制御の入り口

(第4回)

ラプラス変換と伝達関数

内容

伝達関数(transfer function)を説明すると

すべての**初期値を0**としたときのラプラス変換された出力信号と入力信号の比です。

$$\text{伝達関数} = \frac{\text{出力のラプラス変換}}{\text{入力のラプラス変換}}$$

「**ラプラス変換**」という言葉が出てきます。

まずこれを説明します。

1 ラプラス変換とは？

講義では数式が出てきて、難解さが増すのが常です。

そして振り落とされます。(私がそうでした。)

ここではできるだけ、数式を表に出さないようにしてみます。

でも少しは出てきますが、あまり考え込まないのが大切です。

それでは「**ラプラス変換**」について以下のことを考えてみます。

① ラプラス変換の表現

② 使用する理由

③ 歴史的な背景

① ラプラス変換の表現

数式を使わないで表現すれば

x(t)のラプラス変換は

・x(t)に e^{-st} をかける。

・この値をtについて0から∞間で積分したもの。

・その結果は演算子sの関数となる。

・これをX(s)と表現する。

数式で説明すれば・・・

x(t)のラプラス変換をL[x(t)]と表す。

注意:本来、Lは大文字の筆記体です。(フォントがなかった。)

$$L[x(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} x(t) dt = X(s)$$

L[x(t)]からx(t)へ変換することを逆ラプラス変換という。

② 使用する理由

物理現象を数式で表すと、一般的に時間を変数とする**線形微分方程式**で表すことができ、これを解くと振る舞いがわかります。しかし、微分方程式を解くのは数学的知識を必要とし、容易ではありません。(＊注:私の場合は・・・)

時間領域(**t領域**)での微分方程式をラプラス変換すると**複素領域**(**s領域**)に変換され、代数で解ける形(代数方程式)に直してから解ける便利な方法です。(・・・ようだ！)

これを利用してモデルの**入力と出力の関係**を検討したり解析を行なうことができます。ラプラス変換は電気、機械、制御の分野でよく見られる**過渡現象などを数学的に求める場合**に広く利用されています。

使用方法

① 微分方程式を時間t領域からラプラス変換によって変数s領域 へ変換する。 （**ラプラス変換表**を使います。）

② 得られたs領域の方程式は演算子sの代数方程式なので**代数計算**によって求めることができる。

③ 求めたs関数の解を、ラプラス変換表を使ってs関数から時間t領域に変換する。（**ラプラス逆変換**）

③ 歴史的な背景

ラプラス変換の元になる部分は18世紀にオイラー（L．Euler）によって示され、そして1812年、ラプラス（P．Laplace）によって用いられた。しかし、これを実用的にしたのは19世紀末のイギリスの電気学者ヘビサイド（Oliver Heaviside）である。

ヘビサイドは1887年過渡現象を表す微分方程式を微分d／dtをp、積分を1／pで表して解く方法を提案した。ヘビサイドの演算子法という。結果は得られるが、数学的な正確さにかけるということで当初は評価されなかった。

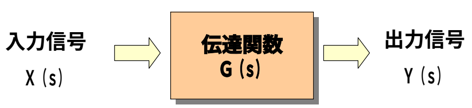
この方法に興味を持ったブロムヴィッチ（Bromwich）がいろいろ調べて、演算子は複素数、演算子での表現はラプラス変換で与えられる複素数領域の積分であることを示した。これでラプラス変換が実用的に使用されることとなった。

2 伝達関数（transfer function）

① 概要

すべての**初期値**を0としたときのラプラス変換された出力信号と入力信号の比である。

$$伝達関数＝\frac{出力のラプラス変換}{入力のラプラス変換}$$



システムをブロック線図の形で表現すると信号の流れを把握できる。

入力X（s）と出力Y（s）との関係を示す**伝達関数**をG（s）とすれば

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$\therefore Y(s)=G(s)\cdot X(s)$$

出力Y（s）は入力X（s）をG（s）倍すればよい。

② 各要素について

基本要素の伝達関数を以下に記します。

（1）比例要素
（2）積分要素
（3）微分要素
（4）1次遅れ要素
（5）2次遅れ要素
（6）むだ時間要素

比例要素(proportional element)

