記号論理学 □　2000 年度冬学期試験解答例

理科一類 24 組　師　芳卓

2002 年 2 月 1 日

問題は省略することにします。過去問リンクからダウンロードしてください。

超厳密な証明を要する教科なので間違っている部分があるかもしれません。なので答を 100 %信じるのは危険です。ここは変じゃないですか？と思ったら遠慮なく質問してください。

問題 1

(1) $Den(\rho,\ulcorner Sx_3 \dot{+} SS\underline{0} \urcorner)$
$= Den(\rho,\ulcorner Sx_3 \urcorner) + Den(\rho,\ulcorner SS\underline{0} \urcorner))$
$= (Den(\rho, x_3) + 1) + (Den(\rho,\ulcorner S\underline{0} \urcorner) + 1))$
$= (Den(\rho, x_3) + 1) + ((Den(\rho, \underline{0}) + 1) + 1))$
$= (\rho(3) + 1) + ((0 + 1) + 1)) = 8$

(2) $\forall x_0(\neg Sx_0 \equiv \underline{0}) \in True$
$\Leftrightarrow \Pi\rho(Sat(\rho,\ulcorner \forall x_0(\neg Sx_0 \equiv \underline{0}) \urcorner))$
$\Leftrightarrow \Pi\rho\Pi\sigma(\sigma \in Family(\rho/0) \Rightarrow Sat(\sigma,\ulcorner \neg Sx_0 \equiv \underline{0} \urcorner))$
$\Leftrightarrow \Pi\rho\Pi\sigma(\sigma \in Family(\rho/0) \Rightarrow\sim Sat(\sigma,\ulcorner Sx_0 \equiv \underline{0} \urcorner))$
$\Leftrightarrow \Pi\rho\Pi\sigma(\sigma \in Family(\rho/0) \Rightarrow\sim (Den(\sigma,\ulcorner Sx_0 \urcorner) = Den(\sigma,\ulcorner \underline{0} \urcorner)))$
$\Leftrightarrow \Pi\rho\Pi\sigma(\sigma \in Family(\rho/0) \Rightarrow\sim (Den(\sigma, x_0) + 1 = 0)))$

(3) まず、適当な ρ を固定する。次に前提として $\sigma \in Family(\rho/0)$ を仮定すると、$\sigma(0) \in N$ なので、

$$\dfrac{\dfrac{\forall_{d\in N}(\sim (d + 1 = 0))}{\sim (\sigma(0) + 1 = 0)}}{\sim (Den(\sigma, x_0) + 1 = 0)}$$

となる。ここで先ほどの前提を消して $\Rightarrow$ を導入すると、

$$\dfrac{\sigma \in Family(\rho/0) \Rightarrow\sim (Den(\sigma, x_0) + 1 = 0)}{\Pi\rho\Pi\sigma(\sigma \in Family(\rho/0) \Rightarrow\sim (Den(\sigma, x_0) + 1 = 0)))}$$

(2) から $N \models$ 公理 1 が示された。

問題 2

(1) Sat を用いると次のように書き換えられる。ただし、$\sigma \in M, \rho \in M$ とする。
$\Pi_M(\Pi_\sigma(Sat(\sigma, A)) \Rightarrow \Pi_\rho(Sat(\rho, B))) \Rightarrow \Pi_M\Pi_\sigma(Sat(\sigma, A) \Rightarrow Sat(\sigma, B))$

(2) まずは、$Sat(\sigma', A)$ と $\Pi_M(\Pi_\sigma(Sat(\sigma, A)) \Rightarrow \Pi_\rho(Sat(\rho, B)))$ を仮定する。A,B は閉じた式であるから、$FV(A) = 0, FV(B) = 0$ であり、レジュメの [III](1) の補題より、$\Pi_\sigma\Pi_\rho(Sat(\sigma, A) \Rightarrow Sat(\rho, A))$ が成り立つ。よって $Sat(\sigma', A)$ から $\Pi_\sigma(Sat(\sigma, A))$ が導かれる。あとは証明図にそっていくと、

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\Pi_M(\Pi_\sigma(Sat(\sigma, A)) \Rightarrow \Pi_\rho(Sat(\rho, B)))]_2}{\Pi_\sigma(Sat(\sigma, A)) \Rightarrow \Pi_\rho(Sat(\rho, B))} \quad \Pi_\sigma(Sat(\sigma, A))}{\Pi_\rho(Sat(\rho, B))}}{Sat(\sigma', B)}\ {}_1}{Sat(\sigma', A) \Rightarrow Sat(\sigma', B)}}{\Pi_M\Pi_\sigma(Sat(\sigma, A) \Rightarrow Sat(\sigma, B))}\ {}_2}{\Pi_M(\Pi_\sigma(Sat(\sigma, A)) \Rightarrow \Pi_\rho(Sat(\rho, B))) \Rightarrow \Pi_M\Pi_\sigma(Sat(\sigma, A) \Rightarrow Sat(\sigma, B))}$$

