていた］。平方の立方において，［根は］平方の平方における補足的なものの 5 分の 1 によって［作用されていた］。そして，［このことは］同じ進行によって続く。

それゆえ，どのようなものであれ作用された平方は純粋な［ベキ］から始まることを主張する。平方および辺によって作用された立方は辺によって作用された立方から［始まる］。立方，平方および辺によって作用された平方の平方は平方あるいは辺，または辺と同様に平方の双方によって作用された平方の平方から［始まり］，そしてその順序で続く。

［注目に値する］第 2［のことは次のこと］であろう。もしベキがその根に関して平面または立体，あるいはより高い階級の同次のものであるならば，乗法あるいは包み込まれた比率の方法による形成法が存在する。

それゆえ，平方によって作用された平方の平方は辺によって作用された平方から始まることを主張する。なぜなら，それぞれの同次のものからなる方程式におけるすべて［の項］は辺による補足的なものの平方との積だからである。そしてそこから，平方の平方からつくられた根は辺による補足的なものおよび提示されていた最初の根の間の中間比であると理解される。

それゆえ，立方によって作用された立方の立方は，同様に，辺によって作用された平方から始まることを主張する。そしてそこから，立方の立方からつくられた根は，辺による補足的なものが第 1［の項］であり，さらに提示されていた同じ最初の根が第 4［の項］であるような，連続的に比例する［4 つの項のうちの］第 2［の項］になる。

それゆえ，平方の平方によって作用された立方の立方は，それぞれの同次のものからなる方程式におけるすべて［の項］は平方による補足的なものと立方との積であるから，平方によって作用された立方から始まることを主張する。そしてそこから，立方の立方からつくられた根は平方による補足的なものおよび提示されていた最初［の根］の間の中間比である。

［注目に値する］第 3［のことは次のこと］であろう。その階級に等しくするもの —— それが 1 つでも多くでも —— によって作用されたそれぞれの平方の平方は形成法［の結果］である。すなわち，その始まりを辺によって作用された平方から上昇された漸層法によって導く。

平方の平方が辺によって作用されると，それから平方の平方が導かれた平方が作用された，それぞれの同次のものからなる方程式は，平方のしるしが方程式の 1 つの部分［辺］をつくり，さらに辺による平面が与えられた比較の大きさとともにもう 1 つ［の辺］をつくるように，その区分を許容する。そして，ついには，平方に導かれた両方の部分［辺］において，平方による同次のものは適当な解釈を受け取ったであろう。しかもそのうえ，すべて［の項］は［適切に］整えられたであろう。

95 一方，平方の平方が辺とともに平方によっても作用されると，それから平方の平方が導かれた平方が作用された，それぞれの同次のものからなる方程式は，平方のベキが与えられた比較の平面の 4 分の 1 あるいは同じものの延長とともに方程式の 1 つの部分［辺］をつくり，さらに辺による平面が与えられた比較の平面の残りあるいは同じものを延長したものとともにもう 1 つの部分［辺］をつくるように，その区分を許容する。しかもそのうえ，平方によって導かれた両方の部分［辺］において，すべて［の項］は［適切に］整えられたであろう。

最後に，平方の平方が立方によって作用されると，それから平方の平方が導かれた平方が作用された，それぞれの同次のものからなる方程式は，平方のしるしが辺による平面とともに方程式の 1 つの部分［辺］をつくり，さらに与えられた比較の平面がもう 1 つ［の辺］をつくるように，その区分を許容する。そして，平方が導かれた両方の部分［辺］は辺と同様に平方の双方による同次のものとして適当な解釈を受け取ったであろう。しかもそのうえ，すべて［の項］は［適切に］整えられたであろう。

［注目に値する］第 4 そして最後［のこと］は，上昇された不規則な漸層法による作用はすべての立方を平方から導くことができるということである。しかし，同様に高くそして［同様に］作用されたベキの方程式によるのでなければ，それらに関してはじめのものに還元する方法は開かれていない。それにもかかわらず，そこから確立された方程式の性質は非常に有益である。

しかし，不規則な形成法の中で，特別に注目するに値することはそれらがベキに関して拒否されるような作用の同次のものに関係するということである。それら自身は，加法あるいは減法による形成法によって確立された，純粋な平方の方程式［2 次方程式］からその最初の始まりがもたらされる。なぜならば，何であれ提示された根より大きい補足的なものが，仮定によって保証されているあるいは拒否されているものによって，形成法に従ってつけ加えられるとき，方程式においてつねに平方に関して拒否された辺による平面が生じるからである。そしてそこから，［次のような］結論が［導かれる］。

ベキが作用された同次のものから拒否されるときはいつでも，ベキの 2 重の根が存在する。その 2 重の平方の結果として残っているすべて［の根］は最初の好都合な根の 2 重性から流れ，そして導かれる。

形成法，すなわち方程式の変形の方法，が 4 つ示されている。

① 加法あるいは減法によるもの。
② 乗法によるもの。
③ 上昇された漸層法によるもの。
④ 上昇された不規則な漸層法によるもの。

『解析術』はこれらのことに関して次のような例を挙げている。

② について。

例えば，$x^2+ax=N$ であるとき，$ax=y^2$，すなわち $a:y=y:x$，とすると，$x=\dfrac{y^2}{a}$ であることから，$y^4+a^2y^2=a^2N$ となる［第 12 章定理 1］。
すなわち，「平方によって作用された平方の平方」である $y^4+a^2y^2=a^2N$ は「辺によって作用された平方」である $x^2+ax=N$ から，$a:y=y:x$ とすることによって，導かれる。
また，「立方によって作用された立方の立方」$y^6+a^3y^3=a^4N$ は，$x^2+ax=N$ において $a^2x=y^3$，すなわち $a:y=y:z=z:x$，とすることによって得られる［第 12 章定理 4］。
さらに，$x^3+ax^2=N$ であるとき，$ax=y^2$，すなわち $a:y=y:x$，とすれば，$y^6+a^2y^4=a^3N$ となる［第 12 章定理 7］。

③ について。
例えば，$x^2+ax=N$ であるとき，$x^2=N-ax$ の両辺を 2 乗すると $x^4=N^2-2axN+a^2x^2=N^2-2axN+a^2(N-ax)=N^2-2axN+a^2N-a^3x$ となるから，$x^4+x(2aN+a^3)=N^2+a^2N$ となる［第 13 章定理 1］。
また，$x^2+ax=N+M$ であるとき，$x^2-M=N-ax$ の両辺を 2 乗すると $x^4-2x^2M+M^2=N^2-2Nax+a^2x^2$ となるから，$x^4+x^2(-2M-a^2)+x(2aN)=N^2-M^2$ となる［第 13 章定理 4］。
さらに，$x^2+ax=N$ であるとき，$x^2=N-ax$ より $x^3=Nx-ax^2$ であるから $x=\dfrac{x^3+aN}{N+a^2}$ となる。それゆえ，$x^2=N-\dfrac{ax^3+a^2N}{N+a^2}=\dfrac{N^2-ax^3}{N+a^2}$ となる。一方，$x^4+2ax^3+a^2x^2=N^2$ であるから，$x^4+2ax^3+\dfrac{a^2N^2-a^3x^3}{N+a^2}=N^2$ となる。これから，$x^4+\dfrac{2aNx^3+a^3x^3+a^2N^2}{N+a^2}=N^2$ となるから，$x^4+x^3\dfrac{2aN+a^3}{N+a^2}=\dfrac{N^3}{N+a^2}$ が得られる［第 13 章定理 10］。

④ について。
例えば，$x^2+ax=N$ であるとき，$x^3+ax^2=Nx$ であるから，$x^3+a(N-ax)=Nx$ すなわち $x^3+aN-a^2x=Nx$ となって，$x(N+a^2)-x^3=aN$ が得られる［第 14 章定理 1］。

第 9 章
純粋［なベキ］からの作用された平方の導出

これらのそれぞれのことを明らかにするために，私たちが述べてきた形成法に関係するいくつかの定理の寄せ集めが直ちに従う。

定理 1

もし A quad. が Z plano に等しくされるならば，$A+B$ を E とすると，E quad. $-$ B in E 2 は Z plano $-$ B quad. に等しくされるであろう。

なぜならば。A quad. は Z plano に等しいと提示されていて，さらに $A+B$ は根 E に等しいから，ゆえに $E-B$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，$E-B$ による平方は Z plano に等しくされるであろう。さらに，その平方はそれぞれの平面 E quad. $-$ B in E 2 $+$ B quad. からなる。それゆえ，これらのすべて［の項］を整えると，言明されていたように，E quad. $-$ B in E 2 が Z plano $-$ B quad. に等しくされるであろう。

定理 2

もし A quad. が Z plano に等しくされるならば，$A-B$ を E とすると，E quad. $+$ B in E 2 は Z plano $-$ B quad. に等しくされるであろう。

なぜならば。A quad. は Z plano に等しくされ，さらに $A-B$ は根 E に等しいから，ゆえに $E+B$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，$E+B$ による平方は Z plano に等しくされるで

あろう。さらに，その平方はそれぞれの平面 E quad. $+$ B in E 2 $+$ B quad. からなる。それゆえ，すべて［の項］を適切に整えると，言明されていたように，E quad. $+$ B in E 2 が Z plano $-$ B quad. に等しくされるであろう。

96 **定理 3**

もし A quad. が Z plano に等しくされるならば，$B-A$ あるいは $A+B$ を E とすると，B in E 2 $-$ E quad. は B quad. $-$ Z plano に等しくされるであろう。

なぜならば。A quad. は Z plano に等しいと提示されていて，さらに $B-A$ は根 E に等しいから，それゆえ，$B-E$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，$B-E$ による平方は Z plano に等しくされるであろう。さらに，それらの平方は B quad. $-$ B in E 2 $+$ E quad. からなる。それゆえ，すべて［の項］を適切に整えると，言明されていたように，B in E 2 $-$ E quad. が B quad. $-$ Z plano に等しくされるであろう。

そして，もし $A+B$ が E に等しくされるならば，それゆえ $E-B$ が A に等しくされる。それゆえ，$E-B$ による平方は Z plano に等しくされるであろう。それらの平方は E quad. $-$ B in E 2 $+$ B quad. からなる。それゆえ，すべて［の項］を適切に整えると，同様に言明されていたように，B in E 2 $-$ E quad. が B quad. $-$ Z plano に等しくされるであろう。

第 10 章

辺によって作用された立方からの，平方によって作用されたいくつかの立方の導出

定理 1

もし A cubus $-$ B quad. ter in A が Z solido に等しくされるならば，$A-B$ を E とすると，E cubus $+$ B in E quad. 3 は Z solido $+$ B cubo 2 に等しくされるであろう。

なぜならば。A cubus $-$ B quad. 3 in A は Z solido に等しくされ，さらに $A-B$ は根 E に等しいから，それゆえ，$E+B$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，B quad. 3 in $\overline{E+B}$ による立体が罰せられた［取り去られた］$\overline{E+B}$ による立方は Z solido に等しくされるであろう。さらに，$\overline{E+B}$ による立方は E cubo $+$ B in E quad. 3 $+$ B quad. in E 3 $+$ B cubo からなる。一方，作用された立体は $-$ B quad. in E 3 $-$ B cubo 3 である。それゆえ，すべて［の項］が適切に整えられると，言明されていたように，E cubus $+$ B in E quad. 3 が Z solido $+$ B cubo 2 に等しくされるであろう。

別の定理 1

もし A cubus $-$ B quad. ter in A が Z solido に等しくされるならば，$A+B$ を E とすると，E cubus $-$ B in E quad. 3 は Z solido $-$ B cubo 2 に等しくされるであろう。

なぜならば。A cubus $-$ B quad. 3 in A が Z solido に等しくされ，さらに $A+B$ は根 E に等しいから，それゆえ，$E-B$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，B quad. 3 in $\overline{E-B}$ による立体が罰せられた $\overline{E-B}$ の立方は Z solido に等しくされるであろう。さらに，$\overline{E-B}$ による立方は E cubo $-$ B in E quad. 3 $+$ B quad. in E 3 $-$ B cubo からなる。一方，作用された立体は $-$ B quad. in E 3 $+$ B cubo 3 である。それゆえ，すべて［の項］が適切に整えられると，言明されていたように，E cubus $-$ B in E quad. 3 が Z solido $-$ B cubo 2 に等しくされるであろう。

定理 2

もし B quad. ter in A $-$ A cubo が Z solido に等しくされるならば，$B-A$ を E とすると，B

in E quad. $3-E$ cubo は B cubo $2-Z$ solido に等しくされるであろう。

なぜならば。B quad. 3 in $A-A$ cubo が Z solido に等しくされ，さらに $B-A$ は根 E に等しいから，それゆえ，$B-E$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，$\overline{B-E}$ による立方が少ない B quad. 3 in $\overline{B-E}$ による立体は Z solido に等しくされるであろう。さらに，この作用された立体は B cubo $3-B$ quad. in E 3 からなる。一方，この立体から拒否された立方は $-B$ cubo $+B$ quad. in E $3-E$ quad. in B $3+E$ cubo［からなる］。それゆえ，すべて［の項］が適切に整えられると，言明されていたように，B in E quad. $3-E$ cubo が B cubo $2-Z$ solido に等しくされるであろう。

別の定理 2

もし B quad. ter in $A-A$ cubo が Z solido に等しくされるならば，$B+A$ を E とすると，B in E quad. $3-E$ cubo は B cubo $2+Z$ solido に等しくされるであろう。

なぜならば。B quad. 3 in $A-A$ cubo が Z solido に等しくされ，さらに $B+A$ は根 E に等 97
しいから，それゆえ，$E-B$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，$\overline{E-B}$ による立方が少ない B quad. 3 in $\overline{E-B}$ による立体は Z solido に等しくされるであろう。さらに，この作用された立体は B quad. in E $3-B$ cubo 3 からなる。一方，この立体から拒否された立方は $-E$ cub. $+B$ in E quad. $3-B$ quad. in E $3+B$ cubo［からなる］。それゆえ，すべて［の項］が適切に整えられると，B in E quad. $3-E$ cubo が B cubo $2+Z$ solido に等しくされるであろう。

第 11 章

辺によって作用された立方からの，平方と同様に辺の双方によって作用された立方の導出

定理 1

もし A cubus $+D$ plano in A が Z solido に等しくされるならば，$A+B$ を E とすると，E cubus $-B$ in E quad. $3+\overline{B\text{ quad. }3+D\text{ plano}}$ in E は Z solido $+D$ plan. in $B+B$ cubo に等しくされるであろう。

なぜならば。A cubus $+D$ plano in A が Z solido に等しいと提示されていて，さらに $A+B$ は根 E に等しいから，それゆえ，$E-B$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，D plano in $\overline{E-B}$ による立体が付け加えられた $\overline{E-B}$ による立方は Z solido に等しくされるであろう。さらに，$\overline{E-B}$ による立方は E cubo $-B$ in E quad. $3+B$ quad. in E $3-B$ cubo からなる。一方，作用の立体は $+D$ plano in $E-D$ plano in B［からなる］。それゆえ，すべて［の項］が適切に整えられると，言明されていたように，E cubus $-B$ in E quad. $3+\overline{B\text{ quad. }3+D\text{ plano}}$ in E は Z solido $+D$ plano in $B+B$ cubo に等しくされるであろう。

定理 2

もし A cubus $+D$ plano in A が Z solido に等しくされるならば，$A-B$ を E とすると，E cubus $+B$ in E quad. $3+\overline{B\text{ quad. }3+D\text{ palno}}$ in E は Z solido $-D$ plano in $B-B$ cubo に等しくされるならば，

なぜならば。A cubus $+D$ plano in A が Z solido に等しくされ，さらに $A-B$ は根 E に等しいから，それゆえ，$E+B$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，D plano in $\overline{E+B}$ による立体が付け加えられた $\overline{E+B}$ による立方は Z solido に等しくされるであろう。さらに，$\overline{E+B}$ による立方は E cubo $+B$ in E quad. $3+B$ quad. on E $3+B$ cubo からなる。一方，作用の立体

は $+\,D$ plano in $E+D$ plano in B［からなる］。それゆえ，すべて［の項］が適切に整えられると，言明されていたように，E cubus $+\,B$ in E quad. $3+\overline{B\text{ quad. }3+D\text{ pl.}}$ in E は Z solido $-\,D$ plano in $B-B$ cubo に等しくされるであろう。

定理 3

もし A cubus $+\,D$ plano in A が Z solido に等しくされるならば，$B-A$ を E とすると，E cubus $-\,B$ in E quad. $3+\overline{B\text{ quad. }3+D\text{ plano}}$ in E は B cubo $+\,D$ plano in $B-Z$ solido に等しくされるであろう。

なぜならば。A cubus $+\,D$ plano in A が Z solido に等しくされ，さらに $B-A$ は根 E に等しいから，それゆえ，$B-E$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，D plano in $\overline{B-E}$ による立体が付け加えられた $\overline{B-E}$ による立方は Z solido に等しくされるであろう。さらに，$\overline{B-E}$ による立方は B cubo $-\,E$ in B quad. $3+E$ quad. in B $3-E$ cubo からなる。一方，作用の立体は $+\,D$ plano in $B-D$ plano in E［からなる］。それゆえ，すべて［の項］が適切に整えられると，言明されていたように，E cubus $-\,B$ in E quad. $3+\overline{B\text{ quad. }3+D\text{ plano}}$ in E は B cubo $+\,D$ plano in $B-Z$ solido に等しくされるであろう。

定理 4

もし A cubus $-\,D$ plano in A が Z solido に等しくされるならば，$A+B$ を E とすると，E cubus $-\,B$ in E quad. $3+\overline{B\text{ quad. }3-D\text{ plano}}$ in E は Z solido $+\,B$ cubo $-\,D$ plano in B に等しくされるであろう。

なぜならば。A cubus $-\,D$ plano in A が Z solido に等しくされ，さらに $A+B$ は根 E に等しいから，それゆえ，$E-B$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，D plano in $\overline{E-B}$ による立体が罰せられた $\overline{E-B}$ による立方は Z solido に等しくされるであろう。さらに，$\overline{E-B}$ による立方は E cubo $-\,B$ in E quad. $3+B$ quad. in E $3-B$ cubo からなる。一方，作用の立体は $-\,D$ plano in $E+D$ plano in B［からなる］。それゆえ，すべて［の項］が適切に整えられると，言明されていたように，E cubus $-\,B$ in E quad. $3+\overline{B\text{ quad. }3-D\text{ plano}}$ in E は Z solido $+$ B cubo $-\,D$ plano in B に等しくされるであろう。

98 **定理 5**

もし A cubus $-\,D$ plano in A が Z solido に等しくされるならば，$A-B$ を E とすると，E cubus $+\,B$ in E quad. $3+\overline{B\text{ quad. }3-D\text{ plano}}$ in E は Z solido $+\,D$ plano in $B-B$ cubo に等しくされるであろう。

なぜならば。A cubus $-\,D$ plano in A が Z solido に等しくされ，さらに $A-B$ は根 E に等しいから，それゆえ，$E+B$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，D plano in $\overline{E+B}$ による立体が罰せられた $\overline{E+B}$ による立方は Z solido に等しくされるであろう。さらに，$\overline{E+B}$ による立方は E cubo $+\,B$ in E quad. $3+B$ quad. in E $3+B$ cubo からなる。一方，作用の立体は $-\,D$ plano in $E-D$ plano in B［からなる］。それゆえ，すべて［の項］が適切に整えられると，言明されていたように，E cubus $+\,B$ in E quad. $3+\overline{B\text{ quad. }3-D\text{ plano}}$ in E は Z solido $+$ D plano in $B-B$ cubo に等しくされるであろう。

定理 6

もし A cubus $-\,D$ plano in A が Z solido に等しくされるならば，$B-A$ を E とすると，E

cubus $-$ B in E quad. 3 + $\overline{B \text{ quad. } 3 - D \text{ plano}}$ in E は B cubo $-$ D plano in B $-$ Z solido に等しくされるであろう。

なぜならば。A cubus $-$ D plano in A が Z solido に等しくされ，さらに $B - A$ は根 E に等しいから，それゆえ，$B - E$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，D plano in $\overline{B - E}$ による立体が罰せられた $\overline{B - E}$ による立方は Z solido に等しくされるであろう。さらに，$\overline{B - E}$ による立方は B cubo $-$ B quad. in E 3 + B in E quad. 3 $-$ E cubo からなる。一方，作用の立体は $-$ D plano in B + D plano in E［からなる］。それゆえ，すべて［の項］が適切に整えられると，言明されていたように，E cubus $-$ B in E quad. 3 + $\overline{B \text{ quad. } 3 - D \text{ plano}}$ in E は B cubo $-$ D plano in B $-$ Z solido に等しくされるであろう。

定理 7

もし D planum in A $-$ A cubo が Z solido に等しくされるならば，$A + B$ を E とすると，$\overline{D \text{ planum} - B \text{ quad. } 3}$ in E + B in E quad. 3 $-$ E cubo は Z solido + D plano in B $-$ B cubo に等しくされるであろう。

なぜならば。D planum in A $-$ A cubo が Z solido に等しくされ，さらに $A + B$ は根 E に等しいから，それゆえ，$E - B$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，$\overline{E - B}$ の立方が罰せられた D plano in $\overline{E - B}$ による立体は Z solido に等しくされるであろう。さらに，D plano in $\overline{E - B}$ による立体は D plano in E $-$ D plano in B からなる。一方，除去の立方は $-$ E cubo + B in E quad. 3 $-B$ quad. in E 3 + B cubo［からなる］。それゆえ，すべて［の項］が適切に整えられると，言明されていたように，$\overline{D \text{ planum} - B \text{ quad. } 3}$ in E + B in E quad. 3 $-$ E cubo は Z solido + D plano in B $-$ B cubo に等しくされるであろう。

定理 8

もし D planum in A $-$ A cubo が Z solido に等しくされるならば，$A - B$ を E とすると，$\overline{D \text{ planum} - B \text{ quad. } 3}$ in E $-$ B in E quad. 3 $-$ E cubo は Z solido $-$ D plano in B + B cubo に等しくされるであろう。

なぜならば。D planum in A $-$ A cubo が Z solido に等しくされ，さらに $A - B$ は根 E に等しいから，それゆえ，$E + B$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，$\overline{E + B}$ の立方が罰せられた D plano in $\overline{E + B}$ による立体は Z solido に等しくされるであろう。さらに，D plano in $\overline{E + B}$ による立体は D plano in E + D plano in B からなる。一方，除去の立方は $-$ E cubo $-$ B in E quad. 3 $-$ B quad. in E 3 $-$ B cubo［からなる］。それゆえ，すべて［の項］が適切に整えられると，言明されていたように，$\overline{D \text{ planum} - B \text{ quad. } 3}$ in E $-$ B in E quad. 3 $-$ E cubo は Z solido $-$ D plano in B + B cubo に等しくされるであろう。

定理 9

もし D planum in A $-$ A cubo が Z solido に等しくされるならば，$B - A$ を E とすると，$\overline{D \text{ planum} - B \text{ quad. } 3}$ in E + B in E quad. 3 $-$ E cubo は D plano in B $-$ B cubo $-$ Z solido に等しくされるであろう。

なぜならば。D planum in A $-$ A cubo が Z solido に等しくされ，さらに $B - A$ は根 E に等しいから，それゆえ，$B - E$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，$\overline{B - E}$ の立方が少ない D planum in $\overline{B - E}$ は Z solido に等しくされるであろう。さらに，D plano in $\overline{B - E}$ による立体

は D plano in $B - D$ plano in E からなる。一方，除去の立方は $- B$ cubo $+ B$ quad. in E 3 $- E$ quad. in B 3 $+ B$ cubo［からなる］。それゆえ，すべて［の項］が適切に整えられると，言明されていたように，$\overline{D \text{ planum} - B \text{ quad. } 3}$ in $E + B$ in E quad. 3 $- E$ cubo は D plano in $B - B$ cubo $- Z$ solido に等しくされるであろう。

99

第 12 章

単純な根のベキからの，平面あるいは立体の根をもついくつかのベキの導出

定理 1

もし A quad. $+ B$ in A が Z plano に等しくされるならば，B in A を E quadratum とすると，E quad. quad. $+ B$ quad. in E quad. は B quad. in Z planum に等しくされるであろう。

なぜならば。A quad. $+ B$ in A が Z plano に等しくされ，さらに B in A は E quadrato に等しいから，それゆえ，$\frac{E \text{ quad.}}{B}$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，B および $\frac{E \text{ quadrat.}}{B}$ による平面が付け加えられた $\frac{E \text{ quad.}}{B}$ による平方，すなわち $\frac{E \text{ quad.quad.}}{B \text{ quad.}} + E$ quad.，は Z plano に等しくされるであろう。ゆえに，すべて［の項］に B quadratum が掛けられると，言明されていたように，E quad. quad. $+ B$ quad. in E quad. は B quad. in Z planum に等しくされるであろう。さらに，E quad. 自身が平面の根として定められるとき，この言明は，E plani-quadratum $+ B$ quadrato in E planum が B quad. in Z planum に等しくされるであろう，という方程式［になる］であろう。

定理 2

もし A quad. $- B$ in A が Z plano に等しくされるならば，B in A を E quadratum あるいは平面とすると，E quad. quad. $- B$ quad. in E quad. は B quad. in Z planum に等しくされるであろう。

さもなければ

E plani-quad. $- B$ quad. in E planum は B quad. in Z planum に等しくされるであろう。

証明は上述の定理において提示されたものと異ならない。

定理 3

もし B in $A - A$ quad. が Z plano に等しくされるならば，B in A を E quadratum あるいは平面とすると，B q. in E q. $- E$ quad. quad. は B q. in Z planum に等しくされるであろう。

さもなければ

B quad. in E planum $- E$ quad. quad. は B quad. in Z planum に等しくされるであろう。

証明はこの章の最初の定理において提示されたものと異ならない。

定理 4

もし A quad. $+ B$ in A が Z plano に等しくされるならば，B quad. in A を E cubus あるいは立体とすると，E cubo-cubus $+ B$ cubo in E cubum は B quad. quad. in Z planum に等しくされるであろう。

なぜならば。A quad. $+ B$ in A が Z plano に等しくされ，さらに B quad. in A は E cubo に等しいから，それゆえ，$\frac{E \text{ cubus}}{B \text{ quad.}}$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，$\frac{B \text{ in } E \text{ cubum}}{B \text{ quad.}}$ が多い $\frac{E \text{ cubo}}{B \text{ quad.}}$ による平方，すなわち $\frac{E \text{ cubo cubus}}{B \text{ quad.quad.}} + \frac{E \text{ cubo}}{B}$，は Z plano に等しくされる

であろう。ゆえに，すべて［の項］に B quad. quad. が掛けられると，言明されていたように，E cubo-cubus $+$ B cubo in E cubum は B quad. quad. in Z planum に等しくされるであろう。

定理 5

もし A quad. $-$ B in A が Z plano に等しくされるならば，B quad. in A を E cubus あるいは立体とすると，E cubo-cubus $-$ B cubo in E cubum は B quad. quad. in Z planum に等しくされるであろう。

証明は上述の定理において提示されたものと異ならない。

定理 6

もし B in A $-$ A quad. が Z plano に等しくされるならば，B quad. in A を E cubus あるいは立体とすると，B cubus in E cubum $-$ E cubo-cubo は B quad. quad. in Z planum に等しくされるであろう。

さもなければ 100

B cubus in E solidum $-$ E solido quadrato は E quad. quad. in Z planum に等しくされるであろう。

証明はこの章の第 4 の定理において提示されたものと異ならない。

定理 7

もし A cubus $+$ B in A quad. が Z solido に等しくされるならば，B in A を E quad. とすると，E cubo-cubus $+$ B quad. in E quad. quad. は B cubo in Z solidum に等しくされるであろう。

なぜならば。A cubus $+$ B in A quad. が Z solido に等しくされ，さらに B in A quad. は E quadrato に等しいから，それゆえ，$\dfrac{E\text{ quad.}}{B}$ は A に等しくされるであろう。それゆえ，これから $\dfrac{E\text{ cubo cubus}}{B\text{ cubo}} + \dfrac{E\text{ quad. quad.}}{B}$ が Z solido に等しくされるであろうことが示される。すべて［の項］に B cubum が掛けられる。

ゆえに，言明されていたように，E cubo-cubus $+$ B quad. in E quad. quad. は B cubo in Z solidum に等しくされるであろう。さらに，E quadratum 自身が平面の根として定められるとき，この言明は，E plani-cubus $+$ B quad, in E plani quad. は B cubo in Z solidum に等しくされるであろう，［となる］であろう。

定理 8

もし A cubus $-$ B in A quad. が Z solido に等しくされるならば，B in A を E quadratum あるいは平面とすると，E cubo-cubus $-$ B quad. in E quad. quad. は B cubo in Z solidum に等しくされるであろう。

さもなければ

E plani-cubus $-$ B quad. in E plani quadratum は B cubo in Z solidum に等しくされるであろう。

証明は上述の定理において提示されたものと異ならない。

定理 9

もし B in A quad. $-$ A cubo が Z solido に等しくされるならば，B in A を E quadratum あ

るいは平面とすると，B quad. in E quad. quad. $-$ E cubo-cubo は B cubo in Z solidum に等しくされるであろう。

さもなければ

B quad. in E plani quad. $-$ E plani-cubo は B cubo in Z solidum に等しくされるであろう。

証明はこの章の第 7 の定理において提示されたものと異ならない。

第 13 章

作用された平方からの，作用された平方の平方の導出

辺によって作用された平方の平方について

定理 1

もし A quad. $+$ B in A が Z plano に等しくされるならば，A quad. quad. $+$ $\overline{B \text{ cubo} + B \text{ in } Z \text{ planum } 2}$ in A は Z plano-plano $+$ B quad. in Z planum に等しくされるであろう。

なぜならば。A quad. B in A が Z plano に等しくされるから，それゆえ，対照［移項］によって A quad. は Z plano $-$ B in A に等しくされるであろう。ゆえに，A quad. quad. は Z plano-plano $-$ B in A in Z planum 2 $+$ B quad. in A quad. に等しくされるであろう。しかし，作用 B quadrati in A quadratum は，提示された方程式［関係式］からその意味を解釈すると，B quad. in Z planum $-$ B cubo in A の値をもつ。それゆえ，採用されたその解釈によって，すべて
101 ［の項］を適切に整えると，言明されていたように，A quad. quad. $+$ $\overline{B \text{ cubo} + B \text{ in } Z \text{ planum } 2}$ in A は Z plano-plano $+$ B quad. in Z planum に等しくされるであろう。

もし $1Q + 8N$ が 20 に等しくされるならば，$1QQ + 832N$ は 1680 に等しくされるであろう。

定理 2

もし A quad. $-$ B in A が Z plano に等しくされるならば，A quad. quad.［+］$\overline{- B \text{ cubo} - B \text{ in } Z \text{ planum } 2}$ in A は Z plano-plano $+$ B quad. in Z planum に等しくされるであろう。

証明は上述の定理において提示されたものと異ならない。

もし $1Q - 8N$ が 20 に等しくされるならば，$1QQ - 832N$ は 1680 に等しくされるであろう。

定理 3

もし B in A $-$ A quad. が Z plano に等しくされるならば，$\overline{B \text{ cubus} - B \text{ in } Z \text{ planum } 2}$ in A $-$ A quad. quad. は B quad. in Z planum $-$ Z plano-plano に等しくされるであろう。

証明はこの章の最初の定理において提示されたものと異ならない。

もし $12N - 1Q$ が 20 に等しくされるならば，$1248N - 1QQ$ は 2480 に等しくされるであろう。

辺および平方によって作用された平方の平方について

定理 4

もし A quad. $+$ B in A が S plano $+$ D plano に等しくされるならば，A quad. quad.［+］$\overline{- D \text{ plano } 2 - B \text{ quad.}}$ in A quad. $+$ B in S planum 2 in A は S plano-plano $-$ D plano-plano に等しくされるであろう。

なぜならば。A quad. $+$ B in A が S plano $+$ D plano に等しくされるから，それゆえ，対照［移項］によって，A quad. $-$ D plano は S plano $-$ B in A に等しくされるであろう。それゆ

え，移項された方程式の両方の部分［辺］が平方せよ。ゆえに，A quad. quad. $-$ D plano in A quad. $2 +$ D plano-plano は S plano-plano $-$ B in A in S planum $2 +$ B quad. in A quad. に等しくされるであろう。そして，習慣に従って整えられたすべて［の項］によって，言明されていたように，A quad. quad.［+］$\overline{-D\ \text{plano}\ 2 - B\ \text{quad.}}$ in A quad. $+$ B in S planum 2 in A は S plano-plano $-$ D plano-plano に等しくされるであろう。

もし $1Q+8N$ が, 15 および 5 から組み立てられた, 20 に等しくされるならば, $1QQ-74Q+240N$ は 200 に等しくされるであろう。

定理 5

もし A quad. $-$ B in A が S plano $+$ D plano に等しくされるならば，A quad. quad.［+］$\overline{-D\ \text{plano}\ 2 - B\ \text{quad.}}$ in A quad. $-$ B in S planum 2 in A は S plano-plano $-$ D plano-plano に等しくされるであろう。

証明は上述の定理において提示されたものと異ならない。

もし $1Q-8N$ が, 15 および 5 から組み立てられた, 20 に等しくされるならば, $1QQ-74Q-240N$ は 200 に等しくされるであろう。

定理 6

もし B in A $-$ A quad. が S plano $+$ D plano に等しくされるならば，$\overline{B\ \text{quad.} - S\ \text{plano}\ 2}$ in A quad. $-$ B in D planum 2 in A $-$ A quad. quad. は S plano-plano $-$ D plano-plano に等しくされるであろう。

証明はこの章の第 4 の定理において提示されたものと異ならない。

もし $12N-1Q$ が，15 および 5 から組み立てられた，20 に等しくされるならば，$114Q-120N-1QQ$ は 200 に等しくされるであろう。

別の場合での同じことについて 102

定理 7

もし A quad. $+$ B in A が S plano $-$ D plano に等しくされるならば，A quad. quad. $+$ $\overline{D\ \text{plano}\ 2 - B\ \text{quad.}}$ in A quad. $+$ B in S planum 2 in A は S plano-plano $-$ D plano-plano に等しくされるであろう。

なぜならば。A quad. $+$ B in A が S plano $-$ D plano に等しくされるから，それゆえ，対照［移項］によって，A quad. $+$ D plano は S plano $-$ B in A に等しくされるであろう。それゆえ，両方の部分［辺］を平方せよ。ゆえに，A quad. quad. $+$ D plano in A quad. $2 +$ D plano-plano は S plano-plano $-$ B in S planum in A $2 +$ B quad. in A quad. に等しくされるであろう。そして，習慣に従って整えられたすべて［の項］によって，言明されていたように，A quad. quad. $+$ $\overline{D\ \text{plano}\ 2 - B\ \text{quad.}}$ in A quad. $+$ S planum 2 in A は S plano-plano $-$ D plano-plano に等しくされるであろう。

もし $1Q+8N$ が，40 および 60 の間の差である，20 に等しくされるならば，$1QQ+16Q+960N$ は 2000 に等しくされるであろう。

定理 8

もし A quadr. $-$ B in A が S plano $-$ D plano に等しくされるならば，A quadr. quadr. $+$ $\overline{D\ \text{plano}\ 2 - B\ \text{quad.}}$ in A quad. $-$ B in S planum 2 in A は S plano-plano $-$ D plano-plano

に等しくされるであろう。

証明は上述の定理において提示されたものと異ならない。

もし $1Q-8N$ が，40 および 60 の間の差である，20 に等しくされるならば，$1QQ+16Q-960N$ は 2000 に等しくされるであろう。

定理 9

もし B in $A-A$ quad. が S plano $-$ D plano に等しくされるならば，B in D planum 2 in A $+$ $\overline{B \text{ quad.} - S \text{ plano } 2}$ in A quad. $-$ A quad. quad. は S plano-plano $-$ D plano-plano に等しくされるであろう。

証明はこの章の第 7 の定理において提示されたものと異ならない。

もし $12N-1Q$ が，40 および 60 の間の差である，20 に等しくされるならば，$960N+24Q-1QQ$ は 2000 に等しくされるであろう。

立方によって作用された平方の平方について

定理 10

もし A quad. $+$ B in A が Z plano に等しくされるならば，A quad. quad. $+$ $\dfrac{B \text{ in } Z \text{ planum } 2 + B \text{ cubo}}{Z \text{ plano} + B \text{ quad.}}$ in A cubum は $\dfrac{Z \text{ plano plano plano}}{Z \text{ plano} - B \text{ quad.}}$ に等しくされるであろう。

なぜならば。A quad. $+$ B in A が Z plano に等しくされるから，それゆえ，対照［移項］によって，A quad. は Z plano $-$ B in A に等しくされるであろう。ゆえに，すべて［の項］に A が掛けられると，A cubus が Z plano in A $-$ B in A quad. に等しくされる。あるいは，さもなければ，表示された A quadrati の値から，A cubus は Z plano in A $-$ B in Z planum $+$ B quad. in A に等しくされる。そして，Z planum $+$ B quad. で割られたこの方程式の両方の部分［辺］によって，$\dfrac{A \text{ cubus} + Z \text{ plano in } B}{Z \text{ plano} + B \text{ quad.}}$ が A に等しくされるであろう。それゆえ，A quad. は Z plano $-$ B in A に等しいといわれるので，表示された A の値そのものによって，A quad. は $\dfrac{Z \text{ plano plano} - B \text{ in } A \text{ cubum}}{Z \text{ plano} + B \text{ quad.}}$ に等しい，と表現される。再び，私ははじめに提示された方程式，A quad. $+$ B in A が Z plano に等しい，に戻る。［その方程式の］両方の部分［辺］を平方せよ。それゆえ，A quad. quad. $+$ B in A cubum 2 $+$ B quad. in A quad. が Z plano-plano に等しくされるであろう。いま，作用 B quadrati in A quadratum は，最後に表示された A quadrati の値からその意味を解釈すると，$\dfrac{B \text{ quad. in } Z \text{ plano } - \text{planum} - B \text{ cubo in } A \text{ cubum}}{Z \text{ plano} + B \text{ quad.}}$ であろう。採用された解釈から，習慣に従って整えられたすべて［の項］によると，整えられていたように，A quad. quad. $+$ $\dfrac{B \text{ in } Z \text{ planum } 2 + B \text{ cubo}}{Z \text{ plano} + B \text{ quad.}}$ in A cubum は $\dfrac{Z \text{ plano plano plano}}{Z \text{ plano} + B \text{ quad.}}$ に等しくされるであろう。

もし $1Q+14N$ が 147 に等しくされるならば，$1QQ+20C$ は 9261 に等しくされるであろう。

103 **定理 11**

もし A quad. $-$ B in A が Z plano に等しくされるならば，A quad. quad. [+] $\dfrac{-B \text{ in } Z \text{ planum } 2 - B \text{ cubo}}{Z \text{ plano} + B \text{ quad.}}$ in A cubum は $\dfrac{Z \text{ plano plano plano}}{Z \text{ plano} + B \text{ quad.}}$ に等しくされるであろう。

証明は上述の定理において提示されたものと異ならない。

もし $1Q-14N$ が 147 に等しくされるならば，$1QQ-20C$ は 9261 に等しくされるであろう。

定理 12

もし B in $A - A$ quadrato が Z plano に等しくされるならば，$\dfrac{B \text{ cubus} - B \text{ in } Z \text{ planum } 2}{B \text{ quad.} - Z \text{ plano}}$ in A cubum $-$ A quad. quad. は $\dfrac{Z \text{ plano plano plano}}{B \text{ quad.} - Z \text{ plano}}$ に等しくされるであろう。

証明はこの章の第 10 の定理において提示されたものと異ならない。

もし $21N - 1Q$ が 98 に等しくされるならば，$15C - 1QQ$ は 2744 に等しくされるであろう。

第 14 章

作用された平方からの，いくつかの作用された立方の導出

定理 1

もし A quad. $+$ B in A が Z plano に等しくされるならば，$\overline{B \text{ quad.} + Z \text{ plano}}$ in $A - A$ cubo は B in Z planum に等しくされるであろう。

なぜならば。A quad. $+$ B in A が Z plano に等しくされるから，すべて［の項］に A が掛けられると，それゆえ，A cubus $+$ B in A quad. が Z plano in A に等しくされるであろう。しかし，提示されていたことから，A quad. は Z plano $-$ B in A に等しくされる。それゆえ，立方の方程式において，表現されるであろう立体 B in A quadratum の値に関して，採用されたその解釈によって，A cubus $+$ B in Z planum $-$ B quad. in A は Z plano in A に等しくされるであろう。そして，習慣に従って整えられたすべて［の項］によって，言明されていたように，$\overline{Z \text{ planum} + B \text{ quadr.}}$ in $A - A$ cubo は B in Z planum に等しくされるであろう。

もし $1Q + 8N$ が 20 に等しくされるならば，$84N - 1C$ は 160 に等しくされるであろう。

定理 2

もし A quad. $-$ B in A が Z plano に等しくされるならば，A cubus［+］$\overline{- B \text{ quadr.} - Z \text{ plano}}$ in A は B in Z planum に等しくされるであろう。

証明は上述の定理において提示されたものと異ならない。

もし $1Q - 8N$ が 20 に等しくされるならば，$1C - 84N$ は 160 に等しくされるであろう。

定理 3

もし B in $A - A$ quad. が Z plano に等しくされるならば，$\overline{B \text{ quadr.} - Z \text{ plano}}$ in $A - A$ cubo は B in Z planum に等しくされるであろう。

証明はこの章の最初の定理において提示されたものと異ならない。

もし $12N - 1Q$ が 20 に等しくされるならば，$124N - 1C$ は 240 に等しくされるであろう。

定理 4

もし A quad. $+$ B in A が B in D に等しくされるならば，A cubs $+$ $\overline{B + D}$ in A quad. は B in D quadratum に等しくされるであろう。

なぜならば。A quad. $+$ B in A が B in D に等しくされるから，すべて［の項］に A が掛けられると，それゆえ，A cubus $+$ B in A quad. が B in D in A に等しくされるであろう。しかし， 104
提示されていることから，$\dfrac{B \text{ in } D - A \text{ quad.}}{B}$ は A に等しくされる。それゆえ，表現されるであろう立体 B in D in A の値に関して，採用されたその解釈によって，A cubus $+$ B in A quad. は B in D quad. $-$ D in A quad. に等しくされるであろう。そして，適用された適切な転換［式の整理］によって，整えられていたように，A cubus $+$ $\overline{B + D}$ in A quad. は B in D quad. に等し

くされるであろう。

もし $1Q+16N$ が，16 と 5 の積である，80 に等しくされるならば，$1C+21Q$ は 400 に等しくされるであろう。

定理 5

もし A quad. $-$ B in A が B in D に等しくされるならば，$\overline{B+D}$ in A quad. $-$ A cubo は B in D quad. に等しくされるであろう。

証明は上述の定理において提示されたものと異ならない。

もし $1Q-16N$ が，16 と 5 の積である，80 に等しくされるならば，$21Q-1C$ は 400 に等しくされるであろう。

定理 6

もし B in A $-$ A quad. が B in D に等しくされるならば，$\overline{B-D}$ in A quad. $-$ A cubo は B in D quad. に等しくされるであろう。

証明はこの章の第 4 の定理において提示されたものと異ならない。

もし $9N-1Q$ が，9 と 2 の積である，18 に等しくされるならば，$7Q-1C$ は 36 に等しくされるであろう。

第 15 章

方程式においてベキが作用の同次のものから拒否されるとき，根の両義性を証明すること

定理

方程式においてベキが作用の同次のものから拒否されるとき，その根は両義的なものであることが示されるであろう。

B および A の間の差が S に等しく，そして B が S より大きいとして提示されるとしよう。それゆえ，［A，B に関する］超過分は B に属する［B が A より大きい］かあるいは A に属する［A が B より大きい］かのいずれかである。第 1 の場合，$B-A$ は S に等しくされる。従って，$B-S$ は A になる。第 2 の場合，$A-B$ は S に等しくされる。従って，$B+S$ は A になる。さらに，第 1 の場合は $B-A$ が S に等しくされるから，方程式の両方の部分［辺］が平方されると，それゆえ，B quad. $-$ B in A 2 $+$ A quad. が S quad. に等しくされるであろう。そして，方程式が整えられると，B in A 2 $-$ A quad. は B quad. $-$ S quad. に等しくなる。一方，第 2 の場合は $A-B$ が S に等しくされるから，方程式の両方の部分［辺］が平方されると，それゆえ，B quad. $-$ B in A 2 $+$ A quad. が S quad. に等しくされるであろう。そして，方程式が整えられると，再び，B in A 2 $-$ A quad. は B q. $-$ S q. に等しくなる。それゆえ，両方の場合に同じ方程式の形が生じ，さらに根は 2 重である。確かに，方程式の形そのものは，多くの平方が作用される，辺による平面のような［形］である。

B を 6，S を 4，A を $1N$ とすると，$12N-1Q$ は 20 に等しくされ，$1N$ は $6-4$ あるいは $+4$ になる。

すべての同様な方程式における両義性は十分な位置をもつと理解される。例えば，もし D in A $-$ A quad. が Z plano に等しいと提示されるならば，D そのものは B 2 であり，そして Z plano は B quad. $-$ S quad. であるといわれるであろう。

さらに，上述の章の第 6 の定理により，等しくされる階級による立体から拒否された立方が両義

的な平方の方程式から導かれること，および，第 12 章の第 3，第 6，第 9［の定理］により，等しくされる階級による平面的平面から拒否された平方の平方が同じ［方程式］から導かれることは明らかである。そしてそれゆえ，このことがより高い階級の方程式に拡張できることは十分に明らかである。

第 16 章
混成法について

混成法は，それら双方の性質を見出すための，互いに相関的な 2 つの方程式の対比である。

ところで，2 つの方程式は，両方が似ていて，さらに，作用の比較や比較の同次のもののために， 105
与えられた同じ大きさからなるとき，相関的であると理解される。それにもかかわらず，［それらの］根は，形式的な方程式そのものはその性質から 2 つまたはより多くの根によって解くことができるか，あるいは，それらにおいて作用の特性またはしるしが異なっているかのいずれかであるから，異なっている。

そして，確かに，教義はより単純な相関性について，すなわち包まれたただ 1 つだけの作用について，で十分であろう。というのは，多くの現象があふれているそれらに関して，巧みな影像術をもつ人は確実に考察できるだろうからである。

それゆえ，相関的な単純な方程式には 3 つの区分が存在する。

第 1 は両義 (ancipitum)［の方程式］で，それらの両方において，ベキは作用された同次のものから拒否される。

第 2 は反対 (contradicentium)［の方程式］で，それらの一方ではベキは強められるように作用され，もう一方では拒否される［ように作用される］。

第 3 は逆 (inversarum)［の方程式］で，それらの一方ではベキは多くの作用された同次のものによって作用され，もう一方では逆に，ベキは作用された同次のものによって罰せられる。

両義の，反対の，あるいは，逆の方程式の性質は，混成法の方法はこれであるということから始められるであろうから，混成法によって適切に知られるようになるであろう。なぜならば。1 つのものに等しいものは互いに等しいから，作用するまたは作用された 2 つのベキは与えられた同じ同次のものの大きさのために完全に同等とみなされるということが提示される。さらに，作用されたまたは作用する同次のものは，混ぜ合わされたいずれかのベキのために，等しくされることによって，同じ階級で，そして同じ並置 (parabola) になる。ゆえに，等しくされたその階級による同次のものの，1 つの根のベキは，同様に等しくされたその階級による同次のものの，もう 1 つのベキに等しくされるであろう。そして，そのように確立されるために，方程式におけるベキが一方の部分［辺］に，さらに作用された同次のものでつくる階級によるものがもう一方［の辺］に移されることによって，再び等しくなるであろう。そのため，ベキの差または和が辺の差あるいは和で割られるであろうとき (確かに，いずれかの項が作業を示すであろう)，大きさを等しい並置にまで上昇することになるであろうし，それゆえ，その性質は明らかであろう。

しかしもし，その後で，説明された混成法によって確立されたいずれかの方程式が，もはや並置そのものによっても，あるいは等しい並置の (その性質に応じて識別される) 値によっても示されないならば，結果としてそれは与えられた比較の同次のものに等しいであろうということが規定されるであろう。それゆえ，その性質が知られないことはあり得ないであろう。それは，根の結合による平面とともに，それによって上述の最後の除法が行われた，差あるいは和が掛けられた，根ま

たは階級の和あるいは差によってつくられたものから生じるだろうからである。

両義的［な方程式］において，作用された対照はベキの差を，並置が測られる，それらの階級の差で割ることによって生じるということが従うであろう。

さらに，比較の同次のものは 1 つの根のベキともう 1 つの階級との相互の積の差を，前述のもう 1 つの除法が行われた，階級の差で割ることによって［生じるであろう］。

しかし，このことはついでに証明されるであろう。

問題 1

2 つの両義の方程式の性質を混成法によって識別すること。

106 B parabola in A gradum $-$ A potestate が Z homogeneae に等しいと，そして再び，B parabola in E gradum $-$ E potestate が Z homogeneae に等しいと提示されるとしよう。

> 「並置 B 掛ける A の階級 引く A のベキが同次のもの Z に等しい」ということになろうが，『解析術』は「$BA^m - A^n = Z$」としている。
> なお，ここに見られるように，ヴィエートは階級 A^m の“係数”を parabola と呼んでいる。『解析術』は，それが意味する内容から，coefficient としているが，ここでは，階級に並んで置かれるものということで，「並置」とした。
>
> παραβολή : *juxta-position*, *comparison*, *illustration*, *analogy*, *a parable*, i.e. *a fictitious narrative by which some religious* or *moral lesson is conveyed*, *a by-word*, *proverb*

そこから，階級は等しく，そして，ベキは等しいことが明らかになる。混成法によってそれらの方程式の性質を識別しなければならない。

それゆえ，1 つのものに等しくされるものは互いに等しいから，B parablam in A gradum $-$ A potestate は B parabolae in E gradum $-$ E potestate に等しいことは明らかである。そして，対照［移項］により，望むなら，事前に仮定された根の両義性のために (radicum ἀμφιβολίαν) これは自由であるから，A が E より大きいと定められると，A potestas $-$ E potestate は B parabolae in A gradum $-$ B parabola in E gradum に等しくされるであろう。そして，すべて［の項］が A gradum $-$ E gradu で割られると，$\dfrac{A \text{ potestas} - B \text{ potestate}}{A \text{ gradui} - B \text{ gradu}}$ が B parabolae に等しくされるであろう。

ゆえに，B parabola は，提示されていたように，ベキの差を階級の差で割ることによって生じる。

次に，B parabola in A gradum $-$ A potestate が Z homogeneae に等しくされるとき，B paraboles の場所にいま識別された値が代入され，代入された方程式が変形されると，ゆえに $\dfrac{A \text{ potestas in } E \text{ gradum} - E \text{ potestate in } A \text{ gradum}}{A \text{ gradui} - E \text{ gradu}}$ が Z homogeneae に等しくされるであろう。

ゆえに，Z homogenea は，提示されていたように，1 つの根のベキともう 1 つの階級との相互の積の差を階級の差で割ることによって生じる。

> ἀμφίβολος : *put round*, *encompassing*; *attacked on both* or *all sides*; *hitting at both ends*, *double-pointed*; *doubtful*, *ambiguous*

文字に関して

B in $A - A$ quad. が Z plano に等しいと，そして再び，B in $E - E$ quadr. が Z plano の等しいと提示されるとしよう。混成法によってそれらの方程式の性質を識別しなければならない。1 つのものに等しくされるものは互いに等しいから，B in $A - A$ quad. が B in $E - E$ quad. に等しいことは明らかである。そして，対照［移項］により，望むなら，仮定された根の両義性のためにこれは自由であるから，A が E より大きいと定められると，A quad. $- E$ q. は B in $A - B$ in E に等しくされるであろう。そして，すべて［の項］が $A - E$ で割られると，$\dfrac{A \text{ quad.} - E \text{ quad.}}{A - E}$，すなわち $A + E$，が B に等しくされるであろう。

それゆえ，B は，それによって求められるであろう，2 つの根の和であり，一般［の場合］に提示されていたように，平方の差を辺の差で割ることによって生じるであろう。

次に，B in $A - A$ quad. が Z plano に等しくされるとき，もし B の場所にいま識別された値 $\dfrac{A \text{ quad.} - E \text{ quad.}}{A - E}$，すなわち $A + E$，が代入されるならば，$\dfrac{A \text{ quad. in } E - E \text{ quad. in } A}{A - E}$，すなわち E in A，が Z plano に等しくされるであろう。

それゆえ，Z planum は，それによって求められるであろう，2 つの辺によってつくられたもの［積］であり，一般［の場合］に提示されていたように，1 つの平方ともう 1 つの根の相互の積の差を辺の差で割ることによって生じる。

別の［場合］

B planum in $A - A$ cubo が Z solido に等しいと，そして再び，B planum in $E - E$ cubo が Z solido に等しいと提示されるとしよう。

混成法によってそれらの方程式の性質を識別しなければならない。それゆえ，1 つのものに等しくされるものは互いに等しいから，B planum in $A - A$ cubo が B plano in $E - E$ cubo に等しいことは明らかである。そして，対照［移項］により，望むなら，仮定された根の両義性のためにこれは自由であるから，A が E より大きいと定められると，A cubus $- E$ cubo は B plano in $A - B$ plano in E に等しくされるであろう。そして，すべて［の項］が $A - E$ で割られると，$\dfrac{A \text{ cubus} - E \text{ cubo}}{A - E}$，すなわち A quad. $+ E$ quad. $+ A$ in E，が B plano に等しくされるであろう。

それゆえ，B planum は，それによって求められるであろう，2 つの辺の平方の和に，それらによってつくられる平面が付け加えられたものであり，そして，一般［の場合］に提示されていたように，立方の差を辺の差で割ることによって生じる。

次に，B planum in $A - A$ cubo が Z solido に等しくされるとき，もし B plan. の場所に識別されたその値，もちろん $\dfrac{A \text{ cubus} - B \text{ cubo}}{A - E}$ あるいは A q. $+ E$ q. $+ A$ in E，が代入されるならば，$\dfrac{A \text{ cubus in } E - E \text{ cubo in } A}{A - E}$，すなわち A q. in $E + E$ q. in A，が Z solido に等しくされるであろう。それゆえ，Z solidum は辺の和に辺による平面が掛けられてできるものであり，同様に提示されていたように，そして，1 つの辺の立方にもう 1 つの辺が相互に掛けられてつくられたものの差を辺そのものの差で割ることによって生じる。

それゆえ，ついに，提示されていた方程式の性質が混成法によって識別された。これがなされるべきことであった。

望むなら，根 F および G，後者が小さく前者が大きい，について解くことができる，両義的な平

方の方程式の形を示そう。$\overline{F+G}$ in $A - A$ q. が F in G に等しいといわれたなら，A は F あるいは G になる。

F を 10，G を 2，A を $1N$ としよう。方程式の形は $12N - 1Q$ が 20 に等しくされる —— これは 10 あるいは 2 について解くことができる —— であろう。

107 望むなら，根が F あるいは G について解くことができるような，辺によって作用された同次のものから拒否された立方の方程式の形を示そう。F quad. $+$ $\overline{G \text{ quad.} + F \text{ in } G}$ in $A - A$ cubo が F in G quad. $+$ G in F quad. に等しいといわれたなら，A は F あるいは G になる。

F を 10，G を 2，A を $1N$ としよう。方程式の形は $124N - 1C$ が 240 に等しくされる —— これは 10 あるいは 2 について解くことができる —— であろう。

反対［の方程式］に関して，漸進的［な階級］による補足的なものはベキの差を，それらの階級の補足的なものを支えている，それらの和で割ることによって生じる。

さらに，与えられた同次のものは，1 つの根のベキともう 1 つの階級との相互の積の和を，別の除法によって階級の和がつくられる，前述のもので割ることによって計られるであろう。そのうえ同様に，このことはついでに証明されるであろう。

問題 2

2 つの反対の方程式の性質を混成法によって識別すること。

A potestas $+$ B coëfficiente in A gradum が Z homogeneo に等しいと，そして再び，E potestas $-$ B coëfficiente in E gradum が Z homogeneo に等しいと提示されるとしよう。

> 「A のベキ 足す 係数 B 掛ける A の階級が同次のもの Z に等しい」ということであるが，『解析術』は「$A^n + BA^m = Z$」としている。
> ここから分かるように，階級 A^m の係数が coëfficiens と呼ばれている。この coëfficiens は方程式を形成するための「補足的なもの」としてきたが，ここでは「係数」とする。

そこから，階級は等しく，そして，ベキは等しいことが明らかになる。混成法によってそれらの方程式の性質を識別しなければならない。

それゆえ，1 つのものに等しくされるものは互いに等しいから，A potestarem $+$ coëfficiente in A gradum が E potestari $-$ B coëfficiente in E gradum に等しい，そして，対照［移項］により，E potestatem $-$ A potestate が B coëfficienti in E gradum $+$ B coëfficiente in A gradum に等しいことは明らかである。それゆえ，すべて［の項］が E gradum $+$ A gradu で割られると，$\dfrac{E \text{ potestas} - A \text{ potestate}}{E \text{ gradus} + A \text{ gradu}}$ が B coëfficienti に等しくされるであろう。

ゆえに，提示されていたように，下位階級［である］B coëfficiens はベキの差を，階級の係数を支えている，それらの和で割ることによって生じる。

次に，A potestas $+$ B coëfficiente in A gradum が Z homogeneo に等しくされるとき。

B coëfficientis の場所にいま識別された値，すなわち $\dfrac{E \text{ potestas} - A \text{ potestate}}{E \text{ gradus} + A \text{ gradu}}$，が代入され，そしてその代入された方程式が変形されると，ゆえに A potestas $+$ $\dfrac{E \text{ potestas} - A \text{ potestate}}{E \text{ gradus} + A \text{ gradu}}$ in A gradum が Z homogeneo に等しくされ，これはすべて［の項］が適切に整えられると，$\dfrac{A \text{ potestas in } E \text{ grad.} + E \text{ potestate in } A \text{ grad.}}{E \text{ gradui} + A \text{ gradu}}$ が Z homogeneo に等しくされる，となる。

ゆえに，第 2 の場所で主張されていたように，Z homogenea は 1 つの根のベキともう 1 つの階

級との相互の積の和を，別の除法によって階級の和がつくられる，前述のもので割ることによって生じる。

平面が拒否された逆［の方程式］に関して，下位階級［である］補足的なものはベキの和を，それらの階級の補足的なものを［支えている］，それらの和で割ることによって生じる。

さらに，与えられた同次のものは，1つの根のベキともう1つの階級との相互の積の差を，別の除法によって補足的なものが下位階級である階級［の和］がつくられる，前述のもので割ることによって許られるであろう。

同様に，このことはついでに証明されるであろう。

問題 3

2つの逆の方程式の性質を混成法によって識別すること。

A potestas $-$ B coëfficiente in A gradum が Z homogeneo に等しいと，そして再び，B coëfficiens in E gradum $-$ E potestate が Z homogeneo に等しいと提示されるとしよう。

そこから，A および E は等しい階級，しかもそのうえ，等しいベキであると理解されるとしよう。さらに，これらの方程式の性質を識別しなければならない。それゆえ，1つのものに等しくされるものは互いに等しいから，これらから，A potestatem $-$ B coëfficiente in A gradum が B coëfficienti in E gradum $-$ E potestate に等しいということ，そして，対照［移項］により，A potestatem $+$ E potestate が B coëfficienti in A gradum $+$ B coëfficiente in E gradum に等しいということが提示されるのは明らかである。

それゆえ，すべて［の項］が E gardum $+$ A gradu で割られると，$\dfrac{A \text{ potestas} + E \text{ potestate}}{A \text{ gradui} + E \text{ grad.}}$ が B coëfficienti に等しくされるであろう。

さらに，これは第1の場所で主張されていたものである。次に，A potestas $-$ B coëfficiente subgraduali in A grad. が Z homog. に等しくされるとき，B coëfficientis の場所に等しい値，すなわち $\dfrac{A \text{ potestas} + E \text{ potestate}}{A \text{ gradui} + E \text{ gradu}}$，が代入されると，それゆえ，$A$ potestas $-$ $\dfrac{A \text{ potestate in } A \text{ grad.} + E \text{ potestate in } A \text{ grad.}}{A \text{ gradui} + E \text{ gradu}}$ が Z homogeneo に等しくされるであろう。これはすべて［の項］が適切に整えられると，$\dfrac{A \text{ potestas in } E \text{ grad.} - E \text{ potestate in } A \text{ grad.}}{A \text{ gradui} + E \text{ gradu}}$ が Z homogeneo に等しくされるであろう，である。これは第2の場所で主張されていたことである。 108

さらに，逆［の方程式］に関して，一方は肯定的に，他方は否定的に作用される。下位階級の補足的なものはベキの和を，補足的なものが階級のものであるような，それらの差で割ることによって生じる。

さらに，与えられた同次のものは，1つの根のベキともう1つの階級との相互の積の和を，別の除法によって補足的なものがそれであるような階級の差がつくられる，前述のもので割られることによって許られるであろう。さらに，同様に，このことはついでに証明されるであろう。

もし本当に A potestas $+$ B coëfficiente in A gradum が Z homogeneo に等しいと，そして再び，B coëfficiens in E gradum $-$ E potestate が同じく Z homogeneo に等しいと提示されるとしよう。そこから，A および E は等しい階級，しかもそのうえ，等しいベキであると理解されるとしよう。さらに，これらの方程式の性質を識別しなければならない。それゆえ，1つのものに等しくされるものは互いに等しいから，これらから，A potestem $+$ B coëfficiente in A

gradum が B coëfficienti in E gradum $-$ E potestate に等しいということ，そして，対照［移項］により，A potestatem $+$ E potestate が B coëfficienti in E gradum $-$ B coëfficiente in A gradum に等しいということが提示されるのは明らかである。それゆえ，すべて［の項］が E gradum $-$ A gradu で割られると，$\dfrac{E \text{ potestas} + A \text{ potestate}}{E \text{ gradui} - A \text{ gradu}}$ が B coëfficienti に等しくされるであろう。これは第 1 の場所で主張されていたものである。次に，A potesta $+$ B coëfficiente in A gradum が Z homogeneo に等しくされるとき，下位階級である B coëfficientis の場所に等しい値，すなわち $\dfrac{E \text{ potestas} + A \text{ potestate}}{E \text{ gradui} - A \text{ gradu}}$，が代入されると，それゆえ，$A$ potestas $+$ $\dfrac{E \text{ potestate} + A \text{ potestate}}{E \text{ gradui} - A \text{ gradu}}$ in A gradum が Z homog. に等しくされる。これはすべて［の項］が適切に整えられると，$\dfrac{A \text{ potestas in } E \text{ grad.} + E \text{ potestate in } A \text{ grad.}}{E \text{ gradui} - A \text{ gradu}}$ が Z homogeneo に等しくされる。これは第 2 の場所で主張されていたことである。

そして，確かに，一度識別された指導者が［別の］仲間に変わることは自由であるから，探究法によって明らかなように，両義［の方程式］はすべてのベキの順序において完全に効果的であると私は言う。

しかし，反対［の方程式］および逆［の方程式］は効果的であるときも取るに足らないときもあり，そして，それはベキの階級によって定義される。例えば，辺による反対［の方程式］は，もし［ベキが］平方あるいはそこからの 1 つおきのベキ，すなわち平方の平方，立方の立方，などその順序で続くもの，の中に付着しているならば，ついには効果的である。

しかし，私たちは，基底およびそこからの 1 つおきのベキ，すなわち立方，平方の立方，などその順序で続くもの，の中に［付着しているならば］，のろくてしかも効果的でないと評価する。それらは解析学者に慰めまたは助けを運んでくることは全くなく，それゆえ，彼ら自身にとって簡単なまたは実り豊かな比較 (ἀντιβαλλομένας) への接近が従わなければならないからである。

> ἀντιβάλλω : *throw against* or *in turn*, *return the shots*; *put one against the other*, *compare*, *collate*; *change*

それに対して，辺による逆［の方程式］は，両方が拒否されていたとき，もし立方，平方の立方などが付着しているならば，効果的である。

その理由は，ベキの差が根の差で割られるとき，そこから生じた大きさ［商］は，二項式の根からのベキの生成について説明されていた章における順序に従う，どこであれそれらのベキの順序に関して，いたるところで肯定的な系列の，同じ根によって作用された連続的な比例に等しくなる，ということである。

しかし，ベキの差が根の和で割られるとき，［そして,］ベキが立方，平方の立方，およびその順序で 1 つおきに進むものであるとき，そこから生じた大きさ［商］は，ただ交互に否定的であり肯定的であるものによって (prostaphaeretice) 作用された連続的な比例に等しくなる。

しかし，もしベキの和が根の差で割られるならば，そこから現れた大きさ［商］は，それらの大きさが漸層法によって進むとして，［ベキが］数の序列の階級に関して偶数であろうと奇数であろうと，作用された連続的な比例に等しいということはない。

第 17 章

混成法における教義の幾何学的な言い回し

さらに，これらの混成法の評価は，それによって幾何学的な技法が高められ，そしてより明らかでしかもより手近なものになるような，いくつかの比率によって飾られ，洗練される。

定理 1 109

もし 3 つの系列が比例していたならば，第 1 のものは第 3 のものに対して，第 1 のものの平方が第 2 のものの平方に対する。

そして，もし 4 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 4 のものに対して，第 1 のものの立方が第 2 のものの立方に対する。

そいて，もし 5 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 5 のものに対して，第 1 のものの平方の平方が第 2 のものの平方の平方に対する。

そして，もし 6 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 6 のものに対して，第 1 のものの平方の立方が第 2 のものの平方の立方に対する。

そして，もし 7 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 7 のものに対して，第 1 のものの立方の立方が第 2 のものの立方の立方に対する。

というのも，他の場所で注意されたように，平方は 2 倍にした比のベキであり，立方は 3 倍にした，平方の平方は 4 倍にした，などであって，それゆえ，それぞれのベキにおいて，比例する系列はそれらの状況に従って割り当てられるからである。

ここでの主張は

$$\text{平方} \longleftrightarrow \underbrace{1 : x}_{1\text{ つ目}} = \underbrace{x : x^2}_{2\text{ つ目}}$$

$$\text{立方} \longleftrightarrow \underbrace{1 : x}_{1\text{ つ目}} = \underbrace{x : x^2}_{2\text{ つ目}} = \underbrace{x^2 : x^3}_{3\text{ つ目}}$$

$$\text{平方の平方} \longleftrightarrow \underbrace{1 : x}_{1\text{ つ目}} = \underbrace{x : x^2}_{2\text{ つ目}} = \underbrace{x^2 : x^3}_{3\text{ つ目}} = \underbrace{x^3 : x^4}_{4\text{ つ目}}$$

