Delaunay Refinement Algorithm

平成 29 年 1 月 11 日

概 要

この文章はØyvind Hjell and Morten Dæhlen[1]"7 Delaunay Refinement Mesh Generation"の要約である。

これは Delaunay Refiment アルゴリズムのひとつである"Ruppert アルゴリズム"を解説したものである。アルゴリズム自体は簡単であるが、その背景は結構難しい。自分の理解できる範囲でまとめたもので不十分なところもある。詳しいことは [1] をみてほしい。

なお用語は、どのような訳語したらいいかわからないものはそのまま使うことにした。

1 アルゴリズム

[1] に載せられているアルゴリズムは次の通り (p143)。

```
1. Make the initial CDT of the PSLG
   Remove triangles outside the triangulation domain
2. while skinny triangles remain //(controls termination)
3.  while any segment s is encroached upon
4.   SplitSegment(s)
5.  Let t be a skinny triangle and v the circumcenter of t
6.  if v encroches upon any segments s1, s2, .... sk//look ahead
7.   for i=1,...,k
8.    SplitSegment(si)
9.    goto 3
10. else
11.  KillTriangle(t)
12.  goto 5
```

用語を説明しておく。

1. CDT:Costrained Delaunay Triangulation. PSLG:Planer Straight Line Graph. 最初に入力される点や constrained エッジ。
2. skinny triangle:最小角がある値より小さい三角形。これを消去するのがアルゴリズムの目的。
3. segment:境界や constrained エッジなどで、スワップなどできないエッジ。できる操作は 2 等分のみ。作成したプログラムでは、constrained はないので segment にあたるのは境界のみである。
4. encroached segment:両端を直径とする円の内に両端以外の点がはいる segment。再帰的に encroach されなくなるまで 2 等分 (SplitSegment()) される。
5. KillTriangle(t):skinny 三角形 t の外心に点を挿入 (t は消去されるが、別の skinny ができることがある)。作成したプログラムでは removeSkinny とした。

作成したプログラムとの関係でこのアルゴリズムをみると、次のようになる。

1. ドロネー作成。
2. segment(境界）が encroch されなくなるまで SplitSegment。
3. skinny が見つかった場合、外心が segment(境界) を encroach する場合がある。その場合挿入しないで segment を外心によって encroach されなくなるまで 2 等分する (理由は後ほど)。そうでないときは挿入してドロネーを再構成する。
4. 挿入する場合もしない場合も、あらためて skinny を探し、上の操作を行う。(問題はこれで終了するのかということである)。

2 skinny 三角形とは

よく知られた正弦定理から、三角形の外接円の半径を R、最小辺の長さを l、その対角 (最小角) を α_{min} とすると、

この比が大きくなれば α_{min} は小さくなる。この上限を $\boldsymbol{B}$ とする。

この $\boldsymbol{B}$ の値を $\sqrt{2}$ として、これ以上の値を持つ三角形を skinny とする (最小角は約 20°)。

3 SplitSegment

3.1 役割

アルゴリズムは結局、2 つの関数からしかなっていない。

そのひとつ SplitSegment の役割とは、外心へ点を挿入するとき、その点と三角形との間に segment がこないようにするためである (ドロネーができない)。

これを簡単に証明してみる ([1]p141,Lemma7.1)。

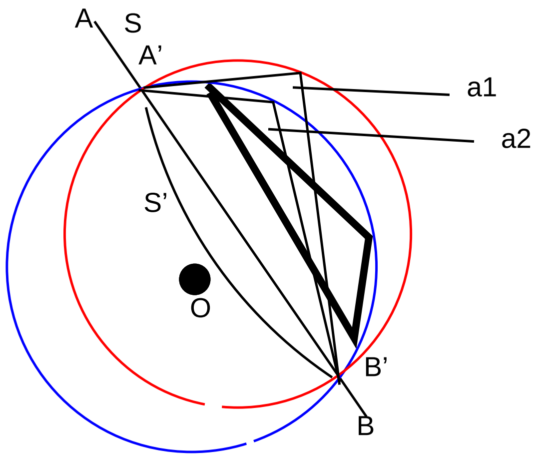

図 1:

A,B を端点とする segment を S とする。S は encroach する点はないとする。

今三角形 (太線) の外心 (O) が S に関して反対側に来るとする。

外接円 (青) はドロネーの性質上、S の内部で S と交わる (S'、端点 A',B' とする)。

S’ を直径とする円 (赤) は S を直径とする円の内側に入ることに注意。
A’B’ を弦とする二つの円の円周角 (a_1, a_2) を比較すれば、$a_2 > a_1$。
これより外接円の三角形側の部分が S’ を直径とする円に含まれる。
結局三角形も S’ を直径とする円、更には S を直径とする円に含まれることになる。
これは「S は encroach する点はない」ことに矛盾する。