$Sat(\sigma', A)$ は $[Sat(\sigma', A)]_1$ として消されているのでこれで証明された。

問題 3

(1) すべて書き切れないのでところどころ文章が入る。(途中の括弧は後にはずされることになるので最初は気にしなくて良い)

$$\dfrac{[\forall x_1 \exists x_0 (Fx_0 \to Gx_1)]_4}{\exists x_0 (Fx_0 \to Gx_i)}$$

ここで x_0 を x_k で例化してサブプルーフに入る。まず、 $Fx_k \to Gx_i$ の前提を導くため、次のように証明を進める。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg Fx_k]_2[Fx_k]_1}{\bot}}{Gx_m\ {}_1}}{Fx_k \to Gx_m}}{\forall x_1(Fx_k \to Gx_1)}}{\exists x_0 \forall x_1 (Fx_0 \to Gx_1)} \qquad [\neg \exists x_0 \forall x_1 (Fx_0 \to Gx_1)]_3$$

$$\dfrac{\dfrac{\bot\ {}_2}{\neg\neg Fx_k}}{Fx_k}$$

これで前提が導けたので

$$\dfrac{Fx_k \quad Fx_k \to Gx_i}{Gx_i}$$

となる。ここでサブプルーフを抜ける。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Gx_i}{Fx_j \to Gx_i}}{\forall x_1(Fx_j \to Gx_1)}}{\exists x_0 \forall x_1 (Fx_0 \to Gx_1)}$$

となり、先ほども用いた過程とあわせて矛盾を導く。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x_0 \forall x_1 (Fx_0 \to Gx_1) \quad [\neg \exists x_0 \forall x_1 (Fx_0 \to Gx_1)]_3}{\bot\ {}_3}}{\neg\neg \exists x_0 \forall x_1 (Fx_0 \to Gx_1)}}{\exists x_0 \forall x_1 (Fx_0 \to Gx_1)\quad {}_4}}{\forall x_1 \exists x_0 (Fx_0 \to Gx_1) \to \exists x_0 \forall x_1 (Fx_0 \to Gx_1)}$$

となり、証明された。

(2) 問題の手順に従って証明する。

(2-1) $M_0, \sigma_0 \mid\!< \exists x_1 \forall x_0 (Fx_0 \to Gx_1)$

$\Leftrightarrow Sat(\sigma_0, \ulcorner \exists x_1 \forall x_0 (Fx_0 \to Gx_1) \urcorner)$

$\Leftrightarrow \Sigma \rho_1 (\rho_1 \in Family(\sigma_0/1) \& Sat(\rho_1, \ulcorner \forall x_0 (Fx_0 \to Gx_1) \urcorner)$

$\Leftrightarrow \Sigma \rho_1 (\rho_1 \in Family(\sigma_0/1) \& \Pi \tau_1 (\tau_1 \in Family(\rho_1/0) \Rightarrow Sat(\tau_1, \ulcorner Fx_0 \to Gx_1 \urcorner)))$

(2-2)

$M_0, \sigma_0 \mid\!< \forall x_0 \exists x_1 (Fx_0 \to Gx_1)$ [1]

$\Leftrightarrow Sat(\sigma_0, \ulcorner \forall x_0 \exists x_1 (Fx_0 \to Gx_1) \urcorner)$

$\Leftrightarrow \Pi \rho_2 (\rho_2 \in Family(\sigma_0/0) \Rightarrow Sat(\rho_2, \ulcorner \exists x_1 (Fx_0 \to Gx_1) \urcorner)$

$\Leftrightarrow \Pi \rho_2 (\rho_2 \in Family(\sigma_0/0) \Rightarrow \Sigma \tau_2 (\tau_2 \in Family(\rho_2/1) \& Sat(\tau_2, \ulcorner Fx_0 \to Gx_1 \urcorner)))$

(2-3)

問題文が理解不能です。が、一応問題文を「$\rho_2(0)$ だけを $\rho_1(0)$ へと取り替えた」の部分を「$\rho_2(1)$ だけを $\rho_1(1)$ へと取り替えた」とすればなんか上手くいきそうなのでそれでやってみます。でも (2-2) の訂正もそうだが、問題文ってそんな間違いがあるものではないとと思うんだけどな...