など，ということか。

定理 2

もし 3 つの系列が比例していたならば，第 1 のものは第 3 のものに対して，はじめの 2 つのそれぞれの平方の和が最後の 2 つのそれぞれの平方の和に対する。

そして，もし 4 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 4 のものに対して，はじめの 3 つのそれぞれの立方の和が最後の 3 つの立方の和に対する。

そして，もし 5 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 5 のものに対して，はじめの 4 つのそれぞれの平方の平方の和が最後の 4 つのそれぞれの平方の平方の和に対する。

そして，もし 6 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 6 のものに対して，はじめの 5 つのそれぞれの平方の立方の和が最後の 5 つのそれぞれの平方の立方の和が対する。

そして，もし 7 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 6 のものに対して，はじめの 6 つのそれぞれの立方の立方の和が最後の 6 つのそれぞれの立方の立方の和が対する。

なぜならば，第 1 のものは第 3 のものに対して，第 1 のものの平方が第 2 のものの平方に対し，さらに，第 1 のものの平方は第 2 のものの平方に対して，第 2 のものの平方が第 3 のものの平方に

対するから，ゆえに，混成法によって，第 1 のものは第 3 のものに対して，第 1 のものの平方足す第 2 のものの平方が第 2 のものの平方足す第 3 のものの平方が対するからである。［このことは］その他の比例する系列においても異なることはなく，比の最も外側のベキの状況に従って証明することや計算することができる。

証明の方針は ……
例えば，$a : b = b : c = c : d$ であるとき，
まず，$ac = b^2$ であるから，$a^3c^3 = b^6$ となり，$a^3 : b^3 = b^3 : c^3$ がいえる。
また，$ad = bc$ であるから，$a^3d^3 = b^3c^3$ となり，$a^3 : b^3 = c^3 : d^3$ がいえる。
さらに，$c = \dfrac{b^2}{a}$ であるから，$ad = \dfrac{b^3}{a}$ となり，$a^3d = ab^3$ から，$a : d = a^3 : b^3$ がいえる。
すなわち，$a : d = a^3 : b^3 = b^3 : c^3 = c^3 : d^3$ がいえるから，加比の理により，

$$a : d = (a^3 + b^3 + c^3) : (b^3 + c^3 + d^3)$$

が成り立つ，というもの。

定理 3

もし 3 つの系列が比例していたならば，第 1 のものは第 3 のものに対して，はじめの 2 つのものから集められた平方が最後の 2 つのものから集められた平方に対する。

そして，もし 4 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 4 のものに対して，はじめの 3 つのものから集められた立方が最後の 3 つのものから集められた立方に対する。

そして，もし 5 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 5 のものに対して，はじめの 4 つのものから集められた平方の平方が最後の 4 つのものから集められた平方の平方に対する。

そして，もし 6 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 6 のものに対して，はじめの 5 つのものから集められた平方の立方が最後の 5 つのものから集められた平方の立方に対する。

そして，もし 7 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 7 のものに対して，はじめの 6 つのものから集められた立方の立方が最後の 6 つのものから集められた立方の立方に対する。

110 なぜならば，混成法によって，第 1 のものは第 2 のものに対して，比例する系列がどのような個数であっても，すべてのものから集められたもの［和］引くもう 1 つの外項がすべてのものから集められたもの引く第 1 のものに対するからである。さらに，どのような系列であろうと，そのベキの状況 —— 最も外側［の項］の比較が測るように何倍かした比［のベキ］である —— が提示される。

最後の文に対して，『解析術』は「最初と最後の項の比 (2 倍にする，3 倍にする，など) に応じて，ベキは平方，立方，などである。」と注記している。

定理 4

もし 3 つの系列が比例していたならば，第 1 のものは第 3 のものに対して，はじめの 2 つのものによる平方の差が最後の 2 つのものによる平方の差に対する。

そして，もし 4 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 4 のものに対して，はじめの 3 つのものの 1 つおきに選ばれた立方の差が最後の 3 つのものの 1 つおきに選ばれた立方の差に対する。

そして，もし 5 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 5 のものに対して，はじめ

の 4 つのものの 1 つおきに選ばれた平方の平方の差が最後の 4 つのものの 1 つおきに選ばれた平方の平方の差に対する。

そして，もし 6 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 6 のものに対して，はじめの 5 つのものの 1 つおきに選ばれた平方の立方の差が最後の 5 つのものの 1 つおきに選ばれた平方の立方の差に対する。

そして，もし 7 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 7 のものに対して，はじめの 6 つのものの 1 つおきに選ばれた立方の立方の差が最後の 6 つのものの 1 つおきに選ばれた立方の立方の差に対する。

第 1 の主張は，$a : b = b : c$ のとき，$a > b > c$ とするなら，$a : c = (a^2 - b^2) : (b^2 - c^2)$ になる，というもの。
第 2 の主張は，$a : b = b : c = c : d$ のとき，$a : d = (a^3 - b^3 + c^3) : (b^3 - c^3 + d^3)$ になる，というもの。

$$\begin{aligned}
a(b^3 - c^3 + d^3) - d(a^3 - b^3 + c^3) &= ab^3 - ac^3 + ad^3 - a^3 d + b^3 d - c^3 d \\
&= b^3(a + d) - c^3(a + d) + ad(d^2 - a^2) \\
&= (a + d)\left\{b^3 - c^3 + ad(d - a)\right\} \\
&= (a + d)\left\{abc - bcd - ad(a - d)\right\} \\
&= (a + d)(a - d)(bc - ad) = 0
\end{aligned}$$

より $a(b^3 - c^3 + d^3) = d(a^3 - b^3 + c^3)$ となるから，$a : d = (a^3 - b^3 + c^3) : (b^3 - c^3 + d^3)$ がいえる。

第 3 の主張は，$a : b = b : c = c : d = d : e$ のとき，$a : e = (a^4 - b^4 + c^4 - d^4) : (b^4 - c^4 + d^4 - e^4)$ になる，というもの。
第 4，第 5 の主張も同様。

定理 5

もし 3 つの系列が比例していたならば，第 1 のものは第 3 のものに対して，はじめの 2 つのものの差の平方が最後の 2 つのものの差の平方に対する。

そして，もし 4 つ［の系列が比例していた］ならば。第 1 のものは第 4 のものに対して，はじめの 3 つのものの 1 つおきに選ばれた差の立方が最後の 3 つのものの 1 つおきに選ばれた差の立方に対する。

そして，もし 5 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 5 のものに対して，はじめの 4 つのものの 1 つおきに選ばれた差の平方の平方が最後の 4 つのものの 1 つおきに選ばれた差の平方の平方に対する。

そして，もし 6 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 6 のものに対して，はじめの 5 つのものの 1 つおきに選ばれた差の平方の立方が最後の 5 つのものの 1 つおきに選ばれた差の平方の立方に対する。

そして，もし 7 つ［の系列が比例していた］ならば，第 1 のものは第 7 のものに対して，はじめの 6 つのものの 1 つおきに選ばれた差の立方の立方が最後の 6 つのものの 1 つおきに選ばれた差の立方の立方に対する。

第 1 の主張は，$a : b = b : c$ のとき，$a : c = (a - b)^2 : (b - c)^2$ になる，というもの。
第 2 の主張は，$a : b = b : c = c : d$ のとき，$a : d = (a - b + c)^3 : (b - c + d)^3$ になる，という

もの。

$$\begin{aligned}
a(b-c+d)^3-d(a-b+c)^3 &= a\left\{(b-c)+d\right\}^3-d\left\{a-(b-c)\right\}^3\\
&= a\left\{(b-c)^3+3(b-c)^2d+3(b-c)d^2+d^3\right\}\\
&\qquad -d\left\{a^3-3a^2(b-c)+3a(b-c)^2-(b-c)^3\right\}\\
&= (a+d)(b-c)^3+3ad(a+d)(b-c)-ad(a+d)(a-d)\\
&= (a+d)\left\{(b-c)^3+3ad(b-c)-ad(a-d)\right\}\\
&= (a+d)\left\{b^3-3b^2c+3bc^2-c^3+3abd-3acd-ad(a-d)\right\}\\
&= (a+d)\left\{abc-3abd+3acd-bcd+3abd-3acd-ad(a-d)\right\}\\
&= (a+d)(a-d)(bc-ad)=0
\end{aligned}$$

より $a(b-c+d)^3=d(a-b+c)^3$ となるから，$a:d=(a-b+c)^3:(b-c+d)^3$ がいえる。

第 3 の主張は，$a:b=b:c=c:d=d:e$ のとき，$a:e=(a-b+c-d)^4:(b-c+d-e)^4$ になる，というもの。

第 4，第 5 の主張も同様。

定理 6

もし 4 つの連続的な比例が存在したならば，第 4 のものの立方および第 2 のものの立方の 3 倍から集められた立体は第 1 のものの立方および第 3 のものの立方の 3 倍から集められた立体と外項の差の立方［の分］だけ異なっている。

4 つの連続的な比例を B，D，F，G とし，G をより大きい外項としよう。私は，G cubum $+$ D cubo 3 $-$ B cubo $-$ F cubo 3 は $\overline{G-B}$ cubo に等しいという。なぜならば，実際，$\overline{G-B}$ cubo は G cubo $-$ B in G quad. 3 $+$ B quad. in G 3 $-$ B cubo からなり，さらに，G cubo $+$ D c. 3 $-$ B c. $-$ F c. 3 と比較されると，B quad. in G 3 $-$ B in G quad. 3 が D cubo 3 $-$ F cibo 3 に等しいということが残るが，B quad. in G は D cubus であり，B in G quad. は F cubus であるから，このことは成り立つからである。

定理 7

もし 4 つの連続的な比例が存在したならば，第 1 のものの立方および第 3 のものの立方の 3 倍から
111 ら集められた立体が付け加えられた，第 4 のものの立方および第 2 のものの立方の 3 倍から集められた立体は外項の和の立方に等しくされる。

なぜならば，上述の定理の証明におけるのと同じことが有効だからである。

第 18 章

両義の方程式の構成

混成法，または形成法の解法，または最後に探究法の力によって識別された両義の方程式は，たいていは，それ自身の方法をもっている。

より低い階級または辺による作用について

定理 1

もし B in A $-$ A quad. が Z plano に等しくされるならば，B は，それらによって Z plano に等しい長方形［積］となる，2 つの辺から集められたものであり，そして，A はより大きいまたはより小さい辺になる。

2 つの辺 2 および 10 があるすると，$12N-1Q$ は 20 に等しく，そして $1N$ は 2 あるいは 10 になるといわれるであろう。

2 数 a，b に対して，$(a+b)x-x^2=ab$ とすれば，$x=a$，b を解とする方程式をつくることができる，ということ。

定理 2

もし B planum in $A-A$ cubo が Z solido に等しくされるならば，B planum は 3 つの比例するものの平方から集められたものであり，そして Z solidum は一方の外項に残り［の 2 つ］のものの平方の和が掛けられたものであり，そして A は［3 つの比例するもののうちの］第 1 あるいは第 3［の項］になる。

比例するものを 2，$\sqrt{}20$，10 とすると，$124N-1C$ は 240 に等しく，そして $1N$ は 2 あるいは 10 になるといわれるであろう。

$a:b=b:c$ である 3 数 a，b，c に対して，$(a^2+b^2+c^2)x-x^3=a(b^2+c^2)$ あるいは $(a^2+b^2+c^2)x-x^3=c(a^2+b^2)$，すなわち，$b^2=ac$ だから，$(a^2+ac+c^2)x-x^3=ac(a+c)$ とすれば，$x=a$，c を解とする方程式をつくることができる，ということ。

定理 3

もし B solidum in $A-A$ quad.-quad. が Z plano-plano に等しくされるならば，B solidum は 4 つの連続的に比例するものの立方から集められたものであり，そして Z plano-plano は一方の外項に残りの 3 つのものの立方の和が掛けられたものであり，そして A は［4 つの比例するもののうちの］第 1 あるいは第 4［の項］になる。

連続的に比例するものを 2，$\sqrt{}C\,40$［$\sqrt[3]{40}$］，$\sqrt{}C\,200$，10 とすると，$1248N-1QQ$ は 2480 に等しく，そして $1N$ は 2 あるいは 10 になるといわれるであろう。

定理 4

もし B plano-planum in $A-A$ quad.-cubo が Z plano-solido に等しくされるならば，B plano planum は 5 つの連続的に比例するものの平方の平方から集められたものであり，そして Z plano solido は一方の外項に残りの 4 つのものの平方の平方の和が掛けられたものであり，そして A は［5 つの比例するもののうちの］第 1 あるいは第 5［の項］になる。

連続的に比例するものを 2，$\sqrt{}\sqrt{}80$［$\sqrt[4]{80}$］，$\sqrt{}20$，$\sqrt{}\sqrt{}1000$，10 とすると，$12496N-1QC$ は 24960 に等しく，そして $1N$ は 2 あるいは 10 になるといわれるであろう。

定理 5

もし B plano-solidum in $A-A$ cubo-cubo が Z solido-solido に等しくされるならば，B plano-solidum は 6 つの連続的に比例するものの平方の立方から集められたものであり，Z solido-solido は一方の外項に残りの 5 つのものの平方の立方の和が掛けられたものであり，そして A は［6 つの比例するもののうちの］第 1 あるいは第 6［の項］になる。

連続的に比例するものを 2，$\sqrt{}QC\,160$［$\sqrt[5]{160}$］，$\sqrt{}QC\,800$，$\sqrt{}QC\,4000$，$\sqrt{}QC\,20000$，10 とすると，$124992N-1CC$ は 249920 に等しく，そして $1N$ は 2 あるいは 10 になるといわれるであろう。

より高い階級による，または相互の辺による作用について

定理 6

もし B in A quad. $-A$ cubo が Z solido に等しくされるならば，B は 3 つの比例するものか

ら集められたものであり，そして Z solidum は一方の外項に残りの 2 つのものから集められたものの平方が掛けられたものであり，そして A ははじめの 2 つ，あるいは最後の 2 つ，のものから集められたものになる。

比例するものを 1，2，4 とすると，$7Q-1C$ は 36 に等しく，そして $1N$ は 3 あるいは 6 になるといわれるであろう。

> $a:b=b:c$ である 3 数 a，b，c に対して，$(a+b+c)x^2-x^3=a(b+c)^2$ あるいは $(a+b+c)x^2-x^3=c(a+b)^2$，すなわち $(a+b+c)x^2-x^3=ac(a+2b+c)$，とすれば，$x=a+b$，$b+c$ を解とする方程式をつくることができる，ということ。

定理 7

もし B in A cubum $-$ A quad. quad. が Z plano-plano に等しくされるならば，B は 4 つの連続的に比例するものから集められたものであり，そして Z plano-planum は一方の外項に残りの 3 つのものから集められたものの立方が掛けられたものであり，そして A ははじめの 3 つから，あるいは最後の 3 つから，集められたものになる。

112 連続的に比例するものを 1，2，4，8 とすると，$15C-1QQ$ は 2744 に等しく，そして $1N$ は 7 あるいは 14 になるといわれるであろう。

> $a:b=b:c=c:d$ である 4 数 a，b，c，d に対して，$(a+b+c+d)x^3-x^4=a(b+c+d)^3$ あるいは $(a+b+c+d)x^3-x^4=d(a+b+c)^3$ とすれば，$x=a+b+c$，$b+c+d$ を解とする方程式をつくることができる，ということ。

定理 8

もし B in A quad. quad. $-$ A quadrato-cubo が B は 5 つの連続的に比例するものから集められたものであり，そして Z plano-solidum は一方の外項に残りの 4 つのものから集められたものの平方の平方が掛けられたものであり，そして A ははじめの 4 つ，あるいは最後の 4 つ，から集められたものになる。

連続的に比例するものを 1，2，4，8，16 とすると，$31QQ-1QC$ は 810000 に等しくされるであろうし，そして $1N$ は 15 あるいは 30 になる。

定理 9

もし B in A quadrato-cubum $-$ A cubo-cubo が Z solido-solido に等しくされるならば，B は 6 つの連続的に比例するものから集められたものであり，そして Z solido-solidum は一方の外項に残りのものから集められたものの平方の立方が掛けられたものであり，そして A ははじめの 5 つから，あるいは最後の 5 つから，集められたものになる。

連続的に比例するものを 1，2，4，8，16，32 とすると，$63QC-1CC$ は 916132832 に等しくされ，そして $1N$ は 31 あるいは 62 になる。

解釈によって［階級が］下げられるような中間の階級による作用について

定理 10

もし B planum in A quad. $-$ A quad. quad. が Z plano-plano に等しくされるならば，B planum は，第 2 のものが掛けられた第 1 のものが Z plano-planum になるような，2 つの辺の 2 つの平方から集められたものであり，そして A quadratum は 2 つのもののより大きい，またはよ

り小さい，ものになる。

辺を 1，4 とすると，$17Q-1QQ$ は 16 に等しく，そして $1N$ は 1 あるいは 4 になるといわれるであろう。しかし，もし 1 つの数が平方［である］と理解されると，$17N-1Q$ は 16 に等しくされるであろうし，そして $1N$ は 1 あるいは 16 になる。

> 2 数 a，b に対して，$(a^2+b^2)x^2-x^4=a^2b^2$ は $x=a$，b が解となるような方程式であり，
> $x^2=y$ とすれば，$(a^2+b^2)y-y^2=a^2b^2$ は $y=a^2$，b^2 を解とする方程式である。
> $x^2=y$ のように「解釈」すれば，方程式の次数を「下げられる」ということ，か。

定理 11

もし B solidum in A cubum $-$ A cubo-cubo が Z solido-solido に等しくされるならば，B solidum は，第 2 のものが掛けられた第 1 のものが Z solido-solidum になるような，2 つの立方から集められたものであり，そして A cubus は 2 つのもののより大きい，またはより小さい，ものになる。

辺を 1，8 とすると，$513C-1CC$ は 512 に等しく，そして $1N$ は 1 あるいは 8 になるといわれるであろう。しかし，もし $1N$ が根の立方または立体［である］と理解されると，$513N-1Q$ は 512 に等しくされるであろうし，そして $1N$ は 1 あるいは 512 になる。

定理 12

もし B plano-planum in A quad. $-$ A cubo-cubo が Z solido-solido に等しくされるならば，B planum は比例する 3 つの平面の平方から集められたものであり，そして Z solido-solidum は 1 つの平面に残りの 2 つの平面の平方の和が掛けられたものであり，そして A quadratum は［3 つの平方のうちの］より大きい，またはより小さい，ものになる。

比例する 3 つの平面を 1，2，4 とすると，$21Q-1CC$ は 20 に等しく，そして $1N$ は 1 あるいは 2 になるといわれるであろう。しかし，もし $1N$ が根の平方または平面［である］と理解されると，$21N-1C$ は 20 に等しくされるであろうし，そして $1N$ は 1 あるいは 4 になる。

定理 13

もし B planum in A quad. quad. $-$ A cubo-cubo が Z solido-solido に等しくされるならば，B planum は比例する 3 つの平面から集められたものであり，そして Z solido-solidum は 1 つの平面に残りの 2 つから集められたものの平方が掛けられたものであり，そして A quadratum は［はじめの，または最後の］2 つ［の平面の和］のより大きい，またはより小さい，ものになる。

比例する 3 つの平面を 5，20，80 とすると，$105QQ-1CC$ は 50000 に等しく，そして $1N$ は 5 113
あるいは 10 になるといわれるであろう。

> $a:b=b:c$ である 3 数 a，b，c に対して，$(a+b+c)x^4-x^6=a(b+c)^2$ あるいは $(a+b+c)x^4-x^6=c(a+b)^2$ とすると，$x^2=a+b$，$b+c$ になる，ということ。
> ここでの例では，$(5+20+80)x^4-x^6=5(20+80)^2$ とすると，$x^2=5+20=25$，$20+80=100$ であるから，$x=5$，10 となる。

さらに，はじめあるいは最後［の項］が取り入れられた中央［の項］が平方の数になる，比例する 3 つの平面の発見は，この系列から明らかである。［すなわち，］

$$\frac{B\text{ quadrato quadratum}}{B\text{ quadr.}+G\text{ quadr.}},\quad \frac{B\text{ quad. in }G\text{ quad.}}{B\text{ quad.}+G\text{ quad.}},\quad \frac{G\text{ quadrato quadratum}}{B\text{ quad.}+G\text{ quad.}}$$

［このことは］探究法によって繰り返し言われていることから明らかである。なぜならば，中央の平面を E planum とし，そしてはじめのものが B quad. $-$ E plano，最後のものが G quad. $-$ E plano と定められると，それゆえ，はじめの平面に E planum が加えられると平方，もちろん B quadratum，になるであろうし，そして最後の平面に E planum が加えられると平方，もちろん G quadratum，になるであろう。それゆえ，これらのように，3 つの平面は比例しているままであり，その結果として，中央のもの自身からつくられたもの［平方］は外項からつくられたもの［積］に等しくされ，定められた技法に従う比較によって $\dfrac{B\text{ quad. in }G\text{ quad.}}{B\text{ quad.}+G\text{ quad.}}$ が E plano に等しいことが見出されるからである。

B を 1，G を 2 とすると，求められていた平面は $\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{16}{5}$ であろう。はじめ［の項］が取り入れられた中央［の項］は 1 を与え，一方，最後［の項］が取り入れられた［中央の項］は 4 を与える。同じ平面は別の平方，例えば 25，が掛けられると，5，20，80 になり，［これは］例として取り上げられていたものである。

その他［の作用］について

定理 14

もし B solidum in A quad. $-$ A quadrato-cubo が Z plano-solido に等しくされるならば，B solidum は 3 つの比例する系列におけるはじめの 2 つから集められたものの立方に，一方の外項に第 2 および第 3 のものから集められたものの平方が掛けられた立体のほかに，最後の 2 つから集められたものの立方を加えたものからなる。

そして，Z plano-solidum は B solido 引くはじめの 2 つのものによる立方に，第 1 および第 2 のものから集められたものの平方が掛けられたもの，あるいは，第 2 および第 3 のものから集められたものの立方足す第 3 のものおよび第 1 および第 2 のものから集められたものの平方による立体に，第 1 および第 2 のものから集められたものの平方が掛けられたものである。

そして，A ははじめの 2 つのものから集められたもの，あるいは最後の 2 つから集められたものになる。

比例するものを 1，2，4 とすると，$279Q-1QC$ は 2268 に等しくされるであろうし，$1N$ は 3 あるいは 6 になる。

$a:b=b:c$ である 3 数 a，b，c に対して，

$$B^3=(a+b)^3+a(b+c)^2+(b+c)^3 \quad \text{あるいは} \quad (a+b)^3+c(a+b)^2+(b+c)^3$$

$$Z^5=\left\{B^3-(a+b)^3\right\}(a+b)^2 \quad \text{あるいは} \quad \left\{(b+c)^3+c(a+b)^2\right\}(a+b)^2$$

として，$B^3x^2-x^5=Z^5$ とすれば，$x=a+b$，$b+c$ を解とする方程式をつくることができる，ということ。

ここでの例では，$a=1$，$b=2$，$c=4$ であるから，$B^3=279$，$Z^5=2268$ となる。

定理 15

もし B planum in A cubum $-$ A quadrato-cubo が Z plano-solido に等しくされるならば，B planum は 4 つの連続的に比例する系列におけるはじめの 3 つから集められたものの平方，足す最後の 3 つから集められたものの平方，引く第 3 のものに第 3，第 2 および第 1 のものから集められたものが掛けられたもの，あるいは第 2 のものに第 2，第 3 および第 4 のものから集められたもの

が掛けられたもの，からなる。

そして，Z plano-solidum は B plano 引く最後の 3 つから集められたものの平方に，最後の 3 つから集められたものの立方が掛けられたもの，あるいは，B plano 引くはじめの 3 つから集められたものの平方に，はじめの 3 つから集められたものの立方が掛けられたものであり，そして，A ははじめの 3 つから集められたものあるいは最後の 3 つから集められたものになる。

連続的に比例するものを 1，2，4，8 とすると，$217C - 1QC$ は 57624 に等しくされるであろうし，$1N$ は 7 あるいは 14 になる。

> $a:b=b:c=c:d$ である 4 数 a，b，c，d に対して，
> $$B^2 = (a+b+c)^2 + (b+c+d)^2 - c(a+b+c)$$
> $$\text{あるいは}\quad (a+b+c)^2 + (b+c+d)^2 - b(b+c+d)$$
> $$Z^5 = \left\{B^2 - (b+c+d)^2\right\}(b+c+d)^3$$
> $$\text{あるいは}\quad \left\{B^2 - (a+b+c)^2\right\}(a+b+c)^3$$
> として，$B^2x^3 - x^5 = Z^5$ とすれば，$x = a+b+c$，$b+c+d$ を解とする方程式をつくることができる，ということ。

第 19 章
反対の方程式の構成

定理 1

もし A quad. $+$ B in A が Z plano に等しくされ，さらに E quad. $-$ B in E が Z plano に等しくされるならば，それらの差が B であり，さらにそれらからつくられるもの［積］が Z plano に等しい，2 つの辺が存在し，A はより小さい辺で，E はより大きい［辺］になる。

辺を 1，2 とすると，$1Q + 1N$ は 2 に等しくされ，そして $1N$ は 1 になる。さらに，$1Q - 1N$ 114
は 2 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 になる。

定理 2

もし A quad. quad. $+$ B solido in A が Z plano-plano に等しくされ，さらに E quad. quad. $-$ B solido in E が Z plano-plano に等しくされるならば，1 つおきに選ばれた［項の 2 組の］立方が B solidum だけ異なるような，4 つの連続的に比例するものが存在する。さらに，Z plano-planum は一方の外項に残りのものの 1 つおきに選ばれた立方の差が掛けられたものになり，そして，A は外項の中の第 1 の，より小さい，ものであり，E は第 4 のものである。

連続的に比例するものを 1，$\sqrt{C}\,2$，$\sqrt{C}\,4$，2 とすると，$1QQ + 5N$ は 6 に等しくされるであろうし，$1N$ は 1 になる。さらに，$1QQ - 5N$ は 6 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 になる，

> $a:b=b:c=c:d$ である 4 数 a, b, c, d ($a<b<c<d$ とする) について，$(d^3+b^3)-(c^3+a^3) = B^3$ であるとき，$Z^4 = a(d^3+b^3-c^3) = d(c^3+a^3-b^3)$ とすれば，$x^4 + B^3x = Z^4$ は $x = a$ を解とする方程式になり，$y^4 - B^3y = Z^4$ は $y = d$ を解とする方程式になる，ということ。
> 実際，$b^2 = ac$，$c^2 = bd$，$ad = bc$ であるから，$B^3 = (d-a)(d^2+a^2)$，$Z^4 = ad(d^2+a^2-ad)$ となり，$x^4 + B^3x = Z^4$ は $x = a$ を解とし，$y^4 + B^3y = Z^4$ は $y = d$ を解とする。
> ここでの例では，$a = 1$，$b = \sqrt[3]{2}$，$c = \sqrt[3]{4}$，$d = 2$ だから，$B^3 = 5$，$Z^4 = 6$ となる。

定理 3

もし A cubo-cubus $+$ B plano-solido in A が Z solido-solido に等しくされ，さらに E cubo-cubus $-$ B plano-solido in E が Z solido-solido に等しくされるならば，1 つおきに選ばれたものの平方の立方が B plano-solidum だけ異なるような，6 つの連続的に比例するものが存在する。さらに，Z solido-solidum は一方の外項に残りのものの 1 つおきに選ばれた平方の立方の差が掛けられたものになり，そして，A は外項の中の第 1 の，より小さい，ものであり，E は第 6 のものである。

連続的に比例するものを 1，$\sqrt{QC}\,2$，$\sqrt{QC}\,4$，$\sqrt{QC}\,8$，$\sqrt{QC}\,16$，2 とすると，$1CC + 21N$ は 22 に等しくされ，そして $1N$ は 1 になる。さらに，$1CC - 21N$ は 22 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 になる。

連続的に比例する 6 数 a，b，c，d，e，f $(a < b < c < d < e < f)$ に対して，$B = (f^5 + d^5 + b^5) - (e^5 + c^5 + a^5)$，$Z = a\left\{(f^5 + d^5 + b^5) - (e^5 + c^5)\right\} = f\left\{(e^5 + c^5 + a^5) - (d^5 + b^5)\right\}$ とすれば，$x^6 + Bx = Z$ は $x = a$ を解とする方程式であり，$y^6 - By = Z$ は $y = f$ を解とする方程式である，ということ。

定理 4

もし A quad. quad. $+$ B in A cubum が Z plano-plano に等しくされ，さらに E quad. quad. $-$ B in E cubum が Z plano-plano に等しくされるならば，1 つおきに選ばれたものの差が B であるような，4 つの連続的に比例するものが存在する。そして，Z plano-planum はいずれかの外項に残りのものの 1 つおきに選ばれた差の立方が掛けられたものであり，そして，もし第 1 のものが外項の中でより小さいと理解されるならば，A ははじめの 3 つのものの 1 つおきに選ばれた差であり，E は最後の 3 つのものの［1 つおきに選ばれた］差である。

連続的に比例するものを 1，2，4，8 とすると，$1QQ + 5C$ は 216 に等しくされるであろうし，$1N$ は 3 になる。さらに，$1QQ - 5C$ は 216 に等しくされるであろうし，$1N$ は 6 になる。

$a : b = b : c = c : d$ である 4 数 a，b，c，d $(a < b < c < d$ とする$)$ に対して，$B = d - c + b - a$ であるとき，$Z = a(d - c + b)^3 = d(c - b + a)^3$ とすれば，$x^4 + Bx^3 = Z$ は $x = c - b + a$ を解とする方程式であり，$y^4 - By^3 = Z$ は $y = d - c + b$ を解とする方程式である，ということ。

定理 5

もし A cubo-cubus $+$ B in A quadrato-cubum が Z solido-solido に等しくされ，さらに E cubo-cubus $-$ B in E quadrato-cubum が Z solido-solido に等しくされるならば，1 つおきに選ばれたものの差が B であるような，6 つの連続的に比例するものが存在する。さらに，Z solido-solidum はいずれかの外項に残りのものの 1 つおきに選ばれた差の平方の立方が掛けられたものであり，そして，もし外項の中において第 1 のものがより小さいと理解されるならば，A ははじめの 5 つのものの 1 つおきに選ばれた差であり，E は最後の 5 つのものの［1 つおきに選ばれた］差である。

連続的に比例するものを 1，2，4，8，16，32 とすると，$1CC + 21QC$ は 5153632 に等しくされ，そして $1N$ は 11 になる。さらに，$1CC - 21QC$ は 5153632 に等しくされるであろうし，$1N$ は 22 になる。

ここでの例では，$a = 1$，$b = 2$，$c = 4$，$d = 8$，$e = 16$，$f = 32$ であるから，$Z = a(f - e +$

$d-c+b)^5 = f(e-d+c-b+a)^5 = 5153632$ である。

第 20 章
逆の方程式の構成
つまり，逆［の方程式］の構造 (systatica) はこれである

systatica は σύστασις か。
σύστασις : *a putting together*, *composition*; *a bringing together*, *introduction*, *recommendation*; *a standing together*, *meeting*; *a knot of men*; *friendship* or *alliance*; *construction*, *structure*, *constitution*

定理 1

もし B planum in $A - A$ cubo が Z solido に等しくされ，さらに E cubus $- B$ plano in E が Z solido に等しくされるならば，1 つおきに選ばれたものの平方が B planum だけ異なるような，3 つの比例するものが存在する。さらに，Z solidum は一方の外項に残りのものの平方の差を掛け 115
たものであり，そして，A は外項の中で第 1 の，より小さい，ものであり，E は第 3 のものである。

比例するものを 1，$\sqrt{2}$，2 とすると，$3N - 1C$ は 2 に等しくされるであろうし，$1N$ は 1 になる。さらに，$1C - 3N$ は 2 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 になる。

$a : b = b : c$ である 3 数 a，b，c に対して，$B = c^2 - b^2 + a^2$，$Z = a(c^2 - b^2) = c(b^2 - a^2)$ とすれば，$Bx - x^3 = Z$ は $x = a$ を解とし，$y^3 - By = Z$ は $y = c$ を解とする方程式になる，ということ。

定理 2

もし B plano-planum in $A - A$ quadrato-cubo が Z plano-solido に等しくされ，さらに E quadrato-cubus $- B$ plano-plano in A が Z plano-solido に等しくされるならば，1 つおきに選ばれたものの平方の平方が B plano-planum だけ異なるような，5 つの連続的に比例する長さが存在する。さらに，Z plano-planum は一方の外項に残りのものの 1 つおきに選ばれた平方の平方の差が掛けられたものであり，そして，A は外項の中の第 1 の，より小さい，ものになり，E は第 5 のものになる。

連続的に比例するものを 1，$\sqrt{\sqrt{2}}$，$\sqrt{\sqrt{4}}$，$\sqrt{\sqrt{8}}$，2 とすると，$11N - 1QC$ は 10 に等しくされ，$1N$ は 1 になる。さらに，$1QC - 11N$ は 10 に等しくされ，$1N$ は 2 になる。

$a : b = b : c = c : d = d : e$ である 5 数 a，b，c，d，e に対して，$B = e^4 - d^4 + c^4 - b^4 + a^4$，$Z = a(e^4 - d^4 + c^4 - b^4) = e(d^4 - c^4 + b^4 - a^4)$ とすれば，$Bx - x^5 = Z$ は $x = a$ を解とし，$y^5 - By = Z$ は $y = e$ を解とする方程式である，ということ。

定理 3

もし B in A quad. $+ A$ cubo が Z solido に等しくされ，さらに B in E quad. $- E$ cubo が Z solido に等しくされるならば，1 つおきに選ばれたものの差が B であるような，3 つの比例するものが存在する。さらに，Z solidum は一方の外項に残りのものの 1 つおきに選ばれた差の平方が掛けられたものであり，そして，もし第 1 のものが外項の中でより小さいと理解されるならば，A は

はじめの 2 つのものの 1 つおきに選ばれた差であり，E は最後の 2 つのものの［1 つおきに選ばれた］差である。

I　II　III
比例するものを 1　2　4 とすると，$3Q+1C$ は 4 に等しくされ，$1N$ は 1 になる。さらに，$3Q-1C$ は 4 に等しくされ，$1N$ は 2 になる。

> $a:b=b:c$ である 3 数 a，b，c に対して，$B=c-b+a$，$Z=a(c-b)^2=c(b-a)^2$ とすれば，$Bx^2+x^3=Z$ は $x=b-a$ を解とし，$By^2-y^3=Z$ は $y=c-b$ を解とする方程式である，ということ。

定理 4

もし B in A quad,quad. $+$ A quadrato-cubo が Z plano-solido に等しくされ，さらに B in E quad. quad. $-$ E quadrsato-cubo が Z plano-solido に等しくされるならば，1 つおきに選ばれたものの差が B であるような，5 つの［連続的に］比例するものが存在する。さらに，Z plano-solidum は一方の外項に残りのものの 1 つおきに選ばれた差の平方の平方が掛けられたものであり，そして，もし第 1 もののが外項の中でより小さいと理解されるならば，A ははじめの 4 つのものの 1 つおきに選ばれた差であり，E は最後の 4 つのものの［1 つおきに選ばれた］差である。

I　II　III　IV　V
比例するものを 1　2　4　8　16 とすると，$11QQ+1QC$ は 10000 に等しくされ，$1N$ は 5 になる。さらに，$11QQ-1QC$ は 10000 に等しくされ，$1N$ は 10 になる。

> $a:b=b:c=c:d=d:e$ である 5 数 a，b，c，d，e に対して，$B=e-d+c-b+a$，$Z=a(e-d+c-b)^4=e(d-c+b-a)^4$ とすれば，$Bx^4+x^5=Z$ は $x=d-c+b-a$ を解とし，$By^4-y^5=Z$ は $y=e-d+c-b$ を解とする方程式である，ということ。

定理 5

もし B planum in A cubum $+$ A quadrato-cubo が Z plano-solido に等しくされ，さらに B planum in E cubum $-$ E quadr.-cubo が Z plano-solido に等しくされるならば，第 4 のものと第 1 のものの差が掛けられた外項［の和］が B planum をつくるような，6 つの連続的に比例するものが存在する。さらに，Z plano-solidum は第 4 のものと第 1 のものの差の立方に，B planum 足す同じ差の平方が掛けられたもの，あるいは，第 5 のものと第 2 のものの差に立方に，第 5 のものと第 2 のものの間のその差の平方が罰せられた B planum が掛けられたもの，からなり，そして，第 1 もののが外項の中でより小さいと理解されるとき，A は第 4 のものと第 1 のものの差になり，E は第 5 のものと第 2 のものの差になる。

I　II　III　IV　V　VI
116 比例するものを 1　2　4　8　16　32 とすると，$231C+1QC$ は 96040 に等しくされ，$1N$ は 7 になる。さらに，$231C-1QC$ は 96040 に等しくされ，$1N$ は 14 になる。

> $a:b=b:c=c:d=d:e=e:f$ である 6 数 a，b，c，d，e，f に対して，$B=(a+f)(d-a)$，$Z=(d-a)^3\left\{B+(d-a)^2\right\}=(e-b)^3\left\{B-(e-b)^2\right\}$ とすれば，$Bx^3+x^5=Z$ は $x=d-a$ を解とし，$By^3-y^5=Z$ は $y=e-b$ を解とする方程式である，ということ。

定理 6

もし B solidum in A quad. $+$ A quadrato-cubo が Z plano-solido に等しくされ，さらに B solidum in E quad. $-$ E quadrato-cubo が Z plano-solido に等しくされるならば，第 3 のものと第 1 のものの差の平方が掛けられた外項［の和］が B solidum をつくるような，6 つの連続的に比例するものが存在する。さらに，Z plano-solidum は B solido 足す第 3 のものと第 1 のものの差の立方に，同じ差の平方が掛けられたもの，あるいは，B solido 引く第 2 のものと第 4 のものの差の立方に，第 2 のものと第 4 のものの間の差の平方が掛けられたもの，になり，第 1 のものが外項の中でより小さいと理解されるとき，A は第 3 のもの引く第 1 のもの，E は第 4 のもの引く第 2 のものになる。

	I	II	III	IV	V	VI	
比例するものを	1	2	4	8	16	32	とすると，$297Q + 1QC$ は 2916 に等しくされ，

$1N$ は 3 になる。さらに，$297Q - 1QC$ は 2916 に等しくされ，$1N$ は 6 になる。

> $a:b=b:c=c:d=d:e=e:f$ である 6 数 a，b，c，d，e，f に対して，$B=(a+f)(c-a)$，$Z=\left\{B+(c-a)^3\right\}(c-a)^2=\left\{B-(d-b)^3\right\}(d-b)^2$ とすれば，$Bx^2+x^5=Z$ は $x=c-a$ を解とし，$By^2-y^5=Z$ は $y=d-b$ を解とする方程式である，ということ。

第 21 章

さらに，逆の方程式の別の構成

定理 1

もし B planum in A $-$ A cubo が Z solido に等しくされ，さらに E cubus $-$ B plano in E が Z solido に等しくされるならば，3 つの比例するものが存在して，結合されたそれらの平方が B planum をつくり，さらに，中項の平方が掛けられた外項の和，あるいは一方の外項に残りの 2 つのものの平方の和が掛けられたものが Z solidum になり，そして，A は外項のうちのいずれかであり，E は同じものの和である。

比例するものを 1，2，4 とすると，$21N - 1C$ は 20 に等しくされ，$1N$ は 1 あるいは 4 になる。さらに，$1C - 21N$ は 20 に等しくされ，$1N$ は 5 になる。

> $a:b=b:c$ である 3 数 a,b,c に対して，$B=a^2+b^2+c^2$，$Z=b^2(a+c)=a(b^2+c^2)=c(a^2+b^2)$ とすれば，$Bx-x^3=Z$ は $x=a$，c を解とし，$y^3-By=Z$ は $y=a+c$ を解とする方程式である，ということ。

定理 2

もし B in A quad. $-$ A cubo が Z solido に等しくされ，さらに B in E quad. $+$ E cubo が Z solido に等しくされるならば，3 つの比例する根が存在して，それらの和が B であり，さらに，もし中項の平方が掛けられるならば，はじめの 2 つのものから集められたものに残りの［最後の］2 つのものから集められたものが付け加えられたもの，あるいは，一方の外項に残りの 2 つのものから集められたものの平方が掛けられたものが Z solidum になり，そして，A は前述の集められたもののうちのいずれかであり，E は外項の間の中項である。

比例するものを 1，2，4 とすると，$7Q - 1C$ は 36 に等しくされ，$1N$ は 3 あるいは 6 になる。

さらに，$7Q+1C$ は 36 に等しくされ，$1N$ は 2 になる。

> $a:b=b:c$ である 3 数 a，b，c に対して，$B=a+b+c$，$Z=b^2\{(a+b)+(b+c)\}=a(b+c)^2=c(a+b)^2$ とすれば，$Bx^2-x^3=Z$ は $x=a+b$，$b+c$ を解とし，$By^2+y^3=Z$ は $y=b$ を解とする方程式である，ということ。

第 2 論文　方程式の改良について

第 1 章

数［値解法］における困難さ (ΔΥΣΜΗΧΑΝΙΑΝ) に対して，
方程式が前もって準備されるであろう 5 つの通常の方法について

そして，はじめに，
救済策が多くの不幸に耐えること (Πολυπάθειαν) に対するものである，
わずかな量による浄化について

δυσμήχᾶνος : *hard to effect*, *difficult*, *at a loss*, *devising ill*, *ill-devised*, *wicked*
πολυπάθεια : *suffering of many calamities*, *receiving of diverse impressions* or *sensations*

方程式の性質が識別されることによって，解析学者は，そうでなければ機械技師がそれらを拒否するかも知れない，あるいはただ苦労して耐え忍ぶだけであるような，前もって準備されるであろうものへ安全に自分自身を変えるし，彼はその準備によって［解法を］巧妙に (εὐμήχανας) なし遂げる。確かに，準備されるであろう一般的な教義は新しい探究法として採用され，あるいは形成法または混成法の段階は繰り返され，そして最後に，変形されるための方法で試されないというものはない。しかし，解析学者は，幸運に任せることなく事物あるいは数のいずれかによって解かれるために，おのおのの方程式の報復または妨害に対して，それぞれのそしてありふれた救済策を欠いてはいない。さらに，幾何学者にとって巧妙［な解法］に (εὐμηχανίαν) 役立つほとんどのものは算術家にとっても役立つものであり，おそらくそのうえ逆もそうである。しかし，それどころか，幾何学的な業績について，特にそれ自身の場所において，述べられるであろう。さらに，いま，多様な解析に関して，いっそう主張されていたし，我々は［それを］確立した。

εὐμήχανος : of persons, *skilful in contriving*, *ingenious*, *inventive*;
of things, *skillfully contrived*, *ingenious*

それゆえ，特に数［に関する解法］について，準備のための，常用のそして独特の方法が，通常は，5 つある。

I　わずかな量による浄化
II　最初と最後［の項の比］による (Πρῶτον ἔσχατον) 変形
III　倒置 (Anastrophe)
IV　同等性 (Isomœria)
V　補足付加による (paraplerosis) 漸層法

要するに，多くの不幸に耐えることに対する最も安全で最も手近な救済策はわずかな量による浄化である。

πρῶτος : *in the first place*, *at first*, *for the first time*
ἔσχατος : of Space, *the furthest*, *uttermost*, *extreme*;
of Degree, *the uttermost*, *utmost*, *last*, *worst*, *highest*;
of Time, *last*;
of Persons, *lowest*, *meanest*;

Adv. *to the uttermost*, *exceedingly*

anastrophe は ἀναστροφή, ἀναστρόφιος か。

ἀναστροφή : *a turning upside down*, *upsetting*; *a turning back*, *return*; *a dwelling in* a place; *the place where one tarries*, *an abode*, *haunt*

ἀναστρόφιος : *converse* (of mathematical proportions)

isomœria は ἰσόμοιρος か。

ἰσόμοιρος : *sharing equally* or *alike*; *coextensive*; *equivalent*, *corresponding*

さらに，それは加法あるいは減法による変形の形式である。これによって，等しくされた最大の階級 —— 補足的なものが根にとって同次のものを支えている —— によって作用されたベキの方程式は規則に従って，安全な数の調和において，この作用から解放される。それは，平方［の方程式］においては［根にとって同次なものとなる補足的なものの］半分 (diahemisy) であり，立方［の方程式］においては 3 分の 1 (diatritemorion)，平方の平方［の方程式］においては 4 分の 1 (diatetartemorion)，平方の立方［の方程式］においては 5 分の 1 (diapentemorion)，立方の立方［の方程式］においては 6 分の 1 (diectemorion) であり，この順で無限にそうである。［なぜなら，］
118 この階級による作用は，最初に提示されていた方程式が，それについてのまたはそのベキについての，純粋なあるいは作用された，根が作用されたものであると理解されるような，増加または減少から始められるからである。

μόριον : *piece*, *portion*, *section*; *constituent part*, *member*; *member* of a council; *part* of speech; *fraction with 1 for numerator*

さらに，この増加または減少の 2 倍は平方［の方程式］における辺による補足的なものであり，3 倍は立方［の方程式］における平方による補足的なもので，4 倍は平方の平方［の方程式］における立方による補足的なもので，5 倍は平方の立方［の方程式］における平方の平方による補足的なもので，さらに，6 倍は立方の立方［の方程式］における平方の立方による補足的なものであり，この順で無限にそうである。

それゆえ，［このような］形成法が拭い去られるであろうために，反対のまたは逆行する方法によって，根にとって同次なものの補足的なものについて一致したわずかな量 —— すなわち，平方［の方程式］においては半分，立方［の方程式］においては 3 分の 1，平方の平方［の方程式］においては 4 分の 1，平方の立方［の方程式］においては 5 分の 1，立方の立方［の方程式］においては 6 分の 1，そしてこの順で連続的に —— が利用される。そのうえ，それらの一致したわずかな量によって根は作用され，そしてさらに，変形は技法になる。

それゆえ，操作における全体の構造は 3 つの状態の区別を容認する。

第 1 に，A のベキが補足的なもの B および A の最大の等しくされた階級［の積］による同次のものの加法によって作用されたとしよう。それゆえ，その作用は肯定的であるから，根は補足的なもの B の一致したわずかな量によって肯定的に作用されるであろう。そして，そのように作用された［根］は E と定められるであろう。そのために，E 引く補足的なもの B の一致したわずかな量は A に等しくされるであろう。そして，新しい文字によって，最初に提示された方程式は調整され，新しい［形式に］整えられるであろう。それは，操作は確証されるであろうから，最大の階級による作用から完全に自由であることになるであろう。

第 2 に，A のベキが補足的なもの B および A の最大の等しくされた階級［の積］による同次のものの減法 (multa) によって作用されたとしよう。それゆえ，その作用は否定的であるから，A は補足的なもの B の一致したわずかな量によって否定的に作用されるであろう。そして，そのように作用された［根］は E であると定められるであろう。そのために，E 足す補足的なもの B の一致したそのわずかな量は A に等しくされるであろう。そして，新しい文字によって，最初に提示された方程式は調整され，新しい［形式に］整えられるであろう。それは，操作は確証されるであろうから，最大の階級による作用から完全に自由であることになるであろう。

最後に，補足的なもの B および A の最大の階級［の積］による同次のものが A のベキの減法によって作用されたとしよう。それゆえ，ベキは作用されるというよりむしろ作用するのであるから，すなわち，作用の同次のものから拒否されるのであるから，補足的なもの B の一致したわずかな量は A のベキによって罰せられる［取り去られる］。そして，［それは］E であると定められるであろう。そのために，補足的なもの B のそのわずかな量引く根 E は A に等しくされるであろう。そして，新しい文字によって，最初に提示された方程式は調整され，新しい［形式に］整えられるであろう。それは，操作は確証されるであろうから，最大の階級による作用から完全に自由であることになるであろう。

平方［の方程式］における例

A quad. $+$ B in A 2 が Z plano に等しいと提示されるとしよう。それゆえ，漸層法における大きさの順において辺は平方に最も近く迫るものであり，さらに辺によって作用されたこの平方が提示されるのであるから，方程式は形成法または他の方法によって完全に形づくられた。さらに，その作用は肯定的であり，それゆえ，形成法は，ベキが比の 2 倍である，一致した平方の要求に従って，辺による補足的なものの半分の加法によって生じた。

それゆえ，形成法を終わらせるために［わずかな量による］浄化が［補足的なものの］半分になるとしよう。それゆえ，$A + B$ を E とすると，ゆえに $E - B$ は A であろう。そして，結果として，B 2 in $\overline{E-B}$ による平面が加えられた，$\overline{E-B}$ による平方は，提示されているとおり，Z plano に等しくされるであろう。それゆえ，E についての方程式は技法に従って整えられ，それぞれ［の段階］が適切になし遂げられたら，E quad. が Z plano $+$ B quad. に等しくされることが見出されるであろう。確かに，この新しい方程式は，最初に提示された方程式では埋められていた，辺による作用によって装飾されていない。さらに，E が知られるようになるとき，E は長さ B の分だけ A そのものにまさるから，それらの根の間の与えられた違いによって，A が知られないはずがない。それゆえ，要求されていたことがなされた。

立方［の方程式］における例 119

A cubus $+$ B in A quad. 3 $+$ D plano in A が Z solido に等しいと提示されるとしよう。それゆえ，漸層法における大きさの順において平方は立方に最も近く迫るものであり，さらに確かに平方によって作用されたこの立方が提示されるのであるから，方程式は形成法または他の方法によって完全に形づくられた。さらに，その作用は肯定的であり，それゆえ，形成法は，ベキが比の 3 倍である，一致した立方の要求に従って，補足的なもの B の 3 分の 1 の加法によって生じた。それゆえ，形成法を終わらせるために，［わずかな量による］浄化が［補足的なものの］3 分の 1 になるとしよう。それゆえ，$A + B$ を E とすると，ゆえに $E - B$ は A に値するであろう。そして，結果として，$\overline{E-B}$ による立方に，B 3 および $\overline{E-B}$ による平方によって形づくられるであろう立

体が加えられ，そのうえさらに，D plano in $\overline{E-B}$ による立体が加えられた結果は，提示されているとおり，Z solido に等しくされるであろう。それゆえ，E についての方程式は技法に従って整えられ，それぞれ［の段階］が適切になし遂げられたら，E cubus + $\overline{D \text{ plano} - B \text{ quad. } 3}$ in E が Z solido + D plano in B − B cubo 2 に等しくされることが見出されるであろう。確かに，この新しい方程式は，最初に提示された［方程式］では埋められていた，平方による作用によって装飾されていない。さらに，E が知られるようになるとき，E は長さ B の分だけ A そのものにまさるから，それらの根の間の与えられた違いによって，A が知られないはずがない。それゆえ，要求されていたことがなされた。

しかし，もしまっすぐな拒否によって作用されたベキの方程式 —— A quad. − B in A 2 が Z plano に等しくされる，あるいは A cubus − B in A quad. 3 が Z solido に等しくされる，のような —— が提示されるならば，$A-B$ が E であると定められると，E についての方程式は定められた手続きに従って整えられるであろう。

最後に，もし逆にされた拒否によって作用されたベキの方程式 —— B in A 2 − A quad. が Z plano に等しくされる，あるいは B in A quad. 3 − A cubo が Z solido に等しくされる，のような —— が提示されるならば，$B-A$ が E であると定められると，E についての方程式は，同様に，定められた手続きに従って整えられるであろう。

もし作用されたすべての平方が純粋［な平方］に変えられるならば，どのように作用された立方も辺だけによって作用された立方に，どのように作用された平方の平方も辺および平方だけによって作用された平方の平方に，どのように作用された平方の立方も辺，平方および立方だけによって作用された平方の立方に，そしてこの順で続けて［，変えられる］。

古代の人々は，この還元によって，平方の方程式が完全に清められ，都合よく解けたから，より高い［ベキ］においても同様に漸層法によって完全に清められると信じていたし，そして，純粋［なベキ］の標準的な解法からすべての面倒を機械的にそらすことを試し，そのうえ，頑強に，作用された方程式が解かれるであろう他の方法を求めなかった。

それゆえ，彼らは自分自身をいたずらに苦しめたし，彼らが育てていた数学の損失によって，多くの時間を消費した。要するに，作用された平方の方程式が解かれるであろうこの方法は普遍的ではない。確かに，方程式が，安全な数の均整において，単一の作用によって，しかしすべての作用によってではなく，清められるであろう方法は普遍的である。それゆえ，私たちは昔の人々の頑固な見解に執着してはならない。

さらに，そのような種類のそれぞれの還元の法則についてそれぞれの定理を思いつくこと，そして，それらを技法や使用に供することは有益なことである。そのような種類のものは次のようなものである。

作用された平方［の方程式］の純粋［な方程式］への還元について
3 つの法則

I

もし A quad. + B 2 in A が Z plano に等しくされるならば，$A+B$ を E とせよ。それゆえ，E quad. が Z plano + B quad. に等しくされるであろう。

帰結

それゆえ，最初に求められていたものについて，$\sqrt{Z \text{ plano} + B \text{ quad.}} - B$ が A になる。

B を 1，Z planum を 20，A を $1N$ としよう。$1Q+2N$ が 20 に等しくされ，$1N$ は $\sqrt{21}-1$ になる。

II 120

もし A quad. $-$ B in A 2 が Z plano に等しくされるならば，$A-B$ を E とせよ。それゆえ，E quad. が Z plano $+$ B quad. に等しくされるであろう。

帰結

それゆえ，最初に求められていたものについて，$\sqrt{Z \text{ plano} + B \text{ quad.}} + B$ が A になる。

B を 1，Z planum を 20，A を $1N$ としよう。$1Q-2N$ は 20 に等しくされ，$1N$ は $\sqrt{21}+1$ になる。

III

もし D 2 in A $-$ A quad. が Z plano に等しくされるならば，$D-E$ あるいは $D+E$ を A とせよ。E quad. が D quad. $-$ Z plano に等しくされるであろう。

帰結

それゆえ，最初に求められていたものについて，D 引くまたは足す $\sqrt{D \text{ quad.} - Z \text{ plano}}$ が A になる。

D を 5，Z planum を 20，A を $1N$ としよう。$10N-1Q$ は 20 に等しくされ，$1N$ は $5-\sqrt{5}$ あるいは $5+\sqrt{5}$ になる。

平方によって単一に作用された立方［の方程式］の
辺によって単一に作用された立方［の方程式］への還元について
3 つの法則

I

もし A cubus $+$ B 3 in A quad. が Z solido に等しくされるならば，$A+B$ を E とせよ。E cubus $-$ B quad. 3 in E が Z solido $-$ B cubo 2 に等しくされるであろう。

［B を 2，Z solido を 1600 とすると，］$1C+6Q$ が 1600 に等しくされ，$1N$ は 10 である。$1C-12N$ が 1584 に等しくされ，$1N$ は 12 である。

算術的に矛盾していない他の符号 (σημεῖον) について，もう一方の根の符号 (nota) が，最初に求められていたそれの符号の違いに従って，置き換えられる。

> σημεῖον : *a sign*, *a mark*, *token*, *a sign from the gods*, *an omen*, *a sign* or *signal* to do a thing, *an ensign* or *flag*, *a device* upon a shield, *a signal*, *watchword*; in reasoning, *a sign* or *proof*

II

もし A cubus $-$ B 3 in A quad. が Z solido に等しくされるならば，$A-B$ を E とせよ。E cubus $-$ B quad. 3 in E が Z solido $+$ B cubo 2 に等しくされるであろう。

$1C-6Q$ は 400 に等しくされ，$1N$ は 10 である。$1C-12N$ は 416 に等しくされ，$1N$ は 8 である。

III

もし B 3 in A quad. $-$ A cubo が Z solido に等しくされるならば，$A-B$ を E とせよ。B

quad. 3 in $E - E$ cubo が Z solido $- B$ cubo 2 に等しくされるであろう。あるいは，$B - A$ を E とせよ。B quad. 3 in $E - E$ cubo が B cubo $2 - Z$ solido に等しくされるであろう。

$21Q - 1C$ は 972 に等しくされ，$1N$ は 9 あるいは 18 である。$147N - 1C$ は 286 に等しくされ，$1N$ は 2 あるいは 11 である。

$9Q - 1C$ は 28 に等しくされ，$1N$ は 2 である。$27N - 1C$ は 26 に等しくされ，$1N$ は 1 である。

辺とともに平方によって作用された立方［の方程式］の
辺によって単一に作用された立方［の方程式］への還元について
7 つの法則

I

もし A cubus $+ B$ 3 in A quad. $+ D$ plano in A が Z solido に等しくされるならば，$A + B$ を E とせよ。E cubus $+ \overline{D \text{ plano} - B \text{ quad. } 3}$ in E が Z solido $+ D$ plano in $B - B$ cubo 2 に等しくされるであろう。

$1C + 30Q + 330N$ は 788 に等しくされ，$1N$ は 2 である。$1C + 30N$ は 2088 に等しくされ，$1N$ は 12 である。

121 $1C + 24Q + 132N$ は 368 に等しくされ，$1N$ は 2 である。$1C - 60N$ は 400 に等しくされ，$1N$ は 10 である。

$1C + 30Q + 4N$ は 1320 に等しくされ，$1N$ は 6 である。$296N - 1C$ は 640 に等しくされ，$1N$ は 16 である。

II

もし A cubus $+ B$ 3 in A quad. $- D$ plano in A が Z solido に等しくされるならば，$A + B$ を E とせよ。E cubus $+ \overline{- B \text{ quad. } 3 - D \text{ plano}}$ in E が Z solido $- B$ cubo $2 - D$ plano in B に等しくされるであろう。

$1C + 6Q - 48N$ は 512 に等しくされ，$1N$ は 8 である。$1C - 60N$ は 400 に等しくされ，$1N$ は 10 である。

$1C + 30Q - 48N$ は 32 に等しくされ，$1N$ は 2 である。$348N - 1C$ は 2448 に等しくされ，$1N$ は 12 である。

III

もし A cubus $- B$ 3 in A quad. $+ D$ plano in A が Z solido に等しくされるならば，$A - B$ を E とせよ。E cubus $+ \overline{- B \text{ quad. } 3 + D \text{ plano}}$ in E が Z solido $+ B$ cubo $2 - D$ plano in B に等しくされるであろう。

$1C - 30Q + 330N$ は 1368 に等しくされ，$1N$ は 12 である。$1C + 30N$ は 68 に等しくされ，$1N$ は 2 である。

$1C - 12Q + 28N$ は 80 に等しくされ，$1N$ は 10 である。$1C - 20N$ は 36 に等しくされ，$1N$ は 6 である。

$1C - 18Q + 88N$ は 80 に等しくされ，$1N$ は 10 である。$20N - 1C$ は 16 に等しくされ，$1N$ は 4 である。

あるいは $B - A$ を E とせよ。$\overline{B \text{ quad. } 3 - D \text{ plano}}$ in $E - E$ cubo が Z solido $+ B$ cubo 2 $- D$ plano in B に等しくされるであろう。

$1C-30Q+200N$ は 336 に等しくされ，$1N$ は 6 である。$100N-1C$ は 336 に等しくされ，$1N$ は 4 である。

$1C-30Q+280N$ は 704 に等しくされ，$1N$ は 4 である。$1C-20N$ は 96 に等しくされ，$1N$ は 6 である。

$1C-30Q+330N$ は 1232 に等しくされ，$1N$ は 8 である。$1C+30N$ は 68 に等しくされ，$1N$ は 2 である。

IV

もし A cubus $-$ B 3 in A quad. $-$ D plano in A が Z solido に等しくされるならば，$A-B$ を E とせよ。E cubus $+$ $\overline{-B \text{ quad. } 3 - D \text{ plano}}$ in E が Z solido $+$ B cubo 2 $+$ D plano in B に等しくされるであろう。

$1C-6Q-28N$ は 120 に等しくされ，$1N$ は 10 である。$1C-40N$ は 192 に等しくされ，$1N$ は 8 である。

V

もし D planum in A $-$ B 3 in A quad. $-$ A cubo が Z solido に等しくされるならば，$A+B$ を E とせよ。$\overline{D \text{ planum} + B \text{ quad. } 3}$ in E $-$ E cubo が Z solido $+$ B cubo 2 $+$ D plano in B に等しくされるであろう。

$100N-30Q-1C$ は 72 に等しくされ，$1N$ は 2 である。$400N-1C$ は 3072 に等しくされ，$1N$ は 12 である。

VI

もし B 3 in A quad. $+$ D plano in A $-$ A cubo が Z solido に等しくされるならば，$A-B$ を E とせよ。$\overline{D \text{ planum} + B \text{ quad. } 3}$ in E $-$ E cubo が Z solido $-$ D plano in B $-$ B cubo 2 に等しくされるであろう。

$18Q+92N-1C$ は 1720 に等しくされ，$1N$ は 10 である。$200N-1C$ は 736 に等しくされ，$1N$ は 4 である。

あるいは $B-A$ を E とせよ。$\overline{D \text{ planum} + B \text{ quad. } 3}$ in E $-$ E cubo が B cubo 2 $+$ D plano in B -Z solido に等しくされるであろう。

$30Q+100N-1C$ は 1464 に等しくされ，$1N$ は 6 である。$400N-1C$ は 1536 に等しくされ，$1N$ は 4 である。

VII

もし B 3 in A quad. $-$ D plano in A $-$ A cubo が Z solido に等しくされるならば，$A-B$ を E とせよ。$\overline{B \text{ quad. } 3 - D \text{ plano}}$ in E $-$ E cubo が Z solido $+$ D plano in B $-$ B cubo 2 に等しくされるであろう。

$18Q-78N-1C$ は 20 に等しくされ，$1N$ は 10 である。$30N-1C$ は 56 に等しくされ，$1N$ 122
は 4 である。

$12Q-18N-1C$ は 20 に等しくされ，$1N$ は 10 である。$1C-30N$ は 36 に等しくされ，$1N$ は 6 である。

あるいは $B-A$ を E とせよ。$\overline{B \text{ quad. } 3 - D \text{ plano}}$ in E $-$ E cubo が B cubo 2 $-$ D plano in B $-$ Z solido に等しくされるであろう。

$30Q - 100N - 1C$ は 264 に等しくされ，$1N$ は 6 である。$200N - 1C$ は 736 に等しくされ，$1N$ は 4 である。

さらに，わずかな量およびそれらの単一［の作用］による浄化によって，方程式は漸層法の順序においてすぐ前に続けられるベキの階級による作用から自由にされるように，ときには，三角形状のおよびピラミッド状の［三角数，三角錐数のこと］，およびそれらから構成されたわずかな量によって，方程式を —— 下位階級の補足的なものがベキとして詳しく調べられること，および 2 項式の根から純粋なベキが誕生するという陳述を要求するだけ多くのそれらの根のわずかな量が要求されるであろうことによって —— その他のより低い階級による作用から自由にすることができる。なぜならば，探し求められている根にとって同次のものの補足的なものが単一のわずかな量によって評価されるように，根の平方にとって同次のものは三角形状のわずかな量によって，立方にとって［同次のもの］はピラミッド状［のわずかな量］によって，そしてこの順で連続して［，清められるからである］。

三角形状の数，すなわち三角数，とは，小石を正三角形状に配置したときの小石の総数をいう。これは，初項 1，公差 1 の等差数列の第 n 項までの和 $\dfrac{1}{2}\,n(n+1)$，といってもよい。

ピラミッド状の数，すなわち三角錐数，とは，ボールを正三角錐状に組み上げたときのボールの総数をいう。エジプトのピラミッドは四角錐であるが，ヴィエートはなぜか，三角錐状のものをピラミッド状といっている。これは，三角数を 1 から小さい順に加えた和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\,k(k+1) = \frac{1}{6}\,n(n+1)(n+2)$，ということができる。

［もし］A および B quadrato によって作用された A cubus が提示されるならば，浄化のために B の 3 分の 1 が選ばれるであろう。

そして，もし A quadrato および B quadrato によって作用された A quadrato-quadratum が提示されるならば，その作用の浄化のために B の 6 分の 1 が選ばれるであろう。

そして，もし A cubo および B quadrato によって作用された A quadrato-cubus が提示されるならば，浄化のために B の 10 分の 1 が選ばれるであろう。確かに，三角形状の数［三角数］は 3，6，10，15［，$\cdots$］である。

さらに，［もし］A および B cubo によって作用された A quadrato-quadratum が提示されるならば，その作用の浄化のために B の 4 分の 1 が選ばれるであろう。

そして，もし A quadrato および B cubo によって作用された A quadrato-cubus が提示されるならば，浄化のために B の 10 分の 1 が選ばれるであろう。確かに，ピラミッド状の数［三角錐数］は 4，10，20，35［，$\cdots$］である。

より高い［ベキに］に対してどのようにして［これらのことを］適合させることができるかは十分に明らかである。さらに，三角形状の，ピラミッド状の，およびそれらから構成されたわずかな量による浄化は，方程式が提示され，自由にされるであろうその作用によって包まれている限りは，［やってみるだけの］価値がある。さらに，残りの他の階級によるそれぞれの作用は破壊されたその作用の場所に取って代わる。

第 2 章
救済策が拒否の欠点に対するものである，最初と最後［の項の比］による変形について

作用のより強い同次のものがベキから拒否されるような方程式は最初と最後［の項の比］による変形によって有益に改善される。それは［方程式に］内包された比の比率によってなされ，比較の同次のものが求められる根そのもので割られるであろう。そしてそのことから，最初に提示された方程式を調整することおよび新しい［形に］整えることが許されている，その文字の下で他の未知の根がもたらされる。

それゆえ，確かに，その拒否の作用は，安全な数の均整において，肯定におけるそれに変わり，逆もそうである。さらに，ときには均整でない［場合］に関しても有益である。

さらに，最初と最後［の項の比］によるという名称は，その法則において，最初に求められていた項が最初であり，最初のものが変形の後で最後になる，あるいはそれが逆にされる，のであるか 123
ら，［また，］その操作そのものから法則が容易に理解されるであろうから，最初に提示された方程式が元に戻されるところの比率のために選ばれたものである。