3.2 無限ループの問題

segment のなす角が小さいと、「無限ループ」を引き起こす恐れがある (図 2)。

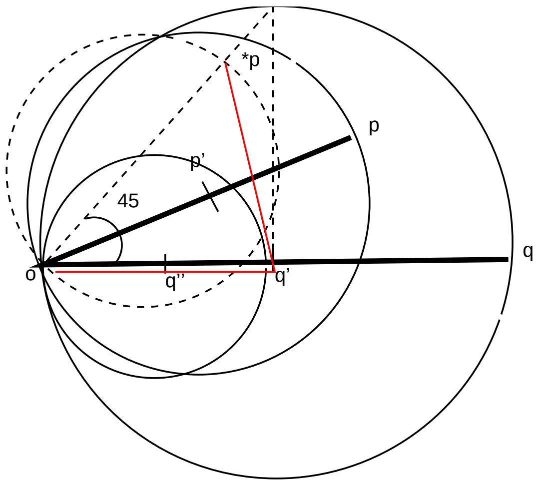

図 2:

segment op, oq がある角度で結合している場合、挿入する中点がもう一方の segment を encroach してしまう。($q \rightarrow p' \rightarrow q' \rightarrow \cdots$)。
なす角が 45°(図 2 の $o{*}p$) より大きければそういうことはない。

4 KillTriangle

4.1 もう一つの逐次添加法

ドロネー作成アルゴリズム「逐次添加法」には、作成プログラムのように一つ一つ swap をやっていく方法とは別な方法がある (図 3)。

1. 外接円が挿入点 (P) を含む三角形をすべて取り出す (図 3 (1))。これらの三角形すべて合わせた部分を influence region(IR) と呼ぶ。
2. IR の外枠を influence polygon(IP) と呼ぶ (図 3 (2))。この IP を残して内部の三角形は消去する。
3. 点 P と IP の各頂点を結んだものが求めるドロネーである (図 3 (3))。

これらの証明は省略する ([1] p70 Teorem 4.2)。
以上から、三角形の外心に点を挿入した場合その三角形は消去される。
また消去三角形の各頂点と挿入点を結んだエッジはドロネーエッジ (ドロネー三角形のエッジ) となる。

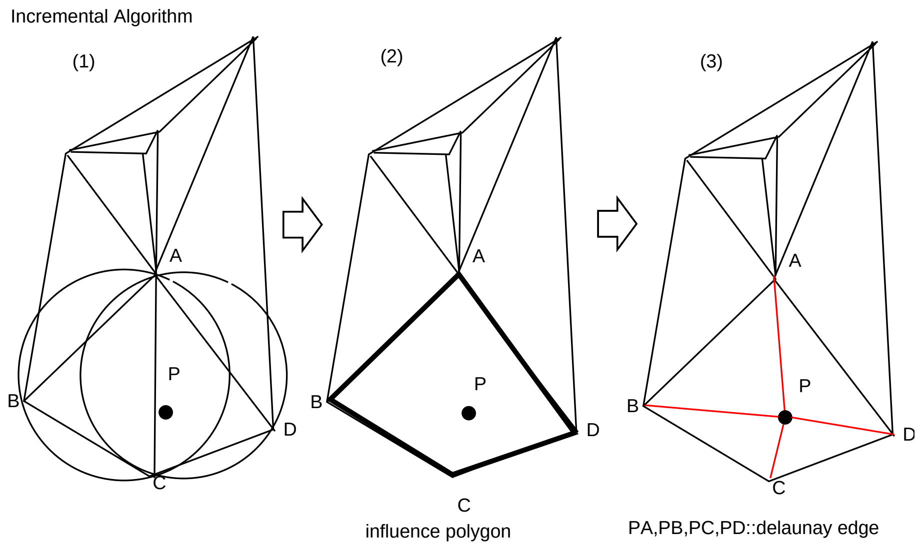

図 3:

4.2 点の挿入

skinny の外心に点を挿入すれば、skinny は消去される。しかしもっと重要なことがある。

それは挿入する前にあるドロネーエッジの長さと、挿入された場合新たに作られるドロネーエッジの長さの関係である。

比較のために、点の「親子関係」と比較する長さとして insertion radius という考えを導入する。

1. insertion radius::点から出ているドロネーエッジの長さで最小のものをその点の insertion radius という。

2. 当然最初にドロネーを作るときに与えられる点は上の定義の insertion radius を持つ。この長さは、最初与えられた任意の 2 点間の距離の最小値 (d_{min} とする) 以上である。