入力信号x（t）と出力信号y（t）との関係が

y（t）＝kx（t）　（k：**定数**）

上式をラプラス変換をすると

Y（s）＝kX（s）となる。

したがって

Y（s）とX（s）との比をG（s）とすれば

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=k$$

要素の数式による表現

x(t) ⇒ **比例要素** ⇒ y(t)

y(t)=kx(t)

伝達関数による表現

X(s) ⇒ k ⇒ Y(s)

積分要素(integral element)

k:定数

入力信号x(t)と出力信号y(t)との関係が

$$y(t)=k\int x(t)dt$$

または

$$\frac{dy(t)}{dt}=kx(t)$$

$$L[y(t)]=kL\left[\int x(t)dt\right]$$

ラプラス変換をおこなえば

$$L\left[\int x(t)dt\right]=\frac{1}{s}X(s)+\frac{1}{s}x^{-1}(0)$$

$$Y(s)=\frac{k}{s}X(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{k}{s}$$

$$L\left[\frac{dy(t)}{dt}\right]=kL[x(t)]$$

ラプラス変換をおこなえば

$$sY(s)-y(0)=kX(s)$$

初期条件y(0)=0を用いて

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{k}{s}$$

要素の数式による表現

x(t) ⇒ **積分要素** ⇒ y(t)

$$y(t)=k\int x(t)dt$$

伝達関数による表現

X(s) ⇒ $\frac{k}{s}$ ⇒ Y(s)

積分動作をする要素の物理的な意味

比例動作をする要素は、偏差(入力)がなくなれば操作(出力)は元の位置へ戻るが、積分動作は偏差のある間は操作は一方向のみに動き続け、偏差がなくなると、その動きが止まるだけで、元には戻りません。
制御系においては制御装置の感度が高く、きわめて微小な変化にもこれに比例した動作をするならばその出力を完全に目標値に一致させることができるが、実際の制御では微小な変化に対して動作をするのが困難な場合が多くなります。
しかし、微小な変化でも、蓄積しそれを操作をし、修正動作を行うようにすれば微小な変化がある間は、それを見逃すことなく修正動作が行われるので、偏差をゼロにすることができます。

一次遅れの要素(time lag element of first order)

入力信号x(t)と出力信号y(t)との関係が

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

(T:定数)

ラプラス変換をおこなえば

$$TsY(s)+Y(s)=X(s)$$

$$Y(s)(1+Ts)=X(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1}{1+Ts}$$

要素の数式による表現

x(t) ⇒ **一次遅れ要素** ⇒ y(t)

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

伝達関数による表現

X(s) ⇒ $\frac{1}{1+Ts}$ ⇒ Y(s)

一次遅れの微分要素
(time lag differential element of first order)

入力信号x (t) と出力信号y (t) との関係が

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=T\frac{dx(t)}{dt}$$

(T：定数)

ラプラス変換をおこなえば

$$T\{sY(s)-y(0)\}+Y(s)=T\{sX(s)-x(0)\}$$

$$Y(s)(1+Ts)=TsX(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{Ts}{1+Ts}$$

要素の数式による表現

x (t)　一次遅れ微分要素　y (t)

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=T\frac{dx(t)}{dt}$$

伝達関数による表現

X (s)　$\frac{Ts}{1+Ts}$　Y (s)

微分要素(differential element)

入力信号x (t) と出力信号y (t) との関係が

$$y(t)=T\frac{dx(t)}{dt}$$

(T：定数)

ラプラス変換をおこなえば

$$L[y(t)]=TL[\frac{dx(t)}{dt}]$$

$$Y(s)=TsX(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=Ts$$

要素の数式による表現

x (t)　微分要素　y (t)

$$y(t)=T\frac{dx(t)}{dt}$$

伝達関数による表現

X (s)　Ts　Y (s)

微分動作をする要素の物理的な意味

制御系では制御量の目標値からの偏差 (ずれ) の速さが、速い場合と遅い場合とがあります。速いときは遅いときに比べて偏差が同じでも急激な修正動作を加えてそれを防がなければなりません。

微分動作はこの操作を偏差の速さに比例して動かし、偏差の増加を防ごうとするものです。

2次遅れ要素(time lag element of second order)