A cubus $-$ B plano in A が Z solido に等しくされると提示されるとしよう。さらに，この方程式が解かれるとしよう。それゆえ，Z solidum はベキが否定的に作用されており，さらに拒否［の作用］についての技法は確立されていないから，方程式は，はじめに，解くことができるように，肯定的に作用されるような種類のものに変形されて提示されなければならない。それゆえ，$\dfrac{Z\text{ solidum}}{A}$ が E planum であるとすると，ゆえに $\dfrac{Z\text{ solidum}}{E\text{ planum}}$ は A であろう。そしてこれから，$\dfrac{Z\text{ solido solido solidum}}{E\text{ plano plano plano}} - \dfrac{B\text{ plano in }Z\text{ solidum}}{E\text{ plano}}$ が Z solido に等しくされることが提示されるであろう。すべて［の項］に E plano-plano-planum が掛けられると，Z solido-solido-solidum $-$ B plano in Z solidum in E plano-planum が Z solido in E plano-plano-planum に等しくされるであろう。そして，すべて［の項］が Z solidum で割られ，そして対照［移項］が適切に適用されたなら，E plano-plano-planum $+$ B plano in E plano-planum が Z solido-solido に等しくされるであろう。

別の方法

E plani-cubus $+$ B plano in E plano-quad. が Z solidi-quadrato に等しくされるであろう。この方程式は与えられた補足的なものによって肯定的に作用された立方のベキについての伝えられた解析法によって完全に解くことができる。それゆえ，E planum が知られるようになり，それが Z solidum で割られるとき，最初に求められていた A が生じるであろう。

さらに，主張された A についての方程式の比例は，A が $\sqrt{c.}\,Z$ solido に対するように，$\sqrt{c.}\,Z$ solido-solidi が A quadratum $-$ B plano に，すなわち E planum に，対するというものであり，そのために最初と最後［の項の比］によるという名称の語源が関係しているのである。

$1C - 96N$ が 40 に等しいと提示されるとしよう。$\dfrac{40}{1N}$ ［$\frac{40}{x}$］が $1N$ ［y］であると表現される。［すると，］$1C + 96Q$ は 1600 に等しくされるであろうし，$1N$ は 4 になる。それゆえ，$\dfrac{40}{4}$ または 10 は最初に求められていた根である。

そして，もし最初に提示された立方の方程式において，比較の同次のものが立方としては無理数 (irrationalis) であるが，しかし平方としては有理数 (rationalis) のようであるならば，新しい方程式

におけるその不均整は消え去るであろう。

$1C - 10N$ が $\sqrt{48}$ に等しいと提示されるとしよう。$\dfrac{\sqrt{48}}{1N}$ が $1N$ であると表現される。[すると，] $1C + 10Q$ は 48 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 になる。それゆえ，$\dfrac{\sqrt{48}}{2}$ または $\sqrt{12}$ は最初に求められていた根である。

再び，A quad.-quad. $-$ B in A cubum $-$ D plano in A quad. が Z plano-plano に等しいと提示されるとしよう。さらに，この方程式が解かれるとしよう。それゆえ，Z plano-planum はベキが否定的に作用されており，さらに拒否［の作用］についての技法は確立されていないから，方程式は，はじめに，解くことができるように，肯定的に作用されるような種類のものに変形されて提示されなければならない。それゆえ，$\dfrac{Z \text{ plano planum}}{A}$ が E solidum であるとすると，ゆえに $\dfrac{Z \text{ plano planum}}{E \text{ solido}}$ は A であろう。それゆえ，これから

$$\frac{Z \text{ plano plano plano plano plano plano plano planum}}{E \text{ solido solido solido solido}}$$
$$- \frac{B \text{ in } Z \text{ plano plano plano plano plano planum}}{E \text{ solido solido solido}}$$
$$- \frac{D \text{ plano in } Z \text{ plano plano plano planum}}{E \text{ solido solido}}$$

が Z plano-plano に等しくされることが提示されるであろう。すべて［の項］に E solido-solido-solido-solidum が掛けられると，Z plano-plano-plano-plano-plano-plano-plano-planum $-$ B in Z plano-plano-plano-plano-plano-planum in E solidum $-$ D plano in Z plano-plano-plano-planum in E solido-solidum が Z plano-plano in E solido-solido-solido-solidum に等しくされるであろう。そして，すべて［の項］が Z plano-planum で割られ，対照［移項］が適用されたなら，E solido quad.-quad. $+$ D plano in Z plano-planum in E solido-quad. $+$ B in Z plano-plano-plano-planum in E solidum が Z plano-plani cubo に等しくされるであろう。

$1QQ - 3C - 8Q$ が 50 に等しいと提示されるとしよう。$\dfrac{50}{1N}$ が $1N$ であると表現される。[すると，] $1QQ + 400Q - 7500N$ は 125000 に等しくされるであろうし，$1N$ は 10 になるであろう。それゆえ，$\dfrac{50}{10}$ または 5 は最初に求められていた根である。

そして，もし最初に提示された平方の平方の方程式において，比較の同次のものが平方の平方としては無理数であるが，しかし立方としては有理数のようであるならば，新しい方程式におけるその不均整は消え去るであろう。

$1QQ - 8N$ が $\sqrt{C\,80}$ に等しいと提示されるとしよう。$\dfrac{\sqrt{C\,80}}{1N}$ が $1N$ であると表現される。[すると，] $1QQ + 8C$ は 80 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 になる。それゆえ，$\dfrac{\sqrt{C\,80}}{2}$ または $\sqrt{C\,10}$ は最初に求められていた根である。

最初と最後［の項の比］による変形の操作は余分なものを取り除いたこれら［の例］の中に解きほぐされているから，それゆえ，[次のような] 教訓が記憶されるであろうし，規則立てられるであろう。

124 I

作用された平方［の方程式］において，比較の同次のものは変更されずに維持され，立方［の方程式］においてはその平方がつくられ，平方の平方［の方程式］においてはその立方が，平方の立方［の方程式］においてはその平方の平方が，立方の立方［の方程式］においてはその平方の立方

が［つくられて］，そして，そのように続く。

II

［より低い］階級によって否定的に作用された同次のものは［より低い］階級によって肯定的に作用された相補的な同次のものに変化し，そして，逆に，肯定的に作用されたものは否定的に作用されたものに［変化する］。

III

辺による作用の補足的なものは変更されずに維持される。

平方による作用の補足的なものは比較の同次のものを掛けてつくられる。

立方による作用の補足的なものは比較の同次のものの平方を掛けて［つくられる］。

平方の平方による作用の補足的なものは比較の同次のものの立方を掛けて［つくられる］。

平方の立方による作用の補足的なものは比較の同次のものの平方の平方を掛けて［つくられる］。そして，そのように続く。

IV

さらに，そのように新たに等しくされたベキの知られるようになった根によって，提示されていた方程式に関係する比較の同次のものが割られるならば，最初に求められていた辺が元に戻ることはすでに述べた。

明らかに，除法によって最初に求められていた根が生じるのと同様に，どのようなものであれ大きさが新しく求められるであろう根で割られると，もし提示されていた方程式がその文字によって整えられ，そして技法に従って変形されるならば，否定的である作用はつねに安全な数の均整において肯定的［な作用］に変わるであろう。しかし，その理由で，算術においては，新しい分数の強い偶発性が再びその返還を要求することがないように，比較の同次のものの除法がふさわしいが，しかし，幾何学においては，同次のものの大きさは求められている根の平方によって割られるのがより都合がよい。

A cubus $-$ B in A quad. が B in Z quad. に等しいと提示されるとしよう。$\dfrac{B \text{ in } Z}{E}$ を A としよう。［すると，］E cubus $+$ B quad. in E が B quad. in Z に等しくされるであろう。

第 3 章
倒置について
あるいは，どのようにして，両義性 (Αμφιβολίας) という言葉に対して，相互に関連する方程式において与えられた 1 つの根から他の［根についての］知識を得るか

倒置は逆の向きに拒否された方程式のそれらに相互に関連する［方程式］への変形である。それは，最初に提示される方程式がそれと相互に関連する［方程式］の助けのもとで，下降による不規則な漸層法によって，より低い［ベキ］へと変えられる，そしてそれゆえもっと［容易に］解くことができる，ように定められる。逆の向きに拒否された方程式において私たちが述べたことが起こるように，立方［の方程式］，平方の立方［の方程式］，それから 1 つおきの 2 つずつの階級による漸層法によって続く［方程式］において，両義性や困難さ (dysmechanian) から逃れることは有益なことである。なぜならば，倒置は，平方［の方程式］，平方の平方［の方程式］，それから 1 つおきの 2 つずつの階級による漸層法によって続く［方程式］に関係する，それらの変形のためには役

に立たないが，しかしながら，［それについて］適切な場所で述べるであろう，補足付加による漸層法に関して思い出されるであろうからである。

125 倒置の作業はこのようになし遂げられる。［すなわち,］最初に，求められている根のベキに［別の］根の同等に高いベキが付け加えられる。なぜならば，そのようなベキの和は前もって言われていた漸層法の順序において分割を適切に保証するからである。その後，比較の同次のものが変えられた作用の同次のものおよび付け加えられたベキとともに表現された大きさのために結合され，それは同じ分割を保証する。その比較によって相互に関連する方程式 —— 肯定的なあるいはまっすぐに拒否された —— がつくられる。そのうえ，付け加えられたベキの知られるようになった根によって，一方の辺に由来する大きさはもう一方［の辺］に由来する大きさに適切に比較され，そして方程式は適度の巧妙さ (ευμηχανωτέρης) によって，そうでなければ困難さ (δυσμηχάνη) を伴って，巧妙に下げられる。このことは例によって明らかになるであろう。最初に，立方［の方程式］の倒置に関して。

$$a^3+e^3=(a+e)(a^2-ae+e^2)$$
$$a^5+e^5=(a+e)(a^4-a^3e+a^2e^2-ae^3+e^4)$$

のように，n が奇数のとき，a^n+e^n は $a+e$ で割り切れる。

が，n が偶数のときは，そうではない。

δυσμήχανος : *hard to effect, difficult, at a loss, devising ill, ill-devised, wicked*

問題 1

B planum in $A-A$ cubo が Z solido に等しいと提示されるとしよう。それゆえ，立方が立体から拒否されているのだから，方程式は不確定［な解をもつもの］であり，解析法に適したものでもない。それゆえ，両義性や困難さが免れなくてはならない。その結果，倒置が起こり，そしてそれゆえ，それらから，転換が適用された A cubus が B plano in $A-Z$ solido に等しくされるが提示される。そして，いずれの辺にも E cubus が加えられると，ゆえに A cubus $+$ E cubo が B plano in $A+E$ cubo $-$ Z solido に等しくされるであろう。

さらに，方程式の最初の辺［左辺］は $A+E$ による除法を適切に受け入れ，確かに，辺の和によって立方の和が割られるならば平方の和引くそれらの辺による長方形が生じるから，その除法から A quad. $-$ E in $A+E$ quad. が生じるであろう。それゆえ，$A+E$ で割られた，方程式のもう一方の辺が，すでに生じている残りのもの［商］と比較されるであろう，ある与えられた平面を与えるということが起ころうとしている。さらに，それは適切になされるであろう。もし E cubi $-$ Z solido の場所に B planum in E が代入されたならば，すなわち B planum が生ずるであろう。それゆえ，［それらは］対等であるはずだから，代入されるとしよう。それゆえ，E cubus $-$ Z solido は仮定によって B planum in E に等しくされるから，ゆえに対照［移項］によって E cubus $-$ B plano in E は Z solido に等しくされるであろう。

それゆえ，A quad. $-$ E in $A+E$ quad. は B plano に等しくされるであろう。それゆえ，先行する章に関する適当な準備によって適用された解析によって E は知られるようになる。それを D とすると，ゆえに A q. $-$ A in $D+D$ quad. が B plano に等しくされるであろうし，整えられると，D in $A-A$ quad. が D quad. $-$ B plano に等しくされるであろう。

それゆえ，逆の向きに拒否された方程式はまっすぐに拒否された［方程式］に対して同じ順序に

変形され，新しい方程式のそのように与えられた根によって，その根によって最初に提示された［方程式］が解けるために，より低い［ベキ］へと下降による不規則な漸層法が起こる。この作業が倒置といわれるものであり，そしてなされるべきことである。このことから，［次のように］整えられる。

定理 1

もし B planum in $A - A$ cubo が Z solido に等しくされるならば，それゆえ E cubus $- B$ plano in E が Z solido に等しくされるであろう。さらに，E が D であると知られるようになると，D in $A - A$ quad. は D quad. $- B$ plano に等しくされるであろう。

［もし］$39N - 1C$ が 70 に等しくされる［ならば］。それゆえ，$1C - 39N$ が 70 に等しくされるであろうし，そのとき $1N$ は 7 になる。それゆえ，$7N - 1Q$ は 10 に等しくされるであろうし，最初に求められていた根は，2 あるいは 5 になる。

> 3 次方程式 $b^2x - x^3 = z^3$［①］が提示されたとき，$x^3 = b^2x - z^3$ となるから，この両辺に y^3 を加えると $x^3 + y^3 = b^2x + y^3 - z^3$ $(*)$ となる。
> ところで，いま，$y^3 - z^3 = b^2y$ $(**)$ とすれば，これから $y^3 - b^2y = z^3$［②］となる。
> 2 式 $(*)$ および $(**)$ から，$x^3 + y^3 = b^2x + b^2y$ ということになる。そして，この両辺を $x + y$ で割ると，$x^2 - xy + y^2 = b^2$ が得られる。
> この y に関する 2 次方程式は解くことができるから，その根を d とすると，$x^2 - dx + d^2 = b^2$ となる。これで x に関する 2 次方程式 $dx - x^2 = d^2 - b^2$［③］が得られる。
> この 2 次方程式 $dx - x^2 = d^2 - b^2$ の解が元の 3 次方程式 $b^2x - x^3 = z^3$ の解である，というもの。
> ヴィエートの例では，
>
> $39x - x^3 = 70 \leftarrow$ ① が提示されたとき，
> $y^3 - 39y = 70 \leftarrow$ ② の解を求めると，$y = 7$［これが d］となるから，
> $7x - x^2 = 49 - 39 \leftarrow$ ③ を解けば，元の 3 次方程式の解が得られる，という。
> 実際，$7x - x^2 = 10$ の解は $x = 2$，5 で，$39x - x^3 = 70$ の解は $x = 2$，5，-7。

問題 2

しかし，B in A quad. $- A$ cubo が Z solido に等しいと提示されるとしよう。倒置が行われるべきである。

それゆえ，これらから適当な転換が適用された［方程式］A cubus が B in A quad. $- Z$ solido に等しくされるであろうが提示され，そして方程式の両方の辺に E cubum が加えられると，A cubus $+ E$ cubo が B in A quad. $+ E$ cubo $- Z$ solido に等しくされるであろう。

しかし，一方で，Z solidum $- E$ cubo は B in E quad. に等しくされる，すなわち，E cubus $+ B$ in E quad. が Z solido に等しくされる。［ゆえに，］A cubus $+ E$ cubo が B in A quad. $-$ B in E quad. に等しくされるであろう。

結果として，立方の加法によって作用された立方は還元されるべきである。それゆえ，すべてが 126
$A + E$ で割られると，A quad. $- E$ in $A + E$ quad. が B in $\overline{A - E}$ に等しくされるであろう。

さらに，解析によって E が D であると知られるようになり，そしてさらに，平方の方程式が整えられると，ゆえに B in $A + D$ in $A - A$ quad. が D quad. $+ B$ in D に等しくされるであろう。

それゆえ，逆の向きに拒否された方程式は肯定的［な方程式］に対して同じ順序に変形され，新しい方程式のそのように与えられた根によって，より低い［ベキ］へと下降による不規則［な漸層

法］が起こる。この作業が倒置といわれるものであり，そしてなされるべきことである。このことから，［次のように］整えられる。

定理 2

もし B in A quad. $-$ A cubo が Z solido に等しくされ，そして E cubus $+$ B in E quad. が Z solido に等しくされるならば。さらに，E が D であると知られるようになると，$\overline{D+B}$ in $A-A$ quad. が B in $D+D$ quad. に等しくされるであろう。

［もし］$7Q-1C$ が 36 に等しくされる［ならば］。それゆえ，$7Q+1C$ が 36 に等しくされ，ここに $1N$ は 2 になる。それゆえ，$9N-1Q$ は 18 に等しくされ，最初に求められていた根である，$1N$ は 3 あるいは 6 になる。

第 2 に，平方の立方［の方程式］の倒置に関して

問題 3

B plano-planum in $A-A$ quadrato-cubo が Z plano-solido に等しいと提示されるとしよう。倒置が行われるべきである。

$E-A$ による平方の平方がつくられると，繰り返されることなく単一に選ばれたそれぞれのつくられた平面の平面は E quad. quad. $-$ A in E cubum $+$ A quad. in E quad. $-$ A cubo in E $+$ A quad. quad. であろう。［これに］$E+A$ が掛けられると，E quad.-cubus $+$ A quad.-cubo になる。

しかし，提示されていることから A quad. cubus は B plano-planum in $A-Z$ plan. solido に相当し，それゆえ，E quad. cubus $+$ A quad. cubo は E quad. cubo $+$ B plano-plano in $A-Z$ plano-solido に等しくされるであろう。

両辺が $E+A$ で割られるとしよう。それゆえ，方程式の最初の辺から，結合の比率が示すように，E quad. quad. $-$ A in E cubum $+$ A quad. in E quad. $-$ A cubo in $E+A$ quad. quad. が生じる。

しかし，第 2［の辺］から生じるはずのものは明らかではない。しかし，確かに，［右辺は］平方の立方のようなものと比較されるはずであり，平面の平面として生じることが知られないことはあり得ない。

それゆえ, B plano-planum in $E+B$ plano-plano in A がその第 2 の辺, すなわち E quad.-cubo $+$ B plano-plano in $A-Z$ plano-solido，に等しくされるとしよう。

ゆえに，両方［の辺］から A の階級による作用が消し去られ，対照［移項］が適切に行われると，E quad.-cubus $-$ B plano-plano in E が Z plano-solido に等しくされるであろう。

そして，E が D であると知られるようになるとき，D quad. quad. $-$ D cubo in $A+D$ q. in A quad. $-$ D in A cubum $+$ A quad. quad. は B plano-plano に等しいといわれるであろう。そして，方程式が技法に従って整えられると，D cubus in $A-D$ quad. in A quad. $+$ D in A cubum $-$ A quad. quad. が D quad. quad. $-$ B plano-plano に等しい。

それゆえ，倒置は要求されていたように行われた。このことから，［次のように］整えられる。

定理 3

もし B plano-planum in $A-A$ quad.-cubo が Z plano-solido に等しくされ，そして E quad. cubus $-$ B plano-plano in E が Z plano-solido に等しくされ，さらに E が D であると知られる

ようになるならば，D cubus in $A - D$quad. in A quad. $+$ D in A cubum $-$ A quad. quad. が D quad. quad. $-$ B plano-plano に等しくされるであろう。

［もし］$11N - 1QC$ が 10 に等しくされる［ならば］。それゆえ，$1QC - 11N$ は 10 に等しくされるであろうし，ここに $1N$ は 2 になる。それゆえ，$8N - 4Q + 2C - 1QQ$ は 5 に等しくされるであろうし，その $1N$ は最初に求められていた根であり，そして［それは］1 になる。

> 5 次方程式 $b^4x - x^5 = z^5$ が提示されたとき，$y^5 - b^4y = z^5$ とすれば，
> $$\begin{aligned} x^5 = b^4x - z^5 &\longrightarrow y^5 + x^5 = y^5 + b^4x - z^5 \\ &\longrightarrow y^5 + x^5 = b^4x + b^4y \\ &\longrightarrow y^4 - y^3x + y^2x^2 - yx^3 + x^4 = b^4 \quad \text{［この解を } y = d \text{ とすれば］} \\ &\longrightarrow d^3x - d^2x^2 + dx^3 - x^4 = d^4 - b^4 \end{aligned}$$
> となるということ。

問題 4

もし B in A quad. quad. $-$ A quad. cubo が Z plano-solido に等しいと提示されるとしよう。再び，倒置が行われるべきである。

ゆえに，適切な転換および E quadrato-cubi の共通の加法によって，A quad. cubus $+$ E quad. cubo が B in A quad. quad. $-$ Z plano-solido $+$ E quad.-cubo に等しくされる。両方の辺が A 127
$+$ E で割られるとしよう。その状況で，［左辺から］E quad. quad. $-$ A in E cubum $+$ A quad. in E quad. $-$ A cubo in E $+$ A quad. quad. が生じる。しかし，もし B in A qaud. quad. $-$ B in E quad. quad. がもう一方の辺に等しくされるならば。

それ［右辺］が同様に A $+$ E による除法を受け入れると，確かに，B in A cubum $-$ B in A quad. in E $+$ B in E quad. in A $-$ B in E cubum が生じるであろう。ゆえに，［それらが］等しくされ，それを使って適切に整えられると，E quad.-cubua $+$ B in E quad. quad. が Z plano-solido に等しいと確立されるであろう。それゆえ，ついに E が D であると知られるようになると，D quad.-quad. $-$ D cubo in A $+$ D quad. in A quad. $-$ D in A cubo $+$ A quad. quad. が B in A cubum $-$ B in A quad. in D $+$ B in D quad. in A $-$ B in D cubum に等しくされ，すべてが整えられると，B in D quad. in A $+$ D cubo in A $-$ B in D in A quad. $-$ D quad. in A quad. $+$ B in A cubum $+$ D in A cubum $-$ A quad.-quad. が B in D cubum $+$ D quad. quad. に等しくされる。

それゆえ，倒置は要求されていたように行われた。このことから，［次のように］整えられる。

定理 4

もし B in A quad. quad. $-$ A quad. cubo が Z plano-solido に等しくされ，そして E quad. cubus $+$ B in E quad. quad. が Z plano-solido に等しくされ，さらに E が D であると知られるようになるならば，$\overline{B \text{ in } D \text{ quad.} + D \text{ cubo}}$ in A $+$ $\overline{-B \text{ in } D - D \text{ quad.}}$ in A quad. $+$ $\overline{B + D}$ in A cubum $-$ A quad. quad. が B in D cubum $+$ D quad. quadrato に等しくされるであろう。

［もし］$11QQ - 1QC$ が 10000 に等しくされる［ならば］。それゆえ，$11QQ + 1QC$ は 10000 に等しくされるであろうし，$1N$ は 5 になる。それゆえ，$400N - 80Q + 16C - 1QQ$ は 2000 に等しくされるであろうし，その $1N$ は最初に求められていた根であり，そして［それは］10 になる。

そのうえ，倒置は，あいまいな方程式において，その方程式が解けるような 2 つまたはそれ以上

のものから1つの根が与えられることが起こるときに，ときには反対の方法によって利用されることがある。相互に関連する根を理解するために，倒置の跡が繰り返される。そして，そこから流れ出る，立方［の方程式］におけるような種類の，さまざまな定理が整えられる。

定理 5

もし A cubus $-$ B plano in A が Z solido に等しくされ，そのうえ B plan. in E $-$ E cubo が Z solido に等しくされ，さらに E が D であると知られるようになるならば，A quad. $-$ D in A は B plano $-$ D quadrato に等しくされるであろう。

なぜならば。A cubus $-$ B plano in A が Z solido に等しくされ，そのうえ B olanum in D $-$ D cubo が Z solido に等しくされるから，ゆえに A cubus $-$ B plano in A は B plano in D $-$ D cubo 美等しくされるであろうし，転換によって，A cubus $+$ D cubo が B plano in A $+$ B plano in D に等しくされるであろう。方程式の両方の辺が $A+D$ で割られると，A quad. $+$ D quad. $-$ D in A が B plano に等しくなる。

方程式が技法に従って表現されると，［定理として］整えられたように，A quad. $-$ D in A が B plano $-$ D quad. に等しくされる。

もし $1C-8N$ が 7 に等しくされるならば。それゆえ，$8N-1C$ は 7 に等しくされるであろうし，$1N$ は 1 であることができるから，$1Q-1N$ は 7 に等しくされる。そしてそこから，最初に求められていた根は $\sqrt{\dfrac{29}{4}}+\dfrac{1}{2}$ になる。

3 次方程式 $x^3-b^2x=z^3$［定理1と逆の減法］が提示されたとき，$b^2y-y^3=z^3$ とし，この y についての3次方程式の解を $y=d$ とすれば，

$$\begin{aligned} x^3-b^2x=z^3,\ b^2d-d^3=z^3 &\longrightarrow x^3-b^2x=b^2d-d^3 \\ &\longrightarrow x^3+d^3=b^2d+b^2x \quad \text{［両辺を } x+d \text{ で割って］} \\ &\longrightarrow x^2-xd+d^2=b^2 \\ &\longrightarrow x^2-dx=b^2-d^2 \end{aligned}$$

となるということ。

ヴィエートの例では，

$x^3-8x=7$ が提示されたとき，

$8y-y^3=7$ として，この解を求めると $y=1$ とできるから，

$x^2-1x=8-1$，すなわち $x^2-x=7$，から求める解が得られる，という。

実際，$x^2-x=7$ の解は $x=\dfrac{1\pm\sqrt{29}}{2}$ で，$x^3-8x=7$ の解は $x=-1$，$\dfrac{1\pm\sqrt{29}}{2}$。

定理 6

もし B in A quad. $+$ A cubo が Z solido に等しくされ，そのうえ B in E quad. $-$ E cubo が Z solido に等しくされ，さらに E が D であると知られるようになるならば，A quad. $+$ $\overline{B-D}$ in A が B in D $-$ D quadrato に等しくされるであろう。

なぜならば。B in A quad. $+$ A cubo が Z solido に等しくされ，そのうえ B in D quad. $-$ D cubo が Z splido に等しくされるから，ゆえに B in A quad. $+$ A cubo が B in D quad. $-$ D cubo に等しくされるであろう。そして，転換によって，D cubus $+$ A cubo が B in $\overline{D\text{ quad.}-A\text{ quad.}}$ に等しくされるであろう。方程式の両方の辺が $D+A$ で割られると，D quad. $+$ A quad. $-$ D in A が B in $\overline{D-A}$ に等しくなる。方程式が技法に従って表現されると，［定理として］整えられたように，A quad. $+$ $\overline{B-D}$ in A が B in D $-$ D quad. に等しくされるであろう。

もし $9Q+1C$ が 8 に等しくされる［ならば］。それゆえ，$9Q-1C$ は 8 に等しくされるであろうし，$1N$ は 1 であることができるから，$1Q+8N$ は 8 に等しくされ，そしてそこから，最初に求められていた根は $\sqrt{24}-4$ になる。

［次のような］同類の定理はこれらに属し，［また,］与えられた両義的な根の 1 つから，もう 1 128
つの仲間の知識が得られる。確かに，

定理 7

もし B planum in $A-A$ cubo が Z solido に等しくされ，そのうえ B planum in $E-E$ cubo が Z solido に等しくされ，さらに E が D であると知られるようになるならば，A quad. $+$ D in A が B plano $-$ D quadrato に等しくされるであろう。

なぜならば。B planum in $A-A$ cubo が Z solido に等しくされ，そのうえ B planum in $D-D$ cubo が Z solido に等しくされるから，それゆえ B planum in $A-A$ cubo が B plano in D $-$ D cubo に等しくされるであろう。そして，転換によって，A cubus $-$ D cubo が B plano in $A-B$ plano in D に等しくされるであろう。そして，方程式の両方の辺が $A-D$ で割られると，A quad. $+$ D quad. $+$ D in A が B plano に等しくなる。方程式が技法に従って表現されると，A quadr. $+$ D in A が B plano $-$ D quadrato に等しくされる。

もし $8N-1C$ が 7 に等しくされるならば，$1N$ は 1 であるとできる。それゆえ，$1Q+1N$ は 7 に等しくされ，そのうえ $1N$ は $\sqrt{\dfrac{29}{4}}-\dfrac{1}{2}$ になる。

定理 8

もし B in A quad. $-$ A cubo が Z solido に等しくされ，そのうえ B in E quad. $-$ E cubo が Z solido に等しくされ，さらに E が D であると知られるようになるならば，A quad. $+$ $\overline{D-B}$ in A が B in $D-D$ quad. に等しくされるであろう。

なぜならば。B in A quadr. $-$ A cubo が Z solido に等しくされ，そのうえ B in D quadr. $-$ D cubo が Z solido に等しくされるから，それゆえ B in A quad. $-$ A cubo が B in D quad. $-$ D cubo に等しくされる。そして，転換によって，A cubus $-$ D cubo が B in $\overline{A \text{ quadr.} - D \text{ quadr.}}$ に等しくされるであろう。方程式の両方の辺が $A-D$ で割られると，A quad. $+$ D quad. $+$ D in A が B in $A+B$ in D に等しくなる。方程式が適切に表現されると，［定理として］整えられたように，A quad. $+$ D in $A-B$ in A が B in $D-D$ quadrato に等しくされるであろう。

もし $9Q-1C$ が 8 に等しくされるならば，$1N$ は 1 であるとできる。それゆえ，$1Q-8N$ は 8 に等しくされ，そのうえ $1N$ は $\sqrt{24}+4$ になる。

第 4 章

分数の欠点に対する，同等性について

同等性とは方程式を，それらが苦しんでいる，分数から自由にするために定められた変形の形式である。

明らかに，［はじめに,］分数は計算の法則に従って (ex lege logistices) 同じ分母に変えられる。

次に，共通の分母あるいはそれから生ずる階級の同次のものは与えられた補足的なものおよび与えられた比較の同次のものが掛けられた積になる。

根には補足的な長さが掛けられ，平方には補足的な平面または平面が測られるであろう与えられた同次のものが，立方には比較の立体または立体が測られるであろう与えられた同次のものが，そ

してこれと変わらない順序で［掛けられる］。

そして，共通の分母および提示された方程式の根からつくられるもの［積］はそのようにして準備された方程式の根である。

さらに，同等性のために乗法は必要ではないが，除法が［必要になることが］ときどき起きる。すなわち，補足的な長さは根によって割られ，補足的な平面は［平方によって］，立体が測られるであろう与えられた同次のものは立方によって，そしてこれと変わらない順序で［割られる］。そして，共通の分母による根の除法によって生じるものはそのようにして準備された方程式の根である。さらに，それは，もし等しいものが等しいものによって掛けられるあるいは割られるならば，
129 ［そこから］つくられたもの［積］あるいは生じたもの［商］は等しいことを保証するという，方程式の法則 (symbolus) に基づく根拠および証明をもっている。

要するに，同等性においては，提示された方程式［の根］のベキおよび作用されたそして比較の同次のものが同じ項によって掛けられるまたは割られることより他にはすることは何もない。さらに，乗法の使用は除法［の使用］より手近である。

もし本当に A cubus + $\dfrac{B \text{ solido in } A}{D}$ が Z solido に等しくされると提示されるならば，本当に，方程式を，それらが苦しんでいる，分数から自由にしなければならない。D in A が E planum であるとすると，ゆえに $\dfrac{E \text{ planum}}{D}$ は A であろう。それゆえ，$\dfrac{E \text{ plani cubos} + B \text{ solido in } D \text{ in } E \text{ planum}}{D \text{ cubo}}$ が Z solido に等しくされるであろう。すべて［の項］に D cubum が掛けられると，ゆえに，E plani cubus + B solido in D in E planum が Z solido in D cubum に等しくされるであろう。

［もし］$1C+\dfrac{3}{2}N$ が 225 に等しくされる［ならば］。それゆえ，同等性によって (κατ᾽ ἰσομοιρίαν)，$1C+6N$ が 1800 に等しくされるであろうし，準備された［方程式の］根は提示された［方程式の］根に対して 2 が 1 に対する［比］をもつ。それゆえ，後者が 12 になるとき，前者は 6 であろう。

そして，もし A cubus + $\dfrac{B \text{ solido in } A}{D}$ が $\dfrac{Z \text{ plano plano}}{D}$ に等しいと提示されるならば。まさに［同等性の］段階そのもの［を踏むこと］によって，E plani cubus + B solido in D in E planum が Z plano-plano in D quadratum に等しくされるであろう。

［もし］$1C+\dfrac{3}{2}N$ が $\dfrac{265}{2}$ に等しくされる［ならば］。それゆえ，同等性によって，$1C+6N$ が 1060 に等しくされるであろうし，後者の $1N$ が 10 になるとき，前者は 5 であろう。

そして，もし A cubus + $\dfrac{B \text{ plano in } A \text{ quad.}}{D}$ が Z solido に等しいと提示されるならば。同様の段階［を踏むこと］によって，E plani cubus + B plano in E plani quad. が Z solido in D cubum に等しくされるであろう。

［もし］$1C+\dfrac{3}{2}Q$ が 270 に等しくされる［ならば］。それゆえ，同等性によって，$1C+3Q$ が 1160 に等しくされるであろうし，後者の $1N$ が 12 になるとき，前者は 6 であろう。

そして，A cubus + $\dfrac{B \text{ plano in } A \text{ quad.}}{D}$ が $\dfrac{Z \text{ plano plano}}{D}$ に等しいと提示されるならば。同様の段階［を踏むこと］によって，E plani cubus + B plano in E plani quad. が Z plano-plano in D quadratum に等しくされるであろう。

［もし］$1C+\dfrac{3}{2}Q$ が $\dfrac{325}{2}$ に等しくされる［ならば］。それゆえ，同等性によって，$1C+3Q$ が 1300 に等しくされるであろうし，後者の $1N$ が 10 になるとき，前者は 5 であろう。

しかし，A cubus $+ \dfrac{B \text{ solido in } A}{D}$ が $\dfrac{Z \text{ plano solido}}{H \text{ plano}}$ に等しいと提示されるならば。D in H planum in A を E plano-planum であるとすると，ゆえに $\dfrac{E \text{ plano planum}}{D \text{ in } H \text{ planum}}$ が A であろう。

それゆえ，E plano-plani cubus $+ \dfrac{D \text{ in } H \text{ plano planum in } B \text{ solidum in } E \text{ plano planum}}{D \text{ cubo in } H \text{ plano palno planum}}$ が $\dfrac{Z \text{ plano solido}}{H \text{ plano}}$ に等しくされるであろう。すべて［の項］に D cubum in H plano-plano-planum が掛けられると，ゆえに E plano-plani cubus $+$ B solido in D in H plano-planum in E plano-planum が Z plano-solido in D cubum in H plano-planum に等しくされるであろう。

［もし］$1C + \dfrac{11}{12}N$ が $\dfrac{19}{4}$ に等しくされる［ならば］。それゆえ，同等性によって，$1C + 2112N$ が 525312 に等しくされるであろうし，準備された［方程式の］根は提示された［方程式の］根に対して 48 が 1 に対する［比］をもつ。それゆえ，後者の $1N$ が 72 のとき，前者は $\dfrac{3}{2}$ であろう。

しかし，そのうえ，これは同じ分数に変えることができるであろう。

［もし］$1C + \dfrac{11}{12}N$ が $\dfrac{57}{12}$ に等しくされる［ならば］。そしてそこから，同等性の操作によって，$1C + 132N$ が 8208 に等しくされるであろうし，準備された［方程式の］根は提示された［方程式の］根に対して 12 が 1 に対する［比］をもつ。それゆえ，後者の $1N$ が 18 になるとき，前者は $\dfrac{3}{2}$ であろう。これは最初に準備された方程式を同等性に従って 4 で割ることである。

［もし］$1C + 2112N$ が 525312 に等しくされる［ならば］。それゆえ，同等性に従う除法によって，$1C + \dfrac{2112}{16}N$ が $\dfrac{525312}{64}$ に等しくされるであろう，すなわち $1C + 132N$ が 8208 に等しくされるであろう。前者の $1N$ が 72 になるとき，後者は 18 であろうし，同等性に従う除法による根は 4 である。

同等性に従う除法の操作は次のように明らかになる。

E plani-cubus $+$ G in D in E plani-quad. $+$ B plano in D quad. in E planum が Z sol. in D cub. に等しいと提示されるとしよう。［そして，］$\dfrac{E \text{ planum}}{D}$ が A であるとしよう。それゆえ，D in A は E planum であろう。それゆえ，D cubus in A cubum $+$ G in D in D quad. in A quad. $+$ B plano in D quad. が Z solido in D cubum に等しくされるであろう。すべて［の項］が D cubum で割られると，ゆえに A cubus $+$ G in A quad. $+$ B plano in A が Z solido に等しくされるであろう。

［もし］$1C + 12Q + 8N$ が 2280 に等しくされ，$1N$ が 10 になる［ならば］。すべて［の項］が同等性に従って 2 で，そしてその根の適切なベキ (scansilis) で割られると，ゆえに $1C + \dfrac{12}{2}Q + \dfrac{8}{4}N$ が $\dfrac{2280}{8}$ に等しくされるであろうし，$1N$ は $\dfrac{10}{2}$ になる。すなわち，$1C + 6Q + 2N$ が 285 に等しくされるであろうし，$1N$ は 5 になる。

それゆえ，作用されていないベキについて，［もし］$1C$ が 1728 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 12 になる。$1C$ は $\dfrac{1728}{216}$ に等しくされるであろうし，$1N$ は $\dfrac{12}{6}$ になるであろう。すなわち，$1C$ は 8 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 になるであろう。

さらに，この操作は解析法においてときには大きな［時間の］節約になる。

第 5 章 130

不均整［な数］の欠点に対する，均整のとれた漸層法について

均整のとれた漸層法とは上昇による漸層法の形式である。そのうえ，私たちは，提示された方程

式の両方の辺［の階級］がともに —— 平方［の方程式］のときは平方に，立方［の方程式］のときは立方に，そして，ベキの階級に従う順で無限に —— 上げられるとき，上昇による漸層法は規則的であると，ほとんど，説明した。そして，提示された方程式の任意の数が不均整［な数］であるとき，表現された大きさが無理数であるものが方程式の 1 つの辺をつくり，残りのものが残り［の辺］をつくる，というように整理される。そして，このことは，もしそうすることが必要ならば，すべての不均整［な数］がついに消え去るまで繰り返される。しかしながら，等しいものからつくられたもの［積］は等しいから，方程式は損なわれずに存続する。この操作が均整のとれた漸層法と呼ばれるものである。

しかし，不均整［な数］に対する別の多く［の仕方］ —— ときには同等性そのものおよび，探究法の習得によって定められそして法則として整えられるであろう，方程式のさまざまな変形法 —— が，同様に，助けになる。

均整のとれた漸層法の例について

A cubus $-$ B plano in A が $\sqrt{Z}$ solido-solidi に等しいと提示されるとしよう。この方程式から不均整［な数］を浄化しなければならない。

それゆえ，不均整［な数］は平面の中にある［平方根である］から，それぞれ［の辺］が平方されると，それゆえ，A cubo-cubus $+$ B plano-plano in A quad. $-$ B plano in A quad. 2 が Z solido-solido に等しくされる。ゆえに，要求されていたことがなされた。

［もし］$1C - 2N$ が $\sqrt{1200}$ に等しくされる［ならば］。それゆえ，$1C + 4N - 4Q$ が 1200 に等しくされるであろうし，$1N$ は 12 になり，これは求められる根の平方［である］。

さらに，［この方程式は］最初と最後［の項の比］によって均整のとれた［方程式に］還元することができた。

［もし］$1C - 2N$ が $\sqrt{1200}$ に等しくされる［ならば］。それゆえ，$1C + 2Q$ は 1200 に等しくされ，$1N$ は 10 になる。そしてそこから，提示された［方程式の］根は $\sqrt{12}$ である。

別の例

A cubus $-$ $\sqrt{c.}$ B solido-solidi in A が Z solido に等しくされるとしよう。この方程式から不均整［な数］を浄化しなければならない。

それゆえ，不均整［な数］は立体の中にある［立方根である］から，提示されているものに転換が適用され，そして A による除法が行われると，$\dfrac{A\text{ cubus} - Z\text{ solido}}{A}$ が $\sqrt{C.}$ B solido-solidi に等しくされる。すべて［の項］に立方が掛けられる［立方される］と，$\dfrac{A\text{ cubo cubo cubus} - Z\text{ solido in }A\text{ cubo cubum }3 + Z\text{ sol. solido in }A\text{ cubum }3 - Z\text{ solido solido solido}}{A\text{ cubo}}$ が B solido-solido に等しくされる。そして，すべて［の項］に A cubum が掛けられ，適切に整えられると，A cubo-cubo-cubus $-$ Z solido 3 in A cubo-cubum $+$ $\overline{Z\text{ solido solido }3 - B\text{ solido solido}}$ in A cubum が Z solido-solido-solido に等しくされるであろう。ゆえに，要求されたことがなされた。

［もし］$1C - \sqrt{C.}$ 18 in $1N$ が 6 に等しくされる［ならば］。$1C - 18Q + 90N$ が 216 に等しくされ，$1N$ は 12 になり，これは求められる根の立方である。

3 次方程式 $x^3 - \sqrt[3]{b^6}\,x = z^3$ が与えられたとき，根号を消去するために，$\dfrac{x^3 - z^3}{x} = \sqrt[3]{b^6}$ とし

て，この両辺を 3 乗すると，$\dfrac{x^9-3x^6z^3+3x^3z^6-z^9}{x^3}=b^6$ となるから，これを整理すれば，$x^9-3z^3x^6+\left(3z^6-b^6\right)x^3=z^9$ となって，根号が除去される，ということ。
ここで，$y=x^3$ とすれば，新しい 3 次方程式 $y^3-3z^3y^2+\left(3z^6-b^6\right)y=z^9$ が得られる。
ヴィエートの挙げる例は，$x^3-\sqrt[3]{18}\,x=6$ で，これは $b^6=18$，$z^3=6$ であるから，得られる新しい方程式は $y^3-18y^2+90y=216$ となる。
これを解くと，$y=12$，$3\pm 3i$ となるから，元の方程式の解として $x=\sqrt[3]{12}$ が得られる。
実際，$x^3-\sqrt[3]{18}\,x-6=\left(x-\sqrt[3]{12}\right)\left(x^2+\sqrt[3]{12}\,x+\sqrt[3]{18}\right)$ とできるから，解は $x=\sqrt[3]{12}$，$\dfrac{-\sqrt[3]{12}\pm\sqrt{2\sqrt[3]{18}}\,i}{2}$。

第 6 章
どのようにして平方の平方の方程式は，平面の根による中間の立方［の方程式］によって，平方［の方程式］に下げられるか あるいは，補足付加による漸層法について

そして，これら 5 つの方法は作用がどのようなものであれ準備されるであろう方程式に対して，それらはついには先に得られた標準的な解析法に従って数によって解かれるのだから，ほとんど十分である。なぜならば，たとえ根が不均整なものであっても，それらは近似の方法によって真の値が示されるであろうし，さらに，厳密な値を示すのは算術よりはむしろ幾何学だからである。それ 131
にもかかわらず，不均整な根について，算術は，しばしば，［比例の］中項の差あるいは和によって，［比例の］外項の与えられた差あるいは和によって，さらには中項あるいは外項による長方形によって与えられた，あるいは，そのうえ，平面の根による立方［の方程式］の中央［の値］によって，平方の平方の方程式の平方［の方程式］への下降についての教義がやがて与えられるであろう，立方の方程式の定義に役立つであろう。さらに，問題は，再認識された形成法や新しく認められた探究法による，平方の平方［の方程式］の定義に従って解くことができる。しかし，［それは］少なからず容易に，そしてことによるとより優雅に，補足付加による漸層法といわれている操作によって［解くことができ］，次の 3 つないし 4 つの問題で［そのことを］例証しよう。

補足付加による漸層法によって，さらに倒置によってではなく，平方［の方程式］，平方の平方［の方程式］，立方の立方［の方程式］，そして続いて 1 つおきの 2 つずつの階級の漸層法に，方程式が完全に変えられることはすでに前に観察された。さらに，それは，補足付加ということばの語源に関係する，補充が確かに要求された不規則な下降の形式である。

問題 1

辺によって作用された平方の平方の方程式を，平面の根をもつ中間の立方［の方程式］によって，平面［の方程式］に下げること。

A quad.-quad. $+$ B solido in A が Z plano-plano に等しいと提示されるとしよう。要求されたことを行わなければならない。それゆえ，これらから A quad.-quad. が Z plano-plano $-$ B solido in A に等しくされるであろうと提示される。この方程式の両方の辺に A quad. in E quad. $+$ E quad. quad. $\dfrac{1}{4}$ が加えられると，それゆえ，A quad.-quad. $+$ A quad. in E quad. $+$ E quad.-quad. $\dfrac{1}{4}$ が Z plano-plano $-$ B solido in A $+$ A quad. in E quad. $+$ E quad.-quad. $\dfrac{1}{4}$ に等しくされるであろう。［左辺にある］すべて［の項］が平方によって割られると，それは A

quad. $+$ E quad. $\dfrac{1}{2}$ となるであろう。

そのために，A quad.-quadrato に，2 つの平面の根から法則に則って平方をつくるのに不足していた，これら 2 つの平面的平面 A quad. in E quad. および E quad.-quadrati $\dfrac{1}{4}$ が補充として加えられたのである。しかし，もし方程式のもう一方の辺も同様に平方によって割られるならば，それは A quad. $+$ E quad. $\dfrac{1}{2}$ になるはずであった。

それゆえ，平面の根による平方は，その方程式のもう一方の辺と適切に比較され，その平面の根がついには A quad. $+$ E quad. $\dfrac{1}{2}$ に等しくされるように，形づくられるであろう。

それゆえ，［それを］$\dfrac{B \text{ solido}}{E\ 2} - E$ in A としよう。なぜならば，比較によって A あるいは［その］階級による作用は消え去るであろうし，そして E についての方程式が生じるであろうし，それが目指されなければならないことだからである。

それゆえ，平方が形づくられると，$\dfrac{B \text{ solido solidum}}{E \text{ quad. } 4}$ $+$ E quad. in A quad. $-$ B solido in A が Z plano-olano $-$ B solido in A $+$ E quad. in A quad. $+$ E quad.-quad. $\dfrac{1}{4}$ に等しくされなければならない。

そして，両方［の辺］から作用 E quadr. in A quad. $+$ B solido in A が消し去られ，そして E quad. 4 が掛けられると，E cubo-cubus $+$ Z plano-plano 4 in E quad. が B solido-solido に等しくされるであろう。さらに，E quad. が D quad. であると知られるようになると，ゆえに $\dfrac{B \text{ solidum}}{D\ 2} - D$ in A が A quad. $+$ D quad. $\dfrac{1}{2}$ に等しくされるであろうし，技法に従って方程式が整えられると，A quad. $+$ D in A が $\dfrac{B \text{ solido}}{D\ 2} - D$ quad. $\dfrac{1}{2}$ に等しくされるであろう。

そして，もし A quad.-quad. $-$ B solido in A が Z plano-plano に等しいと提示されるとすると。

平方が表わされるであろう平面の根は $\dfrac{B \text{ solido}}{E\ 2} + E$ in A と定められ，A quad. $+$ E quad. $\dfrac{1}{2}$ と比較されるであろう。

逆の向きに拒否された方程式においては逆にされれば同じことで，反対の作用の記号によって議論すると，A quad.-quad. $-$ B solido in A が $-Z$ plano plano に等しい［となる］。

［これは］等しいものを等しいものから取り去ることである。しかし，E quad. は $\dfrac{B \text{ solido}}{E\ 2}$ の半分に劣り，［それは］そうでなければまっすぐに拒否された［方程式］においてまさるからである。

このことから，3 つの還元の定理を整えることができるであろう。

132 **定理 1**

もし A quad.-quad. $+$ B solido in A が Z plano-plano に等しくされ，そして E quadr. cubus $+$ Z plano-plano 4 in E quad. が B solido-solido に等しくされ，さらに E が D であると知られるようになるならば，A quad. $+$ D in A が $\dfrac{B \text{ solido}}{D\ 2} - D$ quad. $\dfrac{1}{2}$ に等しくされるであろう。

定理 2

もし A quadr.-quadr. $-$ B solido in A が Z plano-plano に等しくされ，そして E quadrati-cubus $+$ Z plano-plano 4 in E quad. が B solido-solido に等しくされ，さらに E が D であると知られるようになるならば，A quadr. $-$ D in A が $\dfrac{B \text{ solido}}{D\ 2} - D$ quadr. $\dfrac{1}{2}$ に等しくされる

であろう。

さらに，方程式 —— こればかりでなく上述のもまた —— の性質は十分に認識された。それらには 2 つの辺［根］があり，それらに関して，辺の和で割られた平方の平方の差，すなわち差の立方が加えられた，辺が掛けられた差による長方形の 2 倍，は B solidum になる。

さらに，辺そのものの差は E または D であり，長方形そのものが掛けられた，辺の差の平方足す辺による長方形は Z plano-planum になる。そして，A は 1 つの辺であり，後者［定理 2］ではより大きい方で，前者［定理 1］ではより小さい方である。

> 定理 1 における $A^4+B^3A=Z^4$ の解を $A=t$，定理 2 における $A^4-B^3A=Z^4$ の解を $A=s$ とすると，$t^4+B^3t=Z^4$，$s^4-B^3s=Z^4$ であるから，$\left(s^4-t^4\right)-B^3\left(s+t\right)=0$ となる。
> 従って，$B^3=\dfrac{s^4-t^4}{s+t}=\left(s^2+t^2\right)\left(s-t\right)=2st(s-t)+(s-t)^3$ となる。
> これから，$Z^4=t^4+\left(s^2+t^2\right)\left(s-t\right)t=s^3t-s^2t^2+st^3=st\left\{(s-t)^2+st\right\}$ となる。
> また，$t^2+\dfrac{1}{2}E^2=\dfrac{B^3}{2E}-Et$，$s^2+\dfrac{1}{2}E^2=\dfrac{B^3}{2E}+Es$ であるから，$s^2-t^2=E(s+t)$ となって，$s-t=E$ ということになる。この E が D なのだから，$s-t=E=D$ である。
> ところで，定理 1 で，$A^4+B^3A=Z^4$ を $A^4=Z^4-B^3A$ として両辺を平方完成するときに，右辺を $\left(\dfrac{B^3}{2E}-EA\right)^2$ として，本来の右辺 $Z^4-B^3A+A^2E^2+\dfrac{1}{4}E^2$ と比較すると，$E^6+4Z^4E^2=B^6$ が得られる。
> この $\left(E^2\right)^3+4Z^4\left(E^2\right)=B^6$ が「平面の根による立方の方程式」と呼ばれるものか。

一方，4 つの連続的に比例する系列において，D を外項の差，B solidum を 1 つおきに選ばれたそれぞれ［の項］の立方の差，Z plano-planum をいずれかの外項に残りから 1 つおきに選ばれた［項の］立方の差が変えられたものとすると，A は第 1［の項］であり，後者では外項のうちより大きい方であり，前者ではより小さい方である。

連続的に比例する［系列］を 2，$\sqrt{C}\ 40$，$\sqrt{C}\ 200$，10 としよう。［もし］$1QQ+832N$ が 1680 に等しくされる［ならば］。それゆえ，$1Q+8N$ は 20 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 になる。

そして，もし $1QQ-832N$ が 1680 に等しくされるならば。それゆえ，$1Q-8N$ は 20 に等しくされるであろうし，$1N$ は 10 になる。

さらに，2 および 10 の差は 8 であることに注目すると，$1C+6720N$ は 692224 に等しくされるから，これから $1N$ は 64 になり，［これは］8 による平方ほどの大きさである。

> $a:b=b:c=c:d$ である a，b，c，d $(a<d)$ に対して，$D=d-a$，$B^3=d^3-c^3+b^3-a^3$，$Z^4=a\left(d^3-c^3+b^3\right)=d\left(c^3-b^3+a^3\right)$ とすると，a は定理 1 の，d は定理 2 の解になるという。
> いま，連続的に比例する数を 2，$\sqrt[3]{40}$，$\sqrt[3]{200}$，10 とすると，$D=8$，$B^3=832$，$Z^4=1680$ となる。
> 定理 1 に関しては，提示された $x^4+832x=1680$ に対して，$x^2+8x=20$ とすれば，$x=2$ が得られる。
> 定理 2 に関しては，$x^4-832x=1680$ に対して，$x^2-8x=20$ とすれば，$x=10$ が得られる。
> いずれの場合も，$y^3+6720y=692224$ ［$y^3+4Z^4y=B^6$］から，$y\left(=E^2\right)=64\left(=8^2\right)$ が得られる。

定理 3

もし B solidum in $A-A$ quadr.-quadr. が Z plano-plano に等しくされ，そして E quadraticubus $-$ Z plano-plano 4 in E quadr. が B solido-solido に等しくされ，さらに E が D であると知られるようになるならば，D in $A-A$ quad. が D quadr. $\frac{1}{2}+\frac{-B\ \text{solido}}{D\ 2}$ に等しくされるであろう。

方程式の性質は十分に認識された。B solidum は辺の和が掛けられた［辺の］平方の和によって，あるいはまた，辺の和が掛けられた，辺による長方形の 2 倍が罰せられた，2 つの辺の和の立方によって，つくられたものであり，Z plano-planum は辺の和の平方引く長方形に長方形そのものが掛けられた積であり，E または D は辺そのものの和になり，A そのものは［それらのうち］より大きい方かより小さい方になる。

4 つの連続的に比例する系列において，B solidum は 4 つのそれぞれ［の項］の立方の和で，Z plano-planum はいずれかの外項に残り［の項］の立方の和が掛けられたもの，D は外項の和であり，A は第 1 あるいは第 4［の項］になる。

連続的に比例する［系列］を 2，$\sqrt{C}\ 40$，$\sqrt{C}\ 200$，10 としよう。［もし］$1248N-1QQ$ が 2480 に等しくされる［ならば］。それゆえ，$12N-1Q$ は 20 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 あるいは 10 になる。さらに，2 および 10 の和は 12 であることに注目せよ。

［そして，もし］$1C-9920N$ が 1557504 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 144 になり，［これは］12 の平方ほどの大きさである。

$B^3A-A^4=Z^4$ が提示されたとき，$A^4=-Z^4+B^3A$ の両辺に $A^2E^2+\frac{1}{4}E^4$ を加えて，平方完成するのに，$\left(A^2+\frac{1}{2}E^2\right)^2=\left(\frac{B^3}{2E}+EA\right)^2$ とすると，

右辺の比較から，$-Z^4+\frac{1}{4}E^4=\frac{B^6}{4E^2}$ となり，3 次方程式 $\left(E^2\right)^3-4Z^4\left(E^2\right)=B^6$ が得られ，

また，$A^2+\frac{1}{2}E^2=\frac{B^3}{2E}+EA$ の解を $E=D$ とすると，$DA-A^2=\frac{1}{2}D^2-\frac{B^3}{2D}$ が得られる。

$a:b=b:c=c:d$ である a，b，c，d $(a<d)$ に対して，$B^3=a^3+b^3+c^3+d^3$，$Z^4=a\left(b^3+c^3+d^3\right)=d\left(a^3+b^3+c^3\right)$，$D=a+d$ とすれば，a あるいは d がはじめに提示された方程式の解になる，という。

2，$\sqrt[3]{40}$，$\sqrt[3]{200}$，10 については，$B^3=1248$，$Z^4=2480$，$D=12$ になるから，提示された方程式 $1248x-x^4=2480$ の解は $12x-x^2=20$ から得られる。

実際，$x^4-1248x+2480=\left(x^2-12x+20\right)\left(x^2+12x+124\right)$ であるから，提示された方程式の解は $x=2$，10，$-6\pm2\sqrt{22}\,i$ である。

また，$y^3-9920y-1557504=(y-144)\left(y^2+144y+10816\right)$ であるから，$y^3-9920y=1557504$ の解は $y=144\ (=12^2)$，$-72\pm16\sqrt{22}\,i$ となる。

問題 2

立方によって作用された平方の平方の方程式を，平面の根をもつ中間の立方［の方程式］によって，平面［の方程式］に下げること。

133 A quad. quad. $+$ B in A cubum 2 が Z plano-plano に等しいと提示されるとしよう。要求されたことを行わなければならない。本当に，もし A quad. $+$ B in $A-E$ plano $\frac{1}{2}$ による平方

が形づくられるならば，それは A quad. quad. $+$ B in A cubum 2 $+$ B quad. in A quad. $+$ E plan. plan. $\frac{1}{4}$ $-$ E plan. in A quad. $-$ E plan. in B in A であろう。

それゆえ，方程式の両方の辺に平面の根の平方をつくるのに不足するものが加えられると，このことから等しいものが加えられたものは等しいことが結論されるであろう。[すなわち,] A quad. quad. $+$ B in A cubum 2 $+$ B quad. in A quad. $+$ E plano-plano $\frac{1}{4}$ $-$ E plano in A quad. $-$ E plano in B in A が Z plano-plano $+$ B quad. in A quad. $+$ E plano-plano $\frac{1}{4}$ $-$ E plano in A quad. $-$ E plano in B in A に等しい。

[この方程式の] 両方の辺が平方によって割られると，解析によって起源が元に戻された前者 [左辺] は，明らかに，A quad. $+$ B in A $-$ E plano $\frac{1}{2}$ になるであろう。

しかし，もし方程式のもう一方の辺が同様に平方で割られるならば，最初の辺から生じた平面の根に等しくならなければならない。

それゆえ，平面の根による平方がつくられなければならず，そしてそれは方程式のもう一方の辺，すなわち作用されたものを伴う Z plano-plano，と —— 根も同様に互いに比較され，等しくされるように —— 比較され，そして等しくされなければならない。その理由で，形づくられるであろうその平方の平面の根は $\dfrac{E \text{ planum in } B}{\sqrt{B \text{ q. } 4 - E \text{ plano } 4}} - \sqrt{B \text{ quad.} - E \text{ plano}}$ in A であると定められるとしよう。

なぜならば，A あるいはその階級による作用は消え去るであろうし，E についての方程式が生じるであろうし，それが目指されなければならないことだからである。それゆえ，平方がつくられると，$\dfrac{E \text{ plano plano in } B \text{ q.}}{B \text{ q. } 4 - E \text{ pl. } 4}$ $+$ B quad. in A quad. $-$ E plano in A quad. $-$ E plano in B in A であろう。

[これが] 提示された平面的平面に付随し作用する残りのものを合わせた Z plano-plano に等しくされ，両方 [の辺] から A および A の平方によって作用されたものを消し去ると，$\dfrac{E \text{ plano plan. in } B \text{ q.}}{B \text{ quad. } 4 - E \text{ plan. } 4}$ が Z plano-plano $+$ E plano-plano $\frac{1}{4}$ に等しくされるであろう。

そして，すべて [の項] に B quad. $4 - E$ plano 4 が掛けられると，E plano-planum in B quad. が Z plano-plano in B quad. 4 $+$ E plano-plano in B quad. $-$ Z plano-plano in E planum 4 $-$ E plano-plano-plano に等しくされるであろう。

そして，両方 [の辺] から E plano-plano in B quad. を消し去り，すべて [の項] を適切に整えると，E plani cubus $+$ Z plano-plano 4 in E planum が Z plano-plano in B quad. 4 に等しくされるであろう。

さらに，E planum が D planum であると知られるようになると，ゆえに A quad. $+$ B in A $-$ D plano $\frac{1}{2}$ が $\dfrac{D \text{ plano in } B}{\sqrt{B \text{ quad. } 4 - D \text{ plano } 4}} - \sqrt{B \text{ quad.} - D \text{ plano}}$ in A に等しくされるであろう。

そして，技法に従って整えられた方程式によって，A quad. $+$ $\overline{B + \sqrt{B \text{ quad.} - D \text{ plano}}}$ in A が D plano $\frac{1}{2}$ $+$ $\dfrac{D \text{ plano in } B}{\sqrt{B \text{ quad. } 4 - D \text{ } 4 \text{ plano}}}$ に等しくされるであろう。

そして，もし A quad. quad. $-$ B in A cubum 2 が Z plano-plano に等しいと提示されるならば。形づくられるであろう平方の平面の根は $\dfrac{E \text{ planum in } B}{\sqrt{B \text{ quad. } 4 - E \text{ plano } 4}} + \sqrt{B \text{ quad.} - E \text{ plano}}$ in A と定められ，A quad. $-$ B in A $-$ E plano $\frac{1}{2}$ と比較されるであろう。

そして，もし B in A cubum $2 - A$ quad. quad. が Z plano-plano に等しいと提示されるならば。A quad. quad. $- B$ in A cubum が $-Z$ plano-plano に等しいとして議論することが許されるであろう。それは，等しいものを等しいものから取り去ることだからである。そして，形づくられるであろう平方の平面の根は $\dfrac{E \text{ planum in } B}{\sqrt{B \text{ quad. } 4 + E \text{ planum } 4}} - \sqrt{B \text{ quad.} + E \text{ plano}}$ in A と定められ，B in $A - E$ plano $\dfrac{1}{2} - A$ quad. と比較されるであろう。それゆえ，すべての場合について要求されていた還元がなされた。このことから，3 つの還元の定理が整えられるであろう。

場合 1［定理 1］：$A^4 + 2BA^3 = Z^4$

平方完成するために，両辺に $B^2A^2 + \dfrac{1}{4}E^4 - A^2E^2 - BAE^2$ を加えると，左辺は $\left(A^2 + BA - \dfrac{1}{2}E^2\right)^2$ となる。

そこで，右辺を $\left(\dfrac{E^2B}{\sqrt{4B^2 - 4E^2}} - A\sqrt{B^2 - E^2}\right)^2$ とすると，右辺の比較から，$Z^4 + \dfrac{1}{4}E^4 = \dfrac{E^4B^2}{4B^2 - 4E^2}$ がいえる。

この式を整理すると，$\left(E^2\right)^3 + 4Z^4\left(E^2\right) = 4Z^4B^2$ が得られる。

また，$A^2 + BA - \dfrac{1}{2}E^2 = \dfrac{E^2B}{\sqrt{4B^2 - 4E^2}} - A\sqrt{B^2 - E^2}$ の解を D として，得られる方程式を整理すると，$A^2 + \left(B + \sqrt{B^2 - D^2}\right)A = \dfrac{1}{2}D^2 + \dfrac{D^2B}{\sqrt{4B^2 - 4D^2}}$ となる。

場合 2［定理 2］：$A^4 - 2BA^3 = Z^4$

場合 1 と同様に，平方完成するのに不足する項を両辺に加えて，$\left(A^2 - BA - \dfrac{1}{2}E^2\right)^2 = \left(\dfrac{E^2B}{\sqrt{4B^2 - 4E^2}} + A\sqrt{B^2 - E^2}\right)^2$ とすると，右辺の比較から，$Z^4 + \dfrac{1}{4}E^4 = \dfrac{E^4B^2}{4B^2 - 4E^2}$ となり，これを整理すると，$\left(E^2\right)^3 + 4Z^4\left(E^2\right) = 4Z^4B^2$ が得られる。

また，場合 1 と同様に，$A^2 - \left(B + \sqrt{B^2 - D^2}\right)A = \dfrac{1}{2}D^2 + \dfrac{D^2B}{\sqrt{4B^2 - 4D^2}}$ となる。

場合 3［定理 3］：$2BA^3 - A^4 = Z^4$

$A^4 - 2BA^3 = -Z^4$ として，場合 1，場合 2 と同様に，不足項を加えて，

$$\left(BA - \frac{1}{2}E^2 - A^2\right)^2 = \left(\frac{E^2B}{\sqrt{4B^2 + 4E^2}} - A\sqrt{B^2 + E^2}\right)^2$$

となるようにすると，$-Z^4 + \dfrac{1}{4}E^2 = \dfrac{E^4B^2}{4B^2 + 4E^2}$ から，$\left(E^2\right)^3 - 4Z^4\left(E^2\right) = 4Z^4B^2$ が得られる。

また，$\left(B + \sqrt{B^2 + D^2}\right)A - A^2 = \dfrac{1}{2}D^2 + \dfrac{D^2B}{\sqrt{4B^2 + 4D^2}}$ がいえる。

定理 1

もし A quad. quad. $+ B$ in A cubum 2 が Z plano-plano に等しくされ，そして E plani-cubus $+ Z$ plano-plano 4 in E planum が Z plano-plano in B quad. 4 に等しくされ，さらに E planum が D planum であると知られるようになるならば，A quad. $+ \overline{B + \sqrt{B \text{ quad.} - D \text{ quad.}}}$ in A が $\dfrac{D \text{ plano in } B}{\sqrt{B \text{ quad. } 4 - D \text{ pl. } 4}} + D$ plano $\dfrac{1}{2}$ に等しくされるであろう。

定理 2

もし A quad. quad. $-$ B in A cubum 2 が Z plano-plano に等しくされ，そして E plani-cubus $+$ Z plano-plano 4 in E planum が Z plano-plano in B quad. 4 に等しくされ，さらに E planum が D planum であると知られるようになるならば，A quad. $-\ \overline{B+\sqrt{B \text{ quad.} - D \text{ plano}}}$ in A が $\dfrac{D \text{ plano in } B}{\sqrt{B \text{ quad. } 4 - D \text{ plano } 4}} + D$ plano $\dfrac{1}{2}$ に等しくされるであろう。

さらに，方程式 —— こればかりでなく上述のもまた —— の性質は十分に認識された。それら 134
には 2 つの辺［根］があり，それらに関して，［それらの辺の］立方の和で割られた平方の平方の差は B 2 になる。一方，B そのものが罰せられた辺の差の平方は，同じ B の平方から取り去られると，D planum あるいは E planum が残すであろう。そして，Z plano-planum は D plano による立方を D および B の立方の差の 4 倍で割ることによって生じ，A は，後者ではより大きい方の，前者ではより小さい方の，1 つの辺である。

さらに，4 つの連続的に比例する系列において，B 2 は 1 つおきに選ばれたそれらすべて［の項］の差であり，Z plano-planum はいずれかの外項に 1 つおきに選ばれた残りの 3 つ［の項］の差の立方が掛けられたものからつくられ，そして E planum あるいは D planum は 1 つおきに選ばれたすべて［の項］の差の平方および中項の差の 3 倍が罰せられた外項の差の平方の間の差の 4 分の 1 になる。

そしてそのために，$\sqrt{B \text{ quad. } 4 - D \text{ plano } 4}$ は外項の差引く中項の差の 3 倍である。そして，第 1［の項］が外項の間でより小さい方であると認識されるとき，前者では A は 1 つおきに選ばれた最初の 3 つ［の項］の差になり，後者では後ろの 3 つ［の項の差になる］。

> 定理 1 における解を $A = t$，定理 2 における解を $A = s$ とすると，$t^4 + 2Bt^3 = Z^4$，$s^4 - 2Bs^3 = Z^4$ であるから，$\left(s^4 - t^4\right) - 2B\left(s^3 + t^3\right) = 0$ より $2B = \dfrac{s^4 - t^4}{s^3 + t^3}$ となる。
>
> また，$t^2 + Bt + t\sqrt{B^2 - E^2} = \dfrac{E^2 B}{\sqrt{4B^2 - 4E^2}} + \dfrac{1}{2}E^2$，$s^2 - Bs - s\sqrt{B^2 - E^2} = \dfrac{E^2 B}{\sqrt{4B^2 - 4E^2}} + \dfrac{1}{2}E^2$ より $\left(s^2 - t^2\right) - B(s+t) - (s+t)\sqrt{B^2 - E^2} = 0$ となるから，$E^2 = D^2 = B^2 - \{(s-t) - B\}^2$ がいえる。
>
> $a : b = b : c = c : d$ である a，b，c，d $(a < d)$ に対して，$2B = d - c + b - a$，$Z^4 = a(d - c + b)^3 = d(c - b + a)^3$，$E^2 = D^2 = \dfrac{1}{4}\left[(d - c + b - a)^2 - \{(d - a) - 3(c - b)\}^2\right]$ とすると，$\sqrt{4B^2 - 4D^2} = 2\sqrt{B^2 - D^2} = (d - a) - 3(c - b)$ であり，$A = c - b + a$［定理 1］あるいは $A = d - c + b$［定理 2］となる，という。