3. skinny の外心に点を挿入するとき、その点の親を skinny の最小辺の両端のどちらか (どちらでもよい）にする (図 4)。

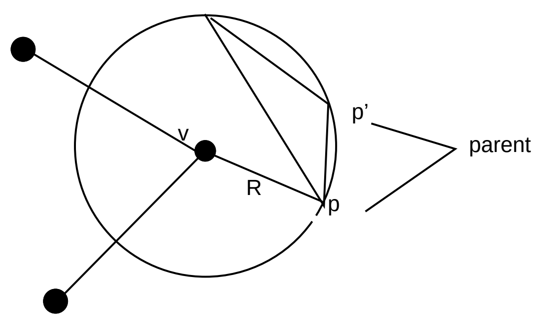

図 4:

skinny の外心を v、その親を p、外接円の半径を R とすれば、ドロネーの性質上三角形の 3 点以外この外接円内 (円周も含む) には存在しない。よって v の insertion radius は R である。

また、p の insertion radius を l_{min}、$pp' = l$ とすれば、$l \geq l_{min}$。以上から、

$$\frac{R}{l_{min}} \geq \frac{R}{l} > \boldsymbol{B} \quad \Rightarrow \quad R > \boldsymbol{B} l_{min}$$

$\boldsymbol{B}=\sqrt{2}$ とすれば、挿入される点の最小ドロネーエッジの長さは親の最小ドロネーエッジの長さより大きい。

そしてこのようにして親をたどっていけば、最終的には最初のドロネーを作るときに与えられた点 (初期入力点) にまで行き着く。

この初期入力点の最小ドロネーエッジの長さはこれらの任意の 2 点の最小距離 (4.2 節 d_{min}) 以上である。

結局、点を挿入していってもそれでできるドロネーエッジは常に d_{min} 以上である。

4.3 SplitSegment はどうか

SplitSegment も点を挿入する。この挿入には色々な場合が考えられる ([1] p148 Lemma7.3)。

segment が点 p によって encroch されているとき中点 v に点を挿入するが、v の親を p にするのが当然である (encroach 点が複数のときは、v に一番近い点を親とする)。そして距離 pv が v の insertion radias(r_v) である。一般の場合には、やはり $r_v \geq d_{min}$ が成立する (証明は略)。

ここでは「特殊」の場合について考える。

2 つの segment が連結していて、encroach する点 p が一方の segment の上にある場合である。この 2 つの segment がなす角は 45° 以上とする (3.2 節 図 5)。

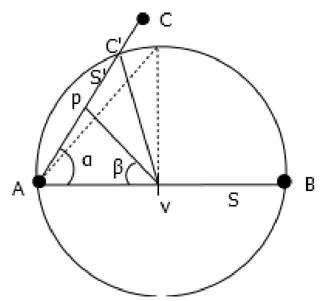

図 5:

segment S と S' の間の角が α, S を encroach する点 p が AC'(S の一部) 上にある。

$r_v = pv$ である。また、AC' の長さを l、p の insertion radius を r_p とすれば、$r_p \leq l$。

このとき正弦定理より、

$$\frac{r_v}{l} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$\beta \leq 90°$ より左辺が最小になるのは、p が C' の位置にあるとき、すなわち $\beta = 180 - 2\alpha$ のときである。

$\sin(180 - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ だから、p が AC' 上にあるとき、

$$\frac{r_v}{l} \geq \frac{1}{2\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad r_v \geq \frac{l}{2\cos\alpha} \geq \frac{r_p}{2\cos\alpha}$$

これより、$\alpha \geq 60°$ のとき、$r_v \geq r_p$ になる。

5 プログラムの終了

これまでの議論をまとめれば、$\boldsymbol{B}=\sqrt{2}$、segment のなす角を 60 度以上にすれば、挿入点の insertion radius は「親」の insertion radius より短くなることはない。

この「親子」関係をたどっていけば結局、

$$r_v \geq d_{min}$$

すなわち、「挿入点の insertion radius は初期入力点の任意の 2 点間の距離の最小値以上になる」。

このことから、プログラムの終了も結論できる。

なぜなら点を挿入していけば点の密度が高まり、2 点間の距離も小さくなる。ところが挿入点の insertion radius はある一定値より大きい (上に述べた条件のもとで) から、有限回のうちに挿入する場所はなくなる。すなわちプログラムは終了する (skinny は消去)。

参考文献

[1] Øyvind Hjell and Morten Dæhlen. Triangulations and Applicatons Springer, 2006

99