入力信号x (t) と出力信号y (t) との関係が

$$a\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+cy(t)=kx(t)$$

$(a,b,c,k:\text{定数})$

ラプラス変換をおこなえば

$$aL[\frac{d^2y(t)}{dt^2}]+bL[\frac{dy(t)}{dt}]+cL[y(t)]=kL[x(t)]$$

$$L[\frac{d^2y(t)}{dt^2}]=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)$$

$$L[\frac{dy(t)}{dt}]=sY(s)-y(0)$$

$$L[y(t)]=Y(s)$$

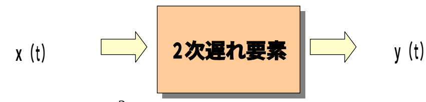
$$L[x(t)]=X(s)$$

$y(0)=0, y'(0)=0, x(0)=0$とすれば

$[as^2+bs\ +c]Y(s)=kX(s)$より

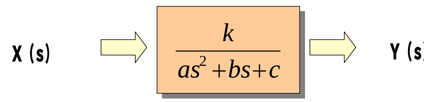
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{k}{as^2+bs+c}$$

要素の数式よる表現



$$a\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+cy(t)=kx(t)$$

伝達関数による表現



むだ時間要素(element of dead time)

入力信号x (t) と出力信号y (t) との関係が

$$y(t)=x(t-T_L)$$

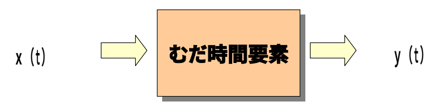
ラプラス変換をおこなえば

$$L[y(t)]=L[x(t-T_L)]$$

$$L[x(t-T_L)]=e^{-T_LS}X(s)$$

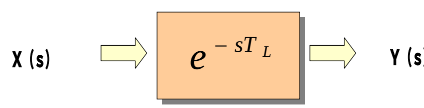
$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=e^{-T_LS}$$

要素の数式による表現



$$y(t)=x(t-T_L)$$

伝達関数による表現



③ 電気系の例

(1) 比例要素　　v (t) ＝Ri (t)

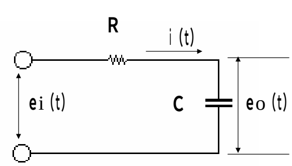
(2) 積分要素　　キャパシタンスCのコンデンサに電流が流れる
コンデンサの両端電圧は電流の積分値を
キャパシタンスCで割った値

$$e(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt$$

(3) 微分要素　　インダクタンスLのコイルの交流電流を流すと
その両端の電圧は電流の微分値に比例する

$$e(t)=L\frac{di(t)}{dt}$$

◎積分要素



上に示した回路においてi (t) を**入力信号**、
Cの両端の電圧eo (t) を**出力信号**としたとき、
このi (t) とeo (t) との関係を示す伝達関数を求めます。

$$e_0(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

という関係式になります。

初期条件を０としてﾗﾌﾟﾗｽ変換をすると

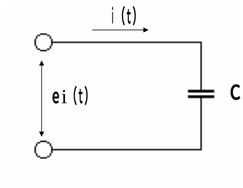
$$E_0(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

となります。

伝達関数$G(s)$は

$$G(s) = \frac{E_0(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$$

◎微分要素



左図においてei (t) を入力信号、i (t) を出力信号としたとき入力、出力の関係を表す伝達関数を求めます。

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \text{および} e_i(t) = \frac{q(t)}{C}$$

の関係式になります。

初期条件を０としてﾗﾌﾟﾗｽ変換すると

$$I(s) = sQ(s) \text{および} E(s) = \frac{Q(s)}{C}$$

となります。

上の２式より$Q(s)$を消去すると

$$G(s) = \frac{I(s)}{E_i(s)} = \frac{sQ(s)}{\frac{1}{C}Q(s)} = Cs$$

今回のまとめ

今回はラプラス変換から伝達関数について記しました。数学的にをしっかりやる場合にはそれぞれの式の証明も必要ですが、ここでは「**伝達関数で入出力の関係が表せる**」ということをイメージするのに重点を置きます。

そうすれば比例、微分、積分などの各要素の意味もつかめます。次にそれぞれの意味を記します。

各要素の意味するところ

(1) 比例要素：出力が入力に比例する。

(2) 積分要素：時間とともに出力が直線的に増加する。

(3) 微分要素：出力は入力信号の変化の割合に比例する。

(4) 1次遅れ要素：出力は時定数Tで応答する。

(5) 2次遅れ要素：1次遅れ要素が2つ直列になったもの。

(6) むだ時間要素：入力がそのままの形で出力となるが、ある時間遅れるもの。