連続的に比例する［系列］を 1，2，4，8 としよう。［もし］$1QQ + 5C$ が 216 に等しくされる［ならば］。それゆえ，$1Q + 3N$ が 18 に等しくされるであろうし，$1N$ は 3 になる。そして，もし $1QQ - 5C$ が 216 に等しくされるならば，それゆえ，$1Q - 3N$ が 18 に等しくされるであろうし，$1N$ は 6 になる。

さらに，3 は知られている。$1C + 864N$ が 5400 に等しくされるのだから，$1N$ は 6 になる。［これは］与えられた辺 5 による平方および 1 による平方の間の差の 4 分の 1 であり，そしてそのために，長さ 5 が加えられると，3 の 2 倍である 6 になるような長さであると識別される。

定理 3

もし B in A cubum 2 $-$ A quad. quad. が Z plano-plano に等しくされ，そして E plani-cubus $-$ Z plano-plano 4 in E planum が Z plano-plano in B quad. 4 に等しくされ，さらに E が D であると知られるようになるならば，$\overline{B+\sqrt{B\text{ quad.}+D\text{ plano}}}$ in A $-$ A quad. が $\dfrac{D\text{ plano in }B}{\sqrt{B\text{ quad. }4+D\text{ plano }4}}+D$ plano $\dfrac{1}{2}$ に等しくされるであろう。

方程式の性質は十分に認識された。それらには 2 つの辺［根］があり，それらに関して，立方の差で割られた平方の平方の差は B 2 になる。一方，B が罰せられた辺の和の平方および B そのものの平方の間の差は D planum を残し，Z plano-planum は D plano による立方を B および D による平方の 4 倍の和で割ることによって生じる。そして，A はより大きいかまたはより小さい辺である。

4 つの連続的に比例する系列において，B 2 はそれらすべて［の項］からつくられた［和］であり，Z plano-planum はいずれかの外項に残りの 3 つ［の項］からつくられた［和］の立方が掛けられたものである。

そして，E planum あるいは D planum は中項の和の 3 倍が加えられた外項の和の平方およびすべて［の項］の和の平方の間の差の 4 分の 1 である。

そしてそこから，$\sqrt{B\text{ quad. }4+D\text{ plano }4}$ は外項の和足す中項の和の 3 倍であり，A は最初の 3 つ，あるいは最後の 3 つからつくられた［和］になる。

連続的に比例する［系列］を 1，2，4，8 としよう。［もし］$15C-1QQ$ が 2744 に等しくされる［ならば］。それゆえ，$21N-1Q$ が 98 に等しくされるであろうし，$1N$ は 7 あるいは 14 になる。さらに，21 は知られている。$1C-10976N$ が 617400 に等しくされるのだから，$1N$ は 126 になる。［これは］225 および 729 の間の差の 4 分の 1 であり，そしてそのために，長さ 15 が加えられると，21 の 2 倍である 42 になるような $\sqrt{729}$，すなわち長さ 27，であると識別される。

問題 3

辺によってだけでなく平方によっても作用された平方の平方の方程式を，平面の根をもつ中間の立方［の方程式］によって，平方［の方程式］に下げること。

A quad. quad. $+$ G plano in A quad. 2 $+$ B solido in A が Z plano-plano に等しいと提示されるとしよう。要求されたことを行わなければならない。

本当に，もし A quad. $+$ G plano $+$ E quad. $\dfrac{1}{2}$ の平方が形づくられるならば，それは A quad. quad. $+$ G plano plano $+$ G plano in A quad. 2 $+$ E quad. quad. $\dfrac{1}{4}$ $+$ E quad. in A quad. $+$ G plan. in E quadratum であろう。

それゆえ，提示されていたものから，転換が適用されると，A quad. quad. $+$ G plano in A quad. 2 が Z plano plano $-$ B solido in A に等しくされる。

135 それゆえ，方程式の両方の辺に定められた平面の根による平方をつくるのに不足するものが加えられると，ゆえに，この等しいものの等しいものへの加法によって，再び［一方の］辺は［他方の］辺に等しいであろう。

いま，両方の辺が平方によって割られると，解析によって起源が元に戻された前者［左辺］は，明らかに，A quad. $+$ G plano $+$ E quad. $\dfrac{1}{2}$ になるであろう。

しかし，もし方程式のもう一方の辺が同様に平方で割られるならば，最初の辺から生じた平面の

根に等しくならなければならない。

それゆえ，平面の根による平方がつくられなければならず，そしてそれは方程式のもう一方の辺，すなわち作用されたものを伴う Z plano-plano，と —— 根も同様に互いに比較され，等しくされるように —— 比較され，そして等しくされなければならない。そして，その理由で，形づくられるであろう平方の平面の根が $\dfrac{B \text{ solidum}}{E\ 2} - E \text{ in } A$ と定められるとしよう。なぜならば，比較において，A およびその階級による作用は消え去るであろうし，E についての方程式が生じるであろうし，それが目指されなければならないことだからである。

それゆえ，平方がつくられると，$\dfrac{B \text{ solido solidum}}{E \text{ quad. } 4} + E \text{ quad. in } A \text{ quad.} - B \text{ solido in } A$ が Z plano-plano $- B$ solido in $A + G$ plano-plano $+ E$ quad. quad. $\dfrac{1}{4} + E$ quad. in A quad. $+ G$ plano in E quad. に等しいであろう。

そして，両方［の辺］から A および A quad. による作用が消し去られることによって，$\dfrac{B \text{ solido solidum}}{E \text{ quad. } 4}$ が Z plano-plano $+ G$ plano-plano $+ E$ quad. quad. $\dfrac{1}{4} + G$ plano in E quad. に等しくされるであろう。

そして，すべて［の項］に E quad. 4 が掛けられ，適切に整えられると，E quadrati-cubus $+ G$ plano 4 in E quad. quad. $+ \overline{Z \text{ plano plano } 4 + G \text{ plano plano } 4}$ in E quad. が B solido-solido に等しくされるであろう。さらに，E が D であると知られるようになると，A quad. $+D$ in A が $\dfrac{B \text{ solido}}{D\ 2} - G \text{ plano} - D \text{ quad. } \dfrac{1}{2}$ に等しくされるであろう。

そして，もし A quad. quad. $+ G$ plano in A quad. $2 - B$ solido in A が Z plano plano に等しいと提示されるとするならば，形づくられるであろう平方の根が $\dfrac{B \text{ solidum}}{E\ 2} + E$ in A と定められ，A quad. $+ G$ plano $+ E$ quad. $\dfrac{1}{2}$ と比較されるであろう。

そして，もし A quad. quad. $- G$ plano in A quad. $2 - B$ solido in A が Z plano-plano に等しいと提示されるとするならば，形づくられるであろう平方の平面の根が $\dfrac{B \text{ solidum}}{E\ 2} + E$ in A と定められ，A quad. $- G$ plano $+ E$ quad. $\dfrac{1}{2}$ と比較されるであろう。

そして，もし G planum in A quad. $2 + B$ solido in $A - A$ quad. quad. が Z plano-plano に等しいと提示されるとするならば，作用の符号が逆にされることによって，形づくられるであろう平方の平面の根が $\dfrac{B \text{ solidum}}{E\ 2} + E$ in A と定められ，A quad. $- G$ plano $+ E$ quad. $\dfrac{1}{2}$ と比較されるであろう。

そして，もし G plan. in A quad. $2 - B$ splido in $A - A$ quad. quad. が Z plano-plano に等しいと提示されるとするならば，作用の符号を逆にすることによって，形づくられるであろう平方の平面の根が E in $A - \dfrac{B \text{ solido}}{E\ 2}$ と定められ，A quad. $- G$ plano $+ E$ quad. $\dfrac{1}{2}$ と比較されるであろう。

そして，最後に，もし B solidum in $A - G$ plano in A quad. $2 - A$ quad. quad. が Z plano-plano に等しいと提示されるとするならば，作用の符号を逆にすることによって，形づくるであろう平方の平面の根が E in $A + \dfrac{B \text{ solido}}{E\ 2}$ と定められ，A quad. $+ G$ plano $+ E$ quad. $\dfrac{1}{2}$ と比較されるであろう。それゆえ，すべての場合について要求されていたことがなされた。

辺および平方による作用をもつ4次方程式の還元法である。これは，次のように分類される。

$$\left\{\begin{array}{ll}[1]\ A^4+2G^2A^2+B^3A=Z^4 & [5]\ 2G^2A^2+B^3A-A^4=Z^4\\ [2]\ A^4+2G^2A^2-B^3A=Z^4 & [6]\ 2G^2A^2-B^3A-A^4=Z^4\\ [3]\ A^4-2G^2A^2+B^3A=Z^4 & [7]\ B^3A+2G^2A^2-A^4=Z^4\\ [4]\ A^4-2G^2A^2-B^3A=Z^4 & [8]\ B^3A-2G^2A^2-A^4=Z^4\end{array}\right.$$

が，ヴィエートは［3］および［7］を挙げていない。ただし，［3］は，後でまとめられる，定理3として述べられている。

ヴィエートによれば，次のように比較することによって求める2次方程式が導き出されるという。

［1］ $A^4+2G^2A^2+B^3A=Z^4$

$A^4+2G^2A^2=Z^4-B^3A$ から $\left(A^2+G^2+\frac{1}{2}E^2\right)^2=\left(\frac{B^3}{2E}-EA\right)^2$ とすると，

$$\left(E^2\right)^3+4G^2\left(E^2\right)^2+\left(4Z^4+4G^4\right)E^2=B^6$$

$$A^2+DA=\frac{B^3}{2D}-G^2-\frac{1}{2}D^2$$

が得られる。

［2］ $A^4+2G^2A^2-B^3A=Z^4$

$A^4+2G^2A^2=Z^4+B^3A$ から $\left(A^2+G^2+\frac{1}{2}E^2\right)^2=\left(\frac{B^3}{2E}+EA\right)^2$ とすると，

$$\left(E^2\right)^3+4G^2\left(E^2\right)^2+\left(4Z^4+4G^4\right)E^2=B^6$$

$$A^2-DA=\frac{B^3}{2D}-G^2-\frac{1}{2}D^2$$

が得られる。

［3］ $A^4-2G^2A^2+B^3A=Z^4$

$A^4-2G^2A^2=Z^4-B^3A$ から $\left(A^2-G^2+\frac{1}{2}E^2\right)^2=\left(\frac{B^3}{2E}-EA\right)^2$ とすると，

$$\left(E^2\right)^3-4G^2\left(E^2\right)^2+\left(4Z^4+4G^4\right)E^2=B^6$$

$$A^2+DA=\frac{B^3}{2D}+G^2-\frac{1}{2}D^2$$

が得られる。

［4］ $A^4-2G^2A^2-B^3A=Z^4$

$A^4-2G^2A^2=Z^4+B^3A$ から $\left(A^2-G^2+\frac{1}{2}E^2\right)^2=\left(\frac{B^3}{2E}+EA\right)^2$ とすると，

$$\left(E^2\right)^3-4G^2\left(E^2\right)^2+\left(4Z^4+4G^4\right)E^2=B^6$$

$$A^2-DA=\frac{B^3}{2D}+G^2-\frac{1}{2}D^2$$

が得られる。

［5］ $2G^2A^2+B^3A-A^4=Z^4$

$A^4-2G^2A^2=-Z^4+B^3A$ から $\left(A^2-G^2+\frac{1}{2}E^2\right)^2=\left(EA+\frac{B^3}{2E}\right)^2$ とすると，

$$\left(E^2\right)^3-4G^2\left(E^2\right)^2+\left(4G^4-4Z^4\right)E^2=B^6$$

$$DA-A^2=\frac{1}{2}D^2-G^2-\frac{B^3}{2D}$$

が得られる。

［6］ $2G^2A^2-B^3A-A^4=Z^4$

$A^4-2G^2A^2=-Z^4-B^3A$ から $\left(A^2-G^2+\frac{1}{2}E^2\right)^2=\left(EA-\frac{B^3}{2E}\right)^2$ とすると，

$$\left(E^2\right)^3-4G^2\left(E^2\right)^2+\left(4G^4-4Z^4\right)E^2=B^6$$

$$DA - A^2 = \frac{1}{2}\,D^2 - G^2 + \frac{B^3}{2D}$$

が得られる。

［7］$B^3A + 2G^2A^2 - A^4 = Z^4$

$A^4 - 2G^2A^2 = -Z^4 + B^3A$ から $\left(A^2 - G^2 + \frac{1}{2}\,E^2\right)^2 = \left(EA + \frac{B^3}{2E}\right)^2$ とすると，

$$\left(E^2\right)^3 - 4G^2\left(E^2\right)^2 + \left(4G^4 - 4Z^4\right)E^2 = B^6$$

$$DA - A^2 = \frac{1}{2}\,D^2 - G^2 - \frac{B^3}{2D}$$

が得られる。

［8］$B^3A - 2G^2A^2 - A^4 = Z^4$

$A^4 + 2G^2A^2 = -Z^4 + B^3A$ から $\left(A^2 + G^2 + \frac{1}{2}\,E^2\right)^2 = \left(EA + \frac{B^3}{2E}\right)^2$ とすると，

$$\left(E^2\right)^3 + 4G^2\left(E^2\right)^2 + \left(4G^4 - 4Z^4\right)E^2 = B^6$$

$$DA - A^2 = \frac{1}{2}\,D^2 + G^2 - \frac{B^3}{2D}$$

が得られる。

別の方法

辺によってだけでなく平方によっても作用された平方の平方の方程式を，平面の根をもつ中間の立方［の方程式］によって，平方［の方程式］に還元すること。

A quad. quad. $+$ G plano in A quad. $+$ B solido in A が Z plano-plano に等しいと提示されるとしよう。要求されたことを行わなければならない。

それゆえ，提示されているものに関して転換が行われると，A quad. quad. が Z plano-plano $-$ G plano in A quad. $-$ B solido in A に等しくされる。

両方［の辺］に E planum in A quad. $+$ E plano-plano $\frac{1}{4}$ が加えられると，確かに，平方によって割られるとき前者［左辺］から A quad. $+$ E plano $\frac{1}{2}$ が生じる。それゆえ，もう一方の辺も同様に平方によって割られ，適切な根による平方が形づくられ，そして，それはそのもう一方に辺と比較され，等しくされる。そこで，根が $\frac{B \text{ solidum}}{\sqrt{E \text{ plan. } 4 - G \text{ plan. } 4}} - \sqrt{E \text{ plani} - G \text{ plano}}$ と定められるとしよう。それゆえ，$\frac{B \text{ solido solidum}}{E \text{ plano } 4 - G \text{ pl. } 4} + \overline{E \text{ plano} - G \text{ plano}}$ in A quad. $-$ B solido in A が Z plano-plano $-$ G plano in A quad. $-$ B solido in A $+$ E plano in A quad. $+$ E plano-plano $\frac{1}{4}$ に等しくされるであろう。

それゆえ, E plani cubus $-$ G plano in E plani quad. $+$ Z plano-plano 4 in E plan. が B solido- 136
solido $+$ Z plan.-plan. in G plan. 4 に等しくされるであろう。さらに，E planum が F planum であると知られるようになると，それゆえ，$\frac{B \text{ solidum}}{\sqrt{F \text{ plani } 4 - G \text{ plano } 4}} - \sqrt{F \text{ plani} - G \text{ plano}}$ in A が A quadr. $+$ F plano $\frac{1}{2}$ に等しくされるであろう。

そして，もし A quad. quad. $+$ G plano in A quad. $-$ B solido in A が Z plano-plano に等しいと提示されるとしよう。形づくられるであろう平方の平面の根が $\sqrt{E \text{ plani} - G \text{ plano}}$ in A $-$ $\frac{B \text{ solido}}{\sqrt{E \text{ pl. } 4 - G \text{ pl. } 4}}$ と定められ，E plano $\frac{1}{2}$ $+$ A quadrato と比較されるであろう。

そして，最後に，もし B solidum in A $-$ G plano in A quadr. $-$ A quad. quadr. が Z plano-plano に等しいと提示されるとしよう。形づくられるであろう平方の平面の根が

$\sqrt{E \text{ plani} - G \text{ plano}}$ in $A + \dfrac{B \text{ solido}}{\sqrt{E \text{ plani } 4 - G \text{ plano } 4}}$ と定められ，E plano $\dfrac{1}{2} + A$ quadrato と比較されるであろう。

それゆえ，すべての場合について要求されていた還元がなされた。

そして，確かに，最初の法則に従って，これらの定理が整えられる。

定理 1

最初の法則に従うもの

もし A quad.-quad. $+$ G plano 2 in A quad. $+$ B solido in A が Z plano-plano に等しくされ，そして E quad. cubus $+$ G plano 4 in E quadr.-quad. $+ \overline{Z \text{ plano plano } 4 + G \text{ plano plano } 4}$ in E quad. が B solido-solido に等しくされ，さらに E が D であると知られるようになるならば，A quad. $+$ D in A が $\dfrac{B \text{ solido}}{D\ 2} - D$ quad. $\dfrac{1}{2} - G$ plano に等しくされるであろう。

［もし］$1QQ + 6Q + 880N$ が 1800 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 2 になる。［もし］$1C + 12Q + 7236N$ が 774400 に等しくされる［ならば］，$1N$ は，根 8 の平方である，64 になる。［そして,］$1Q + 8N$ は 20 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 になる。

定理 2

もし A quadr.-quadr. $+$ G plano 2 in A quadr. $-$ B solido in A が Z plano-plano に等しくされ, そして E quad. cubus $+$ G plano 4 in E quad.-quad. $+ \overline{Z \text{ plano plano } 4 + G \text{ plano plano } 4}$ in E quadr. が B solido-solido に等しくされ，そして E が D であると知られるようになるならば，A quad. $-$ D in A が $\dfrac{B \text{ solido}}{D\ 2} - D$ quad. $\dfrac{1}{2} - G$ plano に等しくされるであろう。

［もし］$1QQ + 6Q - 880N$ が 1800 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 10 になる。［もし］$1C + 12Q + 7236N$ が 774400 に等しくされる［ならば］，$1N$ は，根 8 の平方である，64 になる。［そして,］$1Q - 8N$ は 20 に等しくされ，$1N$ は 10 になる。

定理 3

もし A quad.-quad. $-$ G plano 2 in A quad. $+$ B solido in A が Z plano-plano に等しくされ，そして E quad. cubus $-$ G plano 4 in E quad.-quad. $+ \overline{Z \text{ plano plano } 4 + G \text{ plano plano } 4}$ in E quadr. が B solido-solido に等しくされ，そして E が D であると知られるようになるならば，A quad. $+$ D in A が $\dfrac{B \text{ solido}}{D\ 2} - D$ quad. $\dfrac{1}{2} + G$ plano に等しくされるであろう。

［もし］$1QQ - 4Q + 800N$ が 1600 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 2 になる。［もし］$1C - 8Q + 6416N$ が 640000 に等しくされる［ならば］，$1N$ は，8 による平方である，64 になる。［そして,］$1Q + 8N$ は 20 に等しくされ，$1N$ は 2 になる。

定理 4

もし A quad.-quad. $-$ G plano 2 in A quad. $-$ B solido in A が Z plano-plano に等しくされ，そして E quad. cubus $-$ G plano 4 in E quadr.-quadr. $+ \overline{Z \text{ plano plano } 4 + G \text{ plano plano } 4}$ in E quadr. が B solido-solido に等しくされ，そして E が D であると知られるようになるならば，A quad. $-$ D in A が $\dfrac{B \text{ solido}}{D\ 2} - D$ quad. $\dfrac{1}{2} + G$ plano に等しくされるであろう。

［もし］$1QQ - 4Q - 800N$ が 1600 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 10 になる。［もし］$1C - 8Q + 6416N$ が 640000 に等しくされる［ならば］，$1N$ は，8 による平方である，64 になる。［そして,］$1Q - 8N$ は 20 に等しくされ，$1N$ は 10 になる。

定理 5

もし G planum 2 in A quad. $+$ B solido in $A - A$ quad.-quad. が Z plano-plano に等しくされ，そして E quadr. cubus $-$ G plano 4 in E quadr.-quadr. $+$ $\overline{G \text{ plano plano } 4 - Z \text{ plano plano } 4}$ $\overline{\text{in } E \text{ quadr.}}$ が B solido-solido に等しくされ，そして E が D であると知られるようになるなら 137
ば，D in $A - A$ quad. が D quad. $\dfrac{1}{2}$ $-$ G plano $-$ $\dfrac{B \text{ solido}}{D\ 2}$ に等しくされるであろう。

［もし］$44Q + 720N - 1QQ$ が 1600 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 10 あるいは 2 になる。［もし］$1C - 88Q - 4464N$ が 518400 に等しくされる［ならば］，$1N$ は，12 による平方である，144 になる。［そして,］$12N - 1Q$ が 20 に等しくされ，$1N$ は 10 あるいは 2 になる。

定理 6

もし G planum 2 in A quad. $-$ B solido in $A - A$ quad.-quad. が Z plano-plano に等しくされ, そして E quad. cubus $-$ G plano 4 in E quad.-quad. $+$ $\overline{G \text{ plano plano } 4 - Z \text{ plano plano } 4}$ $\overline{\text{in } E \text{ quad.}}$ が B solido-solido に等しくされ，そして E が D であると知られるようになるならば，D in $A - A$ quad. が D quad. $\dfrac{1}{2}$ $-$ G plano $+$ $\dfrac{B \text{ solido}}{D\ 2}$ に等しくされるであろう。

［もし］$114Q - 120N - 1QQ$ が 200 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 2 あるいは 10 になる。［もし］$1C - 228Q + 12196N$ が 14400 に等しくされる［ならば］，$1N$ は，12 による平方である，144 になる。［そして,］$12N - 1Q$ が 20 に等しくされ，$1N$ は 10 あるいは 2 になる。

定理 7

もし B solidum in $A - G$ plano 2 in A quad. $-$ A quad.-quad. が Z plano-plano に等しくされ，そして E quad. cubus $+$ G plano 4 in E quad.-quad. $+$ $\overline{- Z \text{ plano plano } 4 + G \text{ plano plano } 4}$ $\overline{\text{in } E \text{ quad.}}$ が B solido-solido に等しくされ，そして E が D であると知られるようになるならば，D in $A - A$ quad. が D quad. $\dfrac{1}{2}$ $+$ G plano $-$ $\dfrac{B \text{ solido}}{D\ 2}$ に等しくされるであろう。

［もし］$1440N - 16Q - 1QQ$ が 2800 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 10 あるいは 2 になる。［もし］$1C + 32Q - 10944N$ が 2073600 に等しくされる［ならば］，$1N$ は，12 による平方である，144 になる。［そして,］$12N - 1Q$ が 20 に等しくされ，$1N$ は 10 あるいは 2 になる。

さらに，続く［諸定理］は次の［第 2 の］法則に関係している。

定理 1

次の法則に従うもの

もし A quad.-quad. $+$ G plano in A quad. $+$ B solido in A が Z plano-plano に等しくされ，そして E plani cubus $-$ G plano in E plani qud. $+$ Z plano 4 in E planum が B solido-solido $+$ Z plano-plano 4 in G planum に等しくされ，そして E planum が F planum であると知られるようになるならば，A quad. $+$ $\sqrt{F \text{ plani} - G \text{ plano}}$ in A が $\dfrac{B \text{ solido}}{\sqrt{F \text{ plani } 4 - G \text{ plan. } 4}}$ $-$ F plano $\dfrac{1}{2}$ に等しくされるであろう。

［もし］$1QQ + 6Q + 880N$ が 1800 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 2 になる。［もし］$1C - 6Q + 7200N$ が 817600 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 70 になる。$70 - 6$ は 8 による平方である。［そして,］$1Q + 8N$ が 20 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 になる。

定理 2

もし A quad.-quad. $+$ G plano in A quad. $-$ B solido in A が Z plano-plano に等しくされ，

そして E plani cubus $-$ G plano in E plani qud. $+$ Z plano 4 in E planum が B solido-solido $+$ Z plano-plano 4 in G planum に等しくされ，そして E planum が F planum であると知られるようになるならば，A quad. $-$ $\sqrt{F \text{ plani} - G \text{ plano}}$ in A が $\dfrac{B \text{ solido}}{\sqrt{F \text{ plani } 4 - G \text{ plan. } 4}}$ $-$ F plano $\dfrac{1}{2}$ に等しくされるであろう。

［もし］$1QQ + 6Q - 880N$ が 1800 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 10 になる。［もし］$1C - 6Q + 7200N$ が 817600 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 70 になる。$70 - 6$ は 8 による平方である。［そして,］$1Q - 8N$ が 20 に等しくされるであろうし，$1N$ は 10 になる。

定理 3

もし A quad.-quad. $-$ G plano in A quad. $+$ B solido in A が Z plano-plano に等しくされ，そして E plani cubus $+$ G plano in E plani qud. $+$ Z plano 4 in E planum が B solido-solido $-$ Z plano-plano 4 in G planum に等しくされ，そして E planum が F planum であると知られるようになるならば，A quad. $+$ $\sqrt{F \text{ plani} + G \text{ plano}}$ in A が $\dfrac{B \text{ solido}}{\sqrt{F \text{ plani } 4 + G \text{ plan. } 4}}$ $-$ F plano $\dfrac{1}{2}$ に等しくされるであろう。

138 ［もし］$1QQ - 4Q + 800N$ が 1600 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 2 になる。［もし］$1C + 4Q + 6400N$ が 614400 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 60 になる。$60 + 4$ は 8 による平方である。［そして,］$1Q + 8N$ が 20 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 になる。

定理 4

もし A quad.-quad. $-$ G plano in A quad. $-$ B solido in A が Z plano-plano に等しくされ，そして E plani cubus $+$ G plano in E plani qud. $+$ Z plano 4 in E planum が B solido-solido $-$ Z plano-plano 4 in G planum に等しくされ，そして E planum が F planum であると知られるようになるならば，A quad. $-$ $\sqrt{F \text{ plani} + G \text{ plano}}$ in A が $\dfrac{B \text{ solido}}{\sqrt{F \text{ plani } 4 + G \text{ plan. } 4}}$ $-$ F plano $\dfrac{1}{2}$ に等しくされるであろう。

［もし］$1QQ - 4Q - 800N$ が 1600 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 10 になる。［もし］$1C + 4Q + 6400N$ が 614400 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 60 になる。$60 + 4$ は 8 による平方である。［そして,］$1Q - 8N$ が 20 に等しくされるであろうし，$1N$ は 10 になる。

定理 5

もし G planum in A quadr. $+$ B solido in A $-$ A quad.-quad. が Z plano-plano に等しくされ，そして E plani cubus $+$ G plano in E plani quadr. $-$ Z plano-plano 4 in E planum が B solido-solido $+$ Z plano-plano 4 in G planum に等しくされ，そして E planum が F planum であると知られるようになるならば，$\sqrt{F \text{ plani} + G \text{ plano}}$ in A $-$ A quad. が F plano $\dfrac{1}{2}$ $-$ $\dfrac{B \text{ solido}}{\sqrt{F \text{ plani } 4 + G \text{ plano } 4}}$ に等しくされるであろう。

［もし］$44Q + 720N - 1QQ$ が 1600 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 10 あるいは 2 になる。［もし］$1C + 44Q - 6400N$ が 800000 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 100 になる。$100 + 44$ は 12 による平方である。［そして,］$12N - 1Q$ が 20 に等しくされるであろうし，$1N$ は 10 あるいは 2 になる。

定理 6

もし G planum in A quadr. $-$ B solido in A $-$ A quad.-quad. が Z plano-plano に等しくされ，そして E plani cubus $+$ G plano in E plani quadr. $-$ Z plano-plano 4 in E planum が B solido-solido $+$ Z plano-plano 4 in G planum に等しくされ，そして E planum が F planum であると知られるようになるならば，$\sqrt{F\text{ plani} + G\text{ plano}}$ in A $-$ A quad. が F plano $\dfrac{1}{2}$ $+$ $\dfrac{B\text{ solido}}{\sqrt{F\text{ plani }4 + G\text{ plano }4}}$ に等しくされるであろう。

［もし］$114Q - 120N - 1QQ$ が 200 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 2 あるいは 10 になる。［もし］$1C + 114Q - 800N$ が 105600 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 30 になる。$30 + 114$ は 12 による平方になる。［そして,］$12N - 1Q$ が 20 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 あるいは 10 になる。

定理 7

もし B solido in A $-$ G planum in A quadr. $-$ A quad.-quad. が Z plano-plano に等しくされ，そして E plani cubus $-$ G plano in E plani quadr. $-$ Z plano-plano 4 in E planum が B solido-solido $-$ Z plano-plano 4 in G planum に等しくされ，そして E planum が F planum であると知られるようになるならば，$\sqrt{F\text{ plani} - G\text{ plano}}$ in A $-$ A quad. が F plano $\dfrac{1}{2}$ $-$ $\dfrac{B\text{ solido}}{\sqrt{F\text{ plani }4 - G\text{ plano }4}}$ に等しくされるであろう。

［もし］$1440N - 16Q - 1QQ$ が 2800 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 2 あるいは 10 になる。［もし］$1C - 16Q - 11200N$ が 1894400 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 160 になる。$160 - 16$ は 12 による平方になる。［そして,］$12N - 1Q$ が 20 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 あるいは 10 になる。

$B^3A + G^2A^2 - A^4 = Z^4$ については $\cdots\cdots$

$A^4 = -Z^4 + G^2A^2 + B^3A$ の両辺に $E^2A^2 + \dfrac{1}{4}E^4$ を加えると，左辺は $\left(A^2 + \dfrac{1}{2}E^2\right)^2$ になる。そこで，右辺を $\left(A\sqrt{E^2+G^2} + \dfrac{B^3}{\sqrt{4E^2+4G^2}}\right)^2$ とすると，

$$-Z^4 + G^2A^2 + B^3A + E^2A^2 + \frac{1}{4}E^4 = A^2E^2 + A^2G^2 + B^3A + \frac{B^6}{4E^2+4G^2}$$

となるから，$\left(E^2\right)^3 + G^2\left(E^2\right)^2 - 4Z^4\left(E^2\right) = B^6 + 4Z^4G^2$ がいえる。

また，$A^2 + \dfrac{1}{2}E^2 = A\sqrt{E^2+G^2} + \dfrac{B^3}{\sqrt{4E^2+4G^2}}$ から，

$$A\sqrt{F^2+G^2} - A^2 = \frac{1}{4}F^2 - \frac{B^3}{\sqrt{4F^2+4G^2}}$$

が得られる，ということになる。

残っていることは立方による作用が 4 分の 1 の量による浄化によって消え去るようなときにその他の転換をなし遂げることである。それゆえに，これらのことで十分であろうし，より以上であろう。

139 **第 7 章**

どのように立方の方程式を立方の根による平方［の方程式］に下げるか あるいは，二重の仮定について

同様に，二重の仮定 (hypostasis) といわれる変形の方法は［前の章で述べたものに］劣ることなく洗練されたものであり，辺によって作用されたいくつかの立方［の方程式］において無理数の根を引き出すために用いられる。そして，定められるであろう新しい探究法への関心は，前の章のはじめに忠告していた，それらの立方［の方程式］のそれぞれの性質が識別されることによって［引き起こされる］。

それゆえ，次の問題を付け加えることは有益であろう。

問題 1

辺によって肯定的に作用された立方［の方程式］を，同様に作用された，立方の根をもつ平方［の方程式］に還元すること。

A cubus $+$ B plano 3 in A が Z solido 2 に等しいと提示されるとしよう。意図されたことを行わなければならない。E quad. $+$ A in E が B plano に等しくされる［としよう］。

そしてそこから，B planum は，そのような種類の方程式の性質から，より小さい方が E であり，より大きい方からの差が A である，2 つの辺による長方形であると理解される。それゆえ，$\dfrac{B\text{ planum} - E\text{ quad.}}{E}$ は A であろう。

それゆえ，

$$\frac{B\text{ plano plano planum} - E\text{ quad. in }B\text{ plano planum }3 + E\text{ quad. quad. in }B\text{ planum }3 - E\text{ cubo cubo}}{E\text{ cubo}} +$$

$\dfrac{B\text{ pl. pl. }3 - B\text{ pl. in }E\text{ q. }3}{E}$ が Z solido 2 に等しくされるであろう。

そして，すべて［の項］に E cubum が掛けられ，技法に従って整えられると，E cubi quad. $+$ Z solido 2 in E cubum が B plani cubo に等しくされるであろう。

これは肯定的に作用された，立方の根をもつ平方の方程式である。それゆえ，要求されていた還元がなされた。

帰結

それゆえ，もし A cubus $+$ B plano 3 in A が Z solido 2 に等しくされ，$\sqrt{B\text{ plano plano plani} + Z\text{ solido solido}} - Z$ solido が D cubo に等しくされるならば，ゆえに $\dfrac{B\text{ planum} - D\text{ quad.}}{D}$ は求められている A になる。

もし $1C + 81N$ が 702 に等しくされるならば，$\sqrt{19683 + 123201}$ または $\sqrt{142884}$ または，最後に，378 から立方 351 が罰せられると 27 であるから，それゆえ，$\dfrac{27-9}{3}$ または 6 は求められている $1N$ である。

別の，第 2 の方法

［もし］E quad. $-$ A in E が B plano に等しくされる［ならば］。そしてそこから，B planum は，そのような種類の方程式の性質から，より大きい方が E であり，一方でより小さいものを超える超過分が A である，2 つの辺による長方形であると理解される。それゆえ，$\dfrac{E\text{ quad.} - B\text{ plano}}{E}$ が A に等しくされるであろう。それゆえ，提示されているものによって，整えられた技法によるすべて［の項］から，E cubi-quadratum $-$ Z solido 2 in E cubum が B plani cubo に等しくされ

るであろう。これは否定的に作用された，立方の根をもつ平方の方程式である。それゆえ，再び，要求されていた還元がなされた。

第 2 の帰結

それゆえ，もし A cubus $+$ B plano 3 in A が Z solido に等しくされ，$\sqrt{B \text{ plano plano plani} + Z \text{ sol. solido}} + Z$ solido が G cubo に等しくされるならば，ゆえに $\dfrac{G \text{ quad.} - B \text{ plano}}{G}$ が A に等しくされるであろう。

もし $1C + 81N$ が 702 に等しくされるならば，$378 + 351$ は辺 9 による立方である 729 であるから，それゆえ，$\dfrac{81 - 27}{9}$ または 6 は求められている $1N$ である。

上述の 2 つの帰結に由来する帰結

最後に，2 つの辺［根］があり，それらのより小さい方の一方は D であり，それらのより大きい方の他方は G であって，それらの差は求められている A である。

それゆえ，$\sqrt{C\sqrt{B \text{ plano palno plani} + Z \text{ solido solido}} + Z \text{ solido}} -$ 140
$\sqrt{C\sqrt{B \text{ plano palno plani} + Z \text{ solido solido}} - Z \text{ solido}}$ が求められていた A である。

もし $1C + 6N$ が 2 に等しくされるならば，$\sqrt{C}\ 4 - \sqrt{C}\ 2$ は求められている $1N$ である。

3 次方程式 $A^3 + 3B^2A = 2Z^3$ が提示されたとき $\cdots\cdots$

(1) $E^2 + AE = B^2$ とすると，$A = \dfrac{B^2 - E^2}{E}$ であるから，これを与 3 次方程式に代入して，整理すると，$\left(E^3\right)^2 + 2Z^3\left(E^3\right) = B^6$ が得られる。

この 2 次方程式の解を $E = D$ とすると，$D^3 = \sqrt{B^6 + Z^6} - Z^3$，$A = \dfrac{B^2 - D^2}{D}$ となる。

(2) $E^2 - AE = B^2$ とすると，$A = \dfrac{E^2 - B^2}{E}$ であるから，これを与 3 次方程式に代入して，整理すると，$\left(E^3\right)^2 - 2Z^3\left(E^3\right) = B^6$ が得られる。

この 2 次方程式の解を $E = G$ とすると，$G^3 = \sqrt{B^6 + Z^6} + Z^3$，$A = \dfrac{G^2 - B^2}{G}$ となる。

(3) すると，このとき，$A = \dfrac{B^2 - D^2}{D}$，$A = \dfrac{G^2 - B^2}{G}$ から，$A = G - D$ がいえる。

そして，$D = \sqrt[3]{\sqrt{B^6 + Z^6} - Z^3}$，$G = \sqrt[3]{\sqrt{B^6 + Z^6} + Z^3}$ であるから，

$$A = \sqrt[3]{\sqrt{B^6 + Z^6} + Z^3} - \sqrt[3]{\sqrt{B^6 + Z^6} - Z^3}$$

となる。

最後の例 $x^3 + 6x = 2$ では，$B^2 = 2$，$Z^3 = 1$ であるから，$D^3 = \sqrt{1^2 + 2^3} - 1 = 3 - 1 = 2$，$G^3 = \sqrt{1^2 + 2^3} + 1 = 1 + 3 = 4$ となり，$x = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ ということになる。

これは，(1) のように，$x = \dfrac{2 - \left(\sqrt[3]{2}\right)^2}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2^4}}{2} = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$ としてもよい。

ここに述べられているのは，ヴィエートによる，2 次の項を欠く 3 次方程式の「解の公式」に他ならない。

問題 2

辺によって否定的に作用された立方［の方程式］を，平面が拒否された，立方の根による平方［の方程式］に還元すること。

さらに，提示された方程式において，作用の補足的なものの 3 分の 1 による立方は比較の立体の平方の 4 分の 1 より劣らなければならない。

A cubus $-$ B plano 3 in A が Z solido に等しいと提示されるとしよう。意図されたことを行わなければならない。A in $E - E$ quad. が B plano に等しくされる［としよう］。

そしてそこから，B planum は，そのような種類の方程式の性質から，より大きいまたはより小さい方が E であり，一方，より小さい方とより大きい方の和が A である，2 つの辺による長方形であると理解される。それゆえ，$\dfrac{B \text{ planum} + E \text{ quad.}}{E}$ が A に等しくされるであろう。それゆえ，$\dfrac{B \text{ plano plano planum} + E \text{ q. in } B \text{ pl. planum } 3 + E \text{ q. quad. in } B \text{ planum } 3 + E \text{ cubo cubo}}{E \text{ cubo}}$ $+ \dfrac{- B \text{ plano planum } 3 - B \text{ plano in } E \text{ quad. } 3}{E}$ が Z solido 2 に等しくされるであろう。

そして，すべて［の項］に E cubum が掛けられ，技法に従って整えられると，Z solidum 2 in E cubum $-$ E cubi-quadrato が B plani-cubo に等しくされるであろう。

これは逆の向きに拒否された，立体の根をもつ平方の方程式である。それゆえ，要求されていた還元がなされた。

さらに，還元がなされたその方程式の特性から，Z solidi quadratum は B plani-cubo を超えなければならないことは明らかである。

帰結

それゆえ，もし A cubus $-$ B plano 3 in A が Z solido 2 に等しくされるならば，
$\sqrt{C.\ Z \text{ solidi} + \sqrt{Z \text{ solido solidi} - B \text{ plano plano plano}}} +$
$\sqrt{C.\ Z \text{ solidi} - \sqrt{Z \text{ solido solidi} - B \text{ plano plano plano}}}$ が求められている A である。

もし $1C - 81N$ が 756 に等しくされるならば，$378 + 351$ は，辺 9 による立方，729 であり，$378 - 351$ は，辺 3 による立方，27 であるから，それゆえ，$9 + 3$ すなわち 12 は求められている $1N$ である。

3 次方程式 $A^3 - 3B^2A = 2Z^3$ の解は

$$A = \sqrt[3]{Z^3 + \sqrt{Z^6 - B^6}} + \sqrt[3]{Z^3 - \sqrt{Z^6 - B^6}}$$

になる，ということ。

ここでの例 $x^3 - 81x = 756$ では，$B^2 = 27$，$Z^3 = 378$ であるから，

$$x = \sqrt[3]{378 + \sqrt{378^2 - 27^3}} + \sqrt[3]{378 - \sqrt{378^2 - 27^3}} = 9 + 3 = 12$$

となる。

第 8 章
下位階級の補足的なものが指示されたものであるような，方程式の標準的な変形について

記号計算 (logistica) も同様に，方程式の補足的なものあるいは比較の同次のものが指示されるものであるべきであるように，方程式を準備するために［方程式を］縮小されたもの (impendium) に変える。このことは変形されることについての標準的な教義から自由であることは明らかである。単位の補足的なものが定められるとすると，それゆえ，単位およびどのようなものであれ階級によって作用されたベキが，(もし根が数でありさえすれば) 純粋な［ベキ］とまったく同じように解

かれるので，縮小されたものあるいはそれから［生じるもの］の使用は明白である。というのも問題は混乱させられ (しかし，それはその操作によって安全になる)，そうでなければその比較の，そしてその単位が比率ではないからである。

そして，もし見出された根が数ではないならば，求められている根そのものが数でないことは直ちに立証される。

［もし］$1C+1N$ が 10 に等しくされる［ならば］，［10 に］最も近い立方は 8 であり，その根は 2 であり，単位が掛けられ，8 が加えられたそれは 10 になるから，それゆえ，求められていた根は 2 である。

同様に，［もし］$1C-1N$ が 24 に等しくされる［ならば］，［24 より］小さくて最も近い立方は 8 であり，その根は 2 であり，単位が加えられた［それ］は 3 であり，それおよび単位によってつくられた立体は 3 の立方から罰せられるとき 24 が残されるから，それゆえ，求められていた根は 3 である。

さらに，$1C+1N$ が 9 に等しいと提示されるとしよう。最も近い立方は 8 であり，その根は 2 であり，単位が掛けられ，8 が加えられたそれは 10 になり，まだ 9 ではないから，それゆえ，$1N$ 141
は無理数の根である。

同様に，［もし］$1C-1N$ が 25 に等しくされる［ならば］，小さくて最も近い立方は 8 であり，その根は 2 で，単位が加えられた［それ］は 3 であり，それおよび単位によってつくられた立体は 3 による立方から罰せられるとき 24 が残され，まだ 25 ではないから，それゆえ，$1N$ は無理数である。

さらに，このような種類の変形を確立するには提示された方程式の補足的なものによって要求される補足的なものを同時につくり出す必要がある。そして，確かに，もし提示された方程式の根が同様に同じ生まれであるならば，提示された方程式の補足的なものが要求された補足的なものに対して，求められていた根が新しく決定されるであろう根に対することが許されるであろう。

しかし，もし根の階級における補足的なものが生まれることを共有するならば，提示された方程式の補足的なものが要求された補足的なものに対して，求められていた根の同等に高い階級が新しく決定されるであろう根の同等に高い階級に対することが許されるであろう。

そして，許された比率による解決によって，求められていた根の値が新しい文字によって表されるであろうし，その提示された方程式は調整されるであろうし，そして新しい［形式に］整えられるであろう。

このことは 1 つまたは 2 つの例によって明らかになるはずである。

A cubus $+$ B in A quad. が Z solido に等しいと提示されるとしよう。さらに，方程式を，確かに，平方による，そして肯定的であるが補足的なものが B ではなく X になるような作用が残るように変形することは好ましいことである。B が X に対するように，A が E に対するとすると，ゆえに $\dfrac{B\text{ in }E}{X}$ が A であろう。

それゆえ，提示されるそれに従うと，$\dfrac{B\text{ cubus in }E\text{ cubum}}{X\text{ cubo}}+\dfrac{B\text{ cubo in }E\text{ quad.}}{X\text{ quad.}}$ が Z solido に等しくされるであろう。そして，すべて［の項］に X cubum が掛けられ，B cubum で割られると，E cubus $+$ X in E quad. が $\dfrac{X\text{ cubo in }Z\text{ solidum}}{B\text{ cubo}}$ に等しくされるであろう。それゆえ，要求されていたことがなされた。

$1C+20Q$ が 96000 に等しいと提示されるとしよう。［すると,］$1C+1Q$ が 12 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 になる。そしてそこから，最初に求められていた根は 40 になる。

別の方法

A cubus $-$ B quad. in A が Z solido に等しいと提示されるとしよう。さらに，方程式を，辺による，そして否定的であるが補足的なものが B quadratum ではなく X quadratum になるように変形することは好ましいことである。B quad. が X quad. に対するように，A quad. が E quad. に対する，結果として，B が X に対するように，A が E に対するとすると，ゆえに $\dfrac{B \text{ in } E}{X}$ が A であろう。

それゆえ，提示されるそれに従うと，$\dfrac{B \text{ cubus in } E \text{ cubum}}{X \text{ cubo}} - \dfrac{B \text{ cubo in } E}{X}$ が Z solido に等しくされるであろう。

そして，すべて［の項］に X cubum が掛けられ，B cubum で割られると，E cubus $-$ X quad. in E が $\dfrac{X \text{ cubo in } Z \text{ solidum}}{B \text{ cubo}}$ に等しくされるであろう。それゆえ，要求されていたことがなされた。

$1C-144N$ が 10368 に等しいと提示されるとしよう。［すると,］$1C-1N$ が 6 に等しくされるであろうし，$1N$ は 2 になる。そしてそこから，最初に求められていた根は 24 になる。

そして実際，操作は比較の同次のものによる指示においても異なることはなく，提示されている方程式の作用されたベキの大きさが指示された同等に高い同次のものの大きさに対するように，求められていた根のベキが新しく決定されるであろう根のベキに対することは疑いもなく許される。そして，許された比例による解法によって，新しい記号によって求められていた根の値が示され，提示されていた方程式が調整されるであろうし，そして新しい［形式］に整えられるであろう。例えば。

A cubus $+$ B plano in A が Z cubo に等しいと提示されるとしよう。さらに，辺および補足的な平面によって肯定的に作用されたベキが D cubo と比較されるように，Z が D に対するように A が E に対する［とする］ことは許されるであろう。ゆえに，$\dfrac{Z \text{ in } E}{D}$ が A であろう。

それゆえ，$\dfrac{Z \text{ cubus in } E \text{ cubum}}{D \text{ cubo}} + \dfrac{B \text{ plano in } Z \text{ in } E}{D}$ が Z cubo に等しくされるであろう。そして，すべて［の項］に D cubum が掛けられ，Z cubum で割られると，E cubus $+$ $\dfrac{B \text{ plano in } D \text{ quad. in } E}{Z \text{ quad.}}$ が D cubo に等しくされるであろう。それゆえ，要求されていたことがなされた。

142 $1C+860N$ が 1728 に等しいと提示されるとしよう。$1C+215N$ が 216 に等しくされるであろうし，$1N$ は 1 になる。そしてそこから，最初に求められていた根は 2 である。

第 9 章
いくつかの，立方の方程式の
平方のまたは単純な［方程式］への変則的な還元

それゆえ，方程式を準備することになるであろう普通の方法が存在する。さらに，不規則［な場合］について，変則的なそれらは探求する際の職人の力や技巧と同様に制限されないから，規則が確立されることはない。しかし，その力や技巧を高めるために，いくつかの単独の方程式を構成するそして還元する —— それに対してかなり顕著な力強さあるいは優雅さを生ずる —— 定理が示されることは有益なことである。いま，そのような種類［の定理］が従う。

定理 1

もし A cubus $-$ B quad. 2 in A が B cubo に等しくされるならば，A quad. $-$ B in A が B quadrato に等しくされるであろう。

なぜならば。提示されているものから，対照［移項］によって，A cubum が B cubo $+$ B quad. 2 in A に等しく，そして，両方の辺に B cubum が加えられると，A cubum $+$ B cubo が B cubo 2 $+$ B quad. 2 in A に等しいことは明らかである。すべて［の項］が $A + B$ で割られると，前者［左辺］は A quad. $-$ B in A $+$ B quad. に，後者［右辺］は B quad. 2 になる。結果として，両方［の辺］から B quadrato が捨てられると，A quad. $-$ B in A が B quadraro に等しくされるであろう。

もし $1C - 18N$ が 27 に等しくされるならば，それゆえ $1Q - 3N$ が 9 に等しくされるであろう。

定理 2

もし B quad. 2 in A $-$ A cubo が B cubo に等しくされるならば，A quad. $+$ B in A が B quadrato に等しくされるであろう。

なぜならば。提示されているものから，対照［移項］によって，A cubum が B quad. 2 in A $-$ B cubo に等しく，そして，両方［の辺］から B cubum が取り去られると，A cubum $-$ B cubo が B quad. 2 in A $-$ B cubo 2 に等しいことは明らかである。すべて［の項］が $A - B$ で割られると，前者は A quad. $+$ B in A $+$ B quad. に，後者は B quad. 2 になる。結果として，両方［の辺］から B quadrato が捨てられると，A quad. $+$ B in A が B quadrato に等しくされるであろう。

もし $18N - 1C$ が 27 に等しくされるならば，それゆえ $1Q + 3N$ が 9 に等しくされるであろう。

定理 3

もし A cubus $-$ B quad. 3 in A が B cubo 2 に等しくされるならば，B の 2 倍は求められている A そのものである。

なぜならば。B の 2 倍が求められている A そのものであるから，ゆえに提示されているものから，B cubus 8 $-$ B quad. in B 6 が B cubo 2 に等しくされるであろう。確かに，それらは同様である。

［もし］$1C - 12N$ が 16 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 4 になる。

定理 4

もし B quad. 3 in A $-$ A cubo が B cubo 2 に等しくされるならば，B は求められている A そのものである。

なぜならば。B が求められている A そのものであるから，ゆえに提示されているものから，B quad. in B 3 $-$ B cubo が B cubo 2 に等しくされるであろう。確かに，それらは同様である。

［もし］$6N - 1C$ が $\sqrt{32}$ に等しくされる［ならば］，$1N$ は $\sqrt{2}$ になる。

定理 5

もし A cubus $-$ B in A quad. $+$ D plano in A が B in D planum に等しくされるならば，B そのものが求められている A である。

なぜならば。B が求められている A であるから，ゆえに提示されているものから，B cubus $-$ 143
B in B quad. $+$ D plano in B が B in D planum に等しくされるであろう。確かに，それらは

明らかに同様である。

［もし］$1C-4Q+5N$ が，4 に 5 を掛けてつくられた，20 に等しくされる［ならば］，ゆえに $1N$ は 4 である。

定理 6

もし A cubus $+$ B in A quad. $-$ D quadr. in A が B in D quadratum に等しくされるならば，D そのものが求められている A である。

なぜならば。D そのものが求められている A であるから，ゆえに提示されているものから，D cubus $+$ B in D quad. $-$ D quadr. in D が B in D quadratum に等しくされるであろう。確かに，それらは明らかに同様である。

［もし］$1C+5Q-4N$ が，5 に 4 を掛けてつくられた，20 に等しくされる［ならば］，ゆえに $1N$ は $\sqrt{4}$ あるいは 2 になる。

定理 7

もし B in A quadr. $+$ D quad. in A $-$ A cubo が D quadrato in B に等しくされるならば，B あるいは D そのものが求められている A である。

なぜならば。B そのものが求められている A であるから，ゆえに提示されているものから，B cubus $+$ D quad. in B $-$ B cubo が B in D quadratum に等しくされるであろう。確かに，それらは明らかに同様である。

さらに，D そのものが求められている A であるから，ゆえに提示されているものから，B in D quad. $+$ D cubo $-$ D cubo が D quadrato in B に等しくされるであろう。確かに，それらは明らかに同様である。

［もし］$6Q+4N-1C$ が 24 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 6 あるいは 2 になる。

定理 8

もし D in A quad. $+$ B in D in A $-$ A cubo が B cubo に等しくされるならば，$\overline{B+D}$ in A $-$ A quad. が B quadrato に等しくされるであろう。

なぜならば。提示されているものから，対照［移項］により明らかに，B cubum $+$ A cubo が D in A qaud. $+$ D in B in A に等しいことになる。両方の辺が $A+B$ で割られると，ゆえに A quadr. $-$ B in A $+$ B quad. が D in A に等しくされるであろう。

そして，対照［移項］により $\overline{D+B}$ in A $-$ A quad. が B quadrato に等しくされるであろう。

もし $10Q+20N-1C$ が 8 に等しくされるならば，10 が掛けられた，8 による立方の辺は 20 になるから，それゆえ，$12N-1Q$ が 4 に等しくされるであろうし，$1N$ は $6-\sqrt{32}$ あるいは $6+\sqrt{32}$ になる。

定理 9

もし A cubus $-$ D in A quadr. $+$ D in B in A が B cubo に等しくされるならば，$\overline{D-B}$ in A $-$ A quad. が B quadrato に等しくされるであろう。

なぜならば。提示されているものから，対照［移項］により明らかに，A が B より大きいと理解されるとき，A cubum $-$ B cubo が D in A quadr. $-$ D in A in B に等しいことになる。方程式の両方の辺が $A-B$ で割られると，それゆえ A quad. $+$ B in A $+$ B quad. が D in A に等しくされるであろう。

そして，対照［移項］により $\overline{D-B}$ in A − A quad. が B quadrato に等しくされるであろう。しかし，B が A より大きいと理解されるとき，B cubus − A cubo が D in A in B − D in A quad. に等しくされるであろう。方程式の両方の辺が B − A で割られると，前にように，それゆえ B quad. + A quadr. + B in A が D in A に等しくされるであろう。

もし $1C - 10Q + 20N$ が 8 に等しくされるならば，10 が掛けられた $\sqrt{C}.\ 8$ は 20 になるから，それゆえ，$8N - 1Q$ が 4 に等しくされるであろうし，$1N$ は $4 - \sqrt{12}$ あるいは $4 + \sqrt{12}$ になる。

定理 10

もし A cubus − B pl. 3 in A が $\sqrt{B}$ plano plano plani 2 に等しくされるならば，$\dfrac{\sqrt{B}\text{ plani }3 + \sqrt{B}\text{ plani}}{\sqrt{2}}$ が求められている A になる。

なぜならば。$\dfrac{\sqrt{B}\text{ plani }3 + \sqrt{B}\text{ plani}}{\sqrt{2}}$ が求められている A そのものであるから，それゆえ， 144
提示されているものから，

$$\frac{\sqrt{B}\text{ plano plano plani }27 + \sqrt{B}\text{ plano plano plani }81 + \sqrt{B}\text{ plano plano plani }27 + \sqrt{B}\text{ plano plano plani}}{\sqrt{8}}$$

$+ \dfrac{\sqrt{B}\text{ plano plano plani }27 - \sqrt{B}\text{ plano plano plani }9}{\sqrt{2}}$ が $\sqrt{B}$ plano plano plani 2 に等しくされる。確かに，方程式の最初の辺において等しいものから等しいものが取り除かれることによって，それらは同様である。

［もし］$1C - 6N$ が 4 に等しくされる［ならば］，それゆえ，$1N$ は $\sqrt{3} + 1$ になる。

定理 11

もし B plan. 3 in A − A cubo が $\sqrt{B}$ plano plano plani 2 に等しくされるならば，$\dfrac{\sqrt{B}\text{ plani }3 - \sqrt{B}\text{ pl.}}{\sqrt{2}}$ が求められている A になる。

前述［の定理］の証明の段階を追跡することによって明らかになように。

［もし］$6N - 1C$ が 4 に等しくされる［ならば］，それゆえ，$1N$ は $\sqrt{3} - 1$ になり，これはより小さい方で，もう一方は 2 である。

第 10 章
類似の還元の連続

定理 1

もし A cubus + B in A quadr. 3 + D plano in A が B cubo 2 − D plano in B に等しくされるならば，A quad. + B in A 2 が B quad. 2 − D plano に等しくされるであろう。

なぜならば。A quadr. + B in A 2 が B quadr. 2 − D plano に等しくされるから，それゆえ，すべて［の項］に A が掛けられると，A cubus + B in A quad. 2 が B quad. in A 2 − D plano in A に等しくされるであろう。そして，同じものに B が掛けられると，B in A quad. + B quadr. in A 2 が B cubo 2 − D plano in B に等しくされるであろう。等しい積が等しいものと結合されると，A cubus + B in A quad. 3 + B quad. in A 2 が B quad. in A 2 − D plano in A + B cubo 2 − D plano in B に等しくされるであろう。

そして，両方［の辺］から B quad. in A 2 の作用が消し去られ，方程式を整えるために対照［移項］によって D plani in A の作用が移されると，A cubus + B in A quadr. 3 + D plano in A が B cubo 2 − D plano in B に等しくされるであろう。確かに，それらは同様である。

［もし］$1C+30Q+44N$ が 1560 に等しくされる［ならば］，それゆえ，$1Q+20N$ が 156 に等しくされるであろうし，$1N$ は 6 になる。

定理 2

もし A cubus $+$ B in A quad. 3 $-$ D plano in A が B cubo 2 $+$ D plano in B に等しくされるならば，A quad. $+$ B in A 2 が B quad. 2 $+$ D plano に等しくされるであろう。

なぜならば。A quadr. $+$ B in A 2 が B quadr. 2 $+$ D plano に等しくされるから，それゆえ，すべて［の項］に A が掛けられると，A cubus $+$ B in A quad. 2 が B quad. in A 2 $+$ D plano in A に等しくされるであろう。

そして，同じものに B が掛けられると，B in A quad. $+$ B quad. in A 2 が B cubo 2 $+$ D plano in B に等しくされるであろう。等しい積が等しいものと結合されると，A cubus $+$ B in A quadr. 3 $+$ B quadr. in A 2 が B quad. in A 2 $+$ D plano in A $+$ B cubo 2 $+$ D plano in B に等しくされるであろう。

そして，両方［の辺］から B quadrati in A 2 の作用が消し去られ，方程式を整えるために対照［移項］によって D plani in A の作用が移されると，A cubus $+$ B in A quadr. 3 $-$ D plano in A が B cubo 2 $+$ D plano in B に等しくされるであろう。確かに，それらは同様である。

［もし］$1C+30Q-24N$ が 2240 に等しくされる［ならば］，それゆえ，$1Q+20N$ が 224 に等しくされるであろうし，$1N$ は 8 になる。

定理 3

もし A cubus $-$ B in A quad. 3 $+$ D plano in A が D plano in B $-$ B cubo 2 に等しくされ，そして，B quadr. 3 が D plano より大きくなるならば，B in A 2 $-$ A quadr. が D plano $-$ B quad. 2 に等しくされるであろう。

なぜならば。B in A 2 $-$ A quad. が D plano $-$ B quad. 2 に等しくされるから，すべて［の項］に $B-A$ が掛けられると，B quad. in A 2 $-$ B in A quad. $-$ B in A quad. 2 $+$ A cubo が B quad. in A 2 $-$ D plano in A $+$ D plano in B $-$ B cubo 2 に等しくされるであろう。

そして，方程式が整えられると，A cubus $-$ B in A quad. 3 $+$ D plano in A が D plano in B $-$ B cubo 2 に等しくされるであろう。確かに，それらは同様である。

145 ［もし］$1C-30Q+236N$ が 360 に等しくされる［ならば］，それゆえ，$20N-1Q$ が 36 に等しくされ，$1N$ は 2 あるいは 18 になる。

同じことが主張されると，A そのものはまた B になり，B の平方の 3 倍は D plano にまさるかあるいはそれより劣るかである。なぜならば，A cubus $-$ B in A quadr. 3 $+$ D plano in A が D plano in B $-$ B cubo 2 に等しいと提示され，さらに，A そのものがまた B になるから，それゆえ，B cubus $-$ B cubo 3 $+$ D plano in B が D plano in B $-$ B cubo 2 に等しくされるであろうからである。確かに，それらは同様である。

［もし］$1C-30Q+236N$ が 360 に等しくされる［ならば］，$1N$ が 2 あるいは 18 であることは立証されている。同じものは 10 でもある。［もし］$1C-30Q+264N$ が 640 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 4 あるいは 16 になる。なぜなら，$20N-1Q$ が 64 に等しくされると，$1N$ は 4 あるいは 16 になるからである。

定理 4

もし B in A quadr. $3 + D$ plano in $A - A$ cubo が B cubo $2 + D$ plano in B に等しくされるならば，A quad. $- B$ in A 2 が B quad. $2 + D$ plano に等しくされるであろう。

なぜならば。A quad. $- B$ in A 2 が B quad. $2 + D$ plano に等しくされるから，すべて［の項］に $B - A$ が掛けられると，B in A quad. $- B$ quadr. in A $2 - A$ cubo $+ B$ in A quad. 2 が B cubo $2 + B$ in D planum $- B$ quad. in A $2 - D$ plano in A に等しくされるであろう。

そして，方程式が整えられると，B in A quad. $3 + D$ plano in $A - A$ cubo が B cubo $2 + D$ plano in B に等しくされるであろう。確かに，それらは同様である。

［もし］$30Q + 24N - 1C$ が 2240 に等しくされる［ならば］，それゆえ，$1Q - 20N$ が 224 に等しくされ，$1N$ は 28 になる。

同じことが主張されると，A はまた B になる。なぜならば。B in A quad. $3 + D$ plano in A $- A$ cubo が B cubo $2 + D$ plano in B に等しいと提示され，さらに，A そのものがまた B になるから，それゆえ，B cubus $3 + D$ plano in $B - B$ cubo が B cubo $2 + D$ plano in B に等しくされるであろう。確かに，それらは同様である。

［もし］$30Q + 24N - 1C$ が 2240 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 10 になる。

定理 5

もし B in A quadr. $3 - D$ plano in $A - A$ cubo が B cubo $2 - D$ plano in B に等しくされるならば，A quad. $- B$ in A 2 が B quad. $2 - D$ plano に等しくされるであろう。

なぜならば。A quad. $- B$ in A 2 が B quad. $2 - D$ plano に等しくされるから，すべて［の項］に $B - A$ が掛けられると，B in A quad. $- B$ quadr. in A $2 - A$ cubo $+ B$ in A quad. 2 が B cubo $2 - D$ plano in $B - B$ quad. in A $2 + D$ plano in A に等しくされるであろう。

そして，方程式が整えられると，B in A quad. $3 - D$ plano in $A - A$ cubo が B cubo $2 - D$ plano in B に等しくされるであろう。確かに，それらは同様である。

［もし］$30Q - 156N - 1C$ が 440 に等しくされる［ならば］，それゆえ，$1Q - 20N$ が 44 に等しくされ，$1N$ は 22 になる。

同じことが主張されると，A はまた B になる。

なぜならば。B in A quadr. $3 - D$ plano in $A - A$ cubo が B cubo $2 - D$ plano in B に等しいと提示され，さらに，A そのものがまた B になるから，それゆえ，B cubus $3 - D$ plano in B $- B$ cubo が B cubo $2 - D$ plano in B に等しくされるであろう。確かに，それらは同様である。

［もし］$30Q - 156N - 1C$ が 440 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 10 になる。

定理 6

平方の平方［の方程式］に関係するもの

もし A quad.-quad. $- X$ in A cubum $2 + X$ cubo in A 4 が X quad. quad. 2 に等しくされるならば，X quad. in A quadr. $2 - A$ quadr.-quadr. が X quadr. quad. $4 - X$ cubo 2 in $\sqrt{X}$ quad. 3 に等しくされるであろう。

なぜならば。X quad. in A quad. $2 - A$ quad.-quad. が X quad.-quad. $4 - X$ cubo 2 in $\sqrt{X}$ quad. 3 に等しくされるから，ゆえに，対照［移項］および共通の X cubum 2 による除法によって，$\dfrac{X \text{ quad. quad. } 4 + A \text{ quad. quadr.} - X \text{ quadr. in } A \text{ quadr. } 2}{X \text{ cubo } 2}$ が $\sqrt{X}$ quad. 3 に等し

くされるであろう。

そして，それぞれ［の辺］が平方され，X cubo-cubum 4 が掛けられ，適切な転換が適用されると，X cubo-cubus in A quad. 16 + X quadr. in A cubo-cubum 4 − A quad.-quad. quad.-quad. − X quad.-quad. in A quad.-quad. 12 が X quad.-quad.-quad.-quad. 4 に等しくされるであろう。確かに，それらは同様である。確かに，最初の方程式に従うと，X cubus in A 4 − X in A
146 cubum 2 が X quad.-quadr. 2 − A quad. quad. に等しくされる。この方程式の両方の辺が平方され，それぞれ［の辺］が適切に整えられると，提示された［方程式からつくられる］平方の立方の立方［の方程式］と同じ方程式が生じる。

それゆえ，A quadratum は X quadratum 足すまたは引く残っているあるいは拒否された 2 項式 $\sqrt{}X$ quad.-quad. 12 − X quad. 3 の辺になる。

X を 1，A を $1N$ としよう。［もし］$1QQ - 2C + 4N$ が 2 に等しくされる［ならば］，それゆえ，$2Q - 1QQ$ が $4 - \sqrt{12}$ に等しくされるであろうし，$1Q$ は 1 足すまたは引く拒否された 2 項式 $\sqrt{12 - 3}$ の辺になる。

> 4 次方程式 $A^4 - 2XA^3 + 4X^3A = 2X^4$ が与えられると，複 2 次方程式 $2X^2A^2 - A^4 = 4X^4 - 2X^3\sqrt{3X^2}$ が得られる，ということ。
> この複 2 次方程式から，$A^2 = X^2 \pm X\sqrt{\sqrt{12X^4} - 3X^2}$ となる。
> ［はずだが，上では X が抜けているような ……］
> $x^4 - 2x^2 + 4x = 2$ が与えられると，$X = 1$ ということだから，$2x^2 - x^4 = 4 - 2\sqrt{3}$ が得られる。
> これから，$x^2 = 1 \pm \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$ となる。

第 11 章
さまざまに作用された，いくつかの個々の方程式に関係する性質の列挙

定理 1

もし A quad. + B in A が B quadrato に等しくされるならば，B の 2 倍は，3 つの比例する切片に切り分けられる，長さである。それらの最初の，そしてより大きいものは B であり，第 2 のものは A である。それゆえ，この操作に関して，B は中項および［より小さい］外項［の間］で選ばれた割合に 1 回だけ切り分けられるといわれる。