問題文の ρ_3 は $\rho_3(1) = \rho_1(1)$、$\rho_3(1)$ は任意の値をとり、それ以外は σ_0 と一致する列である。なので、$\rho_3 \in Family(\rho_2, 1)$ は当然のこと、$\rho_3 \in Family(\rho_1/0)$ も成立し、τ_1, τ_2 としての条件を満たす。因みに ρ_3 を考えている時点で前提に $\rho_2 \in Family(\sigma_0/0)$ があることもお忘れなく。

さて、(2-1) を前提としているのでここから証明図を書いていくと、

$$\dfrac{\dfrac{\Pi \tau_1 (\tau_1 \in Family(\rho_1/0) \Rightarrow Sat(\tau_1, \ulcorner Fx_0 \to Gx_1 \urcorner)) \quad}{\rho_3 \in Family(\rho_1/0) \Rightarrow Sat(\rho_3, \ulcorner Fx_0 \to Gx_1 \urcorner)} \quad \rho_3 \in Family(\rho_1/0)}{Sat(\rho_3, \ulcorner Fx_0 \to Gx_1 \urcorner)}$$

ここで $\rho_3 \in Family(\rho_2, 1)$ と合わせ、

$$\dfrac{\dfrac{\rho_3 \in Family(\rho_2, 1) \quad Sat(\rho_3, \ulcorner Fx_0 \to Gx_1 \urcorner)}{\rho_3 \in Family(\rho_2, 1) \& Sat(\rho_3, \ulcorner Fx_0 \to Gx_1 \urcorner)}}{\Sigma \tau_2 (\tau_2 \in Family(\rho_2/1) \& Sat(\tau_2, \ulcorner Fx_0 \to Gx_1 \urcorner))}$$

ここで前提であった $\rho_2 \in Family(\sigma_0/0)$ を⇒の導入則を用いて消すと、

$$\dfrac{\rho_2 \in Family(\sigma_0/0) \Rightarrow \Sigma \tau_2 (\tau_2 \in Family(\rho_2/1) \& Sat(\tau_2, \ulcorner Fx_0 \to Gx_1 \urcorner))}{\Pi \rho_2 (\rho_2 \in Family(\sigma_0/0) \Rightarrow \Sigma \tau_2 (\tau_2 \in Family(\rho_2/1) \& Sat(\tau_2, \ulcorner Fx_0 \to Gx_1 \urcorner)))}$$

これで (2-2) が導けたことになる。

$M_0, \sigma_0 \mid\!< \exists x_1 \forall x_0 (Fx_0 \to Gx_1) \Rightarrow M_0, \sigma_0 \mid\!< \forall x_0 \exists x_1 (Fx_0 \to Gx_1)$

$\Leftrightarrow M_0, \sigma_0 \mid\!< \exists x_1 \forall x_0 (Fx_0 \to Gx_1) \to \forall x_0 \exists x_1 (Fx_0 \to Gx_1)$

σ_0 を全称量化し、

$\Leftrightarrow M_0 \models \exists x_1 \forall x_0 (Fx_0 \to Gx_1) \to \forall x_0 \exists x_1 (Fx_0 \to Gx_1)$

閉じた式であるから

[1] 過去問では x_0 と x_1 が逆になっていたので注意してください。

$\Leftrightarrow M_0 \models \exists x_1 \forall x_0 (Fx_0 \to Gx_1) \Rightarrow M_0 \models \forall x_0 \exists x_1 (Fx_0 \to Gx_1)$
M_0 を全称量化すれば証明すべき式が得られる。

問題 4

(1) $\forall_x (< x, 0, x > \in Add)$ [2]

(2) $\forall_x \forall_y \forall_z (< x, y, z > \in Add \to < x, Sy, Sz > \in Add)$

(3) ′ の有無に気をつけてください。
$\forall_x \forall_y \forall_z (< x, y, z > \in Add \leftrightarrow \forall_W (\forall_{x'} (< x', 0, x' > \in W) \wedge \forall_{x'} \forall_{y'} \forall_{z'} (< x', y', z' > \in W \to < x', Sy', Sz' > \in W) \to < x, y, z > \in W))$

(4) わかりません。これがわからないと意味がないという説もありますが... 。現在、何をすればよいのか調査中です。

[2] 過去問では $\forall_x (x + 0 = 0)$ となっていましたがこれは明らかにおかしいので $\forall_x (x + 0 = x)$ であるとして問題を解きました。