> $A^2 + BA = B^2$ より，$A^2 = B^2 - BA = B(B - A)$ となるから，B，A，$B - A$ は比例する 3 つのものになり，$B + A + (B - A) = 2B$ である。
> そして，後段は $A + (B - A) = B$ であることから，B が A と $B - A$ とに分けられる，ということか。
> 次の「定理 2」では，B，A，$\dfrac{A^2}{B}$，$\dfrac{A^3}{B^2}$ は 4 つの比例するものであり，与えられた条件から，$B + A + \dfrac{A^2}{B} + \dfrac{A^3}{B^2} = 2B$ となる。
> そして，B が A，$\dfrac{A^2}{B}$，$\dfrac{A^3}{B^2}$ の 3 つの切片に分けられる。

定理 2

もし A cubus + B in A quad. + B quad. in A が B cubo に等しくされるならば，B の 2 倍

は，4 つの連続的に比例する切片に切り分けられる，長さである。それらの最初の，そしてより大きいものは B であり，第 2 のものは A である。それゆえ，この操作に関して，B は中項および［より小さい］外項［の間］で二重の割合に切り分けられるといわれる。

定理 3

もし A quad.-quad. + B in A cubum + B quadr. in A quadr. + B cubo in A が B quad.-quadrato に等しくされるならば，B の 2 倍は，5 つの連続的に比例する切片に切り分けられる，長さである。それらの最初の，そしてより大きいものは B であり，第 2 のものは A である。それゆえ，この操作に関して，B は中項および［より小さい］外項［の間］で三重の割合に切り分けられるといわれる。

定理 4

もし A quad.-cubus + B in A quad.-quad. + B quadr. in A cubum + B cubo in A quad. + B quad.-quad. が B quadrato-cubo に等しくされるならば，B の 2 倍は，6 つの連続的に比例する切片に切り分けられる，長さである。それらの最初の，そしてより大きいものは B であり，第 2 のものは A である。それゆえ，この操作に関して，B は中項および［より小さい］外項［の間］で四重の割合に切り分けられるといわれる。

定理 5

もし A cubo-cubus + B in A quadr.-cubum + B quadr. in A quadr.-quadr. + B cubo in A cubum + B quadr.-quadr. in A quadr. + B quad. cubo in A が B cubo-cubo に等しくされるならば，B の 2 倍は，7 つの連続的に比例する切片に切り分けられる，長さである。それらの最初の，そしてより大きいものは B であり，第 2 のものは A である。それゆえ，この操作に関して，B は中項および［より小さい］外項［の間］で五重の割合に切り分けられるといわれる。

第 12 章
同じことの別の列挙

定理 1

もし A quad. + B in A が B in Z に等しくされるならば，B は 3 つの比例する系列における外項の間の最初の［そして］より小さいものであり，一方，残りの 2 つのものの和が Z で，A が第 2 のものになる。

定理 2 147

もし A cubus + B in A quad. + B quad. in A が B quad. in Z に等しくされるならば，B は 4 つの連続的に比例する系列における最初のものであり，一方，残りの 3 つのものの和が Z で，A が第 2 のものになる。

$A^3+BA^2+B^2A=B^2Z$ であるから，$\dfrac{A^3}{B^2}+\dfrac{A^2}{B}+A=Z$ となり，B，A，$\dfrac{A^2}{B}$，$\dfrac{A^3}{B^2}$ は連続的に比例する，ということ。

定理 3

もし A quad. quad. + B in A cubum + B quad. in A qaud. + B cubo in A が B cubo. in Z に等しくされるならば，B は 5 つの連続的に比例する系列における最初のものであり，一方，残りの 4 つのものの和が Z で，A が第 2 のものになる。

定理 4

もし A quad.-cubus + B in A quad.-quad. + B quad. in A cubum + B cubo in A quad. + B quad. quad. が B quad. quad. in Z に等しくされるならば，B は 6 つの連続的に比例する系列における最初のものであり，一方，残りの 5 つのものの和が Z で，A が第 2 のものになる。

定理 5

もし A cubo-cubus + B in A quad.-cubum + B quad. in A quad. quad. + B cubo in A cubum + B quad. quad. in A quad. + B quad.-cubo in A が B quadrato-cubo in Z に等しくされるならば，B は 7 つの連続的に比例する系列における最初のものであり，一方，残りの 6 つのものの和が Z で，A が第 2 のものになる。

第 13 章
同じことの第 3 の列挙

定理 1

もし B in $A - A$ quad. が B in Z に等しくされるならば，B は 3 つの比例する系列における最初の［そして］より大きいものであり，一方，残りの 2 つのものの差が Z で，A が第 2 のものになる。さらに，［A の値は］2 つになることができるが，なぜならそれはまた最初のものおよび第 2 のものの間の差だからである。

しかし，もし A quad. $-$ B in A が B in Z に等しくされるならば，B は外項の間の最初の［または］より小さいものであり，一方，残りの 2 つのものの差が Z で，A は［上と］同様に第 2 のものになる。

比例するものを 4，6，9 としよう。［もし］$9N - 1Q$ が 18 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 6，さらにそのうえ 3 になる。しかし，もし $1Q - 4N$ が 12 に等しくされるならば，$1N$ は 6 になる。

> $BA - A^2 = BZ$ ならば，$A^2 = BA - BZ = B(A - Z)$ であるから，$B : A = A : (A - Z)$ がいえる。
>
> また，$A = \dfrac{B \pm \sqrt{B^2 - 4BZ}}{2}$ となるから，$B - 4Z > 0$ ならば解 A は 2 つあることになり，それらについて $A_1 + A_2 = B$ となる。
>
> $9x - x^2 = 18$［$B = 9$，$Z = 2$］が与えられたとき，この 2 次方程式の解は $x = 6$，3 であるから，$6 + 3 = 9$ であり，$9 : 6 = 6 : (6 - 2)$ あるいは $9 : 3 = 3 : (3 - 2)$ となる。
> そして，解 $x = 6$ は 最初 $-$ 第 $2 = 9 - 3$ で，解 $x = 3$ は 最初 $-$ 第 $2 = 9 - 6$ となっている。

定理 2

もし A cubus $-$ B in A quad. + B quad. in A が B quad. in Z に等しくされるならば，B は 4 つの連続的に比例する系列における最初のものであり，一方，残りの 3 つのものの 1 つおきにとられた差が Z で，A は第 2 のものになる。

連続的に比例するものを 1，2，4，8 としよう。［もし］$1C - 8Q + 64N$ が 192 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 4 になる。あるいは，［もし］$1C - 1Q + 1N$ が 6 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 2 になる。

定理 3

もし B cubus in $A - B$ quad. in A quad. + B in A cubum $-$ A quad. quad. が B cubo in

Z に等しくされるならば，B は 5 つの連続的に比例する系列における最初の［そして］より大きいものであり，一方，残りの 4 つのものの 1 つおきにとられた差が Z で，A は，2 つ存在することができる，第 2 の［そして］中項の間のより大きいものである。

しかし，もし A quad. quad. $-$ B in A cubum $+$ B quad. in A quad. $-$ B cubo in A が B cubo in Z に等しくされるならば，B は第 1 の［そして］外項の間のより小さいものであり，一方，残りの 4 つのものの 1 つおきにとられた差が Z で，A は第 2 の［そして］中項の間のより小さいものである。

連続的に比例するものを 1，2，4，8，16 としよう。［もし］$4096N - 256Q + 16C - 1QQ$ が 20480 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 8 になる。あるいは，［もし］$1QQ - 1C + 1Q - 1N$ が 10 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 2 になる。

定理 4 148

もし A quad.-cubus $-$ B in A quad.-quad. $+$ B quad. in A cubum $-$ B cubo in A quad. $+$ B quad. quad. in A が B quad. quad. in Z に等しくされるならば，B は 6 つの連続的に比例する系列における最初の［そして］より大きいものであり，一方，残りの 5 つのものの 1 つおきにとられた差が Z で，A は第 2 のものになる。

連続的に比例するものを 1，2，4，8，16，32 としよう。［もし］$1QC - 32QQ + 1024C - 32768Q + 1048576N$ が 11534336 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 16 になる。あるいは，［もし］$1QC - 1QQ + 1C - 1Q + 1N$ が 22 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 2 になる。

そして，これらそれぞれ［の定理］は探究法による証明をもつ。しかし，いま続けられる列挙は，提出されるであろうそれら自身の解析的な吟味のために，定理を制約を受けないように残しておく。さらに，それは多重の根について驚くほどに解くことができる方程式に関係する。

第 14 章
第 4 の列挙

定理 1

もし $\overline{B+D}$ in A $-$ A quad. が B in D に等しくされるならば，A はそれら 2 つ —— B あるいは D —— のどのようなものについても解くことができる。

［もし］$3N - 1Q$ が 2 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 1 あるいは 2 になる。

定理 2

もし A cubus $+$ $\overline{-B-D-G}$ in A quad. $+$ $\overline{B \text{ in } D + B \text{ in } G + D \text{ in } G}$ in A が B in D in G に等しくされるならば，A はそれら 3 つ —— B，D あるいは G —— のどのようなものについても解くことができる。

［もし］$1C - 6Q + 11N$ が 6 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 1，2 あるいは 3 になる。

$A^3 - (B+D+G)A^2 + (BD+BG+DG)A - BDG = (A-B)(A-D)(A-G)$ ということ。以下も同様。

定理 3

もし $\overline{B \text{ in } D \text{ in } G + B \text{ in } D \text{ in } H + B \text{ in } G \text{ in } H + D \text{ in } G \text{ in } H}$ in A $+$ $\overline{-B \text{ in } D - B \text{ in } G - B \text{ in } H - D \text{ in } G - D \text{ in } H - G \text{ in } H}$ in A quad. $+$ $\overline{B+D+G+H}$ in

A cubum $-$ A quad. quad. が B in D in G in H に等しくされるならば，A はそれら 4 つ —— B，D，G，H —— のどのようなものについても解くことができる。

［もし］$50N - 35Q + 10C - 1QQ$ が 24 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 1，2，3 あるいは 4 になる。

定理 4

もし A quadrato-cubus $+$ $\overline{-B-D-G-H-K}$ in A quad. quad. $+$ $\overline{B \text{ in } D + B \text{ in } G + B \text{ in } H + B \text{ in } K + D \text{ in } G + D \text{ in } H + D \text{ in } K + G \text{ in } H + G \text{ in } K + H \text{ in } K}$ in A cubum $+$ $\overline{-B \text{ in } D \text{ in } G - B \text{ in } D \text{ in } H - B \text{ in } D \text{ in } K - B \text{ in } G \text{ in } H - B \text{ in } G \text{ in } K}$ $\overline{-B \text{ in } H \text{ in } K - D \text{ in } G \text{ in } H - D \text{ in } G \text{ in } K - D \text{ in } H \text{ in } K - G \text{ in } H \text{ in } K}$ in A quad. $+$ $\overline{B \text{ in } D \text{ in } G \text{ in } H + B \text{ in } D \text{ in } G \text{ in } K + B \text{ in } D \text{ in } H \text{ in } K + B \text{ in } G \text{ in } H \text{ in } K + D \text{ in } G \text{ in } H \text{ in } K}$ in A が B in D in G in H in K に等しくされるならば，A はそれら 5 つ —— B，D，G，H，K —— のどのようなものについても解くことができる。

［もし］$1QC - 15QQ + 85C - 225Q + 274N$ が 120 に等しくされる［ならば］，$1N$ は 1，2，3，4 あるいは 5 になる。

そして，この洗練された，そして非常に美しい推論を，しかも広範囲に扱ってきたが，ついにその結末および書判を置くことにしよう。

釈義法による，純粋なおよび作用されたベキの数値解法についての論文 (抄)

『全集』pp.163–228

原題は *De Numerosa Potestatum Purarum, atque Adfectarum Ad Exegesin Resolutione Tractatus*。
出版されたのは 1600 年。
文字通り，代数方程式の数値解法を扱ったもの。

純粋なベキの数値解法について 163

すべての哲学者によれば，それぞれのものがそれが構成されたのと同じ方法によって分解されるということより自然なものは何もない。そのうえ，純粋な平方，純粋な立方，さらには，どの程度であれ比例している大きさの階級にまで上昇するベキは，算術的な操作によって，明らかに全体の根そのものがはじめに持っていた数字の総数と同じだけ多くの個別の辺［根］—— それらは個別の値［を見出す］ために区分され，引き出されるであろう —— によって構成される。

数による根が，ベキが構成されるであろうようなものに関して，1 つの数字 7 に含まれるとしよう。ゆえに，7 はそれ自身の中に，あるいはベキが強く要求するような種類のそれ自身の階級の中に引き出されるであろう。

さらに，根が 2 つの数字，例えば 12，を含むとすると，そのベキは 10 および 2 からつくり出される。

そして，もし根が，124 のような，3 つの数字を含むならば，そのベキは 100，20 および 4 からつくり出される。そして，もし［根が］より多く［の数字を含む］ならば，［そのベキは］より多く［の数からつくり出される］。

3 桁の数 $a \times 10^2 + b \times 10 + c$ $(1 \leqq a \leqq 9,\ 0 \leqq b,\ c \leqq 9)$ の，例えば，平方は

$$\begin{aligned}&\left(a \times 10^2 + b \times 10 + c\right)^2\\ &\quad = a^2 \times 10^4 + 2ab \times 10^3 + b^2 \times 10^2 + 2ac \times 10^2 + 2bc \times 10 + c^2\\ &\quad = a^2 \times 10^4 + \{(2a \times 10 + b) \times b\} \times 10^2 + \{(2a \times 10 + 2b) \times 10 + c\} \times c\end{aligned}$$

であるが，これを基にしてこの平方数の平方根である元の 3 桁の数を求めていくことになる。すなわち，

① a^2 $(\times 10^4)$ から a
② $\{(2a \times 10 + b) \times b\}$ $(\times 10^2)$ から b
③ $\{(2a \times 10 + 2b) \times 10 + c\} \times c$ から c

と，上の位から順次決定していく。

$124^2 = 15376$ の場合なら ……

$$\begin{array}{rrl}
\text{1 2 4} & & \\
\overline{)\,1\,5\,3\,7\,6} & 1 & \longleftarrow a \\
\underline{1} & \underline{1} & \longleftarrow a \\
5\,3 & 2\,2 & \longleftarrow 2a \times 10 + b \\
\underline{4\,4} & \underline{2} & \longleftarrow b \\
9\,7\,6 & 2\,4\,4 & \longleftarrow (2a \times 10 + 2b) \times 10 + c \\
\underline{9\,7\,6} & 4 & \longleftarrow c \\
0 & &
\end{array}$$

のようになる。
このようにして平方根を求める方法を開平法といっている。

それゆえ，同様に，ベキの解法は，全体の根がはじめに持っていた数字の総数と同じだけ多くの個別のの辺に従って組み立てられる。そして，それらは個別の値［を見出す］ために区分され，引き出されるであろう。

にもかかわらず，その解法は，最も単純な結合の方法が 2 つだけ［を含むもの］を抑制するのであるから，同じ 1 つの瞬間にはなし遂げられない。しかし，それは細分によって［小刻みに］進められる。すなわち，全体の最初の解法は —— 最も大きいおよび最も大きいものに最も近い —— 2 つの辺に支えられる。次いで，最も大きいおよび最も大きいものに最も近い［2 つの辺］は加えられ，そして，1 つの辺とみなされる。そして，それに続くものは別の辺［とみなされ］，そして，その順序で続く。

それゆえ，全体の技法は，おおむね，次のような規則からなる。

1

はじめに，分解されるであろうベキの最後の，すなわち右から左へ進むときの最初の，数字は個別［の根］の最後のそして最小のものによって辺のベキを見積もる［ための］単位の位置とし，そばに添えられた小点をその下に書き留めよ。

2

右から左へ進むときのその次の数字はベキへの最初の擬似的な (paradoci) 段階の位置とし，役に立つように固有の［目印］N または S，すなわち簡単な目印を表示せよ。

3

その次の数字は第 2 の擬似的な段階に割り当て，同様に固有の目印 Q を表示せよ。そして，ベキに到達するまでその順序で続く。

164 **4**

そして，ベキに到達したとき，再び，終わりから 2 番目の辺のベキを見積もる単位の記号としての小点をそばに添え，さらに，再び，より前に進む小点を固有の目印として擬似的な段階の順序に置け。そして，個別［の根］の最初のそして最大のものによる辺のベキに到達するまで，そのように連続的に行え。

5

それゆえ，求められている根のことを，個別のベキ —— 数によって分解されるであろうベキはそれらからなる —— を表す小点と同じだけの個数の数字からなるものであると述べよ。

6

単位は，最初のそして最大の辺を与えるであろう最初のしかも最大の個別のベキを一般的な感覚あるいはそのために提示された見やすい表に従って見積もる。というのは，この技法は 1 つの数字の数である辺のベキの分解に注意を払っていないからである。

7

最初の個別の辺の擬似的な段階［の値］をベキの状況に従って掛け，それ自身の固有の位置に置け。そして，その［位置にある］ものから最初の個別のベキが取り去られた後で，分解されるであろう［残りの］大きさが下に置かれる。。そして，［その残りが最初の個別の辺の 2 倍によって割られ，その］除法によって生じるものが第 2 の辺を定められるが，私は除法によって完全に処理されたと言う訳ではない。なぜならば。実のところ，［第 2 の］辺は除法そのものに応じて生じると理

解されるであろう。しかし，その第 2 の個別の辺，そして最初の辺や最初の辺の相互の段階が掛けられた擬似的な段階［の値］からつくられるであろう同次のものとして，［それらの和は］分解されるであろう大きさに等しくされる，または劣るべきである，だからである。

8

そして，もし等しくされるならば，操作は完全であるといわれる。しかし，もし劣り，しかもベキのために割り当てられた小点がいくつか残っているならば，既に引き出された 2 つの辺が 1 つのもののように［操作は］遂行され，それがあたかも最初のそして最大［の辺］であるかのように，前と全く同じ方法によって，次の —— より小さいそして第 2 の —— ［辺を見出す］ために続けられるべきであり，その順序で連続的に続く。

9

しかし，もし劣っているけれどもベキのために割り当てられた小点が残っていないならば，それは分解されるであろう大きさの辺が無理数であることの証拠である。それゆえ，得られた辺に分数が付け加えられ，その分子は分解された大きさからの残りの数である。［分母は,］もし分解されるであろうベキのために割り当てられた小点がいくつか残っていたならばそうであったはずの，除数と同じであり，個別の辺の和に加えられたそのような分数は分解されたベキの辺を真の値より大きくする。そして，平方において，もし分母に単位が付け加えられるならば，辺を真の値より小さくする。すなわち，辺はそれらの除数の中に暗黙のうちに含まれる。［そして,］それは零 (numerales circulos，円形の数) によって延長されたベキに分解され，操作が続けられるから，より近い［値］になるまで引き出されるであろう。しかし，それは 10 に関する限界の範囲内で必要であり，そうでなければ操作は正しくないことになる。

［これらの規則を］より一層明らかにするために，特に，1 つの数字を含んだ数による根の導出のために［次の表が］提示される。

表 165

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Q	1	4	9	16	25	36	49	64	81
C	1	8	27	64	125	216	343	512	729
QQ	1	16	81	256	625	1,296	2,401	4,096	6,561
QC	1	32	243	1,024	3,125	7,776	16,807	32,768	59,049
CC	1	64	729	4,096	15,625	46,656	117,649	262,144	531,441
QQC	1	128	2,187	16,384	78,125	279,936	823,543	2,097,152	4,782,969
QCC	1	256	6,561	65,536	390,625	1,679,616	5,764,801	16,777,216	43,046,721
CCC	1	512	19,683	262,144	1,953,125	10,077,696	40,353,607	134,217,728	387,420,489

次いで，それぞれのベキについて個別の問題が取り上げられる。

問題 1

数において与えられた純粋な平方から解析的に辺を引き出すこと。

$1Q$ が 2,916 に等しくされると提示されるとしよう。大きさ $1N$ または提示された純粋な平方の根はどれほどになるかが求められる。それゆえ，数によって提示された平方は，求められる全体の辺が，はじめにあるいは平方の形成のときに，基にしていた数字と同じ個数の個別の辺から構成されると理解されるであろう。それらの数字の個数を明らかにするために，提示された平方の数において (もし左から右に進むならば) 最後の数字および (より前に進むとして) 残りの 2 つずつ ——

上昇する 1 つの段階によって平方にたどり着くのだから —— の数字の 1 つおきに小点が印されるであろう。それゆえ，2 つの小点があるとき，分解の方法は構成のそれと同じであるから，平方はそれだけ多くのそれぞれの個別の平方からなると，または辺はそれだけ多くのそれぞれの個別の辺からなるといわれるであろう。さらに，平方が 2 つの個別の辺から構成されるとき，最初の辺の平方，足す第 2［の辺］が掛けられた最初の辺の 2 倍，足す第 2 の辺の平方は構成された平方に等しくされる。それゆえ，分解は［先に］提示された総合的な定理に従って着手されるであろう。それゆえ，最初の小点が左方に印された数字は最初のしかも最大の辺の平方が見積もられる単位の位置，第 2 は N［最初の辺］による平面の位置，そして，最後に，最後は第 2 の辺の平方が見積られる単位の位置といわれるであろう。しかし，もしより多くの小点が残っているとしても，分解は同様に着手されなければならない。というのは，平方ははじめは，引き出されたとき 1 つのもののように遂行される，それらの 2 つの辺だけによって構成されると理解されるであろうし，その後で，あたかも最初の辺および第 2［の辺］としてそれに続くものの和から構成されるものと理解され，そして，その順序で続く。

それゆえ，提示された定理における最初の平方の辺は，確かに平方の数ではないがしかし最も近い平方の数 25 より大きい，29 から引き出される。もし，操作の結果が直ちに指し示すであろう，残りが一致し，そして，確かに 1 つの数字がもたらされるが，しかし，残っている平方の小点と同じ個数の零が続く (すなわち，そのように理解される) ならば，最初の辺は 5 であるといわれる。さらに，25 が 29 から取り去られると，4 が残るであろう。そのため，残りの全体の数は，最初の辺の 2 倍および第 2 の辺による平面足す第 2［の辺］の平方からなる，416 であろう。

それゆえ，得られた最初の平方の辺の 2 倍は，N によって割り当てられた平面の数字の下にその位置をもち，もしそのように 2 倍することが要求されるならばより前の方に現れるであろう，除数であるかのように規定されるであろう。5 の 2 倍は 10 であり，それによってもし 41 が割られるならば，4 の大きさになる。しかし，もしその大きさが 10 以内にならないならば，引き出された最初の辺 5 は正当なものより小さくなり，操作はより平方に近い大きい辺が選ばれるように新しく始められるであろうし，そこから同じ方法によって［続けられる］。

次に，4 に 10 が掛けられると，最初のおよび第 2 の辺による平面の 2 倍である 40 になる。さらに，第 2 の辺 4 による平方は 16 になり，その第 2 の辺の平方がその割り当てられた小点の下に置かれ，さらに平面の位置の下に［置かれる］とき，最初の辺は (注意されていたように) 零が付随するものと理解されるのだから，［そのようにして得られる数が］ふさわしいものであることは明らかである。それらが加えられると，提示された平方の残りに等しい数，416 になるであろう。それゆえ，54 は平方 2,916 の辺であると結論されるであろう。

［純粋な平方の分解の範例］

166 I　最初の個別の辺の導出

	0	0	平方の小点また
N	5	4	は個別の辺と同
Q	25	16	じ個数の零

分解されるであろう平方	2 9	1 6	
	·	N ·	個別の平方のおよび
	Q'	Q''	辺による平面の位置
取り去られるであろう平面	2 5		最初の辺の平方
分解されるであろう平方の残り	4	1 6	

II　第 2 の個別の辺の導出

	4	1 6	
		·	
除数。最初の辺の 2 倍	1	0	
取り去られる平面	4	0	最初の辺の 2 倍が掛けられた第 2 の辺
		1 6	第 2 の辺の平方
分解されるであろう平方の残りに等しい，取り去られるであろう平面の和	4	1 6	

それゆえ，もし $1Q$ が 2,916 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 54 になる。

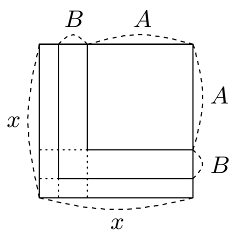
$\sqrt{15376} = 124$ の開平の様子をヴィエート流に書くと ……

1	5 3	7 6	
1			$\cdots\ a^2 \leftarrow a = 1$
	5 3	7 6	$\cdots$ 残り

5 3	7 6	
2		$\cdots\ 2a$
4 (0)		$\cdots\ 2a \times b\ \ (\times 10)$
4		$\cdots\ b^2 \leftarrow b = [5/2] = 2$
9	7 6	$\cdots$ 残り

9	7 6	
2	4	$\cdots\ 2a \times 10 + 2b$
9	6 (0)	$\cdots\ (2a \times 10 + 2b) \times c\ \ (\times 10)$
	1 6	$\cdots\ c^2 \leftarrow c = [97/24] = 4$
9	7 6	$\cdots$ 終了［前の 2 つのように，残りを書くなら 0 とすべきだが。］

となろうか。



面積が S の正方形の 1 辺 x を求めようという問題。
まず，1 辺が A の正方形を取り除くと，残りは $S - A^2$ で，これが正方形の外側の L 字形の部分の面積に等しくなればよい。
そこで，$(2A+B) \times B = 2AB + B^2 \leqq S - A^2$ となるように B を定める。
その外側にまだ L 字形の部分が残るなら，同様［$\{2(A+B)+C\} \times C =$ 残り］にして C，D，$\cdots$ を定めて，真の値に近似していく。
なお，ここに見られるような，L 字形の図形を古代ギリシアではグノーモン (γνώμων : gnomon) と呼んでいた。

しかし，もし平面の和が残りに等しくない，あるいはより小さいならば，それは平方の辺が不均整［無理数］であることの証拠である。それゆえ，それは展開されるのではなく，不均整の記号

［根号］によって示されるであろう。$1Q$ が 2 に等しくされ，そして $1N$ が求められるとき，それは $\sqrt{2}$ であるといわれるであろう。

しかし，もし，真の値に最も近い，2 による根が探し求められるならば，［最初の辺は］1 であり，そして残りは見出された辺の 2 倍で割られ，それが分数として見出された辺に加えられるであろう，真の値に最も近い辺が引き出されるであろう。それゆえ，数 2 の根は $1\,\frac{1}{2}$ であり，それは真の値より大きいといわれるであろう。あるいは，分母に単位が加えられるであろう。それゆえ，根は $1\,\frac{1}{3}$ であり，それは真の値より小さいといわれるであろう。さらに，両方の間の中間の根 $1\,\frac{5}{12}$ は真の値により近い。

あるいは，さらに，提示された平方に 2 つずつ零が無限に付け加えられるであろうし，根は，あたかも正確な平方の数から［引き出された］ように，このように延長された［数］から探し出されるであろう。例えば，もし平方 2 の辺が求められるならば，もし望むなら，平方 $2\,|\,0\d{0}\,|\,0\d{0}\,|\,0\d{0}\,|\,0\d{0}\,|\,0\d{0}\,|\,0\d{0}\,|\,0\d{0}\,|\,0\d{0}\,|\,0\d{0}\,|\,0\d{0}\,|\,0\d{0}\,|\,0\d{0}\,|\,0\d{0}\,|\,0\d{0}$ から辺 141,421,356,237,309,505 が引き出されるであろう。それゆえ，2 の辺は近似的に $\frac{141,421,356,237,309,505}{100,000,000,000,000,000}$ に等しくされるといわれるであろう。同様に，3 の辺は近似的に $\frac{173,205,080,756,887,730}{100,000,000,000,000,000}$ に等しくされる。

問題 2

数において与えられた純粋な立方から解析的に辺を引き出すこと。

$1C$ が 157,464 に等しくされると提示されるとしよう。$1N$ または提示された純粋な立方の根はどれほどになるかが求められる。それゆえ，数によって提示された立方は，求められる全体の辺が，はじめにあるいは立方の形成のときに，基にしていた数字と同じ個数の個別の辺から構成されると理解されるであろう。それらの数字の個数を明らかにするために，提示された立方の数において —— もし左から右に進むならば —— 最後の数字および —— より前に進むとして —— 残りの 3 つずつの数字［の最後］の 1 つずつに小点が印され，［そして，］残されたものの中間の明らかに 2 つ［の数字］—— 単位から［立方までに］上昇する 2 つの段階があるのだから —— に N，Q［の記号］が印されるであろう。それゆえ，2 つの小点があるとき，立方はそれだけ多くのそれぞれの個別の立方からなると，または辺はそれだけ多くの個別の辺からなるといわれるであろう。そして，分解の方法は構成のそれと同じであるから，さらに，もし立方が 2 つの個別の辺から構成されるならば，最初の辺の立方，足す第 2［の辺］の平方が掛けられた最初の辺の 3 倍による立体，足す第 2 の辺が掛けられた最初の辺の平方の 3 倍による立体，足す第 2 の辺の立方は構成された立
167 方に等しくされる。分解は［先に］提示された総合的な定理に従って着手されるであろう。それゆえ，左の方に最初に現れる小点が印された数字は最初のそして最大の辺の立方が見積られる単位の位置といわれるであろう。次の数字は同じ［辺の］平方による立体の 3 倍の位置，続く数字はその辺そのものによる立体の 3 倍の位置，そして最後に，最後［の数字］は第 2 の辺の立方が見積られる単位の位置といわれるであろう。しかし，もしより多くの小点が残っているとしても，分解はまったく同様に着手されなければならない。それは，立方ははじめは，引き出されたとき 1 つのもののように遂行される，それら 2 つの辺だけによって構成されると理解されるであろうし，そしてその後で，あたかも最初の辺および第 2［の辺］としてそれに続くものの和から構成されると理解され，そして，その順序で無限に［続く］からである。それゆえ，提示された定理における最初

の立方の辺は，確かに立方の数ではないが最も近い立方の数 125 より大きい，157 から引き出される。もし残りが一致するならば，最初の辺は 5 であるといわれる。操作の結果はこのことを直ちに指し示すであろう。そして，確かに 1 つの数字がもたらされるが，しかし，残っている立方の小点と同じ個数の零が続く (すなわち，そのように理解される)。さらに，157 から 125 が取り去られるとき，32 が残るであろう。そしてそのため，残っている全体の数 32,464 は第 2 の辺の平方および最初［の辺］の 3 倍による立体，足す最初の辺の平方の 3 倍および，見出されるであろう，第 2 の辺による立体，足す第 2［の辺］の立方からなる。それゆえ，最初の辺の平方の 3 倍は第 2 の段階に割り当てられた位置，すなわち最初の立方に最も近い小点，の下に置かれるであろう。最初の辺そのものの 3 倍は，あたかも数の除数が，もしことがなし遂げられたら，より前の方に現れるように，最初の段階に割り当てられた［位置の］次［の位置］の下に［置かれるであろう］。5 の平方の 3 倍は 75 であり，これで 324 が割られると，辺 4 となる。それゆえ，4 は第 2 の辺であり，もし他の除数が一致するならば，このことを操作の結果が直ちに指し示すであろう。しかし，もしそのように割られた 324 が 10 以内の何らかの数の大きさにならないならば，引き出された最初の辺 5 は正当なものより小さいものであり，操作は新しく始められて，より立方に近い大きな辺が選ばれ，同じ方法によって続けられる。次に，4 に 75 が掛けられると，最初の辺の平方および第 2［の辺］による立体の 3 倍である 300 になる。さらに，4 の平方は 16 になり，続く位置に置かれた最初の辺の 3 倍である 15 が掛けられるとき，第 2 の辺の平方および最初［の辺］による立体の 3 倍である 240 になる。最後に，4 の立方は 64 である。そして，その第 2 の辺の立方がそれに割り当てられた小点の下に，さらに，第 2 の辺の平方および最初の辺による立体の 3 倍が最初の段階の印の下に，最後に，第 2 の辺および最初の辺の平方による立体の 3 倍が第 2 の段階の印の下に置かれるであろうとき，最初の辺は，注意されていたように，零が付随するものと理解されるのだから，それがふさわしいものであることは明らかである。それらすべての立体が加えられると，提示された立方の残りに等しい数である 32,464 になるであろう。それゆえ，54 は立方 157,464 の辺であると結論されるであろう。

純粋な立方の分解の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0
N	5	4
Q	25	16
C	125	64

立方の小点または個別の辺と同じ個数の零

分解されるであろう立方	1	5	7	4	6	4	
			·	Q	N	·	個別の立方のおよび［下位の］段階による立体の位置
		C'			C''		
取り去られるであろう立体	1	2	5				最初の辺の立方
分解されるであろう立方の残り		3	2	4	6	4	

II　第 2 の個別の辺の導出

分解されるであろう立方の残り	3	2	4	6	4·	
除数 { 最初の辺の平方の 3 倍		7	5			
除数 { 最初の辺の 3 倍			1	5		
除数の和		7	6	5		
取り去られる立体	3	0	0			最初の辺の平方の 3 倍が掛けられた第 2 の辺による立体
取り去られる立体		2	4	0		最初の辺の 3 倍が掛けられた第 2 の辺の平方による立体
取り去られる立体				6	4	第 2 の辺の立方
分解されるであろう立方の残りに等しい，取り去られるであろう立体の和	3	2	4	6	4	

168　それゆえ，もし $1C$ が 157,464 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 54 になる。

ある時点までに得られた結果 A から次の桁 b に進むには，

$$(A \times 10 + b)^3 = A^3 \times 10^3 + \left(3A^2 b \times 10^2 + 3Ab^2 \times 10 + b^3\right)$$

であることから，その時点での残り（の上位の値）を $3A^2 \times 10 + 3A$ で割ることを基本にして b を探し求める —— 実際に $3A^2 b \times 10^2 + 3Ab^2 \times 10 + b^3$ を引いてみて調べる —— ことになる。

例えば，$\sqrt[3]{21024576} = 276$ については ……

2	1	0	2	4	5	7	6	
	8							$\cdots$ A^3 ($2^3 \leqq 21 < 3^3 \to A = 2$)
1	3	0	2	4	5	7	6	$\cdots$ 残り
	8	4	0	0				$\cdots$ $3A^2b$ ［$A = 2 \times 10$，$b = 7$］
	2	9	4	0				$\cdots$ $3Ab^2$
		3	4	3				$\cdots$ b^3
1	1	6	8	3				$\cdots$ $3A^2b + 3Ab^2 + b^3$
	1	3	4	1	5	7	6	$\cdots$ 残り（前の残り $-$ すぐ上の $3A^2b + 3Ab^2 + b^3$）
	1	3	1	2	2	0	0	$\cdots$ $3A^2b$ ［$A = 2 \times 10^2 + 7 \times 10$，$b = 6$］
			2	9	1	6	0	$\cdots$ $3Ab^2$
					2	1	6	$\cdots$ b^3
	1	3	4	1	5	7	6	$\cdots$ $3A^2b + 3Ab^2 + b^3$
							0	$\cdots$ 残り（前の残り $-$ すぐ上の $3A^2b + 3Ab^2 + b^3$）

第 2 段階では $A = 2 \times 10$ だから $3A^3 + 3A = 1260$ であり，
$13024/1260 = 10.3365\cdots$ となるが，$b = 7$。(ここは結局，試行錯誤 ?)
第 3 段階では $A = 2 \times 10^2 + 7 \times 10$ だから $3A^2 + 3A = 219510$ であり，
$1341576/219510 = 6.1116\cdots$ となり，$b = 6$。

となる。

しかし，もし立体の和が残りに等しくない，あるいはより小さいならば，それは立方の辺が無理数であることの証拠である。それゆえ，それは展開されるのではなく，根号によって示されるであ

ろう。$1C$ が 2 に等しくされ，そして $1N$ が求められるとき，それは $\sqrt{C}\,2$ であるといわれるであろう。

しかし，もし真の値に最も近い根が探し求められるならば，3 つずつの零が無限に付け加えられるであろうし，そのように延長されたものから，あたかも注意深く処理された立方の数からのように，根が引き出されるであろう。例えば，もし立方 2 の辺が探し求められるならば，立方 2,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000,000 から辺 125,992,104,989 が引き出されるであろう。それゆえ，$\sqrt{C}\,2$ は近似的に $1\,\dfrac{25,992,104,989}{100,000,000,000}$ 以上に等しくされれといわれるであろう。同様に，$\sqrt{C}\,4$ は $1\,\dfrac{58,340,105,196}{100,000,000,000}$ 以上に等しくされる。

$$\sqrt[3]{2} = 1.259\ 921\ 049\ 894\ 873\cdots$$
$$\sqrt[3]{4} = 1.587\ 401\ 051\ 968\ 199\cdots$$

問題 3

数において与えられた純粋な平方の平方から解析的に辺を引き出すこと。

$1QQ$ が 331,776 に等しいと提示されるとしよう。$1N$ または提示された純粋な平方の平方の根はどれほどになるかが求められる。

それゆえ，数によって提示された平方の平方は，求められる全体の辺が，はじめにあるいは平方の平方の形成にときに，基にしていた数字と同じ個数の個別の辺から構成されると理解されるであろう。その数字の個数を明らかにするために，数によって提示された平方の平方の (もし左から右に進むならば) 最後の数字，およびより前の方に後退するときの残りの 4 つずつの数字［の最後］の 1 つずつに小点が印され，残りのものの中間の明らかに 3 つ［の数字］に，単位から平方の平方までに上昇する 3 つの段階があるのだから，N，Q，C［の記号］が印されるであろう。それゆえ，2 つの小点があるとき，全体の平方の平方はそれだけ多くの個別の平方の平方からなると，そして同様に，全体の辺はそれだけ多くの個別の辺からなるといわれるであろう。

そして，分解の方法 —— それは構成の［方法］でもある —— は同じであり，さらに，2 つの個別の辺による平方の平方は

最初の辺の平方の平方
足す最初の辺の立方の 4 倍が掛けられた第 2 の辺
足す最初の辺の平方の 6 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
足す最初の辺の 4 倍が掛けられた第 2 の辺の立方
足す第 2 の辺の平方の平方

によって構成されるから，それは辺の和の平方の平方に等しくされる。分解はその総合的な定理に従って着手されるであろう。

それゆえ，左の方に最初に現れる小点が印された数字は最初のそして最大の辺の平方の平方が見積られる単位の位置といわれるであろう。次の数字は同じ最初の辺の立方の 4 倍による平面的平面の位置，次［の数字］は同じ最初の辺の平方の 6 倍による平面的平面の位置，さらに，次［の数字］は最初の辺そのものの 4 倍による平面的平面の位置，そして最後に，最後［の数字］は第 2 の辺の平方の平方が見積られる単位の位置［といわれるであろう］。

しかし，もしより多くの小点が残っているとしても，分解はまったく同様に着手されなければな

らない。それは，平方の平方ははじめは，引き出されたとき 1 つのもののように遂行される，それら 2 つの辺だけによって構成されると理解されるであろうし，そしてその後で，あたかも最初の辺および第 2［の辺］としてそれに続くものの和から構成されると理解され，そして，その順序で無限に［続く］からである。

さらに，全体の仕事 (πραγματεία) は提示された平方および立方において構築されていたものとおそらく調和しないものではなく，あり余るほど大きなものではないより高いベキにおいて見られるものも同じである。それは，これから範例において明らかにし，考察するものは厄介なものではないだろうからである。

169 **純粋な平方の平方の分解の範例**

I　最初の個別の辺の導出

	0	0	平方の平方の小点または個別の辺と同じ個数の零
N	2	4	
Q	4	16	
C	8	64	
QQ	16	216	

分解されるであろう平方の平方	3	3	1	7	7	6	
		·	C	Q	N	·	個別の平方の平方のおよび［下位の］段階による平面的平面の位置
	QQ'		QQ''				
取り去られるであろう平面的平面	1	6					最初の辺の平方の平方
分解されるであろう平方の平方の残り	1	7	1	7	7	6	

II　第 2 の個別の辺の導出

分解されるであろう平方の平方の残り	1	7	1	7	7	6	
除数：最初の辺の立方の 4 倍		3	2				
除数：同じものの平方の 6 倍			2	4			
除数：同じ辺の 4 倍					8		
除数の和		3	4	4	8		
取り去られる平面的平面	1	2	8				最初の辺の立方の 4 倍が掛けられた第 2 の辺による
		3	8	4			最初［の辺］の平方の 6 倍が掛けられた第 2［の辺］の平方による
			5	1	2		最初の辺の 4 倍が掛けられた第 2［の辺］の立方による
				2	5	6	第 2 の辺の平方の平方［による］
分解されるであろう平方の平方の残りに等しい，平面的平面の和	1	7	1	7	7	6	

それゆえ，もし $1QQ$ が 331,776 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 24 になる。

しかし，もし $1QQ$ が 20,000 に等しくされるならば，20,000 は厳密には平方の平方の数ではないから，4 つずつの零が無限に付け加えられることによって，真の値に最も近い辺が引き出される

であろうし，$11\,\dfrac{8,917}{10,000}$ は真の値より小さい辺で，あるいは $11\,\dfrac{8,918}{10,000}$ は真の値より大きい辺であろう。［それらより真の値に］十分に近い中央［の値］は $11\,\dfrac{3,567}{4,000}$ である。

$\sqrt[4]{20000}$ の近似値について，ヴィエートは，11.8917 および 11.8918 を挙げているが，実際には $\sqrt[4]{20000} = 11.892\,071\,150\,027\,2\cdots$ である。

ある時点までに得られた結果 A から次の桁 b に進むには，

$$(A \times 10 + b)^4 = A^4 \times 10^4 + \left(4A^3b \times 10^3 + 6A^2b^2 \times 10^2 + 4Ab^3 \times 10 + b^4\right)$$

であることから，その時点での残り（の上位の値）を $4A^3 \times 10^2 + 6A^2 \times 10 + 4A$ で割ることを基本にして b を探し求める —— 実際に $4A^3b \times 10^3 + 6A^2b^2 \times 10^2 + 4Ab^3 \times 10 + b^4$ を引いてみて調べる —— ことになる。

例えば，$\sqrt[4]{6414247921} = 283$ については ……

6	4	1	4	2	4	7	9	2	1	
1	6									$\cdots\ A^4\ \ (2^4 \leqq 64 < 3^4 \to A = 2)$
4	8	1	4	2	4	7	9	2	1	$\cdots$ 残り
2	5	6	0	0	0					$\cdots\ 4A^3b$　$[A = 2 \times 10,\ b = 8]$
1	5	3	6	0	0					$\cdots\ 6A^2b^2$
	4	0	9	6	0					$\cdots\ 4Ab^3$
		4	0	9	6					$\cdots\ b^4$
4	5	4	6	5	6					$\cdots$ 上の 4 つの和
	2	6	7	6	8	7	9	2	1	$\cdots$ 残り（前の残り − すぐ上の和）
	2	6	3	4	2	4	0	0	0	$\cdots\ 4A^3b$　$[A = 2 \times 10^2 + 8 \times 10,\ b = 3]$
			4	2	3	3	6	0	0	$\cdots\ 6A^2b^2$
					3	0	2	4	0	$\cdots\ 4Ab^3$
								8	1	$\cdots\ b^4$
	2	6	7	6	8	7	9	2	1	$\cdots$ 上の 4 つの和
									0	$\cdots$ 残り（前の残り − すぐ上の和）

となる。

問題 4

数において与えられた純粋な平方の立方から解析的に辺を引き出すこと。

$1QC$ が 7,962,624 に等しいと提示されるとしよう。$1N$ または提示された純粋な平方の立方の根はどれほどになるかが求められる。

それゆえ，数によって提示された平方の立方は，求められる全体の辺が平方の立方［を形成するとき］のはじめに基にしていた数字と同じ個数の個別の辺から構成されると理解されるであろう。その数字の個数を明らかにするために，左から始められ右の方に進むとして，平方の立方の数の最後の数字，およびより前の方に後退するときの残りの 5 つずつの数字［の最後］の 1 つずつに小点が印され，単位から平方の立方までに上昇する 4 つの段階があるのだから，N，Q，C，QQ［の記号］が印されるであろう。それゆえ，2 つの小点があるとき，全体の平方の立方はそれだけ多くの個別の立方からなると，そして同様に，全体の辺はそれだけ多くの個別の辺からなるといわれるであろう。

そして，分解の方法は構成のそれと同じであり，さらに，2 つの個別の辺による平方の立方は

170 最初の辺の平方の立方
足す最初の辺の平方の平方の 5 倍が掛けられた第 2 の辺
足す最初の辺の立方の 10 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
足す最初の辺の平方の 10 倍が掛けられた第 2 の辺の立方
足す最初の辺の 5 倍が掛けられた第 2 の辺の平方の平方
足す第 2 の辺の平方の立方

によって構成されるから，それは辺の和の平方の立方に等しくされる。分解はその総合的な定理に従って着手されるであろう。

それゆえ，左の方に最初に現れる小点が印された数字は最初のそして最大の辺の平方の立方が見積られる単位の位置といわれるであろう。次の数字は同じ最初の辺の平方の平方の 5 倍による平面的立体の位置，次［の数字］は［最初の辺の］立方の 10 倍による平面的立体［の位置］，さらに，次［の数字］は［最初の辺の］平方の，再び，10 倍による平面的立体［の位置］，残りの中間［の数字］は最初の辺そのものの 5 倍による平面的立体［の位置］，最後に，最後［の数字］は第 2 の辺の平方の立方が見積られる単位の位置［といわれるであろう］。しかし，もしより多くの小点が残っているとしても，分解はまったく同様に着手されなければならない。それは，平方の立方ははじめは，引き出されたとき 1 つのもののように遂行される，それら 2 つの辺だけによって構成されると理解されるであろうし，そしてその後で，最初の辺および第 2［の辺］としてそれに続くものの和から構成されると理解され，そして，その順序で無限に［続く］からである。

純粋な平方の立方の分解の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0	
N	2	4	平方の立方の
Q	4	16	小点または個
C	8	64	別の辺と同じ
QQ	16	216	個数の零
QC	32	1024	

分解されるであろう平方の立方	7	9	6	2	6	2	4	
		·	QQ	C	Q	N	·	個別の平方の立方のおよび［下位の］段階による平面的立体の位置
	QC'				QC''			
取り去られるであろう平面的立体	3	2						最初の辺の平方の立方
分解されるであろう平方の立方の残り	4	7	6	2	6	2	4	

II　第 2 の個別の辺の導出

分解されるであろう平方の立方の残り	4	7	6	2	6	2	4	
除数：最初の辺の平方の平方の 5 倍		8	0					
除数：同じものの立方の 10 倍			8	0				
除数：同じものの平方の 10 倍				4	0			
除数：最初の辺の 5 倍					1	0		
除数の和		8	8	4	1	0		
取り去られる平面的立体	3	2	0					最初［の辺］の平方の平方の 5 倍が掛けられた第 2 の辺による
取り去られる平面的立体	1	2	8	0				最初［の辺］の立方の 10 倍が掛けられた第 2 の辺の平方による
取り去られる平面的立体		2	5	6	0			最初［の辺］の平方の 10 倍が掛けられた第 2 の辺の立方による
取り去られる平面的立体			2	5	6	0		最初の辺の 5 倍が掛けられた第 2 の辺の平方の平方による
取り去られる平面的立体				1	0	2	4	第 2 の辺の平方の立方［による］
分解されるであろう平方の立方の残りに等しい，平面的立体の和	4	7	6	2	6	2	4	

それゆえ，もし $1QC$ が 7,962,624 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 24 になる。

しかし，もし $1QC$ が 200,000 に等しくされるならば，20,000 は厳密には平方の立方の数ではな 171
いから，5 つずつの零が無限に付け加えられることによって，真の値に最も近い辺が引き出されるであろうし，$11\,\dfrac{48,697}{100,000}$ は真の値より小さい辺で，あるいは $11\,\dfrac{48,698}{100,000}$ は真の値より大きい辺であろう。［それらより真の値に］十分に近い中央［の値］は $11\,\dfrac{19,479}{40,000}$ である。

ある時点までに得られた結果 A から次の桁 b に進むには，

$$(A \times 10 + b)^5 = A^5 \times 10^5 + \left(5A^4b \times 10^4 + 10A^3b^2 \times 10^3 + 10A^2b^3 \times 10^2 + 5Ab^4 \times 10 + b^5\right)$$

を基にして b を探し求めることになる。

なお，$\sqrt[5]{200000} = 11.486\ 983\ 549\ 970\ 3\cdots$

問題 5

数において与えられた純粋な立方の立方から解析的に辺を引き出すこと。

$1CC$ が 191,102,976 に等しいと提示されるとしよう。$1N$ または提示された純粋な立方の立方の根はどれほどになるかが求められる。

この数の最後の数字 6 の下に，単位が最後の立方の立方を見積もることを表す，立方の立方の小点が置かれるとしよう。そして，単位から立方の立方までに 5 つの段階 N，Q，C，QQ，QC があるから，中間にある 5 つの数字 7，9，2，0，1 が無視されて，［次に］現れる［数字に］再び小点が印されるであろう。そして，それは 1 である。それから，［立方の立方の］生成の定理が評価され，

最初の辺の立方の立方

足す最初の辺の平方の立方の 6 倍が掛けられた第 2 の辺
足す最初の辺の平方の平方の 15 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
足す最初の辺の立方の 20 倍が掛けられた第 2 の辺の立方
足す最初の辺の平方の 15 倍が掛けられた第 2 の辺の平方の平方
足す最初の辺の 6 倍が掛けられた第 2 の辺の平方の立方
足す第 2 の辺の立方の立方

が辺の和の立方の立方に等しくされることが従う。そして，その定理に従って分解は，範例にあるように，着手されるであろう。

純粋な立方の立方の分解の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0	
N	2	4	立方の立方の小点または個別の辺と同じ個数の零
Q	4	16	
C	8	64	
QQ	16	216	
QC	32	1024	
CC	64	4096	

分解されるであろう立方の立方	1	9	1	1	0	2	9	7	6	個別の立方の立方のおよび［下位の］段階による立体的立体の位置
			·	QC	QQ	C	Q	N	·	
			CC'			CC''				
取り去られるであろう立体的立体		6	4							最初の辺の立方の立方
分解されるであろう立方の立方の残り	1	2	7	1	0	2	9	7	6	

II　第 2 の個別の辺の導出

分解されるであろう立方の立方の残り	1	2	7	1	0	2	9	7	6
									·
除数：最初の辺の平方の立方の 6 倍		1	9	2					
除数：同じものの平方の平方の 15 倍			2	4	0				
除数：同じものの立方の 20 倍				1	6	0			
除数：同じものの平方の 15 倍						6	0		
除数：最初の辺の 6 倍							1	2	
除数の和		2	1	7	6	6	1	2	

取り去られる立体的立体		7	6	8						最初の辺の平方の立方の 6 倍が掛けられた第 2 の辺による
		3	8	4	0					最初の平方の平方の 15 倍が掛けられた第 2 の平方による
		1	0	2	4	0				最初の立方の 20 倍が掛けられた第 2 の立方による
			1	5	3	6	0			最初の平方の 15 倍が掛けられた第 2 の平方の平方による
				1	2	2	8	8		最初の辺の 6 倍が掛けられた第 2 の平方の立方による
						4	0	9	6	第 2 の立方の立方［による］
分解されるであろう立方の立方の残りに等しい，立体的立体の和	1	2	7	1	0	2	9	7	6	

それゆえ，もし $1CC$ が 191,102,976 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完 172
全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 24 になる。

しかし，もし $1CC$ が 2,000,000 に等しくされるならば，2,000,000 は厳密には立方の立方の数ではないから，6 つずつの零が付け加えられることによって，真の値に最も近い辺が引き出されるであろうし，$11\,\dfrac{224,175}{1,000,000}$ は真の値より小さい辺であろうし，あるいは $11\,\dfrac{224,176}{1,000,000}$ は真の値より大きい辺であろう。さらに，中央［の値］$11\,\dfrac{448,351}{2,000,000}$ は十分に真の値に近いであろう。

ある時点までに得られた結果 A から次の桁 b に進むには，

$$\begin{aligned}(A\times 10+b)^6 = A^6 &\times 10^6\\ &+\bigl(6A^5b\times 10^5+15A^4b^2\times 10^4+20A^3b^3\times 10^3\\ &+15A^2b^4\times 10^2+6Ab^5\times 10+b^6\bigr)\end{aligned}$$

を基にして b を探し求めることになる。

なお，$\sqrt[6]{2000000}=11.224\,620\,483\,093\,7\cdots$

173 **作用されたベキの数値解法について** (抄)

作用されたベキの［数値］解法は，特に作用されたベキがふさわしい形に準備されたものであったときには，純粋なベキの数値解法がほとんど真似される。

として，ヴィエートは，本来の目的である (?)，代数方程式の数値解法をいくつかの形に分けて述べている。ここでは，原則として，提示された問題文およびそこで挙げられている例題とその解法手順を示す図表のみを載せる。
彼が取り上げる問題は，現代風に表すと，次のようなものである。

(1) $x^2+ex=f$	(11) $x^3-ex=f$
(2) $x^3+ex=f$	(12) $x^3-dx^2=f$
(3) $x^3+dx^2=f$	(13) $x^4-cx^3+ex=f$
(4) $x^4+ex=f$	(14) $x^4+cx^3-ex=f$
(5) $x^4+cx^3=f$	(15) $x^5-cx^3+ex=f$
(6) $x^4+dx^2+ex=f$	(16) $ex-x^2=f$
(7) $x^5+ex=f$	(17) $ex-x^3=f$
(8) $x^5+cx^3=f$	(18) $dx^2-x^3=f$
(9) $x^6+ex=f$	(19) $ex-x^4=f$
(10) $x^2-ex=f$	(20) $cx^3-x^4=f$

174 **問題 1**

辺および与えられた補足的な長さ［係数］による平面の加法によって作用された，数において与えられた平方から解析的に辺を引き出すこと。

$1Q+7N$ が 60,750 に等しくされると提示されるとしよう。大きさ $1N$ または提示された作用された平方の根はどれほどの大きさになるかが求められる。

すなわち，自分自身および 7 が掛けられたある数が 60,750 になる［とき］，その数はいくつになるかが求められる。

60,750 は純粋な平方ではなく，辺および与えられた長さ 7 によって作用されたものである。

そして，確かに，すべての作用された平方は純粋［な平方］に還元されることが注意されなければならない。しかし，生成の技法は，古い解析の誤りの中に陥ることなく，一般に提示されなければならない。

さらに，肯定的に作用された平方の規則正しい生成を，最初に引き出されて補足的な長さが掛けられる個別の辺として，純粋な平方の生成に加え，それから同様に，第 2 の辺に同じものが掛けられる。

それゆえ，作用された平方から辺が引き出されるようにするために，純粋な平方の解析におけるように，2 つずつに分割される数字の 1 つおきのものによって個別の平方が見積もられる単位の位置の下に右から左に［向かって］適切に小点を置く。

そして，補足的な長さが 1 つずつの数字によって上の方から決められるであろう個別の辺の位置と同じ個数の平方の小点の位置が数えられ，さらに，置かれた小点および，はじめに —— もし左から右に進むならば —— 補足的な長さが位置を占めるであろう，最高位の辺の位置によって印されるであろう。しかし，もし［補足的な長さが］1 つより多くの数字からなるならば，残りはより前の方に現れるであろう。

そしてそれゆえ，これが確立されたことによって，個別の辺は純粋な平方の解析におけるときと，

補足的な［大きさ］そのものが除数の数に含まれることを除いて，異なることなく引き出されるであろう

そして，引き出された個別の辺は同じものが，それから補足的［な大きさ］の位置に下に終わる平面が掛けられ，提示された作用された平方から取り去られるであろう。

最後に，残りの除数が下の方に動かされるであろうとき，［次の］範例におけるように，補足的［な大きさ］は順序正しく次の場所に置かれる。

辺によって肯定的に作用された平方の分解の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0	0	平方の小点または個別の辺と同じ個数の零
N	2	4		
Q	4	16		

補足的な長さ			7			辺による
			·	·	·	平方と同じ個数の辺の小点
	6	0	7	5	0	
	·	N	·	N	·	
	Q'		Q''		Q'''	
取り去られるであろう平面	4					最初の辺の平方
		1	4			補足的なものが掛けられた最初の辺による平面
取り去られるであろう平面の和	4	1	4			
分解されるであろう作用された平方の残り	1	9	3	5	0	

II　第 2 の個別の辺の導出 175

除数のより上位の部分	補足的な長さ				7		
分解されるであろう作用された平方の残り		1	9	3	5	0	
				·		·	
除数のより下位の部分	最初の辺の 2 倍		4				
	除数の和		4	0	7		
取り去られるであろう平面		1	6				最初の 2 倍が掛けられた第 2 の辺
			1	6			第 2 の辺の平方
				2	8		補足的なものが掛けられた第 2 の辺
取り去られるであろう平面の和		1	7	8	8		
分解されるであろう作用された平方の残り			1	4	7	0	

III　あたかも第 2［の辺］のように，第 3 の個別の辺の導出

	00	0
N	24	3
Q	576	9

除数のより上位の部分	補足的な長さ				7 ・	
分解されるであろう作用された平方の残り		1	4	7	0 ・	
除数のより下位の部分	引き出されたの辺の 2 倍		4	8		
	除数の和		4	8	7	
取り去られるであろう平面		1	4	4		最初の 2 倍が掛けられた第 2 の辺
					9	第 2 の辺の平方
				2	1	補足的なものが掛けられた第 2 の辺
分解されるであろう作用された平方の残りに等しい，取り去られるであろう平面の和		1	4	7	0	

それゆえ，もし $1Q + 7N$ が 60,750 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 243 になる。

$x^2 + ex = f$ の解法は

$$(A \times 10 + b)^2 + e\,(A \times 10 + b) = \bigl(A^2 \times 10^2 + eA \times 10\bigr) + \bigl(2Ab \times 10 + b^2 + eb\bigr)$$

に基づいて行われる。

例えば，$x^2 + 13x = 79764$ については ⋯⋯

	1	3			⋯ x の係数 e ［根の桁数分だけ左へずらす］
		・	・	・	⋯ 右から左へ，根の桁数分の小点［なくてもよい］
7	9	7	6	4	⋯ 定数 f の値
4					⋯ A^2 ［$A = 2$，桁の区切り線のすぐ左の位から左へ］
	2	6			⋯ eA ［係数 e の一の位の下から左へ］
4	2	6			⋯ $A^2 + eA$
3	7	1	6	4	⋯ 残り (f の値 − すぐ上の和)
		1	3		⋯ 係数 e は上の段階より 1 桁右にずれる
2	8	0			⋯ $2Ab$ ［$A = 2 \times 10$，$b = 7$，区切り線のすぐ左の位から］
	4	9			⋯ b^2 ［区切り線のすぐ左の位から左へ］
		9	1		⋯ eb ［係数 e の一の位の下から左へ］
3	3	8	1		⋯ $2Ab + b^2 + eb$
	3	3	5	4	⋯ 残り (前の残り − すぐ上の和)
			1	3	
	3	2	4	0	⋯ $2Ab$ ［$A = 2 \times 10^2 + 7 \times 10$，$b = 6$］
			3	6	⋯ b^2
			7	8	⋯ eb
	3	3	5	4	⋯ $2Ab + b^2 + eb$
				0	⋯ 残り (前の残り − すぐ上の和)

第 1 の段階では，$2^2 \leqq 7 < 3^2$ であるから，$A = 2$

第 2 の段階では，(残りの上位の数) $\div (2A + e) = 3716 \div 413 = 8.9975 \cdots$ だが，$b = 7$

第 3 の段階では，(残りの上位の数) $\div (2A + e) = 3354 \div 553 = 6.0650 \cdots$ で，$b = 6$
となる。

すなわち，$x^2 + 13x = 79764$ の根は $x = 276$ (もう 1 つは -289) となる。

なお，係数 e が大きな数のときには次のように処理する。

補足的な大きさが作用された平方そのものを越えてより前の方に延長される，または，同じ場所にあるとしても，それから取り去ることができないくらいに［大きくなる］ことが起きるときがある。それは，［平方が］作用している平面より小さくなるのだから，平方は作用されているというよりはむしろ作用している［といわれることの］証拠である。

それゆえ，補足的［な大きさ］は，その位置が除法の［遂行が可能になる］ため［の位置］になるまで，順序正しく次の位置に戻されなければならず，それから操作はより一層ふさわしい方法で始めらなければならない。

そして，補足的［な大きさ］が後退する数字と同じ個数だけ，そうでなければ操作のはじめが導かれたであろうところから，より低い位置にある平方の位置および小点が，次の問題におけるように，消し去られるであろう。

自分自身および 954 が掛けられたある数が 18,487 になる［とき］，記号では $954N + 1Q$ が 18,487 に等しくされる［とき］，その数が何になるかが求められる。

18,487 は辺および補足的［な大きさ］954 による平面が付け加えられた平方である。さらに，そ
れ自身が除数として被除数から取り去ることができなくなるような，その補足的［な大きさ］の位 176
置によって示されるように，平面は平方より大きい。それゆえ，［補足的な大きさは］最も近い次の
位置に落されるであろう。しかもそのうえ，左の方に最初に現れる平方の小点も，同様に，消し去
られるであろう。そして，操作は，平方の辺そのものというより本来の補足的［な大きさ］が［平
方を］割ることになる，除法によって始められ，［次の］範例に見られるように，進められるであ
ろう。

作用する平面が平方より大きいときの範例

I　移動の前の最初の辺の実体のない導出

補足的な長さ	9	5	4			辺による
			·	·	·	平方と同じ個数の辺の小点
分解されるであろう作用された平方	1	8	4	8	7	
	·	N	·	N	·	平方の小点
	Q		Q		Q	

9 は単位より大きいから，移動が行われる。

II　移動の後の最初の辺の導出

	0	0	平方の小点または個別の辺と同じ個数の零
N	1	9	
Q	1	81	

補足的な長さ		9	5	4		辺による
				・	・	
	1	8	4	8	7	
			・	N	・	
			Q'		Q''	
取り去られるであろう平面		9	5	4		補足的な長さが掛けられた最初の辺
			1			最初の辺の平方
取り去られるであろう平面の和		9	6	4		
分解されるであろう作用された平方の残り		8	8	4	7	

III　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分	補足的な長さ		9	5	4	
					・	
分解されるであろう作用された平方の残り		8	8	4	7	
					・	
除数のより下位の部分	引き出されたの辺の 2 倍			2		
	除数の和		9	7	4	
取り去られるであろう平面		8	5	8	6	補足的なものが掛けられた第 2 の辺
			1	8		最初の 2 倍が掛けられた第 2 の辺
				8	1	第 2 の辺の平方
分解されるであろう作用された平方の残りに等しい，取り去られるであろう平面の和		8	8	4	7	

それゆえ，もし $954N+1Q$ が 18,487 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 19 になる。

係数 e が大きな数のときは，図表の最初の部分において，
　2 桁ずつに区切られた部分の個数分だけ，定数 f の一の位の位置から左へ小点を置く
　その小点の最左端の位置から左へ係数 e を書く
という原則では対応できない［最初の A $(\leftarrow (f$ の上位の数$) \div e)$ が決定できない］ので，
　小点を n 個消し去る［根の桁数が区切られた部分の個数より n 桁減る］
　係数 e を n 桁右にずらす
［f の最上位の数が e の最上位の数より大きくなる］ようにしてから，操作を始める。
第 2 段階からは，
　$2Ab$，b^2 は区切り線のすぐ左が一の位
　eb は上に書かれている係数 e の一の位が一の位
になるように $2Ab$，b^2，eb の計算値を書き入れ，それらの和を前の段階の残りから引いて残りを求める，という手順は先のものと同様。

例えば，$x^2+70354x=2393192$ では $\cdots\cdots$

7	0	3	5	4				$\cdots$ 移動前の係数 e ［2 桁右にずらす必要がある］
				·	·	·	·	$\cdots$ 当初の平方の小点 ［2 つ消し去る必要がある］
	2	3	9	3	1	9	2	$\cdots$ 定数 f の値
		7	0	3	5	4		$\cdots$ 移動後の係数 e
						·	·	$\cdots$ 消去後の平方の小点
	2	3	9	3	1	9	2	$\cdots$ 定数 f の値
					9			$\cdots$ A^2 ［$239319\div 70354=3.4016\cdots\ \to A=3$］
	2	1	1	0	6	2		$\cdots$ eA
	2	1	1	1	5	2		$\cdots$ A^2+eA
		2	8	1	6	7	2	$\cdots$ 残り (f の値 $-$ すぐ上の和)
			7	0	3	5	4	$\cdots$ 係数 e は上の段階より 1 桁右にずれる
							·	$\cdots$ 平方の小点
		2	8	1	6	7	2	$\cdots$ 前の残り
					2	4	0	$\cdots$ $2Ab$ ［$A=3\times 10$，$2A+e=70414$］
						1	6	$\cdots$ b^2 ［$281672\div 70414=4.0002\cdots\ \to b=4$］
		2	8	1	4	1	6	$\cdots$ eb
		2	8	1	6	7	2	$\cdots$ $2Ab+b^2+eb$
							0	$\cdots$ 残り (前の残り $-$ すぐ上の和)

となろう。

すなわち，$x^2+70354x=2393192$ の根は $x=34$ (もう 1 つは -70388) となる。

問題 2

辺および与えられた補足的な平面による立体の加法によって作用された，数において与えられた立方から解析的に辺を引き出すこと。

$1C+30N$ が 14,356,197 に等しくされると提示されるとしよう。$1N$ または提示された作用され 177
た立方の根はどれほどになるかが求められる。

すなわち，その平方および 30 が掛けられたある数が 14,356,197 になる［とき］，その数はいくつになるかが求められる。

((中略))

辺および補足的な平面による立体の加法によって作用された立方の分解の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0	0	立方の小点または個別の辺と同じ個数の零
N	2	4		
Q	4	16		
C	8	64		

補足的な平面					3	0			辺による立方または立方の位置と同じ個数の単独の辺の小点
						·	·	·	
分解されるであろう作用された立方	1	4	3	5	6	1	9	7	
		·	Q	N	·	Q	N	·	
		C'			C''			C'''	立方の小点
最初に取り去られるであろう立体		8							最初の辺の立方
					6	0			補足的な平面が掛けられた最初の辺
取り去られるであろう立体の和		8	0	0	6	0			
分解されるであろう作用された立方の残り		6	3	5	0	1	9	7	

II　第2の個別の辺の導出

除数のより上位の部分　補足的な平面						3	0		
							·	·	
分解されるであろう作用された立方の残り		6	3	5	0	1	9	7	
					·			·	
除数のより下位の部分　最初の辺の平方の3倍		1	2						
最初の辺の3倍				6					
除数の和		1	2	6	0	3	0		
取り去られるであろう立体		4	8						最初の辺の平方の3倍が掛けられた第2の辺
			9	6					最初の辺の3倍が掛けられた第2の辺の平方
				6	4				第2の辺の立方
					1	2	0		補足的な平面が掛けられた第2の辺
取り去られるであろう立体の和		5	8	2	5	2	0		
分解されるであろう作用された立方の残り			5	2	4	9	9	7	

いま引き出された2つの辺は1つのもののように実行され，それは［次のように］なる。

178 III　第2［の辺］のように，第3の個別の辺の導出

$$\left[\begin{array}{lrr} & 00 & 0 \\ \hline N & 24 & 3 \\ Q & 576 & 9 \\ C & & 27 \end{array}\right.$$

除数のより上位の部分	補足的な平面					3	0·	
分解されるであろう作用された立方の残り		5	2	4	9	9	7·	
除数のより下位の部分	最初の辺の平方の 3 倍	1	7	2	8			
	最初の辺の 3 倍				7	2		
除数の和		1	7	3	5	2	0	
取り去られるであろう立体		5	1	8	4			最初の辺の平方の 3 倍が掛けられた第 2 の辺
				6	4	8		最初の辺の 3 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
						2	7	第 2 の辺の立方
						9	0	補足的な平面が掛けられた第 2 の辺
分解されるであろう作用された立方の残りに等しい，取り去られるであろう立体の和		5	2	4	9	9	7	

それゆえ，$1C + 30N$ が 14,356,197 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 243 になる。

この後，係数 e が大きい数のときの例 —— $95400x + x^3 = 1819459$ —— が取り上げられるが，問題 1 の平方における場合と同様だから，ここでは省略。

作用された立方の解法は

$$(A \times 10 + b)^3 + e\,(A \times 10 + b) = \bigl(A^3 \times 10^3 + eA \times 10\bigr) + \bigl(3A^2b \times 10^2 + 3Ab^2 \times 10 + b^3 + eb\bigr)$$

に基づく。

なお，「補足的な○○」は係数を指しているが，同次元の法則のために，呼び方が変化する。例えば，ここでは $x^3 + ex$ は 3 次元であるから，1 次元の x に付随する係数 e は 2 次元とみなされ，「補足的な平面」といわれている。

問題 3 180

辺の平方および与えられた補足的な長さによる立体の加法によって作用された，数において与えられた立方から解析的に辺を引き出すこと。

$1C + 30Q$ が 86,220,288 に等しくされると提示されるとしよう。大きさ $1N$ または提示された作用された立方の根はどれほどになるかが求められる。すなわち，辺および 30 が掛けられたある数の平方が 86,220,288 になる［とき］，その数はいくつになるかが求められる。

((中略))

補足的な長さおよび辺の平方による立体の加法によって作用された立方の分解の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0	0	
N	4	3		立方の小点と同じ個数の零
Q	16	9		
C	64	27		

補足的な長さ			3	0					平方による
				・		・		・	立方と同じ個数の平方の位置または小点
分解されるであろう作用された立方	8	6	2	2	0	2	8	8	
		・	Q	N	・	Q	N	・	
		C'			C''			C'''	
取り去られるであろう立体	6	4							最初の辺の立方
		4	8	0					補足的な長さが掛けられた最初の辺の平方による立体
取り去られるであろう立体の和	6	8	8	0					
分解されるであろう作用された立方の残り	1	7	4	2	0	2	8	8	

II　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分：最初の辺の 2 倍が掛けられた補足的［な長さ］による補充的平面			2	4	0				
除数のより上位の部分：補足的な長さ					3	0			
						・		・	
分解されるであろう作用された立方の残り	1	7	4	2	0	2	8	8	
除数のより下位の部分：最初の辺の平方の 3 倍		4	8						
除数のより下位の部分：最初の辺の 3 倍			1	2					
除数の和		5	1	6	3				
除数が掛けられた，取り去られるであろう立体：より下位のそしてより重要な	1	4	4						最初［の辺］の平方の 3 倍が掛けられた第 2 の辺
		1	0	8					最初の辺の 3 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
				2	7				第 2 の辺の立方
除数が掛けられた，取り去られるであろう立体：より上位の			7	2	0				完成された平面が掛けられた第 2 の辺による立体
				2	7	0			補足的な長さが掛けられた第 2 の辺の平方
取り去られるであろう立体の和	1	6	2	5	4	0			
分解されるであろう作用された立方の残り		1	1	6	6	2	8	8	

いま引き出された2つの辺は1つのものまたは最初のもののように実行され，それは［次のように］なる。

III　第2［の辺］のように，第3の個別の辺の導出

	00	0
N	43	2
Q	1849	4
C		8

除数のより上位の部分	最初の辺の2倍が掛けられた補足的［な長さ］による補充的平面			2	5	8	0		
	補足的な長さ						3	0	
								·	
分解されるであろう作用された立方の残り		1	1	6	6	2	8	8	
除数のより下位の部分	最初の辺の平方の3倍		5	5	4	7			
	最初の辺の3倍				1	2	9		
	除数の和		5	8	1	8	2	0	
除数が掛けられた，取り去られるであろう立体	より下位の	1	1	0	9	4			最初［の辺］の平方の3倍が掛けられた第2の辺
					5	1	6		最初の辺の3倍が掛けられた第2の辺の平方
								8	第2の辺の立方
	より上位の			5	1	6	0		補充的平面が掛けられた第2の辺による立体
						1	2	0	補足的な長さが掛けられた第2の辺の平方
分解されるであろう作用された立方の残りに等しい，取り去られるであろう立体の和		1	1	6	6	2	8	8	

それゆえ，$1C + 30Q$ が 86,220,288 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完 182
全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 432 になる。

この後，係数 d が大きい数のときの例 —— $10000x^2 + x^3 = 5773824$ —— が取り上げられるが，ここでは省略。

作用された立方の解法は

$$(A \times 10 + b)^3 + d\,(A \times 10 + b)^2$$
$$= \left(A^3 \times 10^3 + dA^2 \times 10^2\right) + \left(3A^2b \times 10^2 + 3Ab^2 \times 10 + b^3 + 2dAb \times 10 + db^2\right)$$

に基づく。

そして，$(3A^2 + 3A)$ を除数の下位の部分，$(2dA + d)$ を除数の上位の部分と呼び，さらに，係数 d と辺の2倍 $2A$ との積である $2dA$ を補充的平面と呼んでいる。

なお，係数 d は平方に係るものだから，小点は1つおきに置かれ，右への移動は2桁ずつ行われる，ことに注意する。

183 **問題 4**

辺および与えられた補足的な立体による平面的平面の加法によって作用された，数において与えられた平方の平方から解析的に辺を引き出すこと。

作用された平方の平方は平面の根による作用された中間の立方によって作用された平方に還元することができるはずであるが，注意されていたように，ときには作用された平方の平方の分解そのものが同様に用いられることがある。というのも，まれに，立方に対する平面の根が有理数であるということが起こるからである。そして，平方の平方は単一に作用されるのだから，立方は二重に作用される。

それゆえ，$1QQ+1,000N$ が 355,776 に等しくされると提示されるとしよう。$1N$ または提示された作用された平方の平方の根はどれほどになるかが求められる。

すなわち，立方および 1,000 が掛けられたある数が 355,776 になる［とき］，その数がいくつになるかが求められる。

((中略))

184 **辺によって作用された平方の平方の分解の範例**

I　最初の個別の辺の導出

	0	0	
N	2	4	平方の平方の小点と同じ個数の零
Q	4	16	
	8	64	
	16	256	

補足的な立体		1	0	0	0		辺による平方の平方の位置または小点と同じ個数の単独の辺の小点
					·	·	
分解されるであろう作用された平方の平方	3	5	5	7	7	6	
		·	C	Q	N	·	
	QQ'					QQ''	平方の平方の小点
取り去られるであろう平面的平面	1	6					最初の辺の平方の平方
		2	0	0	0		補足的な立体が掛けられた最初の辺
取り去られるであろう平面的平面の和	1	8	0	0	0		
分解されるであろう作用された平方の平方の残り	1	7	5	7	7	6	

II　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分	補足的な立体			1	0	0	0·	
分解されるであろう作用された平方の平方の残り		1	7	5	7	7	6·	
除数のより下位の部分	最初の辺の立方の 4 倍		3	2				
	同じものの平方の 6 倍			2	4			
	最初の辺の 4 倍					8		
	除数の和		3	5	4	8	0	
取り去られるであろう平面的平面		1	2	8				最初の辺の立方の 4 倍が掛けられた第 2 の辺
			3	8	4			最初の平方の 6 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
				5	1	2		最初の辺の 4 倍が掛けられた第 2 の辺の立方
					2	5	6	第 2 の辺の平方の平方
				4	0	0	0	補足的な立体が掛けられた第 2 の辺
分解されるであろう作用された平方の平方の残りに等しい，取り去られるであろう平面的平面の和		1	7	5	7	7	6	

それゆえ，$1QQ + 1{,}000N$ が 355,776 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 24 になる。

この後，係数 e が大きい数のときの例 —— $100000x + x^4 = 2731776$ —— が取り上げられるが，ここでは省略。

作用された平方の平方の解法は

$$\begin{aligned}&(A \times 10 + b)^4 + e\,(A \times 10 + b)\\ &\quad = \left(A^4 \times 10^4 + eA \times 10\right) + \left(4A^3 b \times 10^3 + 6A^2 b^2 \times 10^2 + 4Ab^3 \times 10 + b^4 + eb\right)\end{aligned}$$

に基づく。

ここでは，$x^4 + ex$ は 4 次元だから，x は 1 次元なので，係数 e は「補足的な立体」と呼ばれている。

なお，最初の部分の「平方の平方の平方への還元」については「方程式の再検討および改良についての 2 つの論文」(*De Æquationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo*，1591 年) の第 2 論文「方程式の改良について」第 6 章を参照のこと。
例えば，$x^4 + b^3 x = z^4$ に対して，$\left(y^2\right)^3 + 4z^4\left(y^2\right) = b^4$ の根を $y = d$ とすると，$x^2 + dx = \dfrac{b^2}{2d} - \dfrac{1}{2d^2}$ となる。
すなわち，3 次方程式を介入させることによって，4 次方程式は 2 次方程式に還元できるということ。

186

問題 5

辺の立方および与えられた補足的な長さによる平面的平面の加法によって作用された，数において与えられた平方の平方から解析的に辺を引き出すこと。

$1QQ + 10C$ が 470,016 に等しくされると提示されるとしよう。大きさ $1N$ または提示された作用された平方の平方の根はどれほどになるかが求められる。すなわち，その根および 10 が掛けられたある数の立方が 470,016 になる［とき］，その数はいくつになるかが求められる。

((中略))

補足的な長さおよび辺の立方による平面的平面の加法によって作用された平方の平方の分解の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0	
N	2	4	平方の平方の
Q	4	16	小点と同じ個
C	8	64	数の零
QQ	16	256	

補足的な長さ	1	0	立方による
		·　　　·	平方の平方と同じ個数の立方の位置または小点
分解されるであろう作用された平方の平方	4 7	0 0 1 6	
	·	C Q N ·	
	QQ'	QQ''	
最初に取り去られるであろう平面的平面	1 6		最初の辺の平方の平方
	8	0	補足的な長さが掛けられた最初の辺による平面的平面
取り去られるであろう平面的平面の和	2 4	0	
分解されるであろう作用された平方の平方の残り	2 3	0 0 1 6	

除数のより上位の部分	最初の辺の平方の 3 倍が掛けられた補足的な長さによる補充的立体		1	2	0			
	最初の辺の 3 倍が掛けられた補足的な長さによる補充的平面				6	0		
	補足的な長さ					1	0	
分解されるであろう作用された平方の平方の残り		2	3	0	0	1	6	
除数のより下位のそしてより重要な部分	最初の辺の立方の 4 倍		3	2				
	最初の辺の平方の 6 倍			2	4			
	最初の辺の 4 倍					8		
	除数の和		4	7	0	9	0	
除数が掛けられた平面的平面	より下位の	1	2	8				最初の辺の立方の 4 倍が掛けられた第 2 の辺
			3	8	4			最初の平方の 6 倍が掛けられた第 2 の平方
				5	1	2		最初の辺の 4 倍が掛けられた第 2 の立方
					2	5	6	第 2 の平方の平方
	より上位の		4	8	0			補充的立体が掛けられた第 2 の辺
				9	6	0		補充的平面が掛けられた第 2 の平方
					6	4	0	補足的な長さが掛けられた第 2 の立方
分解されるであろう作用された平方の平方の残りに等しい，取り去られるであろう平面的平面の和		2	3	0	0	1	6	

それゆえ，もし $1QQ + 10C$ が 470,016 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 24 になる。

作用された平方の平方の解法は

$$
\begin{aligned}
&(A \times 10 + b)^4 + c\,(A \times 10 + b)^3 \\
&\quad = \left(A^4 \times 10^4 + cA^3 \times 10^3\right) \\
&\qquad + \left(4A^3 b \times 10^3 + 6A^2 b^2 \times 10^2 + 4Ab^3 \times 10 + b^4 \right. \\
&\qquad \left. + 3cA^2 b \times 10^2 + 3cAb^2 \times 10 + cb^3\right)
\end{aligned}
$$

に基づく。

ここで，$3cA^2$ が補充的立体で，$3cA$ が補充的平面である。

問題 6

1 つは辺および与えられた補足的な立体による，もう 1 つは辺の平方および与えられた補足的な平面による，2 つの平面的平面の加法によって作用された，数において与えられた平方の平方から解析的に辺を引き出すこと。

自分自身の平方および 200 が掛けられたある数の平方が 446,976 になる［とき］，その数はいくつになるかが求められる。

記号では，$1QQ + 200Q$ が 446,976 に等しくされる［とき］，単一の $1N$ はいくつになるか。

このような種類の問題は特別な説明は必要ない。なぜならば，もし $1QQ + 200Q$ が 446,976 に等しくされるならば，それゆえ，$1Q + 200N$ が 446,976 に等しくされるであろうからである。そして，$1N$ ははじめに求められた辺の平方であると理解されるであろう。

しかし，辺の平方および与えられた補足的な平面による平面的平面の作用によって，辺および与えられた補足的な立体による平面的平面の作用が混ぜ合わされるとき，［次の］命題におけるように，特別な解析が必要である。

ある数が，その立方および 100 が掛けられて，200 が掛けられたその平方の積が加えられると，449,376 になる［とき］，その数はいくつになるかが求められる。

((中略))

188 **平方とともに辺によっても作用された平方の平方の分解の範例**

I　最初の個別の辺の導出

	0	0	
N	2	4	平方の平方の
Q	4	16	小点と同じ個
C	8	64	数の零
QQ	16	256	

補足的な長さ		2	0	0			平方による
				・		・	平方の平方と同じ個数の平方の小点
補足的な立体			1	0	0		辺による
					・	・	平方の平方と同じ個数の単独の辺の小点
分解されるであろう作用された平方の平方	4	4	9	3	7	6	
		・	C	Q	N	・	
		QQ'				QQ''	
取り去られるであろう平面的平面	1	6					最初の辺の平方の平方
		8	0	0			補足的な平面が掛けられた最初の辺の平方
			2	0	0		補足的な立体が掛けられた最初の辺
取り去られるであろう［平面的］平面の和	2	4	2	0	0		
分解されるであろう作用された平方の平方の残り	2	0	7	3	7	6	

除数のより上位の部分	最初の辺の 2 倍が掛けられた補足的な平面による補充的立体			8	0	0		
	補足的な平面				2	0	$\underset{\cdot}{0}$	
	補足的な長さ				1	0	$\underset{\cdot}{0}$	
分解されるであろう作用された平方の平方の残り		2	0	7	3	7	6	
除数のより下位の部分	最初の辺の立方の 4 倍		3	2				
	同じものの平方の 6 倍			2	4			
	最初の辺の 4 倍					8		
	すべての除数の和		4	2	7	8	0	
除数が掛けられた平面的平面	より下位の	1	2	8				最初の立方の 4 倍が掛けられた第 2 の辺
			3	8	4			最初の平方の 6 倍が掛けられた第 2 の平方
				5	1	2		最初の辺の 4 倍が掛けられた第 2 の立方
					2	5	6	第 2 の平方の平方
	より上位の		3	2	0	0		補充的立体が掛けられた第 2 の辺
				3	2	0	0	補足的な平面が掛けられた第 2 の辺の平方
					4	0	0	補足的な立体が掛けられた第 2 の辺
分解されるであろう作用された平方の平方の残りに等しい，取り去られるであろう平面的平面の和		2	0	7	3	7	6	

それゆえ，もし $1QQ + 200Q + 100N$ が 449,376 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 24 になる。

作用された平方の平方の解法は

$$\begin{aligned}&(A \times 10 + b)^4 + d\,(A \times 10 + b)^2 + e\,(A \times 10 + b)\\ &\quad = \left(A^4 \times 10^4 + dA^2 \times 10^2 + eA \times 10\right)\\ &\qquad\qquad + \big(4A^3 b \times 10^3 + 6A^2 b^2 \times 10^2 + 4Ab^3 \times 10 + b^4\\ &\qquad\qquad + 2dAb \times 10 + db^2 + eb\big)\end{aligned}$$

に基づく。

解法はこれまでのものと同様であるが，平方 x^2 の小点は 1 つおき，x の小点は空きなしに置かれることに注意する。

例えば，$x^4 + 27x^2 + 64x = 2126556$ の解法は次のとおり。

			2	7			$\cdots$ x^2 の係数 d
				・		・	$\cdots$ 平方 x^2 の小点 (d に係る値の基準位置) は 1 つおきに
				6	4		$\cdots$ x の係数 e
					・	・	$\cdots$ x の小点 (e に係る値の基準位置) は空きなしに
2	1	2	6	5	5	6	$\cdots$ 定数 f の値
	8	1					$\cdots$ A^4 ［$3^4 \leqq 212 < 4^4 \to A = 3$，区切り線の左から］
		2	4	3			$\cdots$ dA^2 ［平方の小点の位置から］
			1	9	2		$\cdots$ eA ［小点の位置から］
	8	3	6	2	2		$\cdots$ $A^4 + dA^2 + eA$
1	2	9	0	3	3	6	$\cdots$ 残り (f の値 $-$ すぐ上の和)
			1	6	2	0	$\cdots$ $2dA$ ［$A = 3 \times 10$］
					2	7	$\cdots$ d
					6	4	$\cdots$ e
	1	0	8	0	0	0	$\cdots$ $4A^3$
			5	4	0	0	$\cdots$ $6A^2$
				1	2	0	$\cdots$ $4A$
	1	1	5	2	3	1	$\cdots$ $2dA + d + e + 4A^3 + 6A^2 + 4A$ (除数の和)
	8	6	4	0	0	0	$\cdots$ $4A^3b$ ［$A = 3 \times 10$，$b = 8$］
	3	4	5	6	0	0	$\cdots$ $6A^2b^2$
		6	1	4	4	0	$\cdots$ $4Ab^3$
			4	0	9	6	$\cdots$ b^4
		1	2	9	6	0	$\cdots$ $2dAb$
			1	7	2	8	$\cdots$ db^2
				5	1	2	$\cdots$ eb
1	2	9	0	3	3	6	$\cdots$ 上の 7 つの和
						0	$\cdots$ 残り (前の残り $-$ すぐ上の和)

第 2 の段階へ進むときの b の値は，$1290336/115231 = 11.1978\cdots$ だが，$b = 8$ となる。ここはやはり試行錯誤なのか。

すなわち，$x^4 + 27x^2 + 64x = 2126556$ の 1 つの解は $x = 38$ となる。

190 **問題 7**

辺および与えられた補足的な平面的平面による平面的立体の加法によって作用された，数において与えられた平方の立方から解析的に辺を引き出すこと。

その平方の平方および 500 が掛けられたある数が 254,832 になる［とき］，その数はいくつになるかが求められる。

記号では，$1QC + 500N$ が 254,832 に等しくされる［とき］，単一の $1N$ はいくつになるか。

((中略))

辺によって作用された平方の立方の分解の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0	平方の立方の小点と同じ個数の零
N	1	2	
Q	1	4	
C	1	8	
QQ	1	16	
QC	1	32	

補足的な平面的平面				5	0	0		辺による平方の立方と同じ個数の単独の辺の小点
						・	・	
分解されるであろう作用された平方の立方	2	5	4	8	3	2		
	・	QQ	C	Q	N	・		
	QC'				QC''			平方の立方の小点
取り去られるであろう平面的立体	1							最初の辺の平方の立方
			5	0	0			補足的な平面的平面が掛けられた最初の辺
取り去られるであろう平面的立体の和	1	0	5	0	0			
分解されるであろう作用された平方の立方の残り	1	4	9	8	3	2		

II　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分	補足的な平面的平面				5	0	0
							・
	分解されるであろう作用された平方の立方の残り	1	4	9	8	3	2
除数のより下位のそしてより重要な部分	最初の辺の平方の平方の 5 倍		5				
	同じものの立方の 10 倍		1	0			
	同じものの平方の 10 倍			1	0		
	最初の辺の 5 倍					5	
	すべての除数の和		6	1	5	5	0

191

除数が掛けられた，取り去られるであろう平面的立体	より下位の	1	0					最初の平方の平方の 5 倍が掛けられた第 2 の辺
			4	0				最初の立方の 10 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
				8	0			最初の平方の 10 倍が掛けられた第 2 の辺の立方
					8	0		最初の辺の 5 倍が掛けられた第 2 の辺の平方の平方
						3	2	第 2 の辺の平方の立方
	より上位の			1	0	0	0	補足的な平面的平面が掛けられた第 2 の辺
分解されるであろう作用された平方の立方の残りに等しい，取り去られるであろう平面的立体の和		1	4	9	8	3	2	

それゆえ，もし $1QC + 500N$ が 254,832 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 12 になる。

問題 8

辺の立方および与えられた補足的な平面による平面的立体の加法によって作用された，数において与えられ t ら平方の立方から解析的に辺を引き出すこと。

その平方および 5 が掛けられたある数の立方が 257,472 になる，記号では $1QC + 5C$ が 257,472 に等しくされる［とき］，その数はいくつになるかが求められる。

((中略))

192 立方によって作用された平方の立方の分解の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0	
N	1	2	平方の立方の小点と同じ個数の零
Q	1	4	
C	1	8	
QQ	1	16	
QC	1	32	

補足的な平面			5				立方による
			・			・	平方の立方と同じ個数の立方の小点
分解されるであろう作用された平方の立方	2	5	7	4	7	2	
	・	QQ	C	Q	N	・	
	QC'					QC''	平方の立方の小点
取り去られるであろう平面的立体	1						最初の辺の平方の立方
			5				補足的な平面が掛けられた最初の辺の立方
取り去られるであろう平面的立体の和	1	0	5				
分解されるであろう作用された平方の立方の残り	1	5	2	4	7	2	

II　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分	最初の辺の平方の 3 倍が掛けられた補足的な平面による補充的平面的平面			1	5			
	最初の辺の 3 倍が掛けられた補足的な平面による補充的立体				1	5		
	補足的な平面						5	
							·	
分解されるであろう作用された平方の立方の残り		1	5	2	4	7	2	
除数のより下位のそしてより重要な部分	最初の辺の平方の平方の 5 倍		5					
	同じものの立方の 10 倍		1	0				
	同じものの平方の 10 倍			1	0			
	最初の辺の 5 倍					5		
	すべての除数の和		6	2	7	0	5	
除数が掛けられた，取り去られるであろう平面的立体	より下位の	1	0					最初の平方の平方の 5 倍が掛けられた第 2 の辺
			4	0				最初の立方の 10 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
				8	0			最初の平方の 10 倍が掛けられた第 2 の辺の立方
					8	0		最初の辺の 5 倍が掛けられた第 2 の辺の平方の平方
						3	2	第 2 の辺の平方の立方
	より上位の			3	0			補充的平面的平面が掛けられた第 2 の辺
					6	0		補充的立体が掛けられた第 2 の平方
						4	0	補足的な平面が掛けられた第 2 の立方
分解されるであろう作用された平方の立方の残りに等しい，取り去られるであろう平面的立体の和		1	5	2	4	7	2	

193

それゆえ，もし $1QC + 5C$ が 257,472 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 12 になる。

問題 9

辺および与えられた補足的な平面的立体による立体的立体の加法によって作用された，数において与えられた立方の立方から解析的に辺を引き出すこと。

その平方の立方および 6,000 が掛けられたある数が 191,246,976 になる［とき］，その数はいく

つになるかが求められる。

記号では，$1CC+6,000N$ が 191,246,976 に等しくされる［とき］，単一の $1N$ はいくつになるか。

((中略))

194 **辺によって作用された立方の立方の分解の範例**

I　最初の個別の辺の導出

	0	0	
N	2	4	
Q	4	16	立方の立方の
C	8	64	小点と同じ個
QQ	16	256	数の零
QC	32	1024	
CC	64	4096	

補足的な平面的立体					6	0	0	0		辺による
								·	·	立方の立方と同じ個数の単独の辺の小点
	1	9	1	2	4	6	9	7	6	
			·	QC	QQ	C	Q	N	·	
			CC'						CC''	平方の立方の小点
取り去られるであろう立体的立体		6	4							最初の辺の立方の立方
				1	2	0	0	0		補足的な立体が掛けられた最初の辺
取り去られるであろう立体的立体の和		6	4	1	2	0	0	0		
分解されるであろう作用された立方の立方の残り	1	2	7	1	2	6	9	7	6	

II　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分	補足的な平面的立体						6	0	0	0
										·
分解されるであろう作用された立方の立方の残り		1	2	7	1	2	6	9	7	6
除数のより下位の部分	最初の辺の平方の立方の 6 倍		1	9	2					
	同じものの平方の平方の 15 倍			2	4	0				
	同じものの立方の 20 倍				1	6	0			
	同じものの平方の 15 倍						6	0		
	最初の辺の 6 倍							1	2	
除数の和			2	1	7	7	2	1	2	0

除数が掛けられた，取り去られるであろう立体的立体	より下位の		7	6	8						最初の平方の立方の 6 倍が掛けられた第 2 の辺
			3	8	4	0					最初の平方の平方の 15 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
			1	0	2	4	0				最初の立方の 20 倍が掛けられた第 2 の辺の立方
				1	5	3	6	0			最初の平方の 15 倍が掛けられた第 2 の辺の平方の平方
					1	2	2	8	8		最初の辺の 6 倍が掛けられた第 2 の平方の立方
							4	0	9	6	第 2 の辺の立方の立方
	より上位の					2	4	0	0	0	補足的な平面的立体が掛けられた第 2 の辺
分解されるであろう作用された立方の立方の残りに等しい，取り去られるであろう立体的立体の和		1	2	7	1	2	6	9	7	6	

それゆえ，もし $1CC + 6,000N$ が 191,246,976 に等しくされるならば，［先に］観察されたこと 195
によって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 24 になる。

否定的に作用されたベキの分解

問題 10

辺および与えられた補足的な長さによる平面の減法によって作用された，数において与えられた平方から解析的に辺を引き出すこと。

$1Q - 7N$ が 60,750 に等しくされると提示される［とき］，大きさ $1N$ または提示された作用された平方の根はどれほどになるかが求められる。

それゆえ，否定的に作用された平方 60,750 から辺が探し出されるために［行われる操作の］進め方は (はじめに明らかにしておくと)，除法のときに注意が払われる補足的なものおよび純粋な平方［の分解］における標準的な除数との —— 肯定的に作用された平方におけるような —— 和ではなく差［が用いられること］を除いて，肯定的に作用された平方の分解において［の操作］と完全に同じであろう。

そして，引き出された個別の辺が補足的なものに掛けられるとき，そこからつくられる平面は，そうでなければ取り除かれたであろう，補足的なものの位置の下に置かれ，提示された否定的に作用された平方に加えられるであろう。［次の］範例におけるように。

辺によって否定的に作用された平方の分解の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0	0	平方の小点または個別の辺と同じ個数の零
N	2	5	0	
Q	4	25		

補足的な長さ				7			辺による
				・	・	・	平方と同じ個数の辺の小点
分解されるであろう作用された平方		6	0	7	5	0	
		・	N	・	N	・	
		Q'		Q''		Q'''	平方の小点
回復すべき平面	取り去られる	4					最初の辺の平方
	加えられる		1	4			補足的なものが掛けられた最初の辺
取り去られる平面の超過分		3	8	6			
分解されるであろう平方の残り		2	2	1	5	0	

II　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分	補足的な長さ				7		
					・	・	
分解されるであろう平方の残り		2	2	1	5	0	
				・		・	
除数のより下位の部分	最初の辺の 2 倍		4				
より下位の除数の超過分			3	9	3	0	
取り去られるであろう平面		2	0				最初の 2 倍が掛けられた第 2 の辺
			2	5			第 2 の辺の平方
196 取り去られるであろう平面の和		2	2	5			
加えられる平面				3	5		補足的なものが掛けられた第 2 の辺
取り去られる平面の超過分		2	2	1	5		
分解されるであろう作用された平方の残り						0	

［平方の残りが］なくなり，しかも平方の小点が残っているけれども，引き出された 2 つの辺は 1 つのもののように［操作が］遂行され，残りが探し求められるであろうとき，それは 0 であろう。それゆえ，もし $1Q - 7N$ が 60,750 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 250 になる。

> $x^2 - ex = f$ の解法は
> $$(A \times 10 + b)^2 - e\,(A \times 10 + b) = \big(A^2 \times 10^2 - eA \times 10\big) + \big(2Ab \times 10 + b^2 - eb\big)$$
> に基づいて行われるのであるが，係数 e に係わる項は加法ではなく減法が行われるということに注意すれば，問題 1 の $x^2 + ex = f$ の解法と「完全に同じ」になるという。

ときには補足的な長さが，否定的に作用された平方の 2 つずつ［の数字の個数］より，1 つずつの数字［の個数］が多いということが起きることがある。それは，作用している平面が分解されるであろう否定的に作用された平方より大きいということの証拠であり，［そのような平方は］適切に，前部を欠いた平方 (acephalum quadratum) といわれるべきである。それゆえ，［平方の］分解のために，補足的な長さの単一な数字の個数と同じ数の平方の小点が先端に付けられるであろうこ

とを要求するように，それだけ多くの零が提示された切断された平方の前に置かれるであろう。そして，補足的な長さの，左から右に進むときの，最初の数字が分解されるであろう否定的に作用された平方の最初の個別の辺と定められるであろう。その他の点は，［次の］調査におけるように，説明された上述の方法と変わることはない。

> acephalus, acephala, acephalum (adj) : *without head*, *without chief* or *leader*; *lacking head (leader)*, *lacking the first syllable*, *beginning short syllable*
> ἀκέφαλος : *headless*, *without beginning*, *without peroration*, of verses *which lack the first mora*, sect *with no known head*, *without head*

240 が取り去られた自分自身が掛けられたある数が 48 になる［とき］，その数はいくつになるかが求められる。平方 484 は辺および 240 による平面が罰せられて［取り去られて］いた。さらに，補足的な長さ 240 は 3 つの数字からなり，平面 484 は先端に付けられる平方の小点が 2 つだけであるから，平面 $240N$ は分解されるであろう平面の大きさ 484 より大きい。それゆえ，2 つの零が平面 484 の前に置かれるであろうし，そして，ようやくそのとき，その補足的なものの位置が割り当てられ，もしその他のものが調和するならば，その最初の数字またはそうでなければより大きく最も近いものが切断された平方の最初の辺に付け加えられるであろう

前部を欠いた平方の分解の範例

I　最初の辺の導出

$$\left[\begin{array}{c|ccc} & 0 & 0 & 0 \\ \hline N & 2 & 4 & 0 \\ Q & 4 & 16 & \end{array}\right.$$

補足的な長さ		2	4	0			辺による
				·	·	·	
分解されるであろう前部を欠いた平方		0	0	4	8	4	
		·	N	·	N	·	
回復すべき平面	取り去られる	4					最初の辺の平方
	加えられる	4	8	0			補足的な長さが掛けられた最初の辺
加えられる［平面の］超過分			8	0			
回復される切断された平方の残り			8	4	8	4	

II　第 2 の辺の導出

除数のより上位の部分	補足的なもの	2	4	0	
				·	·
分解されるであろう回復される切断された平方の残り		8	4	8	4
			·		·
除数のより下位の部分	最初の辺の 2 倍	4			
除数のより下位［の部分］の超過分		1	6		

取り去られるであろう平面	1	6				最初の 2 倍が掛けられた第 2 の辺
		1	6			第 2 の辺の平方
197 取り去られるであろう平面の和	1	7	6			
加えられるであろう平面		9	6			補足的な長さが掛けられた第 2 の辺
取り去られるであろう［平面の］超過分		8	0			
分解されるであろう作用された平方の残り			4	8	4	

III　あたかも第 2［の辺］のように，第 3 の辺の導出

	00	0
N	24	2
Q	576	4

除数のより上位の部分	補足的なもの	2	4	0	
				·	
分解されるであろう作用された平方の残り		4	8	4	
				·	
除数のより下位の部分	最初の辺の 2 倍	4	8		
除数のより下位［の部分］の超過分		2	4	0	
取り去られるであろう平面		9	6		最初の 2 倍が掛けられた第 2 の辺
				4	第 2 の辺の平方
取り去られるであろう平面の和		9	6	4	
加えられるであろう平面		4	8	0	補足的な長さが掛けられた第 2 の辺
分解されるであろう平方の残りに等しい，加えられるであろう超過分		4	8	4	

それゆえ，もし $1Q - 240N$ が 484 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 242 になる。

しかし，たとえ，分解が行われる，否定的に作用された平方が補足的な長さの個別［の数字］と同じ個数の 2 つずつの数字からなるとしても，それにもかかわらず，ときには，もし解析学者がその方法を持っていなかったならば，探し求められるであろう根にだまされるであろうこともまれではないように，補足的なものがその位置を飛び出すことがある。それゆえ，この場合のように，提示された否定的に作用された平方は補足的な長さそのものの平方によって大きくされるものと理解されるべきである。さらに，そのように大きくされたものから引き出されることになる辺は適切なものかあるいはほとんど適切なもののいずれかであろう。

例えば，もし $1Q - 60N$ が 1,600 に等しくされると提示されるとするならば，技法が要求するように数字が整えられる必要があり，［それは］確かに

	6	0	
		·	·
1	6	0	0
	·		·

［となる］。16 が加えられた，6 の平方は 52 になり，さらに，平方 52 に最も近くて最も大きい辺は 8 であるから，私は，辺を 8 と定める。操作の継続は確かにこれが十分にふさわしいものであることを明らかにするであろう。

しかし，除法によって出現する長さはただ 2 であるか，またはやっと 3 であった。それゆえ，そ［れを見出すため］のコツは比較の補正 (epanorthicum) であり，その結果，肯定的に作用された平方においても同様に，もし論理学者がそれを利用するのであれば，特に補足的なものがより前の方に飛び出すときに，それらはたいていはより精巧なものになるであろうし，除法は間違ったものであるはずがない。しかし，そのとき，つくられたもの［積］の和ではなく，差が利用されるであろう。

> epanorthosis, -is, f : 換語［ある語 (句) をすぐ後でより適当な語 (句) に言い直すこと］。*a correction of one's self in speaking*
> ἐπανόρθωσις : *setting right, correcting, revisal*
> ἐπανορθόω : *correct, amend, revise, supply, to set up again, restore*

$1Q + 8N$ が 128 に等しくされると提示されるとすると，移動の後で技法が要求するように数字が整えられる必要があり，［それは］疑いもなく

$$\begin{array}{ccc} & & 8 \\ \hline 1 & 2 & \underset{\cdot}{8} \end{array}$$

［となる］。平面 128 および補足的なもの 8 による平方 64 の間の差は 64 であるから，それゆえ，根 8 が選ばれるであろう。

例えば，$x^2 - 27x = 1300$ の場合は ⋯⋯

	2	7		⋯ x の係数 e
		·	·	⋯ x の小点 (e に係る値の基準位置)
1	3	0	0	⋯ 定数 f の値
	·		·	⋯ x^2 の小点 (e に係らない値の基準位置)
2	5			⋯ A^2 ［$13 + 2^2 = 17 < 25 = 5^2 \to A = 5$］ (取り去られる値)
1	3	5		⋯ eA (加えられる値)
1	1	5		⋯ $A^2 - eA$ (最終的に取り去られる値)
	1	5	0	⋯ 残り (f の値 − すぐ上の差)
	1	0	0	⋯ $2A$ ［$A = 5 \times 10$］
		2	7	⋯ e
		7	3	⋯ $2A - e$ ［残り$/(2A-e) = 150/73 = 2.0547\cdots \to b = 2$］
	2	0	0	⋯ $2Ab$ (取り去られる値)
			4	⋯ b^2 (取り去られる値)
		5	4	⋯ eb (加えられる値)
	1	5	0	⋯ $(2Ab + b^2) - eb$ (最終的に取り去られる値)
			0	⋯ 残り (前の残り − すぐ上の値)

となろう。
すなわち，$x^2 - 27x = 1300$ の 1 つの解は $x = 52$ (もう 1 つは -25) となる。

198 **問題 11**

辺および与えられた補足的な平面による立体の減法によって作用された，数において与えられた立方から解析的に辺を引き出すこと。

$1C-10N$ が 13,584 に等しくされると提示されるとしよう。大きさ $1N$ または提示された作用された立方の根はどれほどになるかが求められる。

((中略))

補足的な平面および辺による立体の減法によって作用された立方の分解の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0	立方の小点ま
N	2	4	たは個別の辺
Q	4	16	と同じ個数の
C	8	64	零

補足的な平面			1	0		辺による
				・	・	立方と同じ個数の単独の辺の小点
分解されるであろう作用された立方	1	3	5	8	4	
		・	Q	N	・	立方の小点
		C'			C''	
回復すべき立体 取り去られる		8				最初の辺の立方
回復すべき立体 加えられる			2	0		補足的な平面が掛けられた最初の辺
取り去られる立体の超過分		7	8	0		
分解されるであろう作用された立方の残り		5	7	8	4	

II　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分 補足的な平面				1	0	
					・	
分解されるであろう作用された立方の残り		5	7	8	4	
					・	
除数のより下位の部分 最初の辺の平方の 3 倍		1	2			
除数のより下位の部分 最初の辺の 3 倍				6		
除数の差		1	2	5	0	
取り去られるであろう立体		4	8			最初の平方の 3 倍が掛けられた第 2 の辺
取り去られるであろう立体			9	6		最初の辺の 3 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
取り去られるであろう立体				6	4	第 2 の辺の立方

取り去られるであろう［立体の］和	5	8	2	4	
加えられるであろう立体			4	0	補足的な平面が掛けられた第 2 の辺
分解されるであろう作用された立方の残りに等しい，取り去られるであろう［立体の］超過分	5	7	8	4	

それゆえ，もし $1C - 10N$ が 13,584 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完 199
全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 24 になる。

この後，前部を欠いた立方の方程式の例 —— $x^3 - 116620x = 352947$ —— が取り上げられ，$x^3 - 6400x = 153000$，$x^3 + 64x = 1024$ について前問題と同様の注意が述べられるが，ここでは省略。

問題 12 201

平方および与えられた補足的な長さによる立体の減法によって作用された，数において与えられた立方から解析的に辺を引き出すこと。

$1C - 7Q$ が 14,580 に等しくされると提示されるとしよう。大きさ $1N$ または提示された作用された立方の根はどれほどになるかが求められる。

((中略))

平方によって否定的に作用された立方の分解の範例

I　最初の辺の導出

	0	0	立方の小点ま
N	2	7	たは個別の辺
Q	4	49	と同じ個数の
C	8	343	零

補足的な長さ			7			平方による
			·		·	立方と同じ個数の平方の小点
	1	4	5	8	0	
		·	Q	N	·	
		C'			C''	
回復すべき立体：取り去られる		8				最初の辺の立方
回復すべき立体：加えられる		2	8			補足的なものが掛けられた最初の辺の平方
取り去られる立体の超過分		5	2			
分解されるであろう作用された立方の残り		9	3	8	0	

II　第 2 の辺の導出

除数のより上位の部分	最初の辺の 2 倍が掛けられた補足的なものによる補充的平面			2	8		
	補足的な長さ					7.	
分解されるであろう作用された立方の残り			9	3	8	0.	
除数のより下位の部分	最初の辺の平方の 3 倍		1	2			
	最初の辺の 3 倍				6		
除数のより下位［の部分］の超過分				9	7	3	
202 取り去られるであろう立体			8	4			最初の平方の 3 倍が掛けられた第 2 の辺
			2	9	4		最初の辺の 3 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
				3	4	3	第 2 の辺の立方
取り去られるであろう［立体の］和		1	1	6	8	3	
加えられるであろう立体			1	9	6		補充的平面が掛けられた第 2 の辺
				3	4	3	補足的な長さが掛けられた第 2 の辺の平方
加えられるであろう［立体の］和			2	3	0	3	
分解されるであろう作用された立方の残りに等しい，取り去られるであろう［立体の］超過分			9	3	8	0	

それゆえ，もし $1C-7Q$ が 14,580 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 27 になる。

この後，前部を欠いた立方の方程式の例 —— $x^3-10x^2=288$ —— が取り上げられ，$x^3-7x^2=720$ の解法の図表が示された後，$x^3+8x^2=1024$ についての注意が述べられるが，ここでは省略。

否定的および肯定的［な作用］が入り混じって作用されたベキの解析。

205 **問題 13**

辺および与えられた補足的な立体による平面的平面の加法，さらに，立方および与えられた補足的な長さによる平面的平面の減法によって作用された，数において与えられた平方の平方から解析的に辺を引き出すこと。

$1QQ-68C+202,752N$ が 5,308,416 に等しくされると提示されるとしよう。$1N$ または提示された立方によって否定的にそして辺によって肯定的に作用された平方の平方の辺はどれほどになるかが求められる。

((中略))

辺によって肯定的にそして立方によって否定的に
二重に作用された平方の平方の分解の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0
N	3	2
Q	9	4
C	27	8
QQ	81	16

− 補足的な長さ			6	8				立方による
				·			·	
＋ 補足的な立体	2	0	2	7	5	2		辺による
						·	·	
分解されるであろう作用された平方の平方	5	3	0	8	4	1	6	
			·	C	Q	N	·	
			QQ'				QQ''	
取り去られるであろう平面的平面		8	1					最初の辺の平方の平方
	6	0	8	2	5	6		補足的な立体が掛けられた最初の辺
取り去られるであろう和	6	8	9	2	5	6		
加えられるであろう平面的平面	1	8	3	6				補足的な長さが掛けられた最初の辺の立方
取り去られるであろう［平面的平面の］超過分	5	0	5	6	5	6		
分解されるであろう作用された平方の平方の残り		2	5	1	8	5	6	

II　第 2 の個別の辺の導出 206

除数のより上位の部分	− 最初の辺の平方の 3 倍が掛けられた補足的な長さによる補充的立体		1	8	3	6		
	− 最初の辺の 3 倍が掛けられた補足的なものによる補充的平面				6	1	2	
	− 補足的な長さ						6	8
								·
＋ 補足的な立体			2	0	2	7	5	2
								·
分解されるであろう作用された平方の平方の残り			2	5	1	8	5	6
								·

除数のより下位の部分	最初の辺の立方の 4 倍	1	0	8				
	同じものの平方の 6 倍			5	4			
	最初の辺の 4 倍				1	2		
肯定的に作用する除数の和		3	1	6	2	7	2	
否定的に作用する除数の和		1	8	9	7	8	8	
肯定的に作用する除数の超過分		1	2	6	4	8	4	
除数から取り去られるであろう平面的平面	より下位の	2	1	6				最初の立方の 4 倍が掛けられた第 2 の辺
			2	1	6			最初の平方の 6 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
					9	6		最初の辺の 4 倍が掛けられた第 2 の辺の立方
						1	6	第 2 の辺の平方の平方
	より上位の	4	0	5	5	0	4	補足的な立体が掛けられた第 2 の辺
取り去られるであろう平面的平面の和		6	4	4	0	8	0	
加えられるであろう平面的平面		3	6	7	2			補充的立体が掛けられた第 2 の辺
			2	4	4	8		補充的平面が掛けられた第 2 の辺の平方
					5	4	4	補足的なものが掛けられた第 2 の辺の立方
加えられるであろう平面的平面の和		3	9	2	2	2	4	
分解されるであろう作用された平方の平方の残りに等しい，取り去られるであろう超過分		2	5	1	8	5	6	

それゆえ，もし $1QQ - 68C + 202,752N$ が 5,308,416 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 32 になる。

207 **問題 14**

辺および与えられた補足的な立体による平面的平面の減法，さらに，立方および与えられた補足的な長さによる平面的平面によって作用された，数において与えられた平方の平方から解析的に辺を引き出すこと。

$1QQ + 10C - 200N$ が 1,369,856 に等しくされると提示されるとしよう。$1N$ または提示された立方によって肯定的にそして辺によって否定的に作用された平方の平方の辺はどれほどになるかが求められる。

((中略))

立方によって肯定的にそして辺によって否定的に
二重に作用された平方の平方の分解の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0
N	3	2
Q	9	4
C	27	8
QQ	81	16

+ 補足的な長さ			1	0				立方による
				·			·	
− 補足的な立体				2	0	0		辺による
						·	·	
分解されるであろう作用された平方の平方	1	3	6	9	8	5	6	
			·	C	Q	N	·	
			QQ'				QQ''	
取り去られるであろう平面的平面		8	1					最初の辺の平方の平方
		2	7	0				補足的な長さが掛けられた最初の辺の立方
取り去られるであろう平面的平面の和	1	0	8	0				
加えられるであろう平面的平面				6	0	0		補足的な立体が掛けられた最初の辺
取り去られるであろう［平面的平面の］超過分	1	0	7	4	0	0		
分解されるであろう作用された平方の平方の残り		2	9	5	8	5	6	

II　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分	+ 最初の辺の平方の 3 倍が掛けられた補足的な長さによる補充的立体			2	7	0		
	+ 最初の辺の 3 倍が掛けられた補足的な長さによる補充的平面					9	0	
	+ 補足的な長さ						1	0
								·
	− 補足的な立体					2	0	0
								·
分解されるであろう作用された平方の平方の残り			2	9	5	8	5	6
								·

208

除数のより下位の部分	最初の辺の立方の 4 倍	1	0	8				
	同じものの平方の 6 倍			5	4			
	最初の辺の 4 倍				1	2		
肯定的に作用する除数の和		1	4	1	4	3	0	
否定的に作用する除数					2	0	0	
肯定的に作用する除数の超過分		1	4	1	2	3	0	
除数から取り去られるであろう平面的平面	より下位の	2	1	6				最初の辺の立方の 4 倍が掛けられた第 2 の辺
			2	1	6			最初の平方の 6 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
					9	6		最初の辺の 4 倍が掛けられた第 2 の辺の立方
						1	6	第 2 の辺の平方の平方
	より上位の		5	4	0			補充的立体が掛けられた第 2 の辺
				3	6	0		補充的平面が掛けられた第 2 の辺の平方
						8	0	補足的な長さが掛けられた第 2 の辺の立方
取り去られるであろう平面的平面の和		2	9	6	2	5	6	
加えられるであろう平面的平面					4	0	0	補足的な立体が掛けられた第 2 の辺
分解されるであろう作用された平方の平方の残りに等しい，取り去られるであろう超過分		2	9	5	8	5	6	

それゆえ，もし $1QQ + 10C - 200N$ が 1,369,856 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 32 になる。

問題 15

辺および与えられた補足的な平面的平面による平面的立体の加法，さらに，辺の立方および与えられた補足的な平面による平面的立体の減法によって作用された，数において与えられた平方の立方から解析的に辺を引き出すこと。

その平方の平方および 500 が掛けられ，その立方に 5 が掛けられた積が取り去られたある数が 7,905,504 になる［とき］，その数はいくつになるかが求められる。

記号では，$1QC - 5C + 500N$ が 7,905,504 に等しくされる［とき］，単一の $1N$ はいくつになるか。

((中略))

辺によって肯定的にそして立方によって否定的に作用された平方の立方の分解の範例 209

I　最初の個別の辺の導出

	0	0
N	2	4
Q	4	16
C	8	64
QQ	16	256
QC	32	1024

	– 補足的な平面				5				立方による
					·			·	
	+ 補足的な平面的平面				5	0	0		辺による
							·	·	
	分解されるであろう作用された平方の立方	7	9	0	5	5	0	4	
			·	QQ	C	Q	N	·	
		QC'						QC''	
平面的立体	取り去られる	3	2						最初の辺の平方の立方
				1	0	0	0		補足的な平面的平面が掛けられた最初の辺
	加えられる			4	0				補足的な平面が掛けられた最初の辺の立方
	取り去られるであろう［平面的立体の］超過分	3	1	7	0	0	0		
	分解されるであろう作用された平方の立方の残り	4	7	3	5	5	0	4	

II　第 2 の個別の辺の導出 210

除数のより上位の部分	– 最初の辺の平方の 3 倍が掛けられた補足的な平面による補充的平面的平面				6	0		
	– 最初の辺の 3 倍が掛けられた補足的な平面による補充的立体					3	0	
	– 補足的な平面							5
								·
	+ 補足的な平面的平面					5	0	0
								·
	分解されるであろう作用された平方の立方の残り	4	7	3	5	5	0	4
								·

除数のより下位の部分	最初の辺の平方の平方の 5 倍		8	0					
	同じものの立方の 10 倍			8	0				
	同じものの平方の 10 倍				4	0			
	最初の辺の 5 倍					1	0		
	肯定的に作用する除数の和		8	8	4	6	0		
	否定的に作用する除数の和				6	3	0	5	
	肯定的に作用する除数の超過分		8	7	8	2	9	5	
除数から取り去られるであろう平面的立体	より下位の	3	2	0					最初の平方の平方の 5 倍が掛けられた第 2 の辺
		1	2	8	0				最初の立方の 10 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
			2	5	6	0			最初の辺の平方の 10 倍が掛けられた第 2 の辺の立方
				2	5	6	0		最初の辺の 5 倍が掛けられた第 2 の辺の平方の平方
					1	0	2	4	第 2 の辺の平方の立方
	より上位の				2	0	0	0	補充的平面的平面が掛けられた第 2 の辺
	取り去られるであろう平面的立体の和	4	7	6	4	6	2	4	
加えられるであろう平面的平面				2	4	0			補充的平面的平面が掛けられた第 2 の辺
					4	8	0		補充的立体が掛けられた第 2 の辺の平方
						3	2	0	補足的な平面が掛けられた第 2 の辺の立方
	加えられるであろう平面的立体の和			2	9	1	2	0	
	分解されるであろう作用された平方の立方の残りに等しい，取り去られるであろう超過分	4	7	3	5	5	0	4	

それゆえ，もし $1QC - 5C + 500N$ が 7,905,504 に等しくされるならば，［先に］観察されたことによって完全に了解される，構成の方法の逆行によって，$1N$ は 24 になる。

211

引き裂かれたベキの解析についての注意

私がそのあいまいさを忠告しておいた，引き裂かれたベキにおいては，探し求められる根が存在する範囲内で，技法からその限界があらかじめ決定されるであろう。そして，それゆえに，それらのベキの性質ははじめに見分けられなければならないであろう。そして，ようやくそのとき，最初の個別の辺は，もし除法のために好機があるならば，補足的なものによる分解されるであろう大きさの除法によって，あるいは，その大きさの生成のために補足的なものから引き出されたものと一致する根によって，あらかじめ決定された限界に押し込めることが要求するように，より大きくま

たはより小さく，現れるであろう。そして，より小さい根が求められるとき，確かに，最初の場合が完全にその位置をもち，より大きい［根が求められる］ときには，最初あるいは第 2［の場合］となる。

さらに，提示された大きさに分解されるであろう最初の個別の辺が加えられたベキは引き裂かれたベキを元に戻す。確かに，それは，ベキがそこから引き裂かれるであろう，下位階級における同次のものから取り去られるであろう。あるいは，逆に，下位階級における同次のものが引き裂かれたベキから取り去られるであろう。そして，確かに，より小さい根が求められるとき，後者の場合のための位置が完全［なもの］であり，より大きい［根が求められる］ときは，最初あるいは第 2［の場合となる］。しかし，より大きい根の選択において何らかの疑いが起こったときは，技法によって，補足的なものが分解されるであろう大きさの生成に従って元に戻され，戻されたものから分解されるであろう大きさが取り去られ，そして，最後に，残っているものからそのより大きい根が引き出されることになり，その引き裂かれたベキは元に戻されたものになるはずである。

一方，第 2 の個別の辺の導出に関して，まっすぐな否定によって作用されたベキにおけるように，確かに除数の差に注意が払われる。さらに，その超過分はより上位の除数に帰せられる。しかし，除数はたいていは漸層法によって定められるべきである。

しかし，なぜ漸層法によって割ることなのか？純粋なものであれ作用されたものであれ，ベキの分解において，より下位の除数の和に関して，長さ，平面，立体，平面的平面，平面的立体およびどのような種類の大きさであろうと区別なく混ぜ合わされる。そしてそのために，商 (parabola) (なぜならば，除法によって生じる大きさをディオファントス (Διόφαντος (Diophantos)：250 頃活躍) はそのように呼んでいるから) はしばしば捉えにくいものである。それゆえ，より上位の除数において，補足的な長さや，大きさによってつくられたもの —— 平面，立体およびその他のより高く上昇した種類のもの —— が混ぜ合わせられる。

立体がそのような種類の除数の差で割られるであろうとせよ。それゆえ，作用の除数は多様であるから，ときには，加えられるであろう作用によってつくられた平面および引き出された辺の平方の 3 倍の間の，取り去られるであろう差が零またはわずかであることが起こることがある。または，立体がそれで割られるような，それぞれの独自の長さに関して平面の —— 長さのではなく —— 商をつくる。それゆえ，そのような種類の除法による商が 2 つの数字［からなる］であろうとき，平面として評価されるであろうし，あたかも平方であるかのようにそれから引き出された近似的な根は，もしその他のものが合致しさえすれば，第 2 の辺であろう。それゆえ，差によって割られた平面的平面は，もし商が 3 つの数字になるならば，立体として評価されるであろうし，あたかも立方であるかのようにそれから引き出された近似的な根は，もしその他のものが合致しさえすれば，第 2 の辺であろう。そして，どのような種類の大きさであれ，この技法および方法によって続けられる。

引き裂かれたベキの解析

問題 16

平方の減法によって作用された，数において与えられた辺および与えられた補足的な長さによる平面から解析的に辺を引き出すこと。

$370N - 1Q$ が 9,261 に等しくされると提示されるとしよう。大きさ $1N$ または提示された引き裂かれた平方の根はどれほどになるかが求められる。

9,261 は平方の減法によって作用された，辺および与えられた補足的な長さ 370 による平面である。さらに，ベキが下位階級における同次のものから拒否されるとき，辺は 2 通りである。それゆえ，提示される方程式は 2 つの辺について解くことができて，それらのうちの 1 つは補足的なものの半分より大きく，もう 1 つは小さい。それどころか，1 つは平方 9,261 の根より小さく，もう 1 つは大きい。そして，同様に，平面 9,261 の 2 倍が 370 で割られるとき，生じるであろう幅［商］はより小さい根より大きく，さらに，より大きい根より小さい。しかもそのうえ，2 つのうちのどちらにせよ，根は次のようにして現れるであろう。

ヴィエートは $ex - x^2 = f$ $(e > 0,\ f > 0)$ の型の方程式は必ず 2 つの実数解をもつかのように述べているが，もちろん，そうではない。[そのことは彼も承知していたはずと思われるのだが$\cdots$。]
そして，2 つの実数解 $x = \dfrac{e}{2} \pm \sqrt{\dfrac{e^2 - 4f}{4}}$ を α，β (α < β) とすると，

$$\alpha < \frac{e}{2} < \beta$$
$$\alpha < \sqrt{f} < \beta$$
$$\alpha < \frac{2f}{e} < \beta$$

になるという。[もし $e^2 - 4f > 0$ ならば，これらは正しい。]
ここに挙げられている例 $370x - x^2 = 9261$ では解は $x = 27,\ 343$ であるが，$6x - x^2 = 9$ の解は $x = 3$ であり，$5x - x^2 = 7$ の解は $x = \dfrac{5 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$ である。
なお，$ex - x^2 = f$ の解法は

$$e\,(A \times 10 + b) - (A \times 10 + b)^2 = \left(eA \times 10 - A^2 \times 10^2\right) + \left\{eb - \left(2Ab \times 10 + b^2\right)\right\}$$

に基づいて (次のように) 進められる。

212 **より小さい根の発見に関する，**

引き裂かれた平方の分解の最初の範例

I　最初の個別の辺の導出

$$\begin{array}{c} \\ N \\ Q \end{array}\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \hline 2 & 7 \\ 4 & 49 \end{array}\right.$$

補足的な長さ	3	7	0		辺による
			·	·	
分解されるであろう，辺の平方が罰せられた，辺による平面	9	2	6	1	
		·	N	·	
		Q'		Q''	
回復される平面		4			最初の辺の平方
回復された平面	9	6	6	1	
小さくされる主な平面	7	4	0		補足的な長さが掛けられた最初の辺
回復された平面の超過分，または分解されるであろう引き裂かれた平方の残り	2	2	6	1	

II　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分	補足的な長さ		3	7	0	
					·	
分解されるであろう引き裂かれた平方の残り		2	2	6	1	
					·	
除数のより下位の部分	最初の辺の 2 倍			4		
除数のより上位［の部分］の超過分			3	3	0	
加えられるであろう平面			2	8		最初の 2 倍が掛けられた第 2 の辺
				4	9	第 2 の辺の平方
加えられるであろう平面の和			3	2	9	
取り去られるであろう平面		2	5	9	0	補足的な長さが掛けられた第 2 の辺
分解されるであろう引き裂かれた平方の残りに等しい，取り去られるであろう平面の超過分		2	2	6	1	

それゆえ，もし $370N - 1Q$ が 9,261 に等しくされるならば，方程式がそれについて解くことができる 2 つのうちの 1 つの辺であり，あらかじめ決定された限界が示すように，それ自身は小さいものである，$1N$ は 27 になる。さらに，平面 9,261 が長さ 27 で割られるとき，343 が生じ，あるいは，長さ 27 が 370 から取り去られると 343 が残る。それゆえ，より大きい辺は 343 であろう。

この最後の言明から，ヴィエートが 2 次方程式 $(ax^2 + bx + c = 0)$ の解 (α, β) と係数の関係 $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ を熟知していたことが分かる。
ならば，もう一方の解を算出するための図表は不要のように思えるのだが，彼は次にそれを述べる。
そして，大きい方の解を求めようとするときには，前部を欠いた平方として扱い，はじめに適切な処理を施しておく。
なお,「あらかじめ決定された限界」とは，先ほどの $\alpha < \dfrac{e}{2} < \beta$ などの不等式を指すものか。

より大きい根の発見に関する，
引き裂かれた平方の分解のもう 1 つの範例

I　最初の個別の辺の導出

求められた根は 185 より大きく，それゆえ 2 つより多くの数字で表わされるであろうから，辺の平方が罰せられたより大きい辺による平面は前部を欠いたものであり，補足的なものの最初の数字は，その他のものが合致しているから，根として定められるであろうことが明らかにされる。

	0	0
N	3	4
Q	9	16

213

補足的な長さ		3	7	0			辺による
				·	·	·	
分解されるであろう，辺の平方が罰せられた辺による平面		0	9	2	6	1	
		·	N	·	N	·	
		Q'		Q''		Q'''	
回復される平面		9					最初の辺の平方
回復された平面		9	9	2	6	1	
小さくされるであろう主な平面	1	1	1	0			補足的な長さが掛けられた最初の辺
主な平面の超過分，または分解されるであろう引き裂かれた平方の残り		1	1	7	3	9	

II　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分	補足的な長さ			3	7	0		
						·	·	
分解されるであろう引き裂かれた平方の残り			1	1	7	3	9	
					·		·	
除数のより下位の部分	最初の辺の 2 倍			6				
除数のより下位[の部分]の超過分				2	3	0		
取り去られるであろう平面	{		2	4				最初の 2 倍が掛けられた第 2 の辺
				1	6			第 2 の辺の平方
取り去られるであろう平面の和			2	5	6			
加えられるであろう平面			1	4	8			補足的な長さが掛けられた第 2 の辺
取り去られるであろう［平面の］超過分			1	0	8			
分解されるであろう引き裂かれた平方の残り					9	3	9	

いま 2 つの辺は 1 つのもののように実行され，それは［次のように］なる。

III　第 2［の辺］のように，第 3 の個別の辺の導出

	00	0
N	34	3
Q		9

除数のより上位の部分	補足的な長さ	3	7	0
				·
分解されるであろう引き裂かれた平方の残り		9	3	9
				·
除数のより下位の部分	最初の辺の 2 倍	6	8	
除数のより下位[の部分]の超過分		3	1	0

取り去られるであろう平面	2	0	4		最初の 2 倍が掛けられた第 2 の辺
				9	第 2 の辺の平方
取り去られるであろう平面の和	2	0	4	9	
加えられるであろう平面	1	1	1	0	補足的なものが掛けられた第 2 の辺
分解されるであろう引き裂かれた平方の残りに等しい，加えられるであろう［平面の］超過分		9	3	9	

それゆえ，もし $370N - 1Q$ が 9,261 に等しくされるならば，方程式がそれについて解くことができる 2 つのうちの 1 つの辺であり，あらかじめ決定された限界が示すように，それ自身は大きいものである，$1N$ は 343 になる。さらに，平面 9,261 が長さ 343 で割られるとき，27 が生じ，ある 214
いは，長さ 343 が 370 から取り去られると 27 が残る。それゆえ，より小さい辺は 343 であろう。

問題 17

立方の減法によって作用された，数において与えられた辺および与えられた補足的な平面の大きさによる立体から解析的に辺を引き出すこと。

$13,104N - 1C$ が 155,520 に等しくされると提示されるとしよう。大きさ $1N$ または提示された引き裂かれた立方の根はどれほどになるかが求められる。

((中略))

より小さい根の発見に関する，
辺による立体から引き裂かれた立方の分解の最初の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0
N	1	2
Q	1	4
C	1	8

補足的な平面	1	3	1	0	4		辺による
					·	·	
分解されるであろう，辺の立方が罰せられた辺による立体	1	5	5	5	2	0	
			·	Q	N	·	
			C'			C''	
回復される立体			1				最初の辺の立方
回復された立体	1	5	6	5	2	0	
小さくされる主な立体	1	3	1	0	4		補足的な平面が掛けられた最初の辺
回復された立体の超過分，または分解されるであろう引き裂かれた立方の残り		2	5	4	8	0	

II　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分	補足的な平面	1	3	1	0	4	
						·	
分解されるであろう引き裂かれた立方の残り		2	5	4	8	0	
						·	
除数のより下位の部分	最初の辺の平方の 3 倍			3			
	最初の辺の 3 倍				3		
除数のより上位［の部分］の超過分		1	2	7	7	4	
加えられるであろう立体				6			最初の平方の 3 倍が掛けられた第 2 の辺
				1	2		最初の辺の 3 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
						8	第 2 の辺の立方
加えられるであろう立体の和				7	2	8	
取り去られるであろう立体		2	6	2	0	8	補足的な平面が掛けられた第 2 の辺
分解されるであろう引き裂かれた立方の残りに等しい，取り去られるであろう立体の超過分		2	5	4	8	0	

それゆえ，もし $13,104N - 1C$ が 155,520 に等しくされるならば，方程式がそれについて解くことができる 2 つのうちの 1 つの辺であり，あらかじめ決定された限界が示すように，それ自身は小さいものである，$1N$ は 12 になる。さらに，立体 155,520 が 12 で割られるとき，より大きな［辺の］平方，およびより大きな［辺］とより小さな［辺］による長方形からつくられた，平面 12,960 が生じるであろう。同様に，もし平面 13,104 から 12 による平方 144 が取り去られるならば，平面 12,960 が残るであろう。それゆえ，より大きい辺を $1N$ とすると，ゆえに $1Q + 12N$ は 12,960 に等しくされるであろうし，$1N$ は大きい辺 108 になるであろう。

より大きい根の発見に関する，
辺による立体から引き裂かれた立方の分解の第 2 の範例

I　最初の個別の辺の導出

求められた根は平面の辺 4,368 —— 13,104 の 3 分の 1 —— より大きく，さらに，もし補足的なものがより前に飛び出さないのであれば，適当な除法によって 1 だけが生じるであろう［し，それは］分解されるであろう辺の立方が罰せられた辺による立体が前部を欠いたものであることの証拠である。そして，補足的な平面の平方の根は 1 であるから，辺の最初の数字は 1 であると適切に定められるであろう。

正確な計算により，115 は補足的な平面の平方の近似的な根であるから，その立方 1,520,875 は，提示される分解されるであろう大きさから取り去られるとき，1,365,355 にまさり，それゆえ，その立方の根は 3 つの数字であり，その最初は $\sqrt{C}\ 1$ である。

$$\left[\begin{array}{l|cc} & 0 & 00 \\ \hline N & 1 & 0 \\ Q & 1 & 0 \\ C & 1 & 0 \end{array}\right.$$

補足的な平面	1	3	1	0	4			辺による
					·	·	·	
前部を欠いた，辺の立方が罰せられた辺による立体	0	1	5	5	5	2	0	
	·	Q	N	·	Q	N	·	
	C'			C''			C'''	
回復される立体	1							最初の辺の立方
回復された立体	1	1	5	5	5	2	0	
小さくされる主な立体	1	3	1	0	4			補足的な平面が掛けられた最初の辺
主な立体の超過分，または分解されるであろう立方の残り		1	5	4	8	8	0	

II　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分	補足的な平面	1	3	1	0	4	
						·	·
分解されるであろう引き裂かれた立方の残り		1	5	4	8	8	0
				·			·
除数のより下位の部分	最初の辺の平方の 3 倍	3					
	最初の辺の 3 倍		3				
除数のより下位［の部分］の超過分，割られると商は 0 になる		1	9	8	9	6	0

これは数より大きいから，割られると商は 0 になる。 216

III　第 2［の辺］のように，第 3 の個別の辺の導出

$$\left[\begin{array}{l|rr} & 00 & 0 \\ \hline N & 10 & 8 \\ Q & 100 & 64 \\ C & 1000 & 512 \end{array}\right.$$

除数のより上位の部分	補足的な平面		1	3	1	0	4
							·
分解されるであろう引き裂かれた立方の残り		1	5	4	8	8	0
							·
除数のより下位の部分	最初の辺の平方の 3 倍		3	0	0		
	最初の辺の 3 倍				3	0	
除数のより下位［の部分］の超過分			1	7	1	9	6

	2	4	0	0			最初の平方の 3 倍が掛けられた第 2 の辺
取り去られるであろう立体		1	9	2	0		最初の辺の 3 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
				5	1	2	第 2 の辺の立方
取り去られるであろう立体の和	2	5	9	7	1	2	
加えられるであろう立体	1	0	4	8	3	2	補足的な平面が掛けられた第 2 の辺
分解されるであろう立方の残りに等しい，取り去られるであろう［立体の］超過分	1	5	4	8	8	0	

それゆえ，もし $13,104N - 1C$ が 155,520 に等しくされるならば，$1N$ は 108 になる。

問題 18

立方の減法によって作用された，数において与えられた平方および与えられた補足的な長さによる立体から解析的に辺を引き出すこと。

$57Q - 1C$ が 24,300 に等しくされると提示されるとしよう。大きさ $1N$ または提示された引き裂かれた立方の根はどれほどになるかが求められる。

((中略))

217 **より小さい根の発見に関する，**

平方による立体から引き裂かれた立方の分解の最初の範例

I　最初の個別の辺の導出

$$\left[\begin{array}{ll} & 0\ 0 \\ \hline N & 3 \\ Q & 9 \\ C & 27 \end{array}\right.$$

補足的な長さ		5	7			平方による
			·		·	
立方が罰せられた立体	2	4	3	0	0	
		·	Q	N	·	
		C'			C''	
回復される立体	2	7				最初の辺の立方
回復された立体	5	1	3	0	0	
小さくされる主な立体	5	1	3			補足的な長さが掛けられた最初の辺の平方
回復された［立体の］超過分		0				

それゆえ，もし $57Q - 1C$ が 24,300 に等しくされるならば，方程式がそれについて解くことができる 2 つのうちの 1 つの辺であり，あらかじめ決定された限界が示すように，それ自身は小さいものである，$1N$ は 30 になる。

((中略))

より大きい根の発見に関する，
平方による立体から引き裂かれた立方の分解の第 2 の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0
N	4	5
Q	16	25
C	64	125

補足的な長さ		5	7			平方による
			·		·	
辺の立方が罰せられた平方による立体	2	4	3	0	0	
		·	Q	N	·	
		C'			C''	
回復される立体	6	4				最初の辺の立方
回復された立体	8	8	3	0	0	補足的な長さが掛けられた最初の辺の平方
小さくされる主な立体	9	1	2			
主な立体の超過分，または分解されるであろう立方の残り		2	9	0	0	

II　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分 { 補足的なものが掛けられた最初の辺の 2 倍による補充的平面		4	5	6		
				·		
補足的な長さ				5	7	
					·	
分解されるであろう立方の残り		2	9	0	0	
					·	
除数のより下位の部分 { 最初の辺の平方の 3 倍		4	8			
最初の辺の 3 倍			1	2		
除数の差			3	0	3	218
取り去られるであろう立体 {	2	4	0			最初の平方の 3 倍が掛けられた第 2 の辺
		3	0	0		最初の辺の 3 倍が掛けられた第 2［の辺］の平方
			1	2	5	第 2［の辺］の立方
取り去られるであろう立体の和	2	7	1	2	5	
加えられるであろう平面 {	2	2	8	0		補充的平面が掛けられた第 2 の辺
		1	4	2	5	補足的なものが掛けられた第 2 の平方
加えられるであろう立体の和	2	4	2	2	5	
分解されるであろう立方の残りに等しい，取り去られるであろう［立体の］超過分		2	9	0	0	

それゆえ，もし $57Q-1C$ が 24,300 に等しくされるならば，方程式がそれについて解くことができる 2 つのうちの 1 つの辺であり，あらかじめ決定された限界が示すように，それ自身は大きいものである，$1N$ は 45 になる。

> この後，ヴィエートは「さまざまに作用された立方の曖昧性について」として，$x^3-6x^2+11x=6$，$x^3-12x^2+29x=18$，$x^3-18x^2+95x=126$，$x^3-9x^2+24x=20$，$x^3-6x^2+12x=8$，$x^3-6x^2+40x=240$ について，それらの方程式の解についての注意を述べている。
> この部分も，ここでは，割愛する。

問題 19

平方の平方の減法によって作用された，数において与えられた辺および与えられた補足的な立体の大きさによる平面的平面から解析的に辺を引き出すこと。

$27,755N-1QQ$ が 217,944 に等しくされると提示されるとしよう。大きさ $1N$ または提示された引き裂かれた平方の平方の根はどれほどになるかが求められる。

217,944 は辺および与えられた補足的な立体 27,755 による平面的平面［から辺の平方の平方が取り去られたもの］である。さらに，ベキが下位階級の同次のものから拒否されるとき，辺は 2 通りである。それゆえ，提示されている方程式は 2 つの辺について解くことができ，それらのより小さいものの立方は補足的な立体の 4 分の 1 である $6,938\,\dfrac{3}{4}$ より小さく，より大きいもの［の立方］は大きい。そして，それゆえ，平面的平面 217,944 の 4 倍が立体 27,755［の 3 倍］で割られるとき，生じるであろう大きさはより小さい根より大きく，より大きい根より小さい。しかもそのうえ，2 つのうちのどちらにせよ，［根は］次にようにして現れるであろう。

より小さい根の発見に関する，

辺による平面的平面から引き裂かれた平方の平方の分解の最初の範例

I　移動の前の最初の個別の辺の実体のない導出

補足的な立体	2	7	7	5	5		辺による
					·	·	
辺の平方の平方が罰せられた，辺による平面的平面	2	1	7	9	4	4	
		·	C	Q	N	·	
		QQ'			QQ''		

求められるより小さい根は立体 6,938 の立方の辺より劣るから，それゆえ，最初の数字は 2 であることはできない。さらに，もし 1 が，小さくされるのではなく小さくするはずである，主な平面的平面であると仮定されるならば，それは回復された平面的平面より大きく，それゆえ，移動が行われる。

移動の後の最初の個別の辺の導出

N	8
Q	64
C	512
QQ	4096

補足的な立体		2	7	7	5	5	
						·	
辺の平方の平方が罰せられた，辺による平面的平面	2	1	7	9	4	4	
						·	
回復される平面的平面			4	0	9	6	最初の辺の平方の平方
回復された平面的平面	2	2	2	0	4	0	
回復された平面的平面に等しい，小さくされる主な平面的平面	2	2	2	0	4	0	補足的な立体が掛けられた最初の辺

それゆえ，もし $27,755N - 1QQ$ が 217,944 に等しくされるならば，1 つの辺であり，あらかじめ決定された限界が示すように，それ自身は小さいものである，$1N$ は 8 になる。

((中略))

より大きい根の発見に関する，辺による平面的平面から引き裂かれた平方の平方の分解の第 2 の範例 220

I　最初の個別の辺の導出

	0	0
N	2	7
Q	4	49
C	8	343
QQ	16	2401

補足的な立体	2	7	7	5	5		辺による
					·	·	
分解されるであろう，平方の平方が罰せられた平面的平面	2	1	7	9	4	4	
		·	C	Q	N	·	
		QQ'				QQ''	
回復される平面的平面	1	6					最初の辺の平方の平方
回復された平面的平面	3	7	7	9	4	4	
小さくされるであろう主な平面的平面	5	5	5	1	0		補足的な立体が掛けられた最初の辺
主な平面的平面の超過分，または分解されるであろう平方の平方の残り	1	7	7	1	5	6	

II　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分　補足的な立体		2	7	7	5	5
						·
分解されるであろう平方の平方の残り	1	7	7	1	5	6
						·

除数のより下位の部分：最初の辺の立方の4倍		3	2				
最初の辺の平方の6倍			2	4			
最初の辺の4倍					8		
除数のより下位［の部分］の和		3	4	4	8		
除数のより下位[の部分]の超過分			6	7	2	5	
取り去られるであろう平面的平面	2	2	4				最初の辺の立方の4倍が掛けられた第2の辺
	1	1	7	6			最初の平方の6倍が掛けられた第2の辺の平方
		2	7	4	4		最初の辺の4倍が掛けられた第2の辺の立方
			2	4	0	1	第2の辺の平方の平方
取り去られるであろう平面的平面の和	3	7	1	4	4	1	
加えられるであろう平面的平面	1	9	4	2	8	5	補足的な立体が掛けられた第2の辺
分解されるであろう引き裂かれた平方の平方の残りに等しい，取り去られるであろう［平面的平面の］超過分	1	7	7	1	5	6	

それゆえ，もし $27,755N - 1QQ$ が 217,944 に等しくされるならば，1 つの辺であり，あらかじめ決定された限界が示すように，それ自身は大きいものである，$1N$ は 27 になる。

((中略))

フェラリ (Ludovico Ferrari : 1522–1565) の方法に従えば，ここに例として挙げられている 4 次方程式 $x^4 - 27,755x + 217,944 = 0$ に対する 3 次分解方程式は $8t^3 - 1,743,552\,t - 770,340,025 = 0$ となるから，元の 4 次方程式の解は

$$x^2 + \frac{1,225}{2} = \pm\sqrt{1,225}\left(x + \frac{27,755}{2,450}\right)$$

から得られる。($\sqrt{1,225} = 35$)

$$2x^2 + 1,225 = +2\sqrt{1,225}\left(x + \frac{27,755}{2,450}\right) \text{ から，} x = 8,\ 27。$$

$$2x^2 + 1,225 = -2\sqrt{1,225}\left(x + \frac{27,755}{2,450}\right) \text{ から，} x = \frac{-35 \pm \sqrt{2,811}\,i}{2}。$$

4 次方程式 $ex - x^4 = f$ $(e > 0,\ f > 0)$ は必ず 2 つの実数解をもつような言い方であるが，それは正しくない。［実数解は 2 個か 1 個か 0 個である。］

例えば，$32x - x^4 = 48$ の解は $x = 2,\ -2 \pm 2\sqrt{2}\,i$ で，

$3x - x^4 = 3$ の解は $x = \dfrac{\sqrt{3}\,i \pm \sqrt{3 - 2\sqrt{3}\,i}}{2},\ \dfrac{-\sqrt{3}\,i \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{3}\,i}}{2}$。

いま，$F(x) = x^4 - ex + f$ とおくと，$F'(x) = 4x^3 - e$ であるから，$x = \sqrt[3]{\dfrac{e}{4}}$ のとき $F'(x) = 0$ となる。そして，$F(x)$ は，$x < \sqrt[3]{\dfrac{e}{4}}$ では単調減少，$x > \sqrt[3]{\dfrac{e}{4}}$ では単調増加である。

従って，4 次方程式 $x^4 - ex + f = 0$ が 2 つの実数解 α，β $(\alpha < \beta)$ をもつとき，$\alpha < \sqrt[3]{\dfrac{e}{4}} < \beta$ であることが分かる。
さらに，$\alpha^4 - e\alpha + f = 0$，$\beta^4 - e\beta + f = 0$ であるから，

$$\beta - \frac{4f}{3e} = \frac{\beta^4 + f}{e} - \frac{4f}{3e} = \frac{3\beta^4 - f}{3e} = \frac{3\beta^4 - (e\beta - \beta^4)}{3e} = \frac{4\beta^4 - e\beta}{3e}$$
$$= \frac{4\beta}{3e}\left(\beta^3 - \frac{e}{4}\right) > 0$$

となる。
同様に，$\dfrac{4f}{3e} - \alpha = \dfrac{4f}{3e} - \dfrac{\alpha^4 + f}{e} > 0$ であるから，これらを合わせると，$\alpha < \dfrac{4f}{3e} < \beta$ がいえる。

問題 20 221

平方の平方の減法によって作用された，数において与えられた立方および与えられた補足的な長さによる平面的平面から解析的に辺を引き出すこと。

$65C - 1QQ$ が 1,481,544 に等しくされると提示されるとしよう。大きさ $1N$ または提示された引き裂かれた平方の平方の根はどれほどになるかが求められる。

((中略))

より小さい根の発見に関する，
立方による平面的平面から引き裂かれた平方の平方の分解の最初の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0		0
N	3		8
Q	9		64
C	27	商	512
QQ	81		4096

補足的な長さ			6	5				立方による
				·			·	
分解されるであろう，平方の平方が罰せられた平面的平面	1	4	8	1	5	4	4	
			·	C	Q	N	·	
			QQ'				QQ''	
回復される平面的平面		8	1					最初の辺の平方の平方
回復された平面的平面	2	2	9	1	5	4	4	補足的な長さが掛けられた最初の辺の立方
小さくされる主な平面的平面	1	7	5	5				
回復された平面的平面の超過分，または分解されるであろう引き裂かれた平方の平方の残り		5	3	6	5	4	4	

II　第 2 の個別の辺の導出

除数のより上位の部分	最初の辺の平方の 3 倍が掛けられた補足的なものによる補充的立体	1 7	5 5	
	最初の辺の 3 倍が掛けられた補足的なものによる補充的平面		5 8 5	
	補足的な長さ		6 5	
分解されるであろう引き裂かれた平方の平方の残り		5 3	6 5 4 4	
除数のより下位の部分	最初の辺の立方の 4 倍	1 0	8	
	最初の辺の平方の 6 倍		5 4	
	最初の辺の 4 倍		1 2	
除数のより上位[の部分]の超過分		6	7 8 9 5	
222		8 6	4	最初の辺の立方の 4 倍が掛けられた第 2 の辺
加えられるであろう平面的平面		3 4	5 6	最初の平方の 6 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
		6	1 4 4	最初の辺の 4 倍が掛けられた第 2 の辺の立方
			4 0 9 6	第 2 の辺の平方の平方
加えられるであろう平面的平面の和		1 2 7	5 1 3 6	
取り去られるであろう平面的平面		1 4 0	4 0	補充的立体が掛けられた第 2 の辺
		3 7	4 4 0	補充的平面が掛けられた第 2 の辺の平方
		3	3 2 8 0	補足的な長さが掛けられた第 2 の辺の立方
取り去られるであろう平面的平面の和		1 8 1	1 6 8 0	
分解されるであろう引き裂かれた平方の平方の残りに等しい，取り去られるであろう［平面的平面の］超過分		5 3	6 5 4 4	

それゆえ，もし $65C - 1QQ$ が 1,481,544 に等しくされるならば，方程式がそれについて解くことができる 2 つのうちの 1 つの辺であり，あらかじめ決定された限界が示すように，それ自身は小さいものである，$1N$ は 38 になる。

((中略))

より大きい根の発見に関する，
立方による平面的平面から引き裂かれた平方の平方の分解の第 2 の範例

I　最初の個別の辺の導出

	0	0
N	5	7
Q	25	49
C	125	343
QQ	625	2401

補足的な長さ			6	5				立方による
				·			·	
分解されるであろう，平方の平方が罰せられた平面的平面	1	4	8	1	5	4	4	
			·	C	Q	N	·	
			QQ'				QQ''	
回復される平面的平面	6	2	5					最初の辺の平方の平方
回復された平面的平面	7	7	3	1	5	4	4	
小さくされる主な平面的平面	8	1	2	5				最初の辺の立方が掛けられた補足的な長さ
主な平面的平面の超過分，または分解されるであろう引き裂かれた平方の平方の残り		3	9	3	4	5	6	

II　第 2 の個別の辺の導出 223

除数のより上位の部分	最初の辺の平方の 3 倍が掛けられた補足的なものによる補充的立体	4	8	7	5		
	最初の辺の 3 倍が掛けられた補足的なものによる補充的平面			9	7	5	
	補足的な長さ					6	5
分解されるであろう引き裂かれた平方の平方の残り		3	9	3	4	5	6
除数のより下位の部分	最初の辺の立方の 4 倍	5	0	0			
	最初の辺の平方の 6 倍		1	5	0		
	最初の辺の 4 倍				2	0	
除数のより下位［の部分］の和		5	1	5	2	0	
除数のより上位［の部分］の和		4	9	7	3	1	5
除数のより下位［の部分］の超過分			1	7	8	8	5

取り去られるであろう平面的平面	3	5	0					最初の立方の 4 倍が掛けられた第 2 の辺
		7	3	5	0			最初の平方の 6 倍が掛けられた第 2 の辺の平方
			6	8	6	0		最初の辺の 4 倍が掛けられた第 2 の辺の立方
				2	4	0	1	第 2 の平方の平方
取り去られるであろう平面的平面の和	4	3	0	6	0	0	1	
加えられるであろう平面的平面	3	4	1	2	5			補充的立体が掛けられた第 2 の辺
		4	7	7	7	5		補充的平面が掛けられた第 2 の辺の平方
			2	2	2	9	5	補足的な長さが掛けられた第 2 の辺の立方
加えられるであろう平面的平面の和	3	9	1	2	5	4	5	
分解されるであろう引き裂かれた平方の平方の残りに等しい，取り去られるであろう［平面的平面の］超過分		3	9	3	4	5	6	

それゆえ，もし $65C - 1QQ$ が 1,481,544 に等しくされるならば，方程式がそれについて解くことができる 2 つのうちの 1 つの辺であり，あらかじめ決定された限界が示すように，それ自身は大きいものである，$1N$ は 57 になる。

この後，「作用されたベキの解析についての一般的な帰結」として，作用されたベキの解法の要約が述べられるが，ここでは割愛する。

幾何学的作図の規範的査定

『全集』pp.229–239

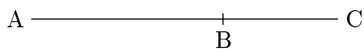
原題は *Effectionum Geometricarum Canonica Recensio*。
出版されたのは 1593 年のようである。
幾何学と代数学との融合を試みたもので，方程式の解法を表すための幾何学的な作図について述べたもの。

それによって平方の限界を超えないすべての方程式が容易に解かれるはずである幾何学的作図 229
を，私は，次のように査定する。

命題 1

与えられた直線を与えられた直線に付け加えること。

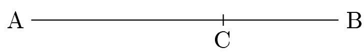
加法の操作。与えられた 2 つの直線を AB，BC としよう。一方を他方に付け加えなければならない。AB が長さ BC によって延長されるとしよう。私は［そのように］つくられたものが要求されたものであると言う。なぜならば，AC は AB，BC から組み立てられたものだからである。



命題 2

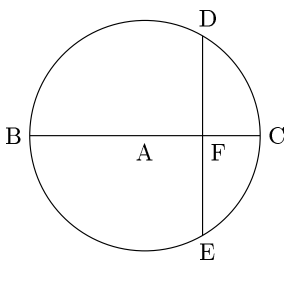
与えられた直線を与えられたより大きい直線から取り去ること。

減法の操作。与えられた 2 つの不等な直線を AB，BC としよう。より大きい AB からより小さいものを取り去らなければならない。AB から BC が分離されるとしよう。私は［そのように］つくられたものが要求されたものであると言う。なぜならば，AB および BC の間の差が AC だからである。



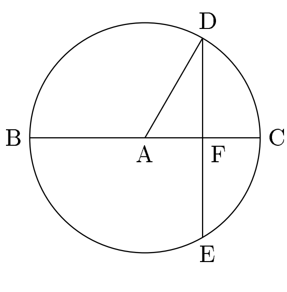
命題 3

比例する 3 つの直線を描くこと。



中心 A のもとに，任意の距離［半径］で円が描かれ，そして，直径 BAC がもたらされるとしよう。さらに，円周の向かい合う部分 CD，CE が等しいと仮定されるとしよう。そして，結ばれた DE が BC を F で切断するとしよう。私は［そのように］つくられたものが要求されたものであると言う。なぜならば，BF，FD，FC は比例するからである。

命題 4 230



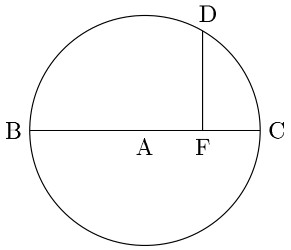
直角三角形を描くこと。

上の作図が繰り返され，AD が結ばれるとしよう。私は［そのように］つくられたものが要求されたものであると言う。なぜならば，AFD は三角形であり，角 AFD は『原論』(Στοιχείωσις) で証明されているように直角であるから，それ［AFD］自身は直角［三角形］だからである。

ユークリッド (Euclid (Εὐκλείδης)：前 300 頃)『原論』第 3 巻命題 3 (［5］p.51)
「もし円において中心を通る線分が中心を通らない弦を 2 等分するならば，それをまた直角に切る。そしてもし直角に切るならば，それをまた 2 等分する。」

命題 5

与えられた 2 つの直線から，それらの間に比例する中項を見出すこと。



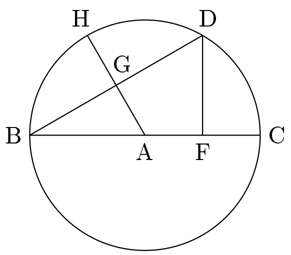
乗法の操作。すなわち，それは，与えられた辺から平面を見出すこと，あるいはその平面そのものに等しい平方を示すこと，［と同じ］である。さらに，教えられたことは外項の平面によってつくられたものが中項の平方に等しいということである。

与えられた 2 つの直線を BF，FC としよう。それらの間に比例する中項を見出さなければならない。BF が長さ FC によって延長されるとし，そして BC が A で半分に切断されるとしよう。そして，A を中心として，距離 AB あるいは AC で円が描かれるとし，そして点 F において，円周を D において分離する，垂線が立てられるとしよう。私は［そのように］つくられたものが要求されたものであると言う。なぜならば，3 つの比例するものの規範的な作図から明らかなように，求められていた中項は DF だからである。

それゆえ，与えられた平面から，それに等しい平方が与えられる。

命題 6

与えられた 2 つの直線から，第 3 の比例するものを見出すこと。



除法の操作。すなわち，それは，与えられた平面または平面に等しい平方を直線で割ること，そして［それによって］生じる幅を示すこと，［と同じ］である。中項の平方が第 1 の［比例する］もので割られると第 3 の［比例する］ものが生じることは明らかである。

与えられた 2 つの直線を BF，FD としよう。第 3 の比例するものを見出さなければならない。BF，FD が直角に傾けられるとし，BD が結ばれ，BD そのものを G で，さらに BF そのものを A で切断する直線 AH によって［BD が］垂直に半分に切られるとしよう。そして，A を中心として，距離 AB あるいは AD で円が描かれるとし，その円周まで BF が C で［交わるように］延長されるとしよう。私は［そのように］
231 に］つくられたものが要求されたものであると言う。なぜならば，与えられた BF，FD に関して，3 つの比例するものの規範的な作図によって明らかなように，求められていた第 3 の比例するものは FC だからである。

さらに，あまり重要ではない規範的な作図は

1　与えられた 3 つの直線から，第 4 の比例するものを見出すこと。
2　数が数に対するように，直線が，与えられたその他のものから求められる，直線に対するようにすること。
3　平方が平方に対するように，直線が，与えられたその他のものから求められる，直線に対するようにすること。

4　直線が直線に対するように，平方が，与えられたその他のものから求められる，辺の平方に対するようにすること。

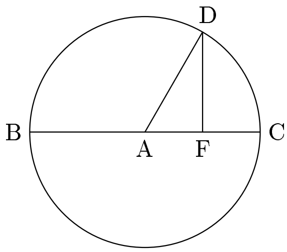
である。

しかし，もし助け［が必要であ］るならば，それらは『原論』からもたらされる。確かに以下の作図は規範的ではないけれども，それでもなお，それらの頻繁な使用および有用性 (impendium) のために推薦されるであろう。

命題 7

与えられた直角三角形の直角のまわりの 2 つの辺から，第 3 の辺を見出すこと。

平面の加法の操作。確かに，ピュタゴラス (Πυθαγόρας (Pythegoras)：前 572?–前 497?) は直角のまわりの辺による平方［の和］が残りの辺の平方に等しくされることを示した。

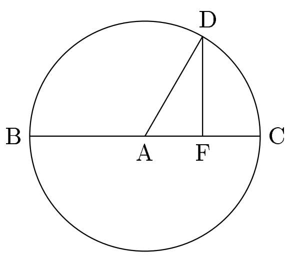


さらに，解析の原理は三角形の作図そのものからそのことを明らかにする。なぜならば，解析によって，2 つの辺の和は，もしそれらの辺の差が掛けられるならば，平方の差になることが伝えられているからである。さらに，AD または BA および AF の和は BF である。そして，AD または AC および AF の間の差は FC である。さらに，FC が掛けられた BF は DF による平方になる。それゆえ，DF による平方は AD による平方および AF による平方の差である。そして，対照 (antithesis) といわれる，移項 (translatio) の技法によって，AD による平方は AF および DF による平方の和である。

直角三角形の直角を囲んでいる与えられた 2 つの辺を AF，FD としよう。直角を張っている，第 3 の辺を見出さなければならない。それゆえ，AF，FD が直角に傾けられ，AD が結ばれるとしよう。私は［そのように］つくられたものが要求されたものであると言う。なぜならば，求められている辺は，与えられた AF，FD からつくられた，直角三角形の直角 DFA を張っている，AD だからである。

命題 8

与えられた［直角］三角形の直角を張っている辺および残りの 1 つの辺から，第 3 の辺を見出すこと。



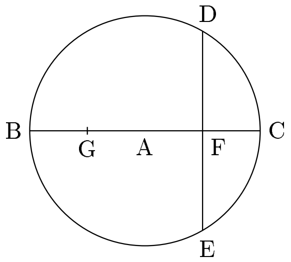
平面の減法の操作。与えられた直角三角形の 2 つの辺を 1 つは直角を張る AC，もう 1 つはその直角のまわりに立っている AF としよう。残りの辺を見出さなければならない。

A を中心とし，距離 AC で円が描かれるとしよう。しかもそのうえ，AC から AF が切断され，そして点 F において AC に対して，また D において円周を切る，垂線が立てられ，そして AD が結ばれるとしよう。私は［そのように］つくられたものが要求されたものであると言う。なぜならば，辺 DF は，［直角］三角形 AFD における直角を囲んでいて，残りの辺 AF および AD，すなわち AC，が与えられたものであった，求められていたものだからである。

命題 9 232

もし比例している 3 つの直線があったならば，外項の差およびより小さい外項による長方形が加

えられたより小さい外項の平方は中項の平方に等しくされるであろう。



3 つの比例している直線の規範的な図形が提示されるとしよう。そして，FC がより小さい外項とみなされ，それに等しく BG が置かれ，そしてそのため，より大きい外項 BF および BG，すなわちより小さい外項 FC，の間の差が FG になるとせよ。私は，CF，FG による長方形が加えられた CF の平方が DF に平方に等しい，と言う。なぜならば。CF の平方は，他の言い方では，CF と GB からの積である。それゆえ，CF と GB，および CF と FG からの 2 つの積［の和］は CF と FB からの積の価値がある。結果として，外項による積は外項の間の中間のものである DF の平方に等しい。

辺による平面の加法によって作用された平方の作図に関する帰結

それゆえ，A quadratum 足す B in A が D quadrato に等しいと提示されるであろうとき，D は外項の間の中間のもの，B はそれら［の外項］の差とみなされるであろう。そして，中項および外項の差から外項 —— それらのうちのより小さいものは求められている A であろう —— が求められるであろう。

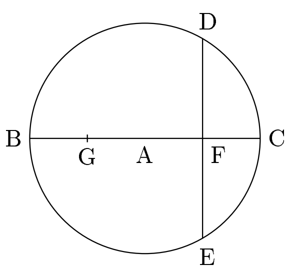
例えば，このように，与えられた GF，FD から比例する BF，FD，FC がつくられるであろう。そして，FC が求められていたより小さいものであろう。［このことは］探究法によって示すことができたし，今は，幾何学的な図形において総合によって証明される。

「探究法 5 巻」(*Zeteticorum Libri Quinque*，1591 年) 第 3 巻探究 I
「比例する 3 つの直線の中項および外項の差が与えられたとき，それらの外項を見出すこと。」

総合 (synthesis) と解析 (analysis) については，例えば，「解析法序説」(*In Artem Analyticen Isagoge*，1591 年) を参照のこと。

命題 10

もし比例している 3 つの直線があったならば，外項の差およびより大きい外項による長方形が罰せられたより大きい外項の平方は中項の平方に等しくされるであろう。



すぐ前［の命題］の作図が思い出されるとしよう。私は，BF の平方引く BF，GF による長方形が DF の平方に等しい，と言う。

なぜならば。BF の平方は BF と GF からの積そして BF と BG から［の積］を加えた［ものの］価値をもつ。それゆえ，BF の平方から BF と FG からの積が取り去られると，BF と BG —— すなわち，作図から FC —— からの積が残される。結果として，外項による積は外項の間の中間のものである DF の平方に等しい。

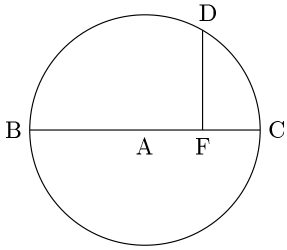
233 **辺による平面の減法によって作用された平方の作図に関する帰結**

それゆえ，A quadratum 引く B in A が D quadrato に等しいと提示されるとき，D は外項の間の中間のもの，B はそれら［の外項］の差とみなされるであろう。そして，中項および外項の差から外項 —— それらのうちのより大きいものは求められている A であろう —— が求められるであろう。

例えば，このように，与えられた GF，FD から比例する BF，FD，FC がつくられるであろう。そして，BF が求められていたより大きいものであろう。［このことは］探究法によって示すことができたし，今は，幾何学的な図形において総合によって証明される。

命題 11

もし比例している 3 つの直線があったならば，外項から集められた［和］およびそれらのうちのより大きいかより小さいかの一方による長方形からそれらの他方の平方が罰せられたものは中項の平方に等しくされるであろう。



3 つの比例しているものの規範的な図形が提示されるとしよう。私は，BC，FC による長方形引く FC の平方が DF の平方に等しい，と言う。

そして，さらに，BC，BF による長方形引く BF の平方は DF の平方に等しい。

なぜならば。BC は BF，FC から集められた［和］であるから，それゆえ，BC と FC の積は BF と FC の積および FC と FC［の積］，すなわち FC の平方，［の和］に相当する。それゆえ，BC と FC の積から FC の平方が取り去られるとき，BF と FC の積が残されるであろう。結果として，外項による積は外項の間の中間のもの DF の平方に等しい。そして，これが最初［の証明］である。

BC は CF，FB から集められた［和］であるから，それゆえ，BC と BF の積は CF と BF の積および BF と BF［の積］，すなわち BF の平方，［の和］に相当する。それゆえ，BC と BF の積から BF の平方が取り去られるとき，CF と BF の積が残されるであろう。結果として，外項による積は外項の間の中間のもの DF の平方に等しい。第 2 の場所において証明されたように。

平方によって拒否された辺による平面の作図に関する帰結

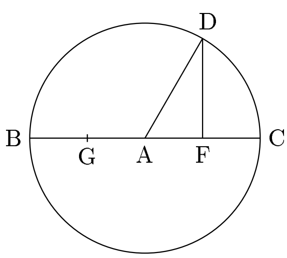
それゆえ，B in A 引く A quadrato が D quadrato に等しいと提示されるとき，D は外項の間の中間のもの，B はそれら［の外項］の和とみなされるであろう。そして，中項および外項の和から外項 —— それらの一方は求められている A であろう —— が求められるであろう。

［このことは］探究法によって示すことができたし，今は，幾何学的な図形において総合によって証明される。

「探究法 5 巻」第 3 巻探究 II
「比例する 3 つ［の直線］の中項および外項の和が与えられたとき，それらの外項を見出すこと。」

命題 12

3 つの比例するものの与えられた中項および外項の差から，外項を見出すこと。



辺によって作用された平方の作図。 234

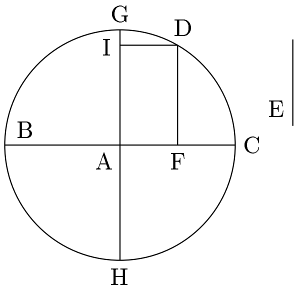
FD を 3 つの比例するものの与えられた中項とし，そのうえ，GF を外項の差としよう。外項を見出さなければならない。

GF，FD が直角に傾けられ，GF が A において半分に切断されるとしよう。さらに，A を中心とし，距離 AD で円が描かれ，AG，AF が点 B，C において［円と交わるように］その円周まで延長されるとしよう。

私は［そのように］つくられたものが要求されたものであると言う。なぜならば，見出されるであろう外項は BF，FC で，それらの間の比例する中項は FD だからである。そして，BF，FC そのものは，AF および AG が等しくつくられ，さらに AC，AB が等しくつくられているから，FG だけ異なっている。それゆえ，等しい AB，AC から等しい AG，AF が取り去られると，等しい BG，FC が残る。さらに，GF は BF および BG または FC の間の差である。これが証明されるべきことであった。

命題 13

3 つの比例するものの与えられた中項および外項の和から，外項を見出すこと。

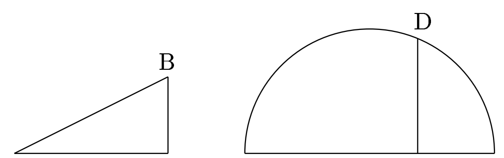


平方によって拒否された辺による平面の作図。

E を 3 つの比例するものの与えられた中項とし，BC を外項の和としよう。外項を見出さなければならない。BC が A において半分に切断され，A を中心とし，距離 AB または AC で円が描かれるとしよう。しかもそのうえに，直径 BAC をもう 1 つの直径 GAH が直角に切り取るとし，そして AG から E そのものに等しい AI が分離されるとしよう。そして，I を通って BC そのものに平行な，点 D において円周を切る，直線が引かれるとし，そこから BC に IA そのものに等しく平行である垂線 DF を下すとしよう。私は［そのように］つくられたものが要求されたものであると言う。なぜならば，求められていた外項が BF，FC で，それらから集められたものが与えられた BC であり，それらの比例するものの間の中項が DF または IA，すなわち与えられた E，になるからである。

命題 14

直角三角形の斜辺および同じ［直角三角形の］垂線の間の比例する中項の平方は垂線の平方および底線の平方が結合された同じ垂線の平方の間の比例する［中項］である。

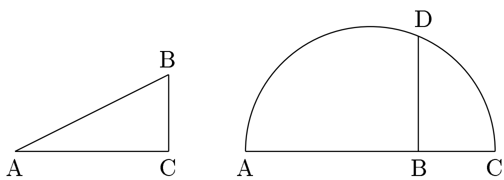


直角三角形を ABC とし，さらに，斜辺 AB および垂線 BC の間の［比例する］中項を BD としよう。私は，BD の平方が BC の平方および同じ BC の平方足す AC の平方の間の
235 の比例する［中項］である，と言う。

なぜならば。BA，DB，BC は比例しているから，それゆえ，同じものからつくられる平方，すなわち AB の平方，DB の平方および BC の平方は同様に比例する。さらに，AB の平方そのものは，［直角三角形であるという］意味により，BC の平方足す AC の平方である。

同じく，直角三角形の斜辺および垂線の間の比例する中項の平方は斜辺の平方および底線の平方が罰せられた同じ斜辺の平方の間の比例する［中項］である。

AB の平方，BD の平方および BC の平方は (いま注意されたように) 比例する。さらに，BC の平方そのものは，［直角三角形であるという］意味により，AB の平方引く AC の平方になる。



平方によって作用された平方の平方の作図に関する帰結

それゆえ，もし A quadrato-quadratum 足す B quadrato in A quadratum が D quadrato-quadrato に等しくされるならば，B は直角三角形の底線，D は垂線および斜辺の間の［比例する］中項とみなされるであろう。そして，中項および底線から垂線 A が求められるであろう。

例えば，このように，与えられた AC，BD から BC が求められるであろう。最初の場所において提示された比例についての解法から，BC の平方の平方足す AC の平方および BC の平方による平面的平面は BD の平方の平方に等しくされるはずである。

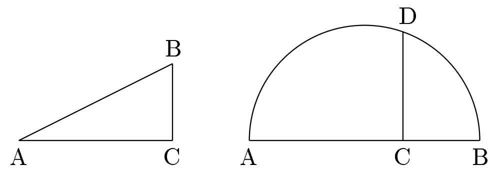
そして, もし A quadrati-quadratum 引く B quadrato in A quadratum が D quadrato-quadrato に等しくされるならば，再び，B は直角三角形の底線，D は垂線および斜辺の間の［比例する］中項とみなされるであろう。そして，中項および底線から斜辺 A が求められるであろう。

例えば，このように，与えられた AC，BD から AB が求められるであろう。第 2 の場所において提示された比例についての解法から，AB の平方の平方引く AC の平方および AB の平方による平面的平面は BD の平方の平方に等しくされるはずである。

命題 15

直角三角形の底線および同じ［直角三角形の］垂線の間の比例する中項の平方は底線の平方および底線そのものの平方が罰せられた斜辺の平方の間の比例する［中項］である。

あるいは，そのうえ，垂線の平方および垂線そのものの平方が罰せられた斜辺の平方の間の［比例する中項である]。



直角三角形を ABC とし，さらに，直角のまわりの辺 AC，BC の間の［比例する］中項を CD としよう。私は，CD の平方が AC の平方および AB の平方引く AC の平方の間の比例する［中項］である，と言う。

なぜならば。AC，CD，BC は比例しているから，それゆえ，それらからつくられる平方，すなわち AC の平方，CD の平方および BC の平方は同様に比例する。さらに，BC の平方そのものは，［直角三角形であるという］意味により，AB の平方引く AC の平方である。 236

あるいは，そのうえ，私は，CD の平方は BC の平方および AB の平方引く BC の平方の間の比例する［中項］である，と言う。

AC の平方，CD の平方および BC の平方は (いま注意されたように) 比例する。さらに，AC の平方そのものは，［直角三角形であるという］意味により，AB の平方引く BC の平方になる。

平方の平方によって拒否された平方による平面的平面の作図に関する帰結

それゆえ，もし B quadratum in A quadratum 引く A quadrato-quadrato が D quadrato-quadrato に等しくされるならば，B は直角三角形の斜辺，D は垂線および底線の間の［比例する］中項とみなされるであろう。そして，中項および斜辺から底線あるいは垂線 A が求められるであろう。

例えば，このように，与えられた AB，DC から AC あるいは BC が求められるであろう。最初［の場所］におかれた比例についての解法から，AB の平方および AC の平方による平面的平面引く AC の平方の平方は CD の平方の平方に等しくされるはずである。

あるいは，そのうえ，第 2 の場所において提示された比例についての解法から。AB の平方およ

び BC の平方による平面的平面引く BC の平方の平方は DC の平方の平方に等しくされるはずである。

命題 16

3 つの比例するものの与えられた最初のもの，およびその平方が第 2 のものの平方および第 3 のもの［の平方］の和に等しいものから，第 2 のものおよび第 3 のものが与えられる。

確かに，次のものは，同様に，比例する。

I　第 3 のもの足す第 1 のもの。

II　それら［第 2 のもの，第 3 のもの］の平方［の和］から獲得したもの。

III　第 3 のもの。この系列において，中項および外項の差が与えられる。さらに，与えられた中項および外項の差から，ここでの命題 12 により，外項が与えられる。

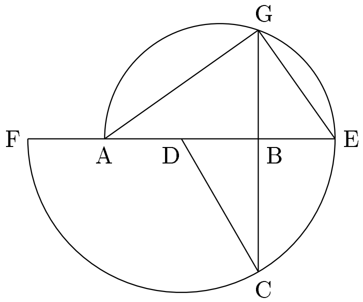
> a，b，c が比例する，すなわち $ac = b^2$，ならば，$(c+a)$，$\sqrt{b^2+c^2}$，c も比例するということ。そして，中項 $\sqrt{b^2+c^2}$ および外項の差 $(c+a)-c=a$ が与えられると，命題 12 により，外項 $(c+a)$，c が与えられるから，それらを基に第 2，第 3 の項 b，c が得られる。

さらに，提示された比率は，そうでなければ探究法によって保証されたもののように，それが解かれる方程式から明らかである。なぜならば，外項［の積］は第 3 のものの平方足す最初のものと第 3 のものによる長方形，すなわち足す第 2 のものの平方，になり，それら 2 つの平方［の和］は中項の平方に等しくされるからである。

そして，さらに，この命題は，平方によって作用された平方の平方の作図に関する備えであるから，規範的なものの中に含められる。それゆえ，全体の操作が目の前に置かれるように，それはより一層［明らか］である。それゆえ，命題は

3 つの比例するものの与えられた最初のもの，およびその平方が第 2 のものの平方および第 3 のもの［の平方］の和に等しいものから，比例するものを見出すこと，

であろう。



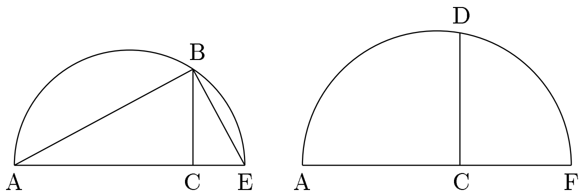
3 つの比例するものの与えられた最初のものを AB，さらに，残り［の 2 つ］のそれぞれのものの平方［の和］となることができるものを BC としよう。第 2 および第 3 の［比例する］ものを見出さなければならない。AB，BC が直角に傾けられ，AB が D において半分に切断され，D を中心として距離 DC で円が描かれ，両方向に延長された AB そのものが点 E，F —— 点 E は B に向かう方に，F は A に向かう方になる —— において［その円を］切断するとしよう。そして，AE をもう 1 つの円の直径とし，そこまで BG が延長されるとしよう。私は，求められている比例するものは GB が確かに第 2 のもので，一方 BE が第 3 のものである，と言う。なぜならば。特に，AB，BG，BE は，3 つの比例するものの規範的な図形から，比例することは明らかである。それゆえ，弦 GE が与えられた BC そのものに等しくされることが残っている。しかし，それは次のように明らかになる。なぜならば。FD，DE はそのつくり方から —— 両
237 方とも最初に描かれた円の半径なので —— 等しく，そして同様に，AD，DB はそのつくり方から等しいから，ゆえに，同様に，FA，BE は等しくなる。そして，さらに，等しいものと等しいもの

の減法および加法の結果として，AB，AE は等しい。さらに，EB，BF の間の比例する中項は前述の規範的図形から BC である。同様に，EB および AE，すなわち BF そのもの，の間の中項は GE である。それゆえ，GE そのものは BC と同じである。これが証明すべきことであった。

それゆえ，最初に与えられた AB および残りの 2 つのものの平方［の和となること］ができる BC から，見出された 3 つの比例するものは AB，BG，BE である。これがなされるであろうことであった。

命題 17

もし直角三角形の垂線および斜辺の間の［比例する］中項の平方が底線によって割られるならば，垂線は底線およびその平方がその割られたものから生じるであろう幅の平方および垂線の平方の間の差に等しいものの間で比例する。



直角三角形の斜辺を AB，底線を AC，垂線を BC としよう。さらに，AB および BC の間の比例する中項が CD になり，その平方が AC で割られるとき幅 CF になるものとしよう。しかもそのうえ，BC そのものの平方が AC で割られると幅 CE になり，その平方は BC の平方と［合わされると］BE の平方に等しくされるとしよう。私は，BE が CF そのものに等しい，と言う。それゆえ，CE はその平方が CF または BE の平方および BC の平方の間の差に等しいものである。そして，結果として，それと AC の間で比例するものは，命題が規定するように，BC である。

確かに，そのつくり方から，AC が CD に対するように CD が CF に対する。さらに，三角形 ACB，ABE が相似であることから，AC が BC に対するように AB が BE に対する。さらに，CD の平方は，仮定から，BC と AB による長方形に等しい。それゆえ，AC および CF の間の［比例する］中項および AC および BE の間の［比例する中項］は同じである。それゆえ，BE および CF は等しく，そして，命題は証明された。

提示された図のような直角三角形 ABC において，$\mathrm{BC : CD = CD : AB}$，$\mathrm{CF} = \dfrac{\mathrm{CD}^2}{\mathrm{AC}}$ とすると，$\mathrm{AC : BC = BC} : \sqrt{\mathrm{CF}^2 - \mathrm{BC}^2}$ となる，ということ。

いま，$\mathrm{CE} = \dfrac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{AC}}$，$\mathrm{CE}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{BE}^2$ とする。

このとき，$\mathrm{AC : BC = BC} : \dfrac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{AC}}$ であるから，$\mathrm{BE = CF}$ がいえれば，$\dfrac{\mathrm{BC}^2}{\mathrm{AC}} = \mathrm{CE} = \sqrt{\mathrm{BE}^2 - \mathrm{BC}^2} = \sqrt{\mathrm{CF}^2 - \mathrm{BC}^2}$ となって，命題が示されたことになる。

さて，$\triangle\mathrm{ACB}$ と $\triangle\mathrm{ABE}$ は相似であるから，$\mathrm{AC : BC = AB : BE}$ であり，従って $\mathrm{BC \times AB = AC \times BE}$ となる。

一方，CD の定め方から $\mathrm{BC \times AB = CD}^2$ であり，CF の定め方から $\mathrm{AC \times CF = CD}^2$ である。それゆえ，$\mathrm{BC \times AB = AC \times CF}$ となる。

ゆえに，$\mathrm{BC \times AB = AC \times BE = AC \times CF}$ となるから，$\mathrm{BE = CF}$ がいえる。

命題 18

直角三角形の与えられた底線および斜辺および垂線の間の比例する中項から，その三角形が与え

られる。

確かに，次のものは，前述の命題により，比例する。

I　底線。

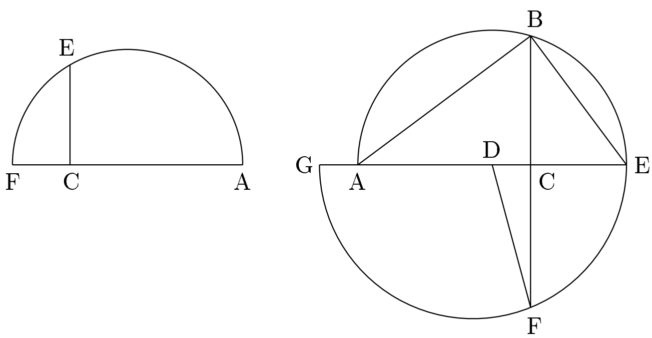
II　垂線。

238 III　垂線の平方および，底線で割られた中項の平方になる，幅の平方の間の差に等しい，平方の辺。この系列において，最初のものおよび残りの 2 つのものの平方の和に等しい平方の辺が与えられる。それゆえ，命題 16 により，残りの 2 つのものが与えられるであろう。

さらに，これは平方によって作用された平方の平方［の解法］の作図である。それゆえ，規範的［な作図］の数の中に書き加えられる。そのために，全体の操作を示すことが適当である。それゆえ，命題は

直角三角形の与えられた底線および斜辺および垂線の間の［比例する］中項から，その三角形そのものを示すこと，

であろう。



AC を直角三角形の与えられた底線，そして，さらに，CE を斜辺および垂線の間の与えられた［比例する］中項としよう。その三角形そのものを示さなければならない。与えられた AC で CE の平方が割られると，幅 CF になるとしよう。その後，CF が AC に対して垂直に傾けられ，そして AE が D において半分にされて，比例するもの CE，CF，CG が描かれるとしよう。そして，AE が円の直径になり，その円周から垂線 BC を下すとしよう。私は，ACB が求められている三角形 —— 明らかにその底線が AC そのものである —— である，と言う。さらに，AC が AB に対するように BC が BE すなわち CF に対するから，操作が示し，そして前述［の命題］が証明したように，CE は AC および CF の間の［比例する］中項になり，結果として，CE は AB および BC の間の［比例する］中項でもある。それゆえ，要求したことがなされた。

さらに，同じ問題は次のように表現することができる。

3 つの比例するものの与えられた中項およびその平方が外項の平方の差に等しいものから，外項を見出すこと。

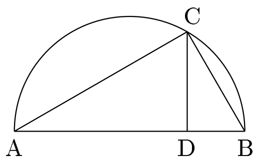
この［場合の］ように，与えられた AC および CE から AB，BC が見出される。

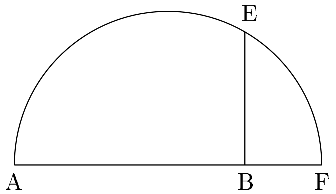
命題 19

もし直角三角形の底線および垂線の間の［比例する］中項の平方が斜辺で割られるならば，そこから生じる幅は斜辺の 2 つの切片 —— 幅の平方が加えられた最初のものの平方は底線の平方に等しく，同じ幅の平方が加えられた第 2 のものの平方は垂線の平方に等しい —— の間で比例するものであろう。

直角三角形の斜辺が AB，底線が AC，垂線が BC，底線および垂線の間の［比例する］中項が BE であるとし，AB で割られたその平方が幅 BF になるとしよう。さらに，CD を点 C から AB

に下すとしよう。それゆえ，斜辺の最初の切片 AD，引かれた［直線］CD，および斜辺の残りの切片 DB は比例する。私は，DC が BF そのものに等しい，と言う。それゆえ，BF は，定理が規定するように，CD の平方が加えられたその平方が底線 AC の平方に等しい，AD，および，CD の同じ平方が加えられたその平方が垂線 CB の平方に等しい，DB の間の比例する［中項］である。





なぜならば。そのつくり方から，AB が BE に対するように BE が BF に対する。同様に，三角形 ACB，ADC の相似性から，AB が CB に対するように AC が CD に対する。さらに，BE の平方は CB と AC による長方形に相当する。ゆえに，AB および BF の間の［比例する］中 239
項と AB および CD の間の［比例する中項］は同じである。それゆえ，BF および CD は等しい。そしてさらに，命題は確立した。

命題 20

直角三角形の与えられた斜辺および底線および垂線の間の比例する中項から，三角形が与えられる。

確かに，次のものは，前述の命題により，比例する。

I　斜辺の 1 つの切片。

II　斜辺によって割られた中項の平方がつくる幅。

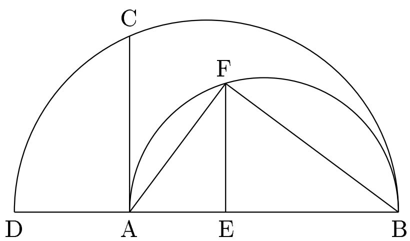
III　斜辺のもう 1 つの切片。

この系列において，中項および外項の和が与えられる。さらに，斜辺の 1 つの切片の平方が加えられた前述の同じ幅の平方が直角のまわりの 1 つの辺の平方になる。一方，もう 1 つの切片の平方が加えられたものが残りの辺の平方になる。

さらに，これは平方の平方によって拒否された平方による平面的平面［の解法］の作図である。それゆえ，規範的［な作図］の数の中に書き加えられる。そのために，全体の操作を示すことが適当である。それゆえ，命題は

［直角］三角形の与えられた斜辺および直角のまわりの辺の間の比例する中項から，その三角形そのものを示すこと，

であろう。



AB を［直角］三角形の与えられた斜辺，そして，AC を直角のまわりの辺の間の与えられた比例する中項としよう。三角形そのものを示さなければならない。与えられた AB，AC から第 3 の比例するもの AD が見出されるとし，AB を円の直径とし，直角において円周から AD に等しい直線 FE が下ろされ，AF，FB が張られるとしよう。私は，AF，FB が直角のまわりの求めている辺であり，そしてさらに，求められている三角形は AFB で，その斜辺が与えられた AB である，と言う。というのも。直角三角形 AFE，AFB は相似である。それゆえ，FE が AF に対するように FB が AB に対する。しかし，そのつくり方から，FE すなわち AD が AC に対するよ

うに AC が AB に対する。それゆえ，AC は AF，FB の間の比例する［中項］である。

それゆえ，与えられた斜辺 AB および直角のまわりの辺の間の比例する中項 AC に関して，三角形 AFB が示された。要求していたことがなされた。

さらに，同じ問題は次のように表現することができる。

3 つの比例するものの与えられた中項およびその平方が外項の平方の和に等しいものから，外項を見出すこと。

この［場合］のように，与えられた中項 AC および外項の平方［の和］になることができる AB から外項 AF，FB が見出される。

幾何学への補遺

『全集』pp.240–257

原題は *Supplementum Geometriae*。
出版されたのは 1593 年。

「解析法序説」(*In Artem Analyticen Isagoge*，1591 年) 第 8 章 25 の言明に関することが述べられている。

仮定 240

幾何学において不足するものを補完するために，［次のことが］認められるべきである。

任意の点から任意の 2 つの直線に，それらによって切り取られた切片の間［長さ］がどのようなものであれあらかじめ定められた可能なものであるような，［直線を］引くこと。

そのうえに，直線が引かれるであろうとき，2 つの点は規則に従ってあらかじめ定められるであろうから，2 つ［の直線］の間のあらかじめ定められた長さはこの第 2 の点のあらかじめ定められた［位置］を与えることになる。

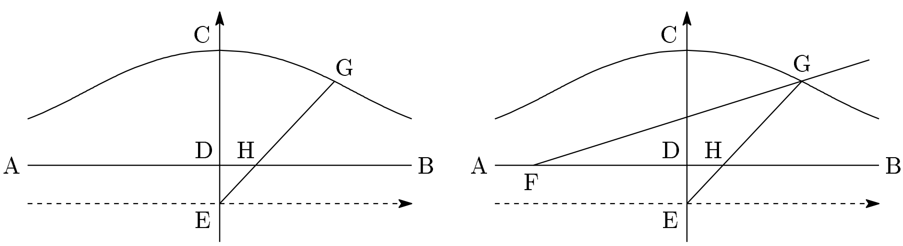
さらに，このことが認められたなら，［次のことが］認められる。

任意の点から収束し無限に延長された 2 つの直線に，それらによって切り取られた長さが任意のものであるような，別の直線を引くこと。

同様に，円の領域あるいはその周にある任意の点から円［周］に収束し無限に延長された任意の直線に，切り取られた長さが任意のものであるような，別の直線を引くこと。

そして，確かに，ニコメデス (Νικομήδης (Nicomedes)：前 2 世紀) は前者の操作を彼の第 1 種のコンコイドについて，後者を彼の第 2 種のコンコイドについて仕上げたと思われる。さらに，アルキメデス (Ἀρχιμήδης (Archimedes)：前 287?–前 212) は仮定を完全に容認した。それでも，彼は放物線および螺線を描き出すことを説明したし，それどころか［直線が］螺線に接することすら［説明した]。

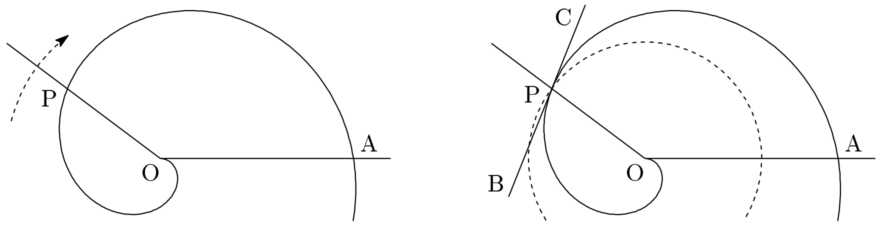
直交する 2 直線 AB，CDE に対して，直線 CDE を E のまわりに回転させ，D はつねに直線 AB 上にあり，線分 CD の長さは一定 (GH = CD) であるようにするとき，点 C が描く曲線を (ニコメデスの) コンコイドという。［下図左］



ニコメデスは，E の両側でコンコイドが次第に AB に近づくこと，および AB 上の点からコンコイドのある側に引いたどの直線もどこかでコンコイドを切ることを証明したという。
また，もし 2 直線 FB，FG が与えられ，E が ∠BFG の外部の点であれば，与えられた長さ GH の線分で，G は直線 FG 上に，H は直線 FB 上にあり，しかも GH の延長は E を通るようなものがいつでも作図できる。［上図右］(［11］p.325)

1 つの［半］直線 OA を，一端 O を固定したままで平面上を一様な割合で回転させるとき，直線 OA が回転を始めると同時に，点 A が直線 OA 上を点 O から出発して一様な割合で運動するとき，点 A［図では P］が描く曲線を (アルキメデスの) 螺線という。このとき，点 O を螺線の原

点，［半］直線 OA の最初の位置を螺線の原線という。［下図左］



アルキメデスは，螺線の接線に関して次のようなことを証明した。

直線 BC が点 P において［第 1 回目の回転中の］螺線に接するとき，接点 P から原点 O まで直線が引かれるならば，BC と OP のつくる角のうち［回転の］前方にある角 ∠OPC は鈍角であり，後方にある角 ∠OPB は鋭角である。(『螺線について』命題 16)［上図右］

もし直線が第 1 回転で描かれた螺線に，螺線の終端［第 1 回転後の点 P の位置］で接し，そして螺線の原点である点から回転の原線に垂直にある直線が引かれるならば，引かれた直線は接線と交わり，接線と螺線の原点との間の線分の長さは第 1 円［原点を中心とし，原点と終端との距離を半径とする円］の円周に等しい。(『螺線について』命題 18)

そして，確かに，作図から，螺線は直線が直線に対するように角が角に対するようになる。それゆえ，どのようなものであれ多角形は円の内部にあるいはまわりに描かれる。しかし，その理由で，弧によって張られる辺の直径に対する，あるいはお互い［の辺］同士の，比が知られるということはない。さらに，ようやくそのとき，与えられた大きさは解析の原理に従って，それがものとして示されるとき，同次のものの間でどのように作用されたかが知られるようになるものと理解される。

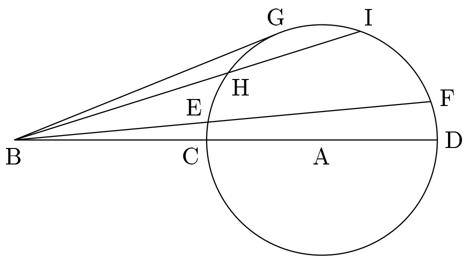
しかし，アルキメデスが［直線が］螺線に接するということから直線が円の周に等しいことが示されるということを提示したということは十分には知られていない。確かに，それはどのような多角形であれ円［の中］に書き入れられたものの周より大きく，他方，どのような多角形であれ円を囲んでいるものの周より小さい直線［があること］を示している。それゆえ，円［の周］に等しいものがあるのであろうか？角がどのようなものであれ鈍角より小さい，さらに，どのようなものであれ鋭角より大きい［ものがある］ことを示している。それゆえ，それは直角であろうか？もしアルキメデスが正しければ，ユークリッドが誤っていることが結論される。しかし，これらのことは角の切断を解析的に説明した後で議論されるのがより適切であろう。

命題 1

もし 2 つの直線が円の外部の同じ点からそれ自身を切断するように—— 一方は中心を通って，他方はそうではなく —— 引かれたならば，さらに，中心を通っているそれの外部の部分が第 2 の
241 ものの内部の部分および外部の部分の間の比例するものより小さくなるならば，同じ点から，円を切断し，そしてより遠くへ伸ばされたそれもまた円を切断するような，それらに比例するものを引くことができる。

A を中心として描かれた円を，円の外部の同じ点 B から引かれた 2 つの直線が切断すると仮定されたとしよう。1 つは中心 A を通って横切る BCD で，もう 1 つは［そうではない］BEF である。そしてそこから，切断する外部の部分を BC，BE とし，内部［の部分］を CD，EF としよう。さらに，BC は BE，EF の間の比例する中項より小さいとしよう。(さらに，これは，もしいつか EF が BE そのものより大きければ完全に起こるであろう。BC は同じ点 B から円を切断するもの

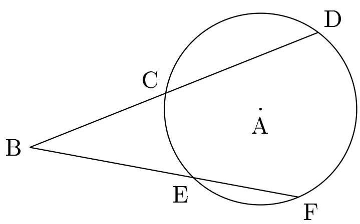
のうちより小さいものであるから，BE，EF の間の比例する中項は BE そのものより大きいであろう。) 私は，B から，円を切断し，そしてより遠くへ伸ばされたそれもまた円を切断するような，そ



れらに比例するものを引くことができる，と言う。なぜならば。BG が同じ円に接するとすると，それゆえ，BG は BE，EF の間のより大きい比例するものであろう。なぜなら，BG は BE および BF 全体の間の比例するものだからである。それゆえ，点 C，G の間に存在する［線が］引かれるであろう。確かに，H において存在するとしよう。それゆえ，より遠くへ伸ばされた BH は同じ円を，例えば I において，切断するであろう。そして，命題が成り立つ。

命題 2

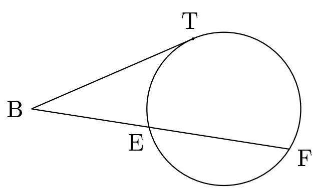
もし 2 つの直線が円の外部の同じ点からそれ自身を切断するように —— 一方は中心を通って，他方はそうではなく —— 引かれたならば，第 1 の割線は第 2 の割線に対して，ちょうど，第 2［の割線］の外部の部分が第 1［の割線］の外部の部分に対する。

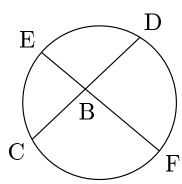


A を中心として描かれた円を，円の外部の同じ点 B から引かれた 2 つの直線が切断すると仮定されたとしよう。1 つは BCD で，もう 1 つは BEF である。そしてそこから，切断する外部の部分を BC，BE としよう。私は，BD が BF に対して，ちょうど BE が BC に対する，と言う。なぜならば，BD，BC によってつくられるものが BF，BE によってつくられるものに等しいことは『原論』において示されているからである。それゆえ，命題が成り立つ。

証明を見て明らかなように，命題中の「—— 一方は中心を通って，他方はそうではなく ——」は余分で，この命題は任意の 2 直線に対する言明である。

『原論』(Στοιχείωσις) 第 3 巻命題 36
「もし円の外部に 1 点がとられ，それから円に二つの直線がひかれ，それらの一方は円を切り，他方は接するとすれば，切る線分の全体と，外部にその点と凸形の弧との間に切り取られた線分とにかこまれた矩形は接線の上の正方形に等しいであろう。」(［5］p.76)



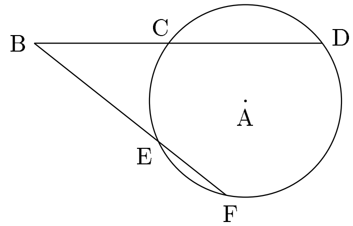


証明中に述べられていること［$BD \cdot BC = BF \cdot BE$］や『原論』第 3 巻命題 36 は，こんにち，方べきの定理といわれている。これは B が円の内部にある場合でも成り立つ。

命題 3 242

もし 2 つの直線が円の外部の点からそれ自身を切断するように引かれたならば，さらに，第 1［の割線］の外部の部分が同じものの内部の部分の間の比例するものになるならば，第 2［の割線］

の外部の部分も同様に第 1［の割線］の外部の部分および同じものの内部の部分の間の比例するものであろう。



A を中心として描かれた円を，円の外部の同じ点 B から引かれた 2 つの直線が切断する —— 一方は点 C，D において，他方は点 E，F において —— と仮定されたとしよう。そしてそこから，割線の外部の部分は BC，BE であるとし，さらに，BE は BC，CD の間の比例するものであるとしよう。私は，BC も同様に BE，EF の間の比例するものであろう，と言う。なぜならば。同じ点 B から［引かれた］BCD，BEF が円を切断するから，それゆえ，BE が BC に対するように BD が BF に対する。さらに，仮定から CD が BE に対するように BE が BC に対する。それゆえ，CD が BE に対するように，ちょうど，BD が BF に対するし，減法により，CD が BE に対するように，ちょうど，BC が EF に対する。結果として，CD が BE に対するように BE が BC に対するし，BC が EF に対する。それゆえ，BC は BE，EF の間の比例するものである。これが示されるべきことであった。

命題 4

もし円の外部の点から引かれた 2 つの直線がそれ自身を切断するならば，さらに，引かれたものの外部の部分同士によってつくられるものが内部同士によってつくられるものと等しくなるならば，交換するように仮定された外部の部分は内部の部分の間の連続的に比例するものであろう。

A を中心として描かれた円を，円の外部の同じ点 B から引かれた 2 つの直線が切断する —— 一方は，確かに，点 C，D において，他方は E，F において —— と仮定されたとしよう。そしてそこから，割線の外部の部分は BC，BE とし，内部［の部分］は CD，EF としよう。さらに，BC，BE によってつくられるものが DC，EF によってつくられるものと等しくなるとしよう。私は，DC，EF の間の連続的に比例するものは，交換するように仮定されると，BC，BE である。すなわち，第 1 の割線の内部の部分が第 2 の割線の外部の部分に従い，あるいは，第 2［の割線］の内部の部分が第 1［の部分］の外部の部分に［従う］。確かに，DC が BE に対するように BE が BC に対し，そして，BC が EF に対する。

なぜならば。CD，EF によってつくられるものが，仮定から，BC，BE によってつくられるものと等しいから，それゆえ，CD が BE に対するように BC が EF に対する。合成［加比の理］により，CD が BE に対するように BD が BF に対する。しかし，比の構成［方べきの定理］から，BE が BC に対するように，ちょうど，BD が BF に対する。ゆえに，CD が BE に対するように BE が BC に対し，結果として，BC が EF に対する。これが証明すべきことであった。

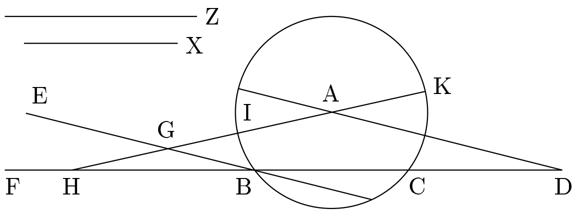
命題 5

2 つの直線が与えられたとき，それらの間に連続的に比例する 2 つの中項を見出すこと。

与えられた 2 つの直線を Z，X としよう。Z および X の間に連続的に比例する 2 つの中項を見出さなければならない。Z をより大きい方，X をより小さい方としよう。

243 中心を A とし，距離［半径］を Z の半分に等しい AB として円が描かれるとし，X そのものに等しい［弦］BC が書き入れられるとしよう。さらに，BC を，BD が BC そのものの 2 倍になるように，D まで伸ばされ，そして，DA が結ばれ，［それと］平行に不定［の長さ］の BE がもたらされるとしよう。さらに，DB が不定［の長さ］の F まで伸ばされ，そして，点 A から 2 つの［直

線］BE，BF に直線 KAIGH —— 確かに，BE，BF を点 G，H で切断する —— が，GH が AB



そのものに等しくなるように，引かれるとしよう。一方，［その直線は］円を点 I，K で —— それらのうち H により近い方が I となる ——［切断するとしよう］。私は，IK，HB，HI，BC は連続的に比例するものである，と言う。

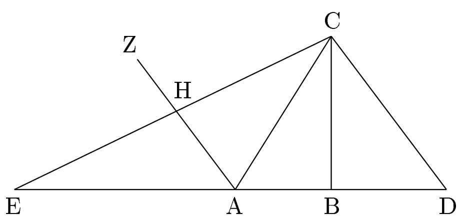
なぜならば。つくり方から DA，BG は平行であるから，それゆえ，HG が HB に対するように GA が BD に対する。さらに，HG が IK に対するように，単独のものが 2 倍のものに対するのが明らかなように，ちょうど，BC が BD に対する。それゆえ，IK が HB に対するように GA が BC に対する。さらに，GH，AI は等しいから，HI，GA も同様に等しいであろう。ゆえに，IK が HB に対するように HI が BC に対する。それゆえ，円の外部にとられた点 H からそれ自身を切断するように引かれた 2 つの直線があり，それらの外部の部分 —— すなわち HB，HI —— によってつくられるものは内部の部分 —— すなわち IK，BC —— によってつくられるものに等しい。それゆえ，相互にとられた外部の部分は内部の部分の間の連続的に比例するものである。確かに，IK，HB，HI，BC は連続的に比例するものであろう。それゆえ，2 つの直線 Z，X —— すなわち IK，BC —— が与えられたとき，それらの間に 2 つの連続的に比例する中項 HB，HI が見出された。これがなされるべきことであった。

与えられた 2 直線 Z，X に対して，図のように，$GH = AB = AI = AK = \frac{1}{2}Z$，$BC = X$，
$DA \,/\!/\, BE$，$BD = 2 \cdot BC$ とすると，
まず，$DA \,/\!/\, BG$ より，$HG : HB = (HA - HG) : (HD - HB) = GA : BD$
また，$HG = AB = AI$，$BD = 2 \cdot BC$ より，$HG : IK = BC : BD = 1 : 2$
ゆえに，$HB \cdot GA = HG \cdot BD = IK \cdot BC$ だから，$IK : HB = GA : BC$ となる。
さらに，$GH = AI$ より，$HI = HG + GI = AI + GI = GA$
よって，$IK : HB = HI : BC$，すなわち $Z : HB = HI : X$ となる。

命題 6

直角三角形が与えられたとき，それらの底線の差および斜辺の差によってつくられるものがどのようなものであれ与えられた長方形に等しくなるような，より大きく，高さが等しい別の直角三角形を見出すこと。

与えられた直角三角形を ABC，その底線を AB，斜辺を AC，高さを BC としよう。AB と求められた［直角三角形の］底線の間の差および AC と求められた［直角三角形の］斜辺の差によって



つくられるものがどのようなものであれ与えられた長方形に等しくなるような，より大きく，高さが等しい別の直角三角形を見出さなければならない。AC およびどのようなものであれ AD によってつくられる長方形が与えられるとし，もしその［直角三角形の］形の中に与えられないならば，それが変形されるとしよう。そして，もし必要ならば，AB が AD まで続けられた

244 と仮定されるとし，DC が結ばれ，それと平行に AZ がつくられるとしよう。さらに，C から，延長された DA を E で，一方，AZ そのものを H で切断し，切片 HE が CA そのものに等しくなるように，直線が引かれるとしよう。私は，三角形 CBE は求められている種類のものである，と言う。

なぜならば。EA は底線 EB が底線 AB を超えている差であり，CH は斜辺 CE が斜辺 CA，またはつくり方からそれに等しい HE，を超えている差である。さらに，EA，CH によってつくられるものは AD，HE によってつくられるものに等しい。なぜならば，つくり方から CD，HA は平行であるから，それゆえ，AD が CH に対するように AE が HE に対するからである。さらに，その三角形 CBE の高さは三角形 CBA のそれと同じで，明らかに BC である。それゆえ，直角三角形 ABC が与えられたとき，底線の差 AE および斜辺の差 CH によってつくられるものが AD，HE によってつくられる与えられた長方形あるいはそれに等しいものに等しくなるような，より大きく，高さが等しい別の直角三角形が見出された。これがなされるべきことであった。

そしてまた，ここから与えられたものの間の連続的に比例する 2 つの中項の発見が明らかになる。確かに，このことは「確証法」において (in Poristicis) 示されている。第 4 の，外項の間のより大きい，ものの平方は，第 4 のものおよび第 2 のものの 2 倍から集められた［和の］平方が第 1 のものおよび第 3 のものの 2 倍から集められた［和の］平方から異なっているだけ，第 1 のものの平方から異なっている。それゆえ，もし 2 つの直角三角形が提示されるならば，それら［のうち］の一方［の直角三角形］の底線は第 1 の，外項の間のより小さい，ものに，斜辺は第 4 のものに等しく，それら［のうち］の他方の底線は第 1 のものおよび第 3 のものの 2 倍から集められたものに，一方，斜辺は第 4 のものおよび第 2 のものの 2 倍から集められたものに等しい。［そして，］それらの三角形は高さが等しいであろう。それゆえ，図によって表された操作 (opus mesographicum) は，その底線が第 1 のものに，斜辺が第 4 のものに等しい三角形がつくられたことから，その底線が第 1 のものおよび第 3 のものの 2 倍から集められたものに，一方，斜辺が第 4 のものおよび第 3 のものの 2 倍から集められたものに等しい，等しい高さの別の三角形が求められることというように，それによって変えられる。確かに，三角形が求められることは，斜辺の超過分が第 2 のものの 2 倍であり，底線［の超過分］は第 3 のものの 2 倍であるから，この命題によって見出されることが許されるであろう。そして，それらの超過分によってつくられるものは第 1 のものおよび第 4 のものによってつくられるものの 4 倍に等しい。それゆえ，命題の法則が要求するすべてのものが与えられた。

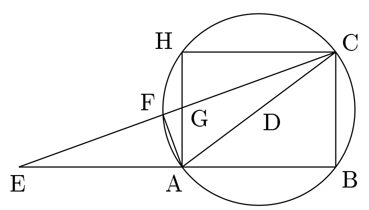
「『確証法』において (in Poristicis)」について ……
ヴィエートの著作で「確証法」に該当するものは現存しないようである。「記号計算についての後の注釈」がそうかも知れないが，これは現存しない。あるいは「探究法 5 巻」(*Zeteticorum Libri Quinque*) と対をなすような著作があったのか。
そのためか，『解析術』では「確証法によって (by poristics)」としている。

なお，Eric Wesstein’s World of Scientific Biography におけるヴィエートの項では，
zetetics (探究法) ··· translating a problem into an equation
poristics (確証法) ··· proving theorems through equations
exegetics (釈義法) あるいは rhetics (修辞法) ··· solving equations
とされている (`http://scienceworld.wolfram.com/biography/Viete.html`)。

命題 7

提示された 3 つの比例する直線の中の第 1 のもの，およびその平方が第 2 のものおよび第 3 のものから集められた［和の］平方が第 2 のものおよび第 1 のものから集められた［和の］平方から異なっているものと等しい［別の］直線が与えられたとき，第 2 および第 3 の比例するものを見出すこと。

提示された 3 つの比例する直線の中の与えられた第 1 のものを AB，そしてまた，その平方が第 2 のものおよび第 3 のものから集められた［和の］平方が第 2 のものおよび第 1 のものから集められた［和の］平方から異なっているものと等しい与えられた［別の］直線を BC としよう。第 2 および第 3 の比例するものを見出さなければならない。



AB，BC が直角に傾けられて，D で半分にされるように CA が結ばれるとし，D を中心とし，DA あるいは DC を距離［半径］として円が描かれ，そして，不定に伸ばされた BA に点 C から，伸ばされた BA を E において，さらに円を F において切断し，FE が AB そのものに等しくなるように，直線が引かれ，さらに，A から BC そのものに平行に，CE を G において切断する［直線を］下ろすとしよう。私は，EA が求められていた第 2 のもの，そして EG が第 3 のものである，と言う。

なぜならば。AF が張られ，AG そのものが円周上の H まで伸ばされるとしよう。ゆえに，三角形 GCH，FEA は辺および角が等しい。なぜならば，鋭角 AEF，HCG は等しく，さらに AFE，GHC は直角で，さらに辺 CH，FE は等しいから，それゆえ，EA，CG も同様に等しいからである。さらに，CG すなわち AE が GE に対するように BA が AE に対する。ゆえに，3 つの比例するもの BS，AE または CG，および GE が存在する。さらに，BE そのものは BA，AE —— 第 1 のものおよび第 2 のもの —— から集められた［和］である。さらに，CE そのものは CG，GE 245
—— 第 2 のものおよび第 3 のもの —— から集められた［和］である。最後に，CE の平方は BE の平方から CB の平方だけ異なっている。

それゆえ，3 つの比例するもの［のうち］の第 1 の AB，およびその平方が第 2 のものおよび第 3 のものから集められた［和］EC の平方が第 1 のものおよび第 2 のものから集められた［和］EB の平方から異なっているものと等しい［別の］直線 BC が与えられたとき，EA または GC および EG —— 第 2 のおよび第 3 の比例するもの —— が見出された。これがなされるべきことであった。

そして，ここから［次のように］簡潔な［言い方が］許される。

それらの外項が 2 倍の比にある，連続的に比例する 4 つの直線を描くこと。

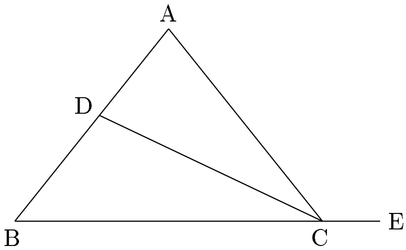
確かに，このことは「確証法」において示されている。しかし，もし比例する 3 つの直線があったならば，さらに，第 2 のものおよび第 3 のものから集められた［和の］平方が第 2 のものおよび第 1 のものから集められた［和の］平方から第 1 のものの平方の 3 倍だけ異なるのであれば，第 1 のものの 2 倍はその系列における第 4 の連続的に比例するものであろう。

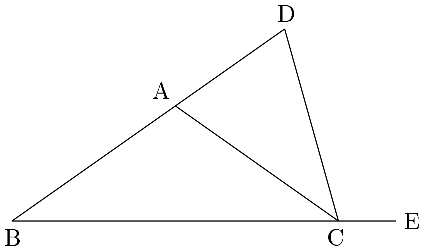
それゆえ，どのようなものであれ第 1 のものおよびその第 1 のものの平方の 3 倍が仮定されると，第 2 のものおよび第 3 のものが見出されるであろう。この系列において，第 4 のものは第 1 のものの 2 倍であろう。

命題 8

もし等しい足の三角形［二等辺三角形］があり，そして，底線［の一方］の端点から［反対側の］足にその足に等しい直線が引かれるならば，底線および底線の端点から引かれる直線からつくられた外部の角は等しい足［二等辺三角形］の底線におけるいずれかの角の 3 倍である。

三角形 ABC が等しい足 AB，AC をもち，角 ACB から足 AB (それゆえ，もし必要ならば伸ばされる) に，足 AB あるいは AC そのものに等しい，直線 CD が引かれ，BC が E まで伸ばされるとしよう。私は，角 DCE は角 ACB または ABC の 3 倍である，と言う。



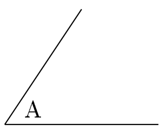


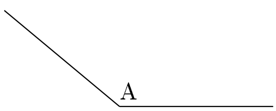
なぜならば。BAC，DCA は等しい足の三角形であるから，それゆえ，角 ACB は角 ABC に等しく，角 ADC は角 DAC に等しい。それゆえ，角 ACB あるいは ABC は，2 直角が，角 BDC がその外部［の角］に等しくされる，［角］BAC を超えるという性質の 2 つの部分における 1 つである。それゆえ，［角］BDC はそのような性質の 2 つの部分の角である。さらに，角 DBC および角 BDC から集められたものは角 DCE である。それゆえ，角 DCE はそれらの 3 つの部分である。それゆえ，角 DCE は角 ACB または ABC の 3 倍である。これが示されなければならないことであった。

命題 9

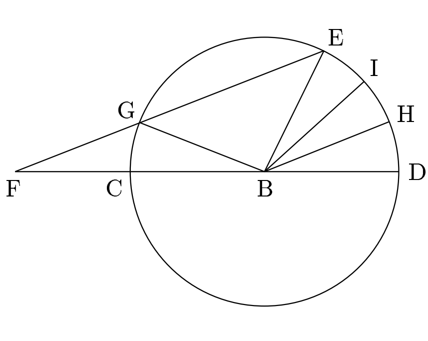
与えられた角を 3 つに切ること。

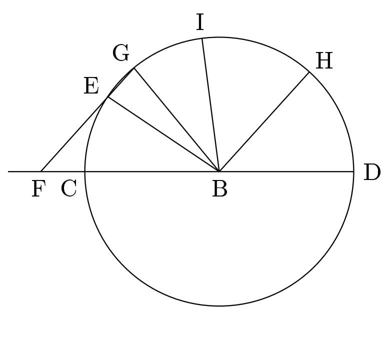
A を 3 つに切らなければならない与えられた角としよう。





246 B を中心とし，任意の半径で円が描かれ，直径 CBD が表されるとしよう。さらに，与えられた角の大きさを定める，円周［弧］DE がとられるとしよう。DBC が不定に伸ばされ，伸ばされた直径を F で，一方，円周を G で切断する，直線 EFG が FG が BC あるいは BD に等しいように引かれるとしよう。私は，角 EFC が角 EBD，すなわち与えられた角 A，の 3 分の 1 であり，そして，弧 GC そのものがその［弧 ED の］大きさの 3 分の 1 である，と言う。





なぜならば。GB が結ばれるとしよう。それゆえ，FGB は足が等しい三角形であり，その底線

の端点 B から引かれた BE は足 BG に等しい。それゆえ，角 EBD は角 GBF または GFB の 3 倍である。さらに，弧 GC は角 GBF そのものの大きさを定める。その結果，弧 DE から弧 CG そのものに等しい弧 DH，HI が切り取られ，直線 BH，BI がもたらされるとしよう。ゆえに，角 EBD，すなわち与えられた A，は直線 BH，BI によって 3 つに切られる。これがなされるべきことであった。

> いわゆる角の 3 等分問題の，命題 8 を利用した，1 つの解法である。割線 FGE (または FEG) が定規とコンパスでは作図できないので，古代人の意味での解法には，もちろん，なっていない。

命題 10

もし比例する 3 つの直線があったならば，第 1 のものは第 3 のものに対して第 1 のものおよび第 2 のものの平方の和が第 2 のものおよび第 3 のものの平方の和に対する。

なぜならば。第 1 のものは第 2 のものに対して第 2 のものが第 3 のものに対する。結果として，第 1 のものの平方は第 2 のものの平方に対して第 2 のものの平方が第 3 のものの平方に対し，そして，合成［加比の理］によって，第 1 のものの平方は第 2 のものの平方に対して第 2 のものおよび第 1 もののの平方の和が第 2 のものおよび第 3 のものの平方の和に対する。しかし，第 1 のものの平方は第 2 のものの平方に対して第 1 のものが第 3 のものに対する。ゆえに，第 1 のものは第 3 のものに対して第 1 のものおよび第 2 のものの平方の和が第 2 のものおよび第 3 のものの平方の和に対する。これが示されるべきことであった。

命題 11

もし比例する 3 つの直線があったならば，第 1 のものは第 1 のものおよび第 3 のものの和に対して第 2 のものの平方が第 2 のものおよび第 3 のものの平方の和に対する。

なぜならば，第 1 のものは第 3 のものに対して第 2 のものの平方が第 3 のものの平方に対し，そして，合成によって，第 1 のものは第 1 のものおよび第 3 のものの平方の和に対して第 2 のものの平方が第 2 のものおよび第 3 のものの平方の和に対するからである。

帰結

それゆえ，もし比例する 3 つの直線があったならば，それらからつくられた［次のような］3 つの立体は等しい。

第 1 は，第 1 のもの，および第 2 のものおよび第 3 のものの平方の和による立体。 247

第 2 は，第 3 のもの，および第 1 のものおよび第 2 のものの平方の和による立体。

第 3 は，第 1 のものおよび第 3 のものから集められた［和］，および第 2 のものの平方による立体。

なぜならば。第 1 のものは第 3 のものに対して第 1 のものおよび第 2 のものの平方の和が第 2 のものおよび第 3 のものの平方の和に対することは示されており，さらに，提示された第 1 の立体はこの比例の外項によってつくられたものであり，一方，第 2 のものは中項によってつくられたものであるから，それゆえ，第 1 のものおよび第 2 のものは等しい。

同様に，第 1 のものは第 1 のものおよび第 3 のものから集められた［和］に対して第 2 のものの平方が第 2 のものおよび第 3 のものの平方の和に対することは示されており，さらに，提示された第 1 の立体は，再び，この比例の外項によってつくられたものであり，一方，第 3 のものは中項に

よってつくられたものであるから，それゆえ，第 1 のものおよび第 3 のものは等しい。そして，それゆえ，第 3 のものもまた第 2 のものに等しい。

命題 12

もし比例する 3 つの直線があったならば，2 つの外項から集められた［和の］立体引く同じ集められたものおよび 3 つのものの平方の和によってつくられた立体は同じ集められたものおよび第 2 のものの平方による立体に等しい。

なぜならば。2 つの外項から集められた［和の］平方は 1 つずつの外項の平方と中項の平方の 2 倍を合わせたものに相当する。それゆえ，2 つの外項から集められた［和の］平方引く 3 つのものの平方の和は中項または第 2 のものの平方に等しい。それゆえ，2 つの外項から集められた［和の］平方引く 3 つのものの平方の和が第 2 のものの平方に対するようにそれらから集められた［和］が同じ集められた［和］に対する，すなわち，等しいものが等しいものに対する。この比例の解法によって命題は成り立つ。

> $a:b=b:c$ である a，b，c について，$(a+c)^3-(a+c)(a^2+b^2+c^2)=(a+c)b^2$ が成り立つということ。
> $(a+c)^2=a^2+c^2+2ac=a^2+c^2+2b^2$ であるから，$(a+c)^2-(a^2+b^2+c^2)=b^2$ となり，$(a+c)^2-(a^2+b^2+c^2):b^2=(a+c):(a+c)$ となるから，$\left\{(a+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\right\}(a+c)=b^2(a+c)$ がいえる。

命題 13

もし比例する 3 つの直線があったならば，第 1 のものおよび 3 つのものの平方の和による立体引く第 1 のものの立方は同じ第 1 のものおよび第 2 のものおよび第 3 のものの平方の和による立体に等しい。

なぜならば。3 つのものの平方の和引く第 1 ものののの平方は第 2 のものの平方足す第 3 ものののの平方である。それゆえ，3 つのものの平方の和引く第 1 のものの平方が第 2 のものおよび第 3 のものの平方［の和］に対するように第 1 のものが第 1 のものに対する，すなわち等しいものが等しいものに対する。この比例の解法によって命題は成り立つ。

> $(a^2+b^2+c^2)-a^2=b^2+c^2$ であるから，$(a^2+b^2+c^2)-a^2:b^2+c^2=a:a$ となり，$a\left\{(a^2+b^2+c^2)-a^2\right\}=a(b^2+c^2)$ がいえる。

命題 14

もし比例する 3 つの直線があったならば，第 3 のものおよび 3 つのものの平方の和による立体引く第 3 のものの立方は同じ第 3 のものおよび第 1 のものおよび第 2 のものの平方の和による立体に等しい。

なぜならば。3 つのものの平方の和引く第 3 のものの平方は第 2 のものの平方足す第 1 のものの平方に相当する。それゆえ，3 つのものの平方の和引く第 3 のものの平方が第 2 のものおよび第 1 のものの平方［の和］に対するように第 3 のものが第 3 のものに対する，すなわち等しいものが等しいものに対する。この比例の解法によって命題は成り立つ。

帰結

それゆえ，もし比例する 3 つの直線があったならば，それらからつくられた［次のような］3 つ

の作用された立体は等しい。

第 1 は，第 1 のものおよび第 3 のものから集められた［和の］立方引く同じ集められた［和］および 3 つのものの平方の和による立体。

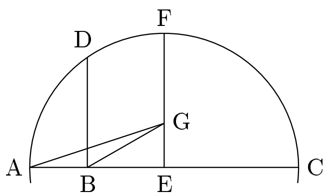
第 2 は，第 1 のものおよび 3 つのものの平方の和による立体引く第 1 のものの立方。 248

第 3 は，第 3 のものおよび 3 つのものの平方の和による立体引く第 3 のものの立方。

これらの立体は，前述の帰結から，等しいものに等しくされる。それゆえ，互いに等しい。

命題 15

もし円の周からその直径に 2 つの —— 1 つは中心に，もう 1 つは中心以外に —— 垂線を下ろし，そして，中心における垂線にもう 1 つの垂線に付随する点［垂線の足］から，直径となす角が直角の 3 分の 1 に等しくなる，直線がもたらされ，さらに，そのもたらされた直線が中心における垂線を切断する点から半円の［直径となす］角に別の直線が引かれるならば，この［後者の直線の］平方の 3 倍は中心の外に落ちる垂線の平方と直径の切片 —— それらの間の比例する中項がその垂線である —— の平方［の和］が一緒になったものに等しい。



ABC を円の直径とし，その［円の］周から垂線 DB を下ろし，AB をより小さな切片，BC をおよ大きな［切片］とし，さらに E を中心としよう。しかもそのうえ，［円の］周から同様に垂線 FE を下ろし，B から直線 BG が角 GBE が直角の 3 分の 1 に等しくなる —— そこから BG は GE そのものの 2 倍になる —— ように引かれるとし，AG が結ばれるとしよう。私は，AG の平方の 3 倍が AB の平方および BC の平方［の和］が一緒になった DB の平方に等しい，と言う。

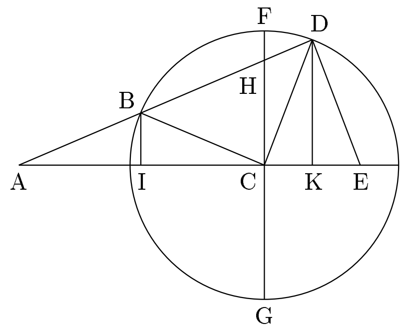
なぜならば。AB の平方は AE の平方および BE の平方［の和］引く AE，BE によってつくられるものの 2 倍に等しい。さらに，BC の平方は BE，EC によってつくられるものの 2 倍が一緒になった BE の平方および EC の平方［の和］に等しい。そして，AE，EC は等しい。それゆえ，BC の平方が一緒になった AB の平方は AE の平方の 2 倍および BE の平方の 2 倍［の和］に等しくされる。両方［の辺］に DB の平方が加えられるとしよう。(確かに，BE の平方が加えられた DB の平方そのものは AE の平方に等しい。) それゆえ，AB，BC，DB の平方が集められたものは BE の平方が一緒になった AE の平方の 3 倍に相当する。さらに，BG は GE そのものの 2 倍としてつくられるから，BE の平方は GE の平方の 3 倍である。さらに，EG の平方が加えられた AE の平方は AG の平方に相当する。それゆえ，AG の平方の 3 倍は AB の平方および BC の平方［の和］が一緒になった DB の平方に等しい。これが示されるべきことであった。

命題 16

もし 2 つの別々の足の等しい三角形［二等辺三角形］があり，一方の足が他方［の足］に等しく，さらに，第 2 のものの底線となす角［底角］が第 1 のものの底線となす角の 3 倍であるならば，第 1 のものの底線の立方引く第 1 のものの底線および共通の足の平方による立体の 3 倍は第 2 のものの底線および同じ足の平方による立体に等しい。

第 1 の三角形 ABC が等しい足 AB，BC を持つとしよう。そして，第 2 の三角形も同様に足が等しく，その第 2 の三角形の底線のなす両方の角［底角］は角 BAC あるいは BCA そのものの 3 倍であり，それは直角より小さくなければならないから，それゆえ，両方の角 BAC，BCA は直角の 3 分の 1 より小さく，そしてさらに，角 ABC は直角より大きい。それゆえ，AB，AC が伸ばさ

れ，C から伸ばされた AB に AB そのものに等しい CD が描かれ，それから，D から伸ばされた AC に同じく AB そのものに等しい DE が描かれるとしよう。それゆえ，2 つの等しい足の三角形 ABC，CDE が存在する。しかもそのうえに，第 1 の三角形の等しい足 AB，BC そのものは第 2
249 の三角形の足 CD，DE に等しい。さらに，どちらの角 BAC，BCA も［2 直角の］1 つの部分であるから，角 ABC は 2 直角引くそのような 2 つの部分であり，そして，角 ABC の外部の角はそれら 2 つの部分である。角 ADC は，足 CD，CB の同等性のために角 DBC，CDB が等しいから，その外部の角に等しくされる。さらに，角 ADC，DAC から集められた［和］が角 DCA の外部の角である。それゆえ，第 2 の三角形は CDE であり，それ自身は等しい足［の三角形］であり，第 1［の三角形］ABC の足と等しい足を持ち，底線となすいずれかの角，すなわち DCE あるいは DEC，は角 BAC あるいは BCA の 3 倍である。それゆえ，私は，AC の立方引く AC および AB の平方による立体の 3 倍は CE および DC または AB の平方による立体に等しい，と言う。



なぜならば。C を中心，CB あるいは CD を距離［半径］として円が描かれ，AE を C で垂直に切断し，さらに AD を H で切断する，直径 FCG がもたらされ，AE を I および K で垂直に切断する，FG そのものに平行な BI，DK もまたもたらされるとしよう。それゆえ，AI, IC は等しく，それゆえ，AC は AI そのものの 2 倍になる。それゆえ，AB，BH もまた等しく，AH は AB そのものの 2 倍になる。そのうえ，CK，KE は等しく，CE は CK そのものの 2 倍になる。

さらに，CG すなわち AB の平方は FH，HG からつくられるものが一緒になった CH の平方に等しくされ，そして，移動させられると AB の平方引く CH の平方は FH，HG からつくられるもの，すなわち BH，HD からつくられるもの，に等しくされる。さらに，CH の平方そのものは AH の平方引く AC の平方であり，AH の平方は AB の平方の 4 倍である。それゆえ，AC の平方引く AB の平方の 3 倍は BH，HD によってつくられるものに等しい。しかし，BH が HD に対するように IC が CK に対し，そして，IC が CK に対するように AC が CE に対するようになる。後者［AC，CE］は前者［IC，CK］の 2 倍だからである。それゆえ，AC が CE に対するように BH が HD に対し，そして結果として，AC が CE に対するように BH すなわち AB の平方が BH，HD からつくられるものすなわち AC の平方引く AB の平方の 3 倍に対する。それゆえ，この比例の解法によって，AC の立方引く AC および AB の平方によってつくられる立体の 3 倍は CE および AB の平方によってつくられる立体に等しい。これが示されるべきことであった。

まず，$\mathrm{AB}^2=\mathrm{CG}^2=\mathrm{CF}^2=(\mathrm{FH}+\mathrm{CH})^2=\mathrm{FH}^2+\mathrm{CH}^2+2\mathrm{FH}\cdot\mathrm{CH}$

$$=\mathrm{CH}^2+\mathrm{FH}(\mathrm{FH}+\mathrm{CH}+\mathrm{CH})=\mathrm{CH}^2+\mathrm{FH}(\mathrm{CG}+\mathrm{CH})=\mathrm{CH}^2+\mathrm{FH}\cdot\mathrm{HG}$$

であるから，方べきの定理により，$\mathrm{AB}^2-\mathrm{CH}^2=\mathrm{FH}\cdot\mathrm{HG}=\mathrm{BH}\cdot\mathrm{HD}$ となる。
次に，$\mathrm{CH}^2=\mathrm{AH}^2-\mathrm{AC}^2=4\mathrm{AB}^2-\mathrm{AC}^2$ であるから，$\mathrm{AB}^2-\mathrm{CH}^2=\mathrm{AC}^2-3\mathrm{AB}^2$ となり，$\mathrm{AC}^2-3\mathrm{AB}^2=\mathrm{BH}\cdot\mathrm{HD}$ がいえる。
そして，$\mathrm{BH}:\mathrm{HD}=\mathrm{IC}:\mathrm{CK}$，$\mathrm{IC}:\mathrm{CK}=\mathrm{AC}:\mathrm{CE}$ であるから，

$$\mathrm{AC}:\mathrm{CE}=\mathrm{BH}:\mathrm{HD}=\mathrm{BH}^2:\mathrm{HD}\cdot\mathrm{BH}=\mathrm{AB}^2:\mathrm{AC}^2-3\mathrm{AB}^2$$

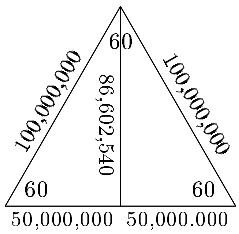
が成り立つ。
これから，$\mathrm{AC}^3-3\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}^2=\mathrm{CE}\cdot\mathrm{AB}^2$ となる。

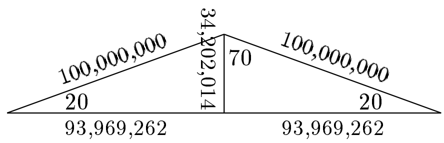
Z をどこであれ足の等しい三角形の辺とし，そしてそこから，どこであれ角が 2 直角の 3 分の 1 であるとしよう。

A の立方引く A が掛けられた Z の平方の 3 倍は Z に立方に等しくされる。そして，A は足の等しい三角形の底線となり，底線となす角が 2 直角の 9 分の 1 である。

Z を 1，A を $1N$ としよう。［すると，］$1C - 3N$ は 1 に等しくされる。

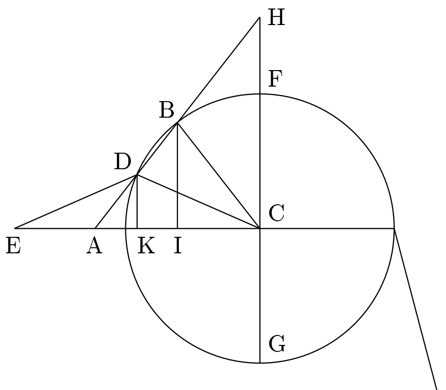
Z を 100,000,000 としよう。それゆえ，それは［下のような］三角形となるであろう。





命題 17 250

もし 2 つの別々の足の等しい三角形があり，一方［の足］が他方の足に等しく，さらに，第 2［の三角形］の底線となす角が 2 直角から残される角は第 1［の三角形］の底線となす角の 3 倍であるならば，第 1［の三角形］の底線および共通の足の平方による立体の 3 倍引く第 1［の三角形］の底線の立方は第 2［の三角形］の底線および共通の足の平方による立体に等しい。



第 1 の三角形 ABC が等しい足 AB, BC を持つとしよう。そして，どのようなものであれ第 2［の三角形］の底線となす角が 2 直角から残される角は角 BAC そのものの 3 倍であり，そして，それは必然的に直角より大きいから，それゆえ，どのようなものであれ底線となす角 BAC，BCA そのものは，結果として，直角の 3 分の 1 より大きく，そしてさらに，頂点における角［頂角］ABC は直角より小さい。それゆえ，AB に［向かって］AB そのものと等しい CD が描かれるとしよう。それから，D から伸ばされた CA に［向かって］AB そのものに等しい DE が描かれるとしよう。それゆえ，2 つの等しい足の三角形 ABC，EDC が存在し，そして，第 2 の三角形の［等しい］足 DE，DC は第 1 の三角形の等しい足 AB，BC そのものに等しい。さらに，角 ABC は 2 直角引く，角 BAC，BCA のいずれもが［2 直角の］部分であるような種類の，2 つの部分であり，角 ABC の外部の角はそれらの 2 つの部分であって，足 CB，CD の同等性のために角 DBC，CDB は等しいから，角 ADC はその外部の角に等しくされる。さらに，角 DCA の外部の角は角 ADC および DAC から集められた［和］である。それゆえ，第 2 の三角形 CDE はそれ自身等しい足［の三角形］であり，そして，その足は第 1［の三角形］ABC の等しい足に等しく，底線となす角 DCE あるいは DEC が 2 直角から残されたいずれかの角は角 BAC あるいは BCA の 3 倍である。それゆえ，私は，AC および AB の平方による立体の 3 倍引く AC の立方は EC および DC または AB の平方による立体に等しい，と言う。

なぜならば。C を中心，CB あるいは CD を距離として円が描かれ，そして，EA，それが伸ばされるとして，を C において垂直に，さらにまた伸ばされた AD そのものを H において切断する，

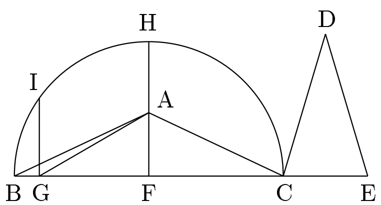
直径 FCG がもたらされ，FG そのものに平行な BI，DK もまたもたらされ，それらは同じ AE を I，K において垂直に切断するとしよう。それゆえ，AI，IC は等しく，それゆえ，AC は AI そのものの 2 倍となる。それゆえ，AB，BH もまた等しく，AH は AB そのものの 2 倍になる。EK，KC もまた等しく，EC は EK そのものの 2 倍になる。

さらに，CH の平方は CF，すなわち AB，の平方と HF，HG によってつくられるものが一緒になったものに等しく，移動させられると，CH の平方引く AB の平方は HF，HG によってつくられるもの，すなわち［方べきの定理により］HB，HD によってつくられるもの，に等しい。さらに，CH の平方そのものは AH の平方引く AC の平方に等しく，そして，AH の平方は AB の平方の 4 倍である。それゆえ，AB の平方の 3 倍引く AC の平方は BH，HD によってつくられるものに等しい。しかし，HB が HD に対するように CI が CH に対するようになり，そして，CI が CK に対するように CA が CE に対するようになる。後者は前者の 2 倍だからである。それゆえ，CA が CE に対するように HB が HD に対し，結果として，CA が CE に対するように HB すなわち AB
251 の平方が HB，HD によってつくられるもの，すなわち AB の平方の 3 倍引く AC の平方，に対する。それゆえ，この比例の解法によって，AC および AB の平方による立体の 3 倍引く AC の立方は EC および AB の平方による立体に等しい。これが示されるべきことであった。

> 2 つの二等辺三角形 ABC，CDE について，AB = BC = CD = DE，$2\angle R - \angle DEC = 3\angle BAC$ ならば，$3AC \cdot AB^2 - AC^3 = EC \cdot AB^2$ となる，ということ。

命題 18

もし 2 つの別々の足の等しい三角形があり，一方［の足］が他方に足に等しく，さらに，第 2［の三角形］の底線となす角が第 1［の三角形］の底線となす角の 3 倍であるならば，共通の足の平方および，その平方が第 1［の三角形］の高さの平方の 3 倍に等しい長さが罰せられたまたは結合された，第 1［の三角形］の底線の半分による立体の 3 倍は，罰せられたまたは結合された底線の同じ半分の立方が罰せられるであろうとき，第 2［の三角形］の底線および同じ足の平方による立体に等しい。



第 1 の三角形 BAC が等しい足 AB，AC を持ち，第 2［の三角形］CDE もまた等しい足 DC，DE を持つとしよう。そして，AB，AC は DC，DE に等しく，しかもそのうえ，角 DCE または DEC は角 ABC または ACB の 3 倍であるとしよう。さらに，第 1 の三角形の高さ AF が立てられ，そして，底線の中に B に向かって AF そのものの 2 倍の AG が描かれ，そのため BF，FC の両方は底線の半分になり，そして，GF の平方は高さ AF の平方の 3 倍であり，そしてさらに，BG は長さ GF が罰せられた BF に等しく，GC は長さ GF が結合された FC に等しい。私は，BG および AB の平方による立体の 3 倍引く BG の立方は CE および DC または AB の平方による立体に等しい，と言う。

なぜならば。F を中心，BF あるいは FC を距離として円が描かれ，そして，FA が H において［円を切断するように］円周まで伸ばされ，同じ円周から直径の中に点 G まで垂直に直線 IG が下ろされるとしよう。それゆえ，3 つの比例するもの BG，GI，GC が存在する。さらに，AG は AF の 2 倍であるから，あるいは他の方法によって，角 AGF は直角の 3 分の 1 であり，それゆえ，AB

の平方の 3 倍は BG，GI，GC のそれぞれの平方［の和］に等しい。それゆえ，［次のような］3 つの作用された立体は等しい。

第 1 は，BC の立方引く BC および AB の平方による立体の 3 倍。

第 2 は，BG および AB の平方による立体の 3 倍引く BG の立方。

第 3 は，GC および AB の平方による立体の 3 倍引く GC の立方。

しかし，最後から 3 番目の命題から，第 1［の立体］は CE および AB の平方による立体に等しい。

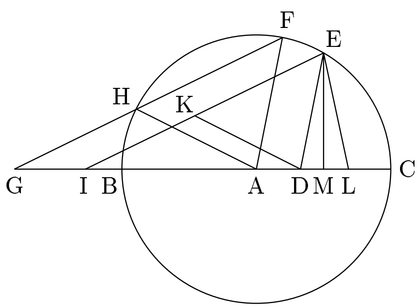
それゆえ，第 2［の立体］および第 3［の立体］もまた CE および AB の平方による同じ立体に等しくされる。そしてそのために，命題は成り立つ。

> 2 つの二等辺三角形 ABC，DCE について，$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{DC} = \mathrm{DE}$，$\angle\mathrm{DCE} = 3\angle\mathrm{ABC}$ ならば，X を $\mathrm{X}^2 = 3\mathrm{AF}^2$［$\mathrm{X} = \mathrm{GF}$］とするとき，$3\mathrm{AB}^2\,(\mathrm{BF} \pm \mathrm{X}) - (\mathrm{BF} \pm \mathrm{X})^3 = \mathrm{CE} \cdot \mathrm{AB}^2$ となる，ということ。

命題 19

円の直径を，延長されるものが延長されるものが加えられた半径に対するように半径の平方が延長された直径の平方に対するように，延長すること。

A を中心，BAC を直径として円が描かれ，そして，CD が直径の 3 分の 1 と，弧 CE が半円周の 3 分の 1 として，あるいは他の方法によって，六角形の弧と仮定されるとしよう。そして，ED が結ばれ，それに平行な半径 AF がもたらされ，点 F から伸ばされた CB に［向かって］，円周を H において切断し，HG が半径 AB または AC に等しくなるように，FG が引かれるとしよう。さらに，FG そのものに平行に，CG を I において切断する，EI がもたらされるとしよう。私は，要求されたことがなされた，と言う。なぜならば，IB が IA に対するように AB の平方が IC の平方 252
に対するからである。



なぜならば。AH が結ばれ，それに平行に DK がもたらされ，伸ばされた BC に［向かって］DE そのものに等しい EL が描かれるとしよう。それゆえ，三角形 GHA の足 GH，HA は等しく，底線の端点 A から足 GH そのものに等しい AF が引かれている。角 FAC は角 HAG の 3 倍になる。さらに，三角形 IKD，KDE は三角形 GHA，HAF に相似であり，IKD は足の等しい三角形である。しかし，三角形 DEL もまた等しい足でつくられており，足 DE，EL は足 IK，KD に等しく，角 EDL または ELD は角 KID または KDI の 3 倍である。

それゆえ，ID の立方引く ID および IK または DE の平方による立体の 3 倍は DL および DE の同じ平方により立体に等しい。

さらに，AD は半径 AB の 3 分の 1 であり，E から直径に［向かって］垂直な EM が下ろされるとき，DM は半径の 6 分の 1 になり，さらに，AB の平方の 4 分の 3 は EM の平方に等しくされるであろう。確かに，DM の平方が加えられた EM の平方は DE の平方に相当する。それゆえ，DE の平方は AB の平方の 4 分の 3 足す同じものの 36 分の 1 に等しくされる。そして，AB の平方が

DE に平方に対するように 9 が 7 に対する。それゆえ，DE の平方の 3 倍は AB の平方の 3 分の 7 に等しい。さらに，DL および DE の平方による立体は AB の立方の 27 分の 7 に等しくされるであろう。それゆえ，ID の立方引く ID および AB の平方の 3 分の 7 による立体は AB の立方の 27 分の 7 に等しい，そして，これが最初の結論である。

さらに，すべての立体を 27 倍すると仮定されるとしよう。ゆえに，ID の立方の 27 倍引く ID および AB の平方による立体の 63 倍は AB の立方の 7 倍に等しくされる。この同等性が比例に戻されると，ID の平方の 9 倍引く AB の平方の 21 倍が AB の平方の 7 倍に対するように AB が ID の 3 倍に対する。一方，ID の平方は IA の平方および AD の平方に AD および IA の 2 倍によってつくられるものが一緒になったものに相当する。さらに，AD そのものは AB の 3 分の 1 である。それゆえ，ID の平方の 9 倍は IA の平方の 9 倍足す IA，AB によってつくられるものの 6 倍足す AB の平方の 1 倍に相当する。それゆえ，IA の平方の 9 倍足す IA，AB によってつくられるものの 6 倍引く AB の平方の 20 倍が AB の平方の 7 倍に対するように AB が AB および IA の 3 倍から集められたものに対する。この比例が戻されると，数 27 によって割られた立体が受け入れられるようになるとき，IA の立方足す AB および IA の平方による立体引く IA および AB の平方による立体の 2 倍は AB に立方に等しくされる。そして，これが第 2 の結論である。

さらに，同じ同等性が再び比例に戻されると，それゆえ，IA 引く AB が AB に対するように AB の平方が IA の平方足す IA，AB によってつくられるものの 2 倍に対し，そして，分解［加比の理］によって，IA 引く AB が IA に対するように AB の平方が IA の平方足す IA 掛ける AB によるものの 2 倍足す AB の平方に対し，そして，これが解釈されると，IB が IA に対するように AB の平方が IC の平方に対する。要するに，これが証明すべきことであった。

最初の結論から，AB が 100,000,000 なら，ID はおよそ (ἔγγισα) 124,697,960 になる。

添付された図で，$\mathrm{CD}=\dfrac{1}{3}\,\mathrm{BC}$，弧 $\mathrm{CE}=\dfrac{1}{3}$ 弧 BC，$\mathrm{HG}=\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$，ED // AF，FG // EI とすると，$\mathrm{IB}:(\mathrm{AB}+\mathrm{IB})=\mathrm{AB}^2:(\mathrm{BC}+\mathrm{IB})^2$，すなわち $\mathrm{IB}:\mathrm{IA}=\mathrm{AB}^2:\mathrm{IC}^2$，が成り立つということ。
AH // DK であるから，$\triangle\mathrm{IKD}\backsim\triangle\mathrm{GHA}$，$\triangle\mathrm{KDE}\backsim\triangle\mathrm{HAF}$ となり，$\mathrm{HG}=\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ であるから，$\mathrm{IK}=\mathrm{DK}=\mathrm{CE}=\mathrm{EL}$ となる。
ゆえに，$\angle\mathrm{EDL}=\angle\mathrm{DEI}+\angle\mathrm{KID}=\angle\mathrm{DKE}+\angle\mathrm{KID}=\angle\mathrm{KID}+\angle\mathrm{KDI}+\angle\mathrm{KID}$ より，$\angle\mathrm{EDL}=3\angle\mathrm{KID}$ となるから，命題 16 によって，$\mathrm{ID}^3-3\mathrm{ID}\cdot\mathrm{DE}^2=\mathrm{DL}\cdot\mathrm{DE}^2$ が成り立つ。
さて，$\mathrm{CD}=\dfrac{1}{3}\,\mathrm{BC}$ であるから，$\mathrm{AD}=\dfrac{1}{3}\,\mathrm{AB}$ となり，$\angle\mathrm{EAC}=60^\circ$ であることから，$\mathrm{AM}=\dfrac{1}{2}\,\mathrm{AB}$ となって，$\mathrm{DM}=\dfrac{1}{6}\,\mathrm{AB}$ となる。
従って，$\mathrm{EM}^2=\mathrm{AE}^2-\mathrm{AM}^2=\dfrac{3}{4}\,\mathrm{AB}^2$，$\mathrm{DE}^2=\mathrm{DM}^2+\mathrm{EM}^2=\dfrac{7}{9}\,\mathrm{AB}^2$ となる。
よって，$\mathrm{DL}=2\mathrm{DM}$ であるから，$\mathrm{DL}\cdot\mathrm{DE}^2=2\mathrm{DM}\cdot\mathrm{DE}^2=\dfrac{7}{27}\,\mathrm{AB}^2$ となり，$\mathrm{ID}^3-3\mathrm{ID}\cdot\mathrm{DE}^2=\mathrm{ID}^3-\dfrac{7}{3}\,\mathrm{ID}\cdot\mathrm{AB}^2=\dfrac{7}{27}\,\mathrm{AB}^3$ が成り立つ，［これが最初の結論。］
これから，両辺を 27 倍して，$27\mathrm{ID}^3-63\mathrm{ID}\cdot\mathrm{AB}^2=7\mathrm{AB}^3$ となるから，$3\mathrm{ID}\left(9\mathrm{ID}^2-21\mathrm{AB}^2\right)=7\mathrm{AB}^3$ より，$\left(9\mathrm{ID}^2-21\mathrm{AB}^2\right):7\mathrm{AB}^2=\mathrm{AB}:3\mathrm{ID}$ となる。
ところで，$\mathrm{ID}^2=(\mathrm{IA}+\mathrm{AD})^2=\mathrm{IA}^2+2\mathrm{IA}\cdot\mathrm{AD}+\mathrm{AD}^2=\mathrm{IA}^2+\dfrac{2}{3}\,\mathrm{AB}\cdot\mathrm{IA}+\dfrac{1}{9}\,\mathrm{AB}^2$ であるから，$9\mathrm{ID}^2=9\mathrm{IA}^2+6\mathrm{AB}\cdot\mathrm{IA}+\mathrm{AB}^2$ がいえる。
これを先の比例に代入すると，$\left(9\mathrm{IA}^2+6\mathrm{AB}\cdot\mathrm{IA}-20\mathrm{AB}^2\right):7\mathrm{AB}^2=\mathrm{AB}:(\mathrm{AB}+3\mathrm{IA})$ となる。この比例を展開して，整理すると，$\mathrm{IA}^2\cdot\mathrm{AB}-2\mathrm{AB}^2\cdot\mathrm{IA}+\mathrm{IA}^3=\mathrm{AB}^3$ となる。［これが第

2 の結論。]
この等式から，$\mathrm{IA}^2 \cdot \mathrm{AB} - 2\mathrm{AB}^2 \cdot \mathrm{IA} + \mathrm{IA}^3 = (\mathrm{IA} - \mathrm{AB})\left(\mathrm{IA}^2 + 2\mathrm{IA} \cdot \mathrm{AB}\right)$ より，$(\mathrm{IA} - \mathrm{AB}) : \mathrm{AB} = \mathrm{AB}^2 : \left(\mathrm{IA}^2 + 2\mathrm{IA} \cdot \mathrm{AB}\right)$ となる。
従って，加比の理によって，$(\mathrm{IA} - \mathrm{AB}) : \mathrm{IA} = \mathrm{AB}^2 : \left(\mathrm{IA}^2 + 2\mathrm{IA} \cdot \mathrm{AB} + \mathrm{AB}^2\right)$ となるが，$\mathrm{IA}^2 + 2\mathrm{IA} \cdot \mathrm{AB} + \mathrm{AB}^2 = \mathrm{IA}^2 + 2\mathrm{IA} \cdot \mathrm{AC} + \mathrm{AC}^2 = (\mathrm{IA} + \mathrm{AC})^2 = \mathrm{IC}^2$ であるから，$\mathrm{IB} : \mathrm{IA} = \mathrm{AB}^2 : \mathrm{IC}^2$ が成り立つ。

「方程式の再検討および改良についての 2 つの論文」(*De Æquationum Recognitione et Emendatione Tractatus Duo*) の第 2 論文「方程式の改良について」第 7 章問題 2 によれば，3 次方程式 $A^3 - 3B^2A = 2Z^3$ の解は $A = \sqrt[3]{Z^3 + \sqrt{Z^6 - B^6}} + \sqrt[3]{Z^3 - \sqrt{Z^6 - B^6}}$ である。
それによれば，「最初の結論」による $\mathrm{ID}^3 - \dfrac{7}{3}\,\mathrm{AB}^2 \cdot \mathrm{ID} = \dfrac{7}{27}\,\mathrm{AB}^3$ の解は

$$\mathrm{ID} = \left(\sqrt[3]{\frac{7}{54} + \sqrt{-\frac{49}{108}}} + \sqrt[3]{\frac{7}{54} - \sqrt{-\frac{49}{108}}}\right)\mathrm{AB}$$

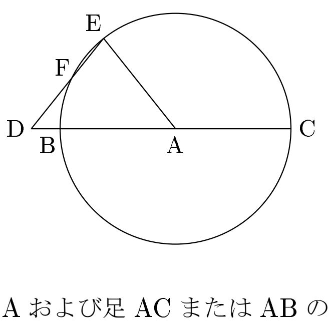
となるはずだが $\cdots$。
$f(x) = x^3 - \dfrac{7}{3}\,a^2x - \dfrac{7}{27}\,a^3$ とすると，$f'(x) = 3x^2 - \dfrac{7}{3}\,a^2 = 0$ となる x は $x = \pm\dfrac{\sqrt{7}}{3}\,a$ となり，

x		$-\frac{\sqrt{7}}{3}\,a$		$\frac{\sqrt{7}}{3}\,a$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{14\sqrt{7}-7}{27}\,a^3$	$\searrow$	$-\frac{14\sqrt{7}+7}{27}\,a^3$	$\nearrow$

で，$f(0) = -\dfrac{7}{27}\,a^3 < 0$ であるから，$f(x) = 0$ は 1 つの正の解をもつはずである。
いま，$x = 1.58\,a$ とすると，$f(x) = -0.0016139259\cdots \times a$ であり，$x = 1.581\,a$ とすると，$f(x) = 0.0035466817\cdots \times a$ であるから，$f(x) = 0$ となるのは $x = 1.580\cdots \times a$ のとき，になりそうだが $\cdots$。
$\mathrm{ID} = \mathrm{IB} + \mathrm{BA} + \mathrm{AD} = \mathrm{IB} + \dfrac{4}{3}\,\mathrm{AB}$ であるから，ID は $\dfrac{4}{3}\,\mathrm{AB}$ より大きい，はず。
ἐγγίων : *nearer, nearest, approximately*
この後に，証明の過程を追った「注解」があるが，これは割愛した。

命題 20 253

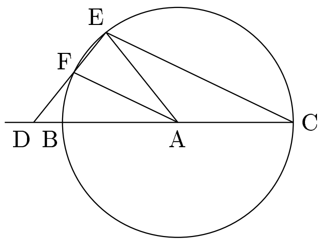
足の等しい三角形を，底線およびいずれかの足の間の差が底線に対するように，ちょうど，足の平方が足および底線から集められた［和の］平方に対するように，つくること。



A を中心とし，どのようなものであれ BC を直径として描かれた円が与えられるとし，そして，直径 CAB が，DB が DA に対するように AB の平方が DC の平方に対するように，D まで伸ばされ，そして，D から円周に［向かって］AB あるいは AC に等しい直線 DE が描かれ，そして，AE が結ばれるとしよう。私は，三角形 DEA が求められる種類のものである，と言う。なぜならば。足 ED，EA は等しい。さらに，DB は底線 DA および足 AC または AB の間の差である。さらに，DC そのものは底線 DA および AC，すなわち足 AE，から集められた［和］である。それゆえ，つくられた三角形 DEA は，底線および足 AE あるいは ED の間の差 DB が底線 DA に対するように EA あるいは ED の平方が底線 DA および足 EA から集められた［和の］平方に対するような，足の等しい［三角形］である。これがなされるべきことであった。

254 **命題 21**

もし足の等しい三角形があり，さらに，底線およびいずれかの足の間の差が底線に対するように，ちょうど，足の平方が足および底線から集められた［和の］平方に対するならば，底線の端点から［反対側の］足に向かって引かれる，足そのものに等しい，直線は底線となす角を半分に切断するであろう。

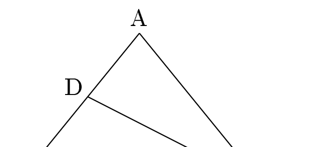


上述の作図が繰り返され，そして，引かれた DE もまた円を F で切断し，AF が結ばれるとしよう。私は，AF は角 EAD を半分に切断する，と言う。

なぜならば。仮定から，DB が DA に対するように AB の平方が DC の平方に対するから，それゆえ，DB が AB に対するように DA，AB によってつくられるものが DC の平方に対する。しかし，［方べきの定理により］DB が DE または AB に対するように DF が DC に対する。それゆえ，DF が DC に対するように，ちょうど，DA，AB によってつくられるものが DC の平方に対する。そして，結果として，DF が AB または DE に対するように，ちょうど，DA が DC に対し，そして，取り去られると［除比の理により］，DF が FE に対するように，ちょうど，DA が AC に対する。それゆえ，結ばれた EC は FA そのものに平行になる。それゆえ，角 ECD は角 FAD に等しい。しかし，角 EAD は角 ECD の 2 倍である。［それは］前者は中心角で，後者は円周角だからである。それゆえ，角 EAD は直線 AF によって半分に切断された。これが示されるべきことであった。

命題 22

もし足の等しい三角形があり，さらに，底線の端点から［反対側の］足に向かって引かれる，足そのものに等しい，直線が底線となす角を半分に切断するならば，等しい足の頂点における角は底線となす角のいずれかの 1 倍半である。



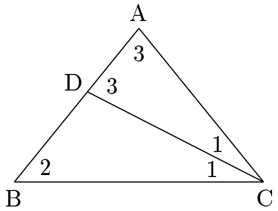
三角形 ABC が等しい足 AB，AC を持ち，点 C から反対側の足に向かって足に等しい直線 CD が引かれるとき，それは角 ACB そのものを半分に切断するとしよう，私は，角 BAC は角 ABC または ACB の 1 倍半である，と言う。

なぜならば。足の等しい三角形 ABC の底線の端点 C から足 AB あるいは CA に等しい直線 CD が引かれると，それゆえ，外部の角 DCE は角 ACB あるいは ABC の 3 倍である［命題 8］。それゆえ，角 ABC または ACB が 2 つの部分であるのに対して外部の角 DCE は 6 つの部分であり，さらに，角 DCA は角 ACB の半分であって，それは同じものの 1 つ［の部分］であり，さらに，角 DCB もそうである。それゆえ，角 DCE およびその外部［の角 DCB］はそのような種類の 7 つの部分からなり，さらに，2 直角に相当し，ちょうど三角形の 3 つの角［の和］である。それゆえ，何であれ角 ABC，ACB の 2 つの部分があるとき，角 BAC には同じものの 3 つ［の部分］が残される。それゆえ，角 BAC は角 ABC または ACB のいずれかの 1 倍半である。これが示されるべきことであった。

255 **命題 23**

もし足の等しい三角形があり，頂点に現れる角が底線となすいずれかの角の 1 倍半になり，そして，底線の端点から［反対側の］足に向かって足に等しい直線が引かれ，そのために再び足の等し

い三角形がつくられ，その［三角形の］足は［最初の三角形の足を］切断し，他方の足は最初［の三角形］を切断しないならば，その第 2 の三角形において，底線となす角のいずれかは残された［その三角形の頂角の］3 倍であろう。



三角形 ABC が等しい足 AB，AC を持ち，角 BAC は角 ABC，ACB のいずれかの 1 倍半になり，そして，底線の端点 C から足 AB に向かって AB あるいは AC に等しい直線 CD が引かれ，そのために三角形 ACD は再び足 CD，CA を持つ足の等しい［三角形］になるとしよう。私は，三角形 ACD において，角 ADC，DAC のいずれかは角 DCA の 3 倍である，と言う。

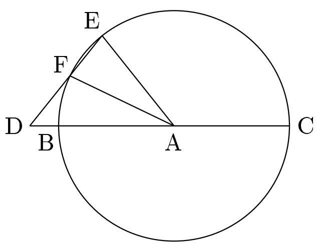
なぜならば。角 BAC は角 ABC あるいは ACB の 1 倍半であるから，それゆえ，角 ABC が 2 つの部分であるのに対して［角］BAC は 3 つ［の部分］である。しかもそのうえ，角 ACB は，角 ABC に等しいから，同じ 2 つ［の部分］であり，そしてさらに，三角形 ABC の 3 つの角，すなわち 2 直角，は 7 つ［の部分］であると見積もられる。

さらに，三角形 ACD もまた足の等しい［三角形］になり，すなわち足 CA に等しい足 DC を持つから，それゆえ，角 DAC が 3 つの部分に評価されたのに対して角 ADC は同数［の 3 つの部分］であろう。そしてさらに，角 ACD は，2 直角が 7 つ［の部分］であるから，1 つの部分である。それゆえ，三角形 ADC において，角 DAC，ADC のいずれかは角 ACD の 3 倍である。これが示されるべきことであった。

命題 24

与えられた円の中に等辺等角の七角形を描くこと。

与えられた円はその中心が A，直径が BAC であるとしよう。与えられた円の中に等辺等角の七角形を描かなければならない。



直径 CB が，DB が DA に対するように AB の平方が DC の平方に対するように，D まで伸ばされ，そして，円周の中に半径に等しい DE が描かれるとしよう。私は，EB が七角形の弧，すなわち全円周の 7 分の 1 である，と言う。

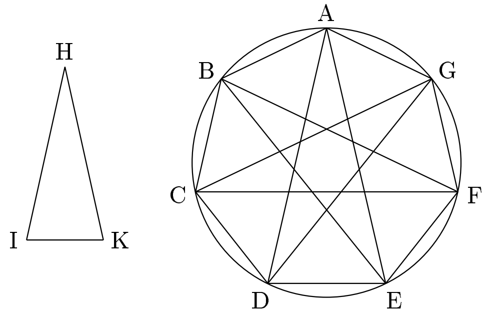
なぜならば。DE そのものは円周を F において切断し，AE，AF が結ばれるとしよう。それゆえ，三角形 DEA は，底線および足の差が底線に対するように足の平方が足および底線から集められた［和の］平方に対するように，つくられた足の等しい［三角形］である。それゆえ，足に等しい直線 AF は底線となす角を半分に切断し，そしてそのために，2 直角が 7 つの部分であるのに対して角 EAD は 2 つ［の部分］である。さらに，4 直角，すなわち全円周，が 7 つであるのに対して角 EAD は 1 つである。さらに，角 EAD の大きさは弧 EB を定める。それゆえ，弧 EB は全円周の 7 分の 1 である。それゆえ，7 回［弦が］張られることになる。ゆえに，与えられた円の中に等辺等角の七角形が描かれた。これが要求されたなすべきことである。

別の方法 256

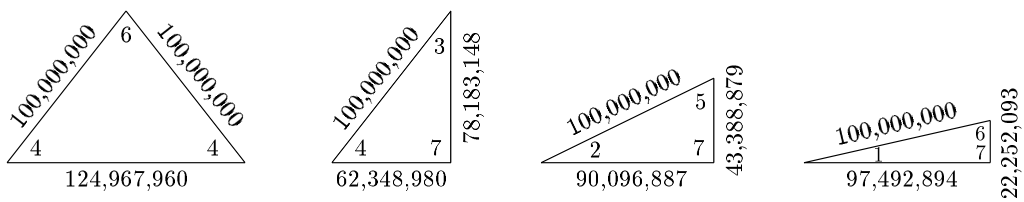
与えられた円の中に等辺等角の七角形を描くこと。

与えられた円を ABCDEFG としよう。円 ABCDEFG の中に等辺等角の七角形を描かなければならない。I，K における角のいずれかが H における残りの角の 3 倍である，足の等しい三角形

HIK が提示されるとし，円 ABCDEFG の中に，三角形 HIK に等角な三角形 —— それを ADE としよう —— が，H における角が角 DAE に等しく，さらに，I，K における［角の］いずれかが［角］ADE，AED のいずれかに等しく，それゆえ［角］ADE，AED のいずれかが角 DAE の 3 倍であるように，描かれるとしよう。それゆえ，弧 AD，AE のいずれかもまた弧 DE そのものの 3 倍であり，これらの弧 AD，AE の 3 分の 1 は弧 D そのものに等しい。それゆえ，それら 3 分の 1 のものは AB，BC，CD，AG，GF，FE であり，［それらの弦が］張られることになる。ゆえに，与えられた円の中に等辺等角の七角形が描かれた。これが要求されたなすべきことである。



斜辺を 100,000,000 とし，直角を 7 つの部分としよう。7 つ［の部分］を持つ直角三角形は次のようである。



確かに，Z が足の等しい三角形の足としておかれ，頂点における角が底線となす角のいずれかの 1 倍半であると，A の立方足す A の平方が掛けられた Z 引く A が掛けられた Z の平方の 2 倍は Z の立方に等しくされる。そして，A は同じ三角形の底線になる。

さらに，数で Z を 1，A を $1N$ とすると，$1C + 1Q - 2N$ は 1 に等しくされる。

さらに，還元によって，E の立方引く E が掛けられた Z の平方の 21 倍は Z の立方の 7 倍に等しくされる。そして，E はその三角形の底線および足の 3 分の 1 から集められた和になる。

さらに，数で Z を 1，E を $1N$ とすると，$1C - 21N$ は 7 に等しくされる。

「方程式の再検討および改良についての 2 つの論文」の第 2 論文「方程式の改良について」第 1 章によれば，

(1-1) $A^2 + 2BA = Z^2$ ならば，$E = A + B$ とすると，$E^2 = Z^2 + B^2$ となる。
(1-2) $A^2 - 2BA = Z^2$ ならば，$E = A - B$ とすると，$E^2 = Z^2 + B^2$ となる。
(1-3) $2DA - A^2 = Z^2$ ならば，$D \pm E = A$ とすると，$E^2 = D^2 - Z^2$ となる。

(2-1) $A^3 + 3BA^2 = Z^3$ ならば，$E = A + B$ とすると，$E^3 - 3B^2E = Z^3 - 2B^3$ となる。
(2-2) $A^3 - 3BA^2 = Z^3$ ならば，$E = A - B$ とすると，$E^3 - 3B^2E = Z^3 + 2B^3$ となる。
(2-3) $3BA^2 - A^3 = Z^3$ ならば，$E = A - B$ とすると，$3B^2E - E^3 = Z^3 - 2B^3$ となる。

(3-1) $A^3 + 3BA^2 + D^2A = Z^3$ ならば，$E = A + B$ とすると，$E^3 + (D^2 - 3B^2)E = Z^3 + D^2B - 2B^3$ となる。
(3-2) $A^3 + 3BA^2 - D^2A = Z^3$ ならば，$E = A + B$ とすると，$E^3 - (3B^2 + D^2)E = Z^3 - 2B^3 - D^2B$ となる。
(3-3) $A^3 - 3BA^2 + D^2A = Z^3$ ならば，$E = A - B$ とすると，$E^3 + (D^2 - 3B^2)E = Z^3 + 2B^3 - D^2B$ となる。
(3-4) $A^3 - 3BA^2 - D^2A = Z^3$ ならば，$E = A - B$ とすると，$E^3 + (3B^2 + D^2)E =$

$Z^3 + 2B^3 + D^2B$ となる。

(3-5) $D^2A - 3BA^2 - A^3 = Z^3$ ならば，$E = A + B$ とすると，$(D^2 + 3B^2)E - E^3 = Z^3 + 2B^3 + D^2B$ となる。

(3-6) $3BA^2 + D^2A - A^3 = Z^3$ ならば，$E = A - B$ とすると，$(D^2 + 3B^2)E - E^3 = Z^3 - D^2B - 2B^3$ となる。

(3-7) $3BA^2 - D^2A - A^3 = Z^3$ ならば，$E = A - B$ とすると，$(3B^2 - D^2)E - E^3 = Z^3 + D^2B - 2B^3$ となる。

命題 25

すなわち，一般的な帰結

与えられたものの間に連続的に比例する 2 つの中項をつくること，あるいは［与えられた］角を 3 つの等しい部分に切断［分割］することの，とにかく，いずれかの操作によって，そうでなければ立方が立体にあるいは平方の平方が平面的平面に —— 作用なしにあるいは作用を伴って —— 等しくされることに関して解くことができない，すべての問題が解かれることは一般的に正しいことである。

なぜならば。実際，「方程式の再検討および改良についての 2 つの論文」において，平方の平方 257
の方程式が立方の方程式に還元できることが示されている。

さらに，平方によって作用された立方が辺によって作用された立方に［還元できることが示されている］。

また，辺によって作用された立方は純粋な立方に還元できる。

さらに，最後に，立方が作用される立体が立方から拒否され，そしてそのうえ，辺とともに立体に作用する平面の係数の 3 分の 1 が，作用された立方の前述の 3 分の 1 による除法に由来する，幅の半分の平方に劣るとき，辺によって否定的に作用された立方は純粋［な立方］に還元できる。

それゆえ，純粋な立方において，求められている A の立方が D が掛けられた B の平方に等しいと提示されるとき，B および D は連続的に比例する 4 つ［のもの］の系列における外項であると理解され，そして，この求められている A は第 2［の項］である。

さらに，辺によって否定的に作用された立方において，辺とともに立体に作用する平面の係数の 3 分の 1 が，作用された立方の前述の 3 分の 1 による除法に由来する，幅の半分の平方にまさるとき，すなわち，A の立方引く A が掛けられた B の平方の 3 倍が D の 2 倍が掛けられた B の平方に等しいと提示され，そして，B が D そのものにまさるとき，2 つの足の等しい三角形が提示されると理解されるであろうし，そして，一方［の足］は他方の足そのものに等しく，それらの第 2［の三角形］の底線となす角は第 1［の三角形］の底線となす角の 3 倍であると理解され，第 2［の三角形］の底線は D であり，足は B である。さらに，求められている A は第 1［の三角形］の底線である。

最後に，作用している立体から拒否されるように作用された立方において，すなわち，E が掛けられた B の平方の 3 倍引く E の立方が D の 2 倍が掛けられた B の平方に等しくされるとき，前述の公式において述べられたのと同じ作図によって，求められている E は，その平方が第 1［の三角形］の高さの平方の 3 倍に等しいような，長さが罰せられたまたは結合された第 1［の三角形］の底線の半分になるであろう。

なぜならば。足の等しい三角形においては，高さが底線を半分に切断することは明らかであるか

ら，足はつねに底線の半分より大きい。それゆえ，足の平方は［底線の］半分の平方より高さの平方の分だけまさっている。

そしてさらに，2 つの問題 —— 1 つは与えられたものの間に 2 つの中項を見出すこと，もう 1 つは与えられた角を 3 つの等しい部分に切断［分割］すること —— によって，どのように作用されていようと，そうでなければ解けないような，すべての立方および平方の平方の方程式は解かれるであろう。これは注目する価値がある。

「方程式の再検討および改良についての 2 つの論文」の第 2 論文「方程式の改良について」第 6 章によれば，4 次の方程式から 3 次の方程式を導くことができる。
例えば，「問題 3」では，$A^4 + 2G^2A^2 + B^3A = Z^4$ では，$A^4 + 2G^2A^2 = Z^4 - B^3A$ として $\left(A^2 + G^2 + \dfrac{1}{2}E^2\right)^2 = \left(\dfrac{B^3}{2E} - EA\right)^2$ とすると，

$$\left(E^2\right)^3 + 4G^2\left(E^2\right)^2 + \left(4Z^4 + 4G^4\right)\left(E^2\right) = B^6,\quad A^2 + DA = \frac{B^3}{2D} - G^2 - \frac{1}{2}D^2$$

が得られる。

